## (2.1) Longitud d'una corba

① Troben la longitud d'una circumferència.

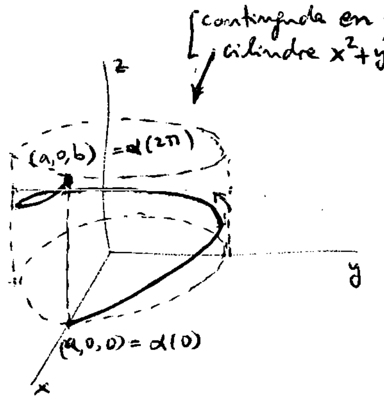
Circumferència de radi $r$ : $x^2+y^2=r^2$

$\rightarrow$ parametrització : $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

$\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$, $\|\alpha'(t)\| = r$.
(velocitat constant)

$$\text{long}(\alpha) = \int_0^{2\pi} r\,dt = \underline{2\pi r}.$$

② [ Troben la longitud d'una espiral de l'hèlice $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $0 \le t \le 2\pi$.

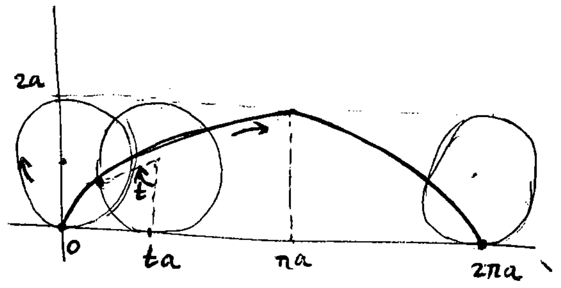



$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}$. (vel. constant)

$$\text{long}(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,dt = \underline{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}.$$

③ Troben la longitud de l'arc de cicloide $\alpha(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t))$, $0 \le t \le 2\pi$.




[corba descrita per un punt d'una circumferència de radi $a$, que roda sobre l'eix $x$.]

$\alpha'(t) = (a(1-\cos t), a\sin t)$

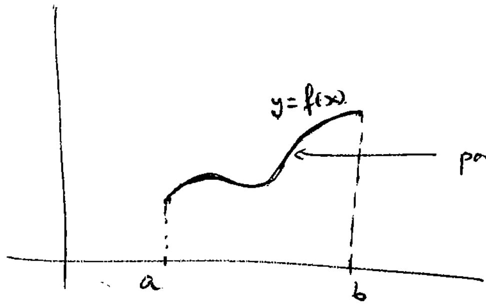
$\|\alpha'(t)\| = a\cdot\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t} = a\cdot\sqrt{2(1-\cos t)} =$

$= 2a\sin\frac{t}{2}$ ($\ge 0$ si $0 \le t \le 2\pi$)

(Observem : la velocitat màxima s'assoleix quan $t=\pi$.

$$\text{long}(\alpha) = \int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{t}{2}\,dt = -4a\cos\tfrac{t}{2}\Big]_0^{2\pi} = \underline{\underline{8a}}.$$

**(4)** Proveu que la longitud de la gràfica d'una funció $y=f(x)$, $a \le x \le b$, ve donada per la integral $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$. Calculeu la longitud de la corba $y=\ln x$, $1 \le x \le 2$.



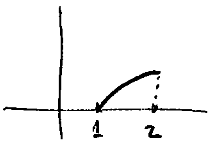

parametrització: $\alpha(x) = (x, f(x))$, $a \le x \le b$.

$\alpha'(x) = (1, f'(x))$

$\|\alpha'(x)\| = \sqrt{1+f'(x)^2}$

$\Rightarrow \ \text{long}(\alpha) = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.

* $y = \ln x$, $1 \le x \le 2$.




$$\text{long} = \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{u^2}{u^2-1}\,du =$$

$u = \sqrt{x^2+1}$
$u\,du = x\,dx$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(1 + \frac{1/2}{u-1} - \frac{1/2}{u+1}\right) du = u + \ln\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}\,\Bigg]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \sqrt{5}-\sqrt{2} + \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2(\sqrt{2}-1)}$$

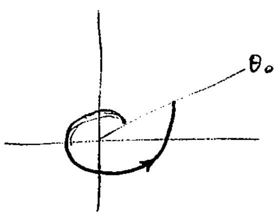
**(5)** Proveu que la longitud de la corba l'expressió de la qual en coordenades polars és $r = f(\theta)$, $a \le \theta \le b$, ve donada per la integral $\int_a^b \sqrt{f^2+(f')^2}\,d\theta$. Com a aplicació troben la longitud d'una espira de l'espiral logarítmica, $r = ae^{b\theta}$.

$r = f(\theta) \rightsquigarrow$ en coord. cartesianes, $\alpha(\theta) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)$, $a \le \theta \le b$
($\theta$: paràmetre)

$$\alpha'(\theta) = (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta,\ f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)$$

$$\|\alpha'(\theta)\| = \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} \rightsquigarrow \text{long}(\alpha) = \int_a^b \sqrt{f'(\theta)^2+f(\theta)^2}\,d\theta.$$

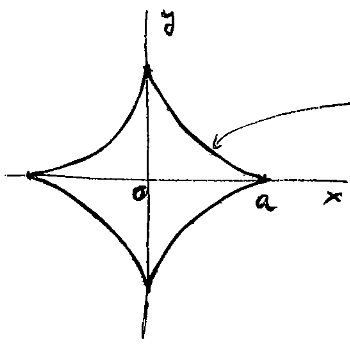
* $r = ae^{b\theta}$, $\theta_0 \le \theta \le \theta_0 + 2\pi$




$$\text{long}(\alpha) = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \sqrt{(ae^{b\theta})^2 + (abe^{b\theta})^2} = a\sqrt{1+b^2}\cdot\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} e^{b\theta}\,d\theta =$$

$$= a\sqrt{1+b^2}\cdot \frac{e^{b\theta}}{b}\Bigg]_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} = \frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}\cdot e^{b\theta_0}\left(e^{2\pi b}-1\right)$$

⑥ Troben la longitud de l'astroide, l'equació de la qual és $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.




És corba "regular a trossos" (un per cada quadrant).

Tros en el $1^{er}$ quadrant:

$$y=f(x)=\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{3/2},\quad 0\le x\le a. \text{ (gràfica)}.$$

Aplicant el probl. 4,

$$long = 4\int_0^a \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 4\int_0^a \sqrt{1+\left(-\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{1/2}\cdot x^{-1/3}\right)^2}\,dx =$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{1+\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)\cdot x^{-2/3}}\,dx = 4\int_0^a a^{1/3}\cdot x^{-1/3}dx = 4a^{1/3}\cdot\left.\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_0^a = \underline{\underline{6a}}.$$

* També podem parametritzar l'astroide per:

$$\alpha(t)=\left(a\cos^3 t,\ a\sin^3 t\right),\quad 0\le t\le 2\pi$$

$$\rightarrow \quad \alpha'(t)=\left(-3a\cos^2 t\sin t,\ 3a\sin^2 t\cdot\cos t\right)$$

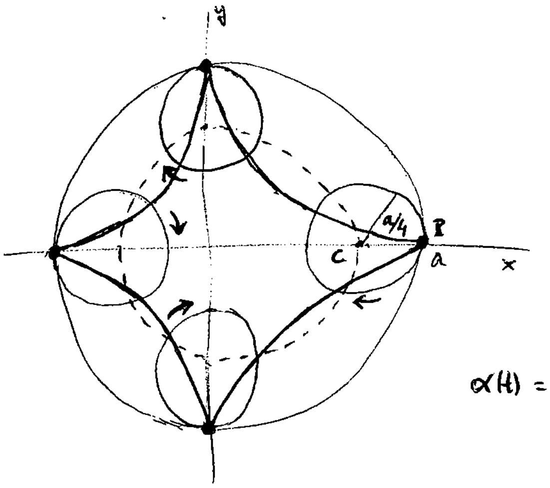
$$\|\alpha'(t)\| = 3a\sqrt{(\cos^2 t\sin t)^2+(\sin^2 t\cdot\cos t)^2} = 3a\,|\cos t\cdot\sin t|$$

Calculant-la a partir del tram $0\le t\le \pi/2$ ($1^{er}$ quadrant),

$$long = 4\int_0^{\pi/2}\|\alpha'(t)\|\,dt = 12a\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\,dt = 12a\cdot\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{6a}}.$$

---

L'astroide és una hipocicloide de 4 puntes: la corba descrita per un punt fixat d'una circumferència de radi $a/4$, que fem rodar per l'interior d'una circumferència de radi $a$.




$$\alpha(t) = \underbrace{\frac{3a}{4}(\cos t,\sin t)}_{\text{recorregut del centre C de la circumferència petita.}} + \underbrace{\frac{a}{4}(\cos 3t,-\sin 3t)}_{\text{recorregut del punt P en relació al centre C}} = a(\cos^3 t,\ \sin^3 t).$$

recorregut del centre C de la circumferència petita.

recorregut del punt P en relació al centre C (per cada angle $\pi/2$ descrit per C, el punt P en descriu $-3\pi/2$).

## (2.2) Integral d'una funció sobre una corba respecte de l'element de longitud.

**9** Determinem la massa M de la primera espira de l'hèlice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht$, si la densitat $f(P)$ en cada punt és proporcional a la longitud del radi vector d'aquest punt.

$$\underbrace{\alpha(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ ht),}_{0 \le t \le 2\pi,} \qquad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2+h^2}$$

Densitat: $f(\alpha(t)) = k\,\|\alpha(t)\| = k\sqrt{a^2+h^2t^2}$

$$M = \int_\alpha f\,dl = \int_0^{2\pi} f(\alpha(t))\cdot\|\alpha'(t)\|\,dt = k\sqrt{a^2+h^2}\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+h^2t^2}\,dt = \frac{k}{h}\sqrt{a^2+h^2}\int_0^{2\pi h}\sqrt{a^2+u^2}\,du =$$

$u = ht$

$u = a\sinh v$
$du = a\cosh v\,dv$

$$= \frac{ka^2}{h}\sqrt{a^2+h^2}\int_0^{\operatorname{argsinh}\frac{2\pi h}{a}}\cosh^2 v\,dv = \frac{ka^2}{2h}\sqrt{a^2+h^2}\left[v + \frac{\sinh 2v}{2}\right]_0^{\operatorname{argsinh}\frac{2\pi h}{a}} =$$

$\cosh^2 v = \dfrac{1+\cosh 2v}{2}$

$\sinh 2v = 2\sinh v\cdot\cosh v$

$$= \frac{ka^2}{2h}\sqrt{a^2+h^2}\cdot\left(\operatorname{argsinh}\frac{2\pi h}{a} + \frac{2\pi h}{a}\sqrt{1+\frac{4\pi^2h^2}{a^2}}\right) = k\sqrt{a^2+h^2}\left(\pi\sqrt{a^2+4\pi^2h^2} + \frac{a^2}{2h}\operatorname{argsinh}\frac{2\pi h}{a}\right).$$

**10** Troben la massa de tota l'astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, si $f(P) = |xy|$.

$\alpha(t) = (a\cos^3 t,\ a\sin^3 t)$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$.

$\|\alpha'(t)\| = 3a\,|\cos t\cdot\sin t|$ (probl. 6)

Densitat: $f(\alpha(t)) = |x(t)\cdot y(t)| = a^2\,|\cos^3 t\cdot\sin^3 t|$

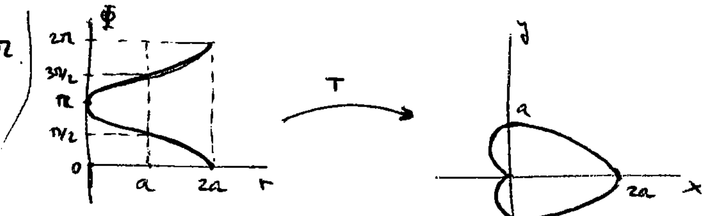
$$M = \int_\alpha f\,dl = 3a^3\int_0^{2\pi}\cos^4 t\cdot\sin^4 t\,dt = 12a^3\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\cdot\sin^4 t\,dt =$$

funció $\frac{\pi}{2}$-periòdica.

$$= 12a^3\cdot\frac{1}{2}B\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}\right) = 6a^3\,\frac{\Gamma(5/2)^2}{\Gamma(5)} = 6a^3\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^2}{4!} = \frac{9\pi a^3}{64}.$$

**(11)** Troben la massa de tota la cardioide $r=a(1+\cos\Phi)$, si $\rho(P)=k\sqrt{r}$.

$r=r(\Phi)=a(1+\cos\Phi)$, $\quad 0\le\Phi\le 2\pi$




Parametrització en les coord. x,y:

$$\alpha(\Phi)=(x(\Phi),y(\Phi))=(r(\Phi)\cos\Phi,\ r(\Phi)\cdot\sin\Phi)$$

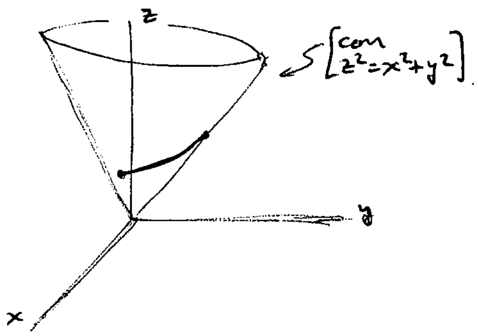
$$\|\alpha'(\Phi)\|=\sqrt{r'(\Phi)^2+r(\Phi)^2}=\sqrt{a^2(-\sin\Phi)^2+a^2(1+\cos\Phi)^2}=a\sqrt{2(1+\cos\Phi)}$$

(calculat al probl. 5)

Densitat: $\rho(\alpha(\Phi))=k\sqrt{r(\Phi)}=k\sqrt{a(1+\cos\Phi)}$

$$\longrightarrow M=\int_\alpha \rho\, dl=\int_0^{2\pi}\rho(\alpha(\Phi))\cdot\|\alpha'(\Phi)\|\,d\Phi=k\,a\sqrt{2a}\int_0^{2\pi}(1+\cos\Phi)\,d\Phi=\underline{k\pi(2a)^{3/2}}.$$

**(12)** Troben la massa de l'arc de l'hèlice cònica $x=ae^t\cos t$, $y=ae^t\sin t$, $z=ae^t$, si la densitat és $\rho=ke^t$, des del punt $O=(a,0,a)$ fins al punt $A=(0,ae^{\pi/2},ae^{\pi/2})$.




$$\alpha(t)=(a\,e^t\cos t,\ a\,e^t\sin t,\ ae^t),\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

$$\alpha'(t)=(a\,e^t(\cos t-\sin t),\ a\,e^t(\sin t+\cos t),\ a\,e^t)$$

$$\|\alpha'(t)\|=a\,e^t\cdot\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2+1^2}=\sqrt{3}\,a\,e^t.$$

$$M=\int_\alpha\rho\,dl=\int_0^{\pi/2}k\,e^t\cdot\sqrt{3}\,a\,e^t\,dt=k\sqrt{3}\,a\cdot\frac{e^{2t}}{2}\Big]_0^{\pi/2}=\underline{k\,a\cdot\frac{\sqrt{3}\,(e^{\pi}-1)}{2}}.$$

**(13)** Troben la massa de la semicircumferència $x^2+y^2=r^2$ situada en el semiplà superior, si la densitat d'aquesta semicircumferència en cada punt és proporcional al cub de l'ordenada en aquest punt (el coeficient de proporcionalitat és $\beta$)

$$\alpha(t)=(r\cos t,\ r\sin t),\quad 0\le t\le\pi;\qquad \|\alpha'(t)\|=r.$$

$$\rho(x,y)=\beta y^3 \rightsquigarrow \rho(\alpha(t))=\beta r^3\sin^3 t$$

$$M=\int_\alpha\rho\,dl=\int_0^{\pi}\beta r^3\sin^3 t\cdot r\,dt=\beta r^4\int_0^{\pi}(1-\cos^2 t)\sin t\,dt=\beta r^4\Big[-\cos t+\frac{\cos^3 t}{3}\Big]_0^{\pi}=\underline{\frac{4}{3}\beta r^4}$$

(14) Troben la temperatura mitjana d'un filferro $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$, si la temperatura és $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

$$v_m(f) = \frac{1}{\text{long}(\alpha)} \int_\alpha f\,dl .$$

$$\text{long}(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\cdot 2\pi .$$

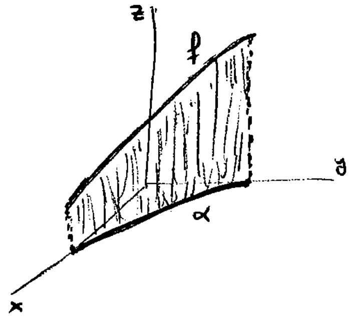
$$\int_\alpha f\,dl = \int_0^{2\pi} f(\alpha(t))\cdot\|\alpha'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} (1+t^2)\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\cdot\left(2\pi + \frac{8\pi^3}{3}\right)$$

$$\Rightarrow v_m(f) = 1 + \frac{4\pi^2}{3} .$$

(15) Troben l'àrea i l'altura mitjana d'una tanca la base de la qual està descrita per la corba parametritzada (hipocicloide) $\alpha(t) = (30\cos^3 t, 30\sin^3 t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, i l'altura de la qual està donada per la funció $f(x,y) = 1 + y/3$.

$\alpha(t) = (30\cos^3 t, 30\sin^3 t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ $\rightsquigarrow$ hipocicloide o astroide (només primer quadrant)

$\|\alpha'(t)\| = 90\cos t\,\sin t$ (probl. 6)




* Àrea $= \int_\alpha f\,dl = \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{30\sin^3 t}{3}\right) \cdot 90\cos t\,\sin t\,dt =$

$$= \int_0^{\pi/2} (90\sin t + 900\sin^4 t)\cos t\,dt =$$

$$= \left[90\,\frac{\sin^2 t}{2} + 900\,\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = \frac{90}{2} + \frac{900}{5} = 225 .$$

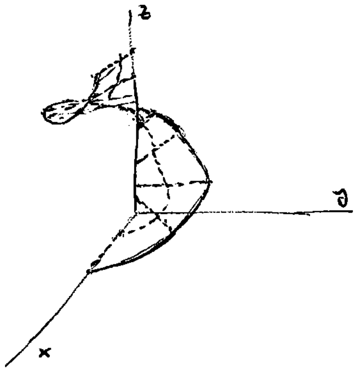
* Altura mitjana:

$$v_m(f) = \frac{1}{\text{long}(\alpha)} \int_\alpha f\,dl = \frac{225}{45} = 5 .$$

$\text{long}(\alpha) = \frac{6\cdot 30}{4} = 45$
(probl. 6)

## (2.3) Àrea d'una superfície

(16) Troben l'àrea de l'helicoide $\Phi(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ av)$, $0 \le u \le L$, $0 \le v \le 2\pi$.




cardes coordenades:

$\underline{v = v_0}$: $u \longmapsto (u\cos v_0, u\sin v_0, a v_0)$, $0 \le u \le L$,
segments amb un extrem a l'eix z.

$\underline{u = u_0}$: $v \longmapsto (u_0\cos v, u_0 \sin v, av)$, $0 \le v \le 2\pi$,
hèlixs.

$S = \Phi(D)$, $\quad D = \{(u,v) : 0 \le u \le L, 0 \le v \le 2\pi\}$.

Calculem: $\Phi_u = (\cos v, \sin v, 0)$

$\Phi_v = (-u\sin v, u\cos v, a)$

$\Phi_u \wedge \Phi_v = (a\sin v, -a\cos v, u) \neq 0$ sobre $\mathring{D}$ $\rightarrow$ superfície regular.

$\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sqrt{a^2+u^2}$.

$$A(S) = \int_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\|\, du\, dv = \int_D \sqrt{a^2+u^2}\, du\, dv = 2\pi \int_0^L \sqrt{a^2+u^2}\, du =$$

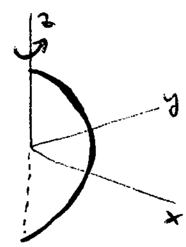
$$= 2\pi \cdot \left( \frac{L}{2}\sqrt{a^2+L^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{argsinh}\frac{L}{a} \right) = \boxed{\pi L \sqrt{a^2+L^2} + \pi a^2 \underbrace{\operatorname{argsinh}\frac{L}{a}}_{= \ln \frac{L+\sqrt{L^2+a^2}}{a}}}$$

(17) Troben l'àrea de la superfície d'una esfera.

$\Phi(\theta,\varphi) = (R\cos\varphi \cdot \cos\theta,\ R\cos\varphi \cdot \sin\theta,\ R\sin\varphi)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

$$A(S) = \int_D \|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\|\, d\theta\, d\varphi = \int_D \underline{\underline{R^2\cos\varphi}}\, d\theta\, d\varphi = R^2 \cdot 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi = \underline{4\pi R^2}.$$

* També podem utilitzar que l'esfera és la superfície de revolució obtinguda en girar la semicircumferència $\alpha(\varphi) = (\underbrace{R\cos\varphi}_{f(\varphi)}, 0, \underbrace{R\sin\varphi}_{g(\varphi)})$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, al voltant de l'eix z:




$$A(S) = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\varphi)\sqrt{f'(\varphi)^2 + g'(\varphi)^2}\, d\varphi = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\cos\varphi \cdot R\, d\varphi = \underline{4\pi R^2}.$$

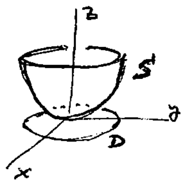
(18) Proveu que l'àrea d'una gràfica $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, ve donada per la integral $\int_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$. Com a aplicació, trobeu l'àrea de la gràfica $z = x^2+y^2$, essent $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

Parametrització de la gràfica: $\Phi(x,y) = (x, y, f(x,y))$, $(x,y) \in D$.

Tenim:
$$\Phi_x = (1, 0, f_x)$$
$$\Phi_y = (0, 1, f_y)$$
$$\Phi_x \wedge \Phi_y = (-f_x, -f_y, 1)$$

Llavors, $A(S) = \int_D \|\Phi_x \wedge \Phi_y\|\,dx\,dy = \int_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$.

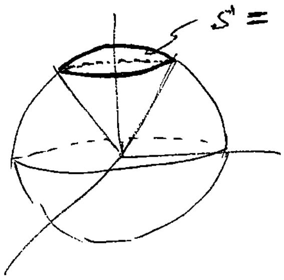
* Aplicació: $z = x^2+y^2$, $D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$.
(paraboloide)




$$A(S) = \int_D \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dx\,dy \underset{\text{canvi a polars}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \frac{(1+4r^2)^{3/2}}{3/2}\Bigg]_0^1 = \frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{6}$$

(20) Trobeu l'àrea de la part de l'esfera unitària determinada pel con $x^2+y^2 = z^2$, $z \geq 0$.



$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$$

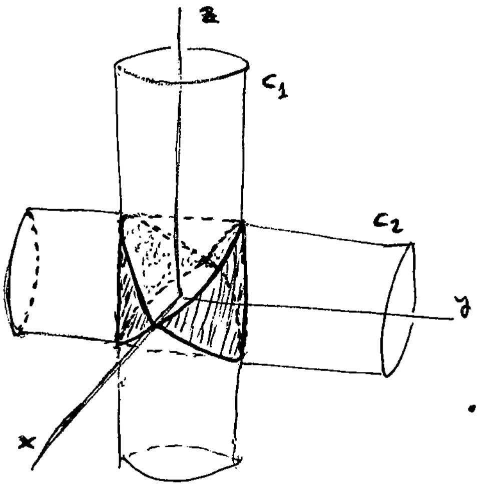
Prenem coordenades esfèriques sobre l'esfera unitària,
$$\Phi(\theta,\varphi) = (\cos\varphi \cdot \cos\theta,\ \cos\varphi \cdot \sin\theta,\ \sin\varphi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Llavors $S$ ve definida per $z \geq \sqrt{x^2+y^2} \rightsquigarrow \sin\varphi \geq \cos\varphi$,
es a dir $\varphi \geq \frac{\pi}{4}$.

Per tant, $S = \Phi(D)$, essent $D = \{(\theta,\varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$.
(un casquet esfèric)

$$A(S) = \int_D \|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\|\,d\theta\,d\varphi = \int_D \cos\varphi\,d\theta\,d\varphi = 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi = 2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

**(21)** Trobeu l'àrea de la superfície d'un cilindre interceptada per una altra superfície cilíndrica igual d'eix perpendicular.




Cilindres: $c_1 = \{x^2+y^2=a^2\}$

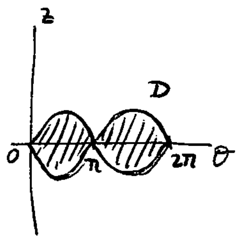
$c_2 = \{x^2+z^2=a^2\}$

• Parametrització del cilindre $c_1$:

$\Phi(\theta,z) = (a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ z)$, $\quad 0\le\theta\le 2\pi,\ z\in\mathbb{R}.$

• La superfície $S$ està formada pels punts del cilindre $c_1$ que es troben dins la regió tancada pel cilindre $c_2$:
$$x^2+z^2\le a^2$$
$$(a\cos\theta)^2+z^2\le a^2$$
$$z^2\le a^2\sin^2\theta$$
$$|z|\le a|\sin\theta|.$$

Així, $S=\Phi(D)$, essent $D=\{(\theta,z):\ 0\le\theta\le 2\pi,\ |z|\le a|\sin\theta|\}$



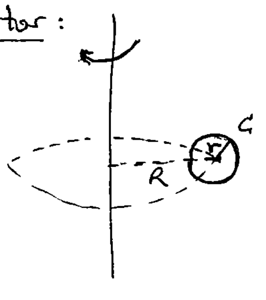

• Àrea:
$$A(S)=\int_D \|\Phi_\theta\wedge\Phi_z\|\,d\theta\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-a|\sin\theta|}^{a|\sin\theta|}a\,dz=$$
$$=2a^2\int_0^{2\pi}|\sin\theta|\,d\theta = 4a^2\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = \underline{\underline{8a^2}}.$$

**(22)** Trobeu l'àrea d'una superfície de revolució i proveu el primer teorema de Pappus-Guldin: l'àrea d'una superfície de revolució és igual a la longitud de la secció per la longitud de l'arc recorregut pel centre de gravetat d'aquesta secció. Apliqueu el resultat per trobar l'àrea de la superfície d'un tor.

* Secció $C$: $\alpha(t)=(f(t),0,g(t))$, $a\le t\le b$, $\rightsquigarrow$ sup. de revolució $S$ (girant $C$ al voltant de l'eix $z$):
(suposem $f(t)>0$) $\qquad \Phi(\theta,t)=(f(t)\cos\theta,\ f(t)\sin\theta,\ g(t))$, $\quad 0\le\theta\le 2\pi,\ a\le t\le b.$

$$A(S)=\int_D\|\Phi_\theta\wedge\Phi_t\|\,d\theta\,dt=\int_D f(t)\,\|\alpha'(t)\|\,d\theta\,dt=2\pi\int_a^b f(t)\|\alpha'(t)\|\,dt=2\pi\int_C x\,dl=\mathrm{long}(C)\cdot\underbrace{2\pi\bar{x}}$$
arc recorregut pel centre de masses de $C$.

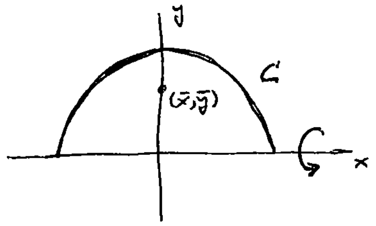
* Àrea d'un tor:




$C$: circumferència de centre $(R,0,0)$ i radi $r$ en el pla $xz$.

Tenim: $\left.\begin{array}{l}\mathrm{long}(C)=2\pi r\\ \bar{x}=R \text{ per simetria.}\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{A(S)=2\pi r\cdot 2\pi R=4\pi^2 rR}$

**24** Fen servir el teorema de Pappus-Guldin per trobar el centre de gravetat d'una semicircumferència.




$C = \{(x,y): x^2+y^2=R^2,\ y\geq 0\}$

$\bar{x}=0$ per simetria.

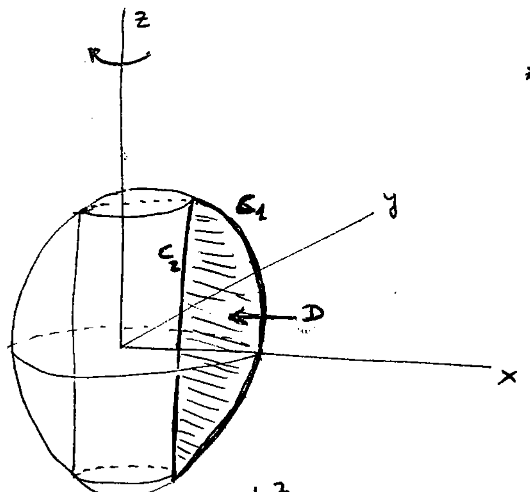
Fent girar $C$ al voltant de l'eix $x$, la superfície generada és una esfera de radi $R$. Tenim:

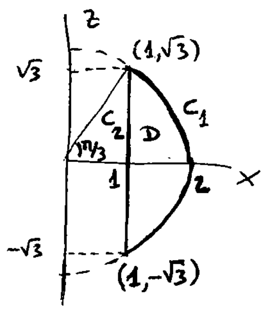
$$A(S) = \text{long}(C)\cdot 2\pi\bar{y}$$

$$4\pi R^2 = \pi R \cdot 2\pi\bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{2R}{\pi}.$$

$$\text{c.d.m.} = \left(0, \frac{2R}{\pi}\right)$$

**26** Es perfora una bola sòlida de radi 2 amb una broca cilíndrica de radi 1 (l'eix de la broca passa pel centre de la bola). Calculeu el volum resultant i l'àrea de la superfície que l'envolta.




* $W = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\leq 4,\ x^2+y^2\geq 1\}$, sòlid de revolució obtingut de la regió

$D = \{(x,0,z): x^2+z^2\leq 4,\ x\geq 1\}$, quan la fem girar al voltant de l'eix $z$.

$$\boxed{\text{vol}(W)} = 2\pi\int_D x\,dx\,dz = 2\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dz\int_1^{\sqrt{4-z^2}} x\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dz\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=\sqrt{4-z^2}} = \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(3-z^2)\,dz = \pi\left[3z-\frac{z^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \boxed{4\sqrt{3}\,\pi}$$

* $S = \partial W = S_1\cup S_2$ (superfície regular a trossos).

$S_1$: sup. de revolució generada per la corba $C_1$, parametritzada per $\alpha(\varphi) = (2\cos\varphi, 0, 2\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{3}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3}$.

$$A(S_1) = 2\pi\int_{C_1} x\,dl = 2\pi\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2\cos\varphi\cdot 2\,d\varphi = 8\pi\left[\sin\varphi\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} = 8\sqrt{3}\,\pi.$$

$dl = \|\alpha'(\varphi)\|\,d\varphi = 2\,d\varphi$

$S_2$ és generada per la recta $C_2$, de centre $(\bar{x}_2,\bar{z}_2)=(1,0)$.

$A(S_2) = \text{long}(C_2)\cdot 2\pi\bar{x}_2 = 2\sqrt{3}\cdot 2\pi = 4\sqrt{3}\,\pi$ (cilindre)

$$\boxed{A(S)} = A(S_1)+A(S_2) = \boxed{12\sqrt{3}\,\pi} \Leftarrow$$

## (2.4) Integral d'una funció sobre una superfície respecte de l'element d'àrea

**(27)** Determineu el moment estàtic respecte al pla $Oxy$ i la posició del centre de masses de la semiesfera homogènia $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z\geq 0)$.

Def. Moment estàtic de la superfície $S$ respecte el pla $\pi$:

$$M=\int_S d(p,\pi)\cdot\rho(p)\,dS\;,$$ essent $d(p,\pi)$ : distància d'un punt $p\in S$ al pla $\pi$.

$\rho(p)$ : densitat en el punt $p$.

Parametritzem: $\Phi(\theta,\varphi)=(R\cos\varphi\cdot\cos\theta,\ R\cos\varphi\cdot\sin\theta,\ R\sin\varphi)$, $\underbrace{0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}}_{D}$.

$\rho\equiv$ const. (esfera homogènia) $\qquad \|\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi\|=R^2\cos\varphi$

• Moment estàtic resp. el pla $Oxy$ $(z=0)$:

$$M=\int_S d\cdot\rho\,dS=\rho\cdot\int_D R\sin\varphi\cdot R^2\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi=\rho R^3\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cdot\cos\varphi\,d\varphi=$$

$d=|z|=R\sin\varphi$ (dist. al pla $z=0$)

$$=\rho\cdot R^3\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2}=\pi\rho R^3.$$

• Centre de masses: $\bar{x}=\bar{y}=0$ (per simetria) $\qquad \bar{z}=\dfrac{1}{A(D)}\cdot\displaystyle\int_S z\,dS$.

$$A(D)=\int_S dS=\int_D R^2\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi=R^2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2}\cos\varphi=2\pi R^2$$

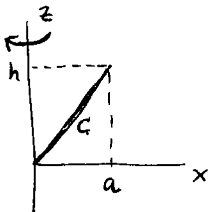
$$\int_S z\,dS=\int_D R\sin\varphi\cdot R^2\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi=\pi R^3 \text{ (calculat abans)}$$

$\longrightarrow \bar{z}=\dfrac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\dfrac{R}{2}$.

c.d.m. $=(0,0,R/2)$.

**(28)** Es considera una distribució de càrregues elèctriques sobre la superfície del con d'altura $h$ i radi $a$ en la base. En cada punt de la superfície la densitat de la càrrega és proporcional a la $z$-coordenada d'aquest punt $(e=kz)$. El vèrtex del con està en l'origen de les coordenades, el seu eix està dirigit segons l'eix $Oz$. Determineu la càrrega total.

Càrrega total: $Q=\displaystyle\int_S e\,dS$, essent $e$ la densitat de càrrega en cada punt (pot ser positiva o negativa).



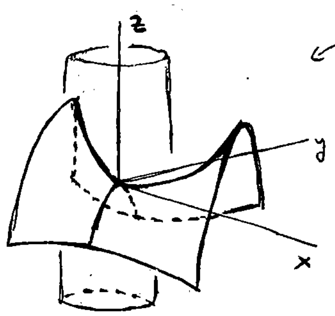

Obtenim el con $S$ en girar, resp. l'eix $z$, la recta $C$ parametritzada per $\alpha(z)=\left(\frac{az}{h},0,z\right)$, $0\leq z\leq h$.

Parametrització de $S$: $\Phi(\theta,z)=\left(\frac{az}{h}\cos\theta,\ \frac{az}{h}\sin\theta,\ z\right)$, $\underbrace{0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq z\leq h}_{D}$.

$$\|\Phi_\theta\wedge\Phi_z\|=f(z)\cdot\|\alpha'(z)\|=\frac{az}{h}\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2+1}=\frac{a\sqrt{a^2+h^2}}{h^2}\,z$$

$$Q=\int_S e\,dS=\int_D kz\cdot\frac{a\sqrt{a^2+h^2}}{h^2}z\,d\theta\,dz=\frac{ka\sqrt{a^2+h^2}}{h^2}\cdot 2\pi\int_0^h z^2dz=\frac{2\pi k a h\sqrt{a^2+h^2}}{3}$$

**(29)** Determineu la massa de la superfície del paraboloide hiperbòlic $2az = x^2 - y^2$, tallada pel cilindre $x^2+y^2=a^2$, si la densitat en cada punt de la superfície és igual a $k|z|$.




$S$ = part del paraboloide hiperbòlic que queda dins del cilindre.

Parametrització: $\Phi(x,y) = (x, y, f(x,y))$, $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{2a}$.

$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le a^2\}$

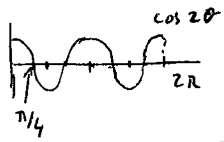
Vector normal: $\|\Phi_x \wedge \Phi_y\| = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{-y}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2+y^2}$

Densitat: $\rho(x,y) = k|z| = k|f(x,y)| = \dfrac{k}{2a}|x^2-y^2|$

Massa: $$m(S) = \int_S \rho \, dS = \int_D \rho(x,y) \cdot \|\Phi_x \wedge \Phi_y\| \, dx\,dy = \frac{k}{2a^2}\int_D |x^2-y^2| \sqrt{a^2+x^2+y^2}\, dx\,dy \underset{\text{polars}}{=}$$

$$= \frac{k}{2a^2}\int_{D^*} |r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta| \sqrt{a^2+r^2} \cdot \underbrace{r}_{\text{jacobià}} \, dr\, d\theta = \frac{k}{2a^2} \cdot \int_0^{2\pi} |\cos^2\theta - \sin^2\theta| \, d\theta \cdot \int_0^a r^3\sqrt{a^2+r^2}\, dr$$

Calculem: $$\int_0^{2\pi} |\cos^2\theta - \sin^2\theta|\, d\theta = \int_0^{2\pi} |\cos 2\theta|\, d\theta = 8\int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta = 4$$




$$\int_0^a r^3 \sqrt{a^2+r^2}\, dr = \int_a^{\sqrt{2}a} (u^2-a^2)u^2\, du = \left.\frac{u^5}{5} - \frac{a^2u^3}{3}\right]_a^{\sqrt{2}a} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{15}a^5 \Longrightarrow \boxed{m(S) = \frac{4(\sqrt{2}+1)}{15}ka^3}$$

canvi $u = \sqrt{a^2+r^2}$
$\rightarrow r = \sqrt{u^2-a^2}$, $\; dr = \dfrac{u}{\sqrt{u^2-a^2}}du$

[també es pot fer el canvi $r = a \sinh v$]

**(30)** Determineu el moment d'inèrcia de la superfície lateral homogènia del con $z = \sqrt{x^2+y^2}$ $(0 \le z \le a)$ respecte de l'eix $Oz$.

Parametrització: $\Phi(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z)$, $\underbrace{0 \le \theta \le 2\pi, \; 0 \le z \le a}_{D}$

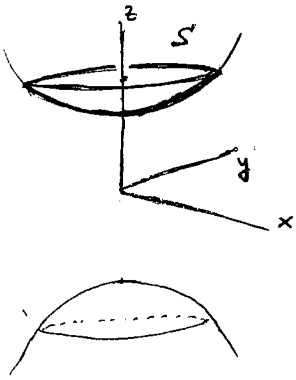
$\|\Phi_\theta \wedge \Phi_z\| = \sqrt{2}\cdot z$

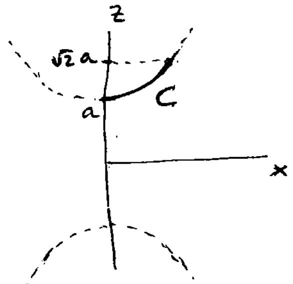
Densitat $\rho \equiv$ const. (homogènia).

Moment d'inèrcia: $$I = \int_S \underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{[quadrat de la dist. a l'eix z]}} \rho \, dS = \rho \int_D z^2 \sqrt{2} z \, d\theta\, dz = \rho \cdot \sqrt{2} \cdot 2\pi \int_0^a z^3\, dz = \underline{\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\rho a^4}.$$

**(31)** Determineu la càrrega elèctrica total distribuïda sobre la superfície de l'hiperboloide de dues fulles $z^2 = x^2+y^2+a^2$, $a \le z \le a\sqrt{2}$, si la densitat de càrrega en cada punt ~~és~~ proporcional a la z-coordenada d'aquest punt $(e = kz)$.

$z^2 = x^2+y^2+a^2 \longrightarrow$ sup. de revolució generada per la hipèrbola $z^2 = x^2+a^2$ $(x \ge 0)$, en girar-la al voltant de l'eix $z$.
(hiperboloide de 2 fulles o no reglat)




Corba generatriu en el pla $xz$ (hipèrbola):

$$C: \quad \alpha(z) = (\underbrace{\sqrt{z^2-a^2}}_{f(z)},\ 0,\ z), \quad a \le z \le \sqrt{2}a$$

$\downarrow$

Superfície de revolució (hiperboloide de 2 fulles):

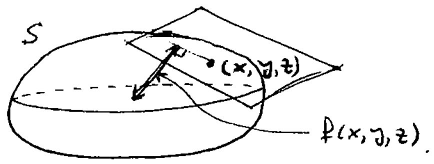
$$S: \quad \Phi(\theta, z) = (\sqrt{z^2-a^2}\cdot\cos\theta, \sqrt{z^2-a^2}\sin\theta, z), \quad \underbrace{0 \le \theta \le 2\pi,\ a \le z \le \sqrt{2}a}_{D}$$

$$\|\Phi_\theta \wedge \Phi_z\| = f(z)\cdot\|\alpha'(z)\| = \sqrt{z^2-a^2}\cdot\sqrt{\frac{z^2}{z^2-a^2}+1} = \sqrt{2z^2-a^2}$$

$$Q = \int_S e\,dS = \int_D kz\sqrt{2z^2-a^2}\,d\theta\,dz = k\cdot 2\pi\cdot\int_a^{\sqrt{2}a} z\sqrt{2z^2-a^2}\,dz = k\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{(2z^2-a^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}\cdot 4}\right]_a^{\sqrt{2}a} =$$

$$= \frac{\pi k}{3}\left((3a^2)^{3/2} - (a^2)^{3/2}\right) = \underline{\underline{\frac{(3\sqrt{3}-1)\pi}{3}\,ka^3}}$$

**(32)** Sigui $S$ l'el·lipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, i $f(x,y,z)$ la funció definida sobre $S$ de la manera següent: donat $(x,y,z) \in S$, $f(x,y,z)$ és la distància des de l'origen al pla tangent a $S$ en el punt $(x,y,z)$. Calculeu la integral de $f$ sobre $S$.




* Donat un pla $\pi$ d'equació $\alpha X+\beta Y+\gamma Z = \delta$ i un punt $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, la distància de $p_0$ a $\pi$ és:

$$d(p_0,\pi) = \frac{|\delta - \alpha x_0 - \beta y_0 - \gamma z_0|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

* Si el pla $\pi$ passa per $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$, és de la forma $\alpha(X-x_1)+\beta(Y-y_1)+\gamma(Z-z_1) = 0$. Llavors $\delta = \alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1$ i tenim $d(p_0,\pi) = \frac{|\alpha(x_1-x_0)+\beta(y_1-y_0)+\gamma(z_1-z_0)|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} = |\langle \vec{N}, \overrightarrow{p_0p_1}\rangle|$ (*)

Parametritzem $S$ amb "coordenades el·lipsoïdals":

$$\Phi(\theta,\varphi) = (\underbrace{a\cos\varphi\cdot\cos\theta}_{x}, \underbrace{b\cos\varphi\cdot\sin\theta}_{y}, \underbrace{c\sin\varphi}_{z}), \quad \underbrace{0 \le \theta \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}}_{D}$$

Calculem: $\Phi_\theta = (-a\cos\varphi\cdot\sin\theta,\ b\cos\varphi\cdot\cos\theta,\ 0)$

$\Phi_\varphi = (-a\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ -b\sin\varphi\cdot\sin\theta,\ c\cos\varphi)$

$\rightarrow$ vector normal: $\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi = (bc\cos^2\varphi\cdot\cos\theta,\ ac\cos^2\varphi\cdot\sin\theta,\ ab\cos\varphi\cdot\sin\varphi) = abc\cos\varphi\cdot\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right)$

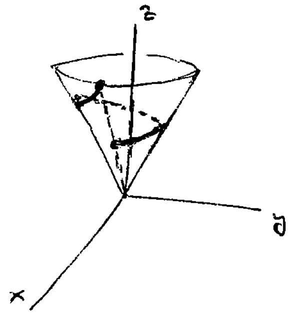
El pla tangent per $\Phi = (x,y,z)$ té com a vector normal unitari $N = \frac{\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi}{\|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\|}$

Llavors, $f(x,y,z) \underset{(*)}{=} |\langle N, \Phi\rangle|$; $f\cdot\|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\| = |\langle \Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi, \Phi\rangle| = abc\cos\varphi\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) = abc\cos\varphi$

$$\boxed{\int_S f\,dS = \int_D f(\Phi(\theta,\varphi))\cdot\|\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi\|\,d\theta\,d\varphi = \int_D abc\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi = abc\cdot 2\pi\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi = 4\pi abc}$$

## (2.5) Circulació d'un camp vectorial a través d'una corba.

(33) Determineu el treball del camp de forces $F=(x,y,z)$, quan el punt material es desplaça a través de la primera espira de l'hèlice cònica $x=ae^t\cos t$, $y=ae^t\sin t$, $z=ae^t$, des del punt $A=(a,0,a)$ fins al punt $B=(ae^{2\pi},0,ae^{2\pi})$.



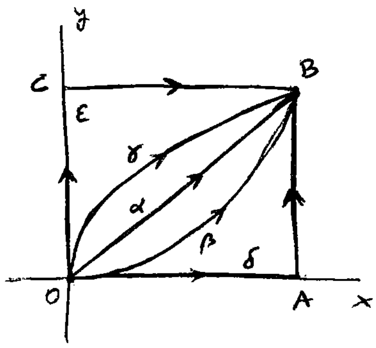

$\alpha(t)=(ae^t\cos t,\ ae^t\sin t,\ ae^t)$, $0\le t\le 2\pi$.

$A=\alpha(0)$, $B=\alpha(2\pi)$ $\longrightarrow$ trajectòria continguda al con $x^2+y^2=z^2$

$F(\alpha(t))=(ae^t\cos t,\ ae^t\sin t,\ ae^t)$.

$$\int_\alpha \langle F, dl\rangle = \int_0^{2\pi}\langle F(\alpha(t)),\alpha'(t)\rangle\,dt = \int_0^{2\pi} 2a^2e^{2t}\,dt = a^2e^{2t}\Big]_0^{2\pi} = \underline{a^2(e^{4\pi}-1)}$$

(35) Calculeu la integral curvilínia $\int_O^B \langle F,T\rangle\,dl$, si $F=(y^2,x^2)$, essent $O=(0,0)$, $B=(1,1)$, respecte a les línies següents:




(a) segment de la recta OB.

$\alpha(t)=(t,t)$, $0\le t\le 1$.

$\alpha'(t)=(1,1)$, $F(\alpha(t))=(t^2,t^2)$

$$\int_\alpha \langle F,T\rangle\,dl = \int_0^1\langle F(\alpha(t)),\alpha'(t)\rangle\,dt = \int_0^1 2t^2\,dt = \underline{\frac{2}{3}}$$

(b) arc de la paràbola $x^2=y$

$\beta(x)=(x,x^2)$, $0\le x\le 1$ $\rightsquigarrow$ $\beta'(x)=(1,2x)$, $F(\beta(x))=(x^4,x^2)$

$$\int_\beta\langle F,T\rangle\,dl = \int_0^1\langle F(\beta(x)),\beta'(x)\rangle\,dx = \int_0^1(x^4+2x^3)\,dx = \underline{\frac{7}{10}}$$

(c) arc de la paràbola $y^2=x$

$\gamma(y)=(y^2,y)$, $0\le y\le 1$ $\rightsquigarrow$ $\gamma'(x)=(2y,1)$, $F(\gamma(y))=(y^2,y^4)$

$$\int_\gamma\langle F,T\rangle\,dl = \int_0^1\langle F(\gamma(y)),\gamma'(y)\rangle\,dy = \int_0^1(2y^3+y^4)\,dy = \underline{\frac{7}{10}}$$

(d) trencada OAB, on $A=(1,0)$.

$$\delta(t)=\begin{cases}(t,0), & 0\le t\le 1\\ (1,t-1), & 1\le t\le 2\end{cases} \longrightarrow \delta'(t)=\begin{cases}(1,0)\\(0,1)\end{cases},\quad F(\delta(t))=\begin{cases}(0,t^2)\\((t-1)^2,1)\end{cases}$$

$$\int_\delta\langle F,T\rangle\,dl = \int_0^1\langle F(\delta(t)),\delta'(t)\rangle\,dt + \int_1^2\langle F(\delta(t)),\delta'(t)\rangle\,dt = \int_0^1 0\,dt + \int_1^2 1\,dt = \underline{1}$$

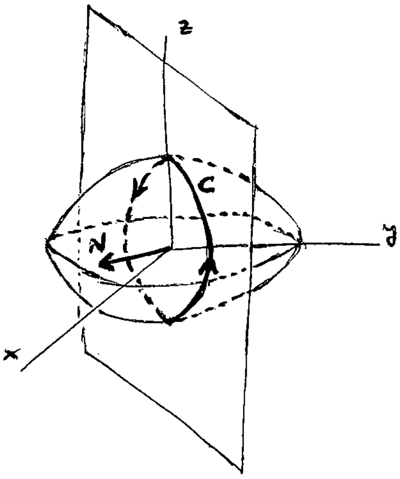
(e) trencada OCB, on $C=(0,1)$.

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}(0,t), & 0\le t\le 1\\ (t-1,1), & 1\le t\le 2\end{cases} \longrightarrow \varepsilon'(t)=\begin{cases}(0,1)\\(1,0)\end{cases},\quad F(\varepsilon(t))=\begin{cases}(t^2,0)\\(1,(t-1)^2)\end{cases}$$

$$\int_\varepsilon\langle F,T\rangle\,dl = \int_0^1\langle F(\varepsilon(t)),\varepsilon'(t)\rangle\,dt + \int_1^2\langle F(\varepsilon(t)),\varepsilon'(t)\rangle\,dt = \int_0^1 0\,dt + \int_1^2 1\,dt = \underline{1}$$

38 Calculeu la circulació del vector $F=(y,-z,x)$ a través de l'el·lipse $\frac{x^2+y^2}{2}+z^2=a^2$, $y=x$ orientada positivament prenent com a vector normal positiu del pla $y=x$ el $(1,-1,0)$.

$$C=\{(x,y,z):\ \underbrace{\frac{x^2+y^2}{2}+z^2=a^2}_{\text{el·lipsoide}},\ \underbrace{y=x}_{\text{pla}}\}\ \text{el·lipse}$$




Sobre $C$, com que $y=x$ tenim $x^2+z^2=a^2$.

Llavors, podem parametritzar $C$ per

$\alpha(t)=(a\cos t,\ a\cos t,\ a\sin t)$, $0\le t\le 2\pi$.

Calculem:

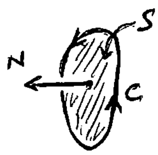
$$\alpha'(t)=(-a\sin t,\ -a\sin t,\ a\cos t)$$

$$F(\alpha(t))=(a\cos t,\ -a\sin t,\ a\cos t).$$

$$\int_\alpha \langle F,dl\rangle=\int_0^{2\pi}\langle F(\alpha(t)),\alpha'(t)\rangle\,dt=\int_0^{2\pi}a^2(1-\sin t\cdot\cos t)\,dt=a^2\left[t-\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{2\pi}=\underline{\underline{2\pi a^2}}.$$

* Hem de comprovar si l'orientació de la parametrització $\alpha$ de $C$ és compatible amb l'orientació del pla $y=x$, donada pel vector $N=(1,-1,0)$.
(Si no ho fos, canviaríem el signe).

Considerem el tros de pla que queda a l'interior de l'el·lipsoide:




$$S=\{y=x,\ \frac{x^2+y^2}{2}+z^2\le a^2\}=\{f(x,y,z)=0,\ g(x,y,z)\le 0\},$$

essent $f(x,y,z)=x-y$, $g(x,y,z)=\frac{x^2+y^2}{2}+z^2-a^2$.

La corba $C$ és la vora de $S$.

Tenim $\left.\begin{array}{l}\nabla f=(1,-1,0)=N.\\ \nabla g=(x,y,2z)\end{array}\right\}\Rightarrow$ l'orientació de $C$ compatible amb $S$ és la que ve donada pel vector

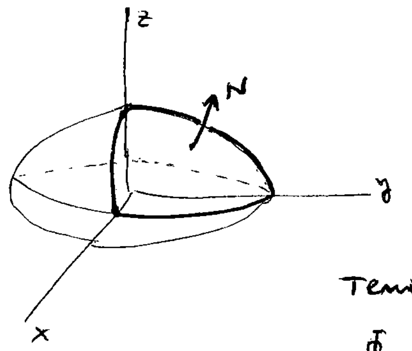
$$\nabla f\wedge\nabla g=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & 0\\ x & y & 2z\end{vmatrix}=(-2z,-2z,y+x),$$

que té la mateixa direcció i sentit que $\alpha'(t)$, en els punts $(x,y,z)=\alpha(t)$.

Per tant, $\displaystyle\int_{C^+}\langle F,dl\rangle=\int_\alpha\langle F,dl\rangle=\underline{\underline{2\pi a^2}}.$

## (2.6) Flux d'un camp vectorial a través d'una superfície

**(41)** Trobeu el flux del vector $F=(x,y,z)$ a través d'una part de la superfície de l'el·lipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ situada en el primer octant, orientada per la normal exterior.




La superfície $S$ ve parametritzada per

$$\Phi(\theta,\varphi)=(a\cos\varphi\cdot\cos\theta,\ b\cos\varphi\cdot\sin\theta,\ c\cdot\sin\varphi),$$

$$(\theta,\varphi)\in D=[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]\quad (1^{er}\text{ octant})$$

Tenim (probl. 32):

$$\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi=(bc\cos^2\varphi\cos\theta,\ ac\cos^2\varphi\cdot\sin\theta,\ ab\cos\varphi\cdot\sin\varphi)=$$

$$=\underbrace{\cos\varphi}_{\geq 0}\cdot\left(\frac{bc}{a}x,\ \frac{ac}{b}y,\ \frac{ab}{c}z\right)$$

$\Rightarrow$ el vector normal unitari $N_\Phi=\dfrac{\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi}{\|\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi\|}$ correspon a la normal exterior (els 3 components $>0$ en el $1^{er}$ octant).

Calculem:

$$\int_S\langle F,dS\rangle=+\int_\Phi\langle F,dS\rangle=\int_D\langle F\circ\Phi,\ \Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi\rangle\,d\theta\,d\varphi=\int_D abc\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=abc\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi=abc\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi abc}{2}$$

$F(\Phi(\theta,\varphi))=\Phi(\theta,\varphi)=(x,y,z)$

$\langle F(\Phi),\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi\rangle=\cos\varphi\cdot\left(\frac{bc}{a}x^2+\frac{ac}{b}y^2+\frac{ab}{c}z^2\right)=$

$=abc\cos\varphi\cdot\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=abc\cos\varphi$

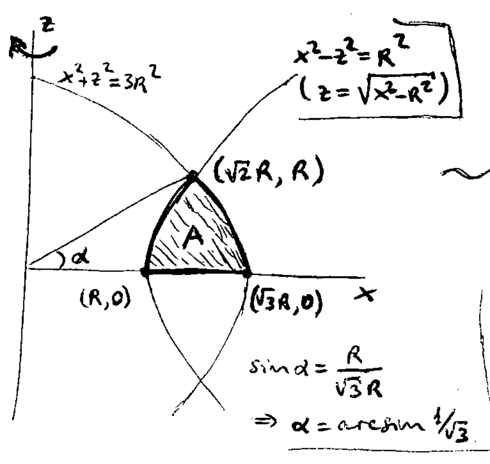
**(42)** Trobeu el flux del vector $F=(x^2,-y^2,z^2)$ a través de **tota la superfície** del cos $x^2+y^2+z^2\leq 3R^2$, $0\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2-R^2}$ orientada per la normal exterior.

Observem: $x^2+y^2+z^2=3R^2$ esfera

$z=\sqrt{x^2+y^2-R^2}\rightsquigarrow x^2+y^2-z^2=R^2$, hiperboloide d'una fulla

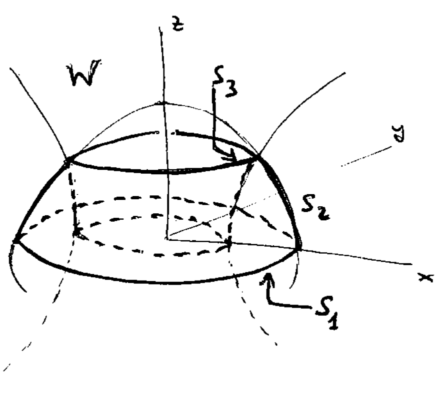
El cos $W=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\leq 3R^2,\ 0\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2-R^2}\}$ és un cos de revolució, obtingut **en girar respecte l'eix z** el conjunt:

$$A=\{(x,z):\ x^2+z^2\leq 3R^2,\ 0\leq z\leq\sqrt{x^2-R^2},\ x\geq 0\}$$




$\sin\alpha=\dfrac{R}{\sqrt{3}R}$

$\Rightarrow\alpha=\arcsin 1/\sqrt{3}$



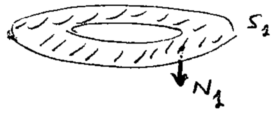
La frontera $S = \partial W$ és una superfície regular a trossos: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Llavors calculem el flux de $\mathbf{F}$ a través de cada tros i sumarem:

$$\int_S \langle F, dS\rangle = \int_{S_1} \langle F, dS\rangle + \int_{S_2} \langle F, dS\rangle + \int_{S_3} \langle F, dS\rangle,$$ amb cada $S_i$ orientat per la normal exterior al cos $W$.

* $S_1 = \{ (x,y,z) : z=0,\ R^2 \le x^2+y^2 \le 3R^2 \}$ (corona circular en el pla $z=0$)

Vector normal: $N_1(x,y) = (0,0,-1)$




Llavors, $$\int_{S_1} \langle F, dS\rangle = \int_{S_1} \langle F, N_1\rangle \, dS = 0$$

$\langle F(x,y,0), N_1\rangle = \langle (x^2,-y^2,0), (0,0,-1)\rangle = 0 \quad \forall (x,y)$

($F$ és tangent a la superfície $S_1$)

* $S_2 = \{ (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 3R^2,\ 0 \le z \le R \} = \Phi(D_2)$ (un tros d'esfera),

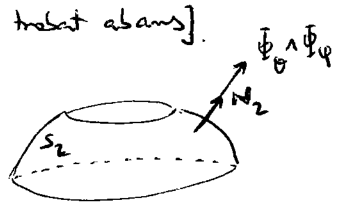
essent $\Phi(\theta,\varphi) = \left(\sqrt{3}R\cos\varphi\cdot\cos\theta,\ \sqrt{3}R\cos\varphi\cdot\sin\theta,\ \sqrt{3}R\sin\varphi\right)$ (coord. esfèriques)

$D_2 = \{ (\theta,\varphi) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \underbrace{\arcsin\tfrac{1}{\sqrt{3}}}_{\text{[l'angle α trobat abans]}} \}$

Notem que el vector normal

$$\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi = 3R^2(\cos^2\varphi\cdot\cos\theta,\ \cos^2\varphi\cdot\sin\theta,\ \cos\varphi\cdot\sin\varphi) = \sqrt{3}R\underbrace{\cos\varphi}_{\geq 0}\cdot(x,y,z)$$

s'orienta cap a l'exterior del cos $W$




Per tant,

$$\int_{S_2} \langle F, dS\rangle = + \int_{D_2} \langle F\circ\Phi, \Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\rangle \, d\theta\, d\varphi = \int_{D_2} 9R^4\left(\cos^4\varphi\,(\cos^3\theta - \sin^3\theta) + \cos\varphi\cdot\sin^3\varphi\right) d\theta\, d\varphi =$$

$F(\Phi(\theta,\varphi)) = 3R^2(\cos^2\varphi\cdot\cos^2\theta, -\cos^2\varphi\cdot\sin^2\theta, \sin^2\varphi)$ i calculem el producte escalar.

$$= 0 + 9R^4\cdot 2\pi\cdot \int_0^{\arcsin 1/\sqrt{3}} \cos\varphi\cdot\sin^3\varphi \, d\varphi = 18\pi R^4 \cdot \left.\frac{\sin^4\varphi}{4}\right]_0^{\arcsin 1/\sqrt{3}} = 18\pi R^4\cdot\frac{(1/\sqrt{3})^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2},$$

on hem usat que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3\theta\, d\theta = 0.$ (*)

* $S_3 = \{ (x,y,z) : x^2+y^2-z^2 = R^2,\ 0 \le z \le R \}$ (un tros d'hiperboloide).

Notem que $S_3$ és la superfície de revolució obtinguda de la corba

$\alpha(z) = (f(z), 0, g(z)) = \left(\sqrt{R^2+z^2}, 0, z\right), \quad 0 \le z \le R$

$\Rightarrow$ podem parametritzar $S_3 = \Psi(D_3)$,

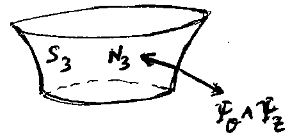
$$\Psi(\theta, z) = (f(z)\cos\theta, f(z)\sin\theta, g(z)) = \left(\sqrt{R^2+z^2}\cdot\cos\theta, \sqrt{R^2+z^2}\cdot\sin\theta, z\right)$$

$D_3 = \{ (\theta, z) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le R \}$

El vector normal $\Psi_\theta \wedge \Psi_z = \left( f(z)\, g'(z) \cos\theta,\ f(z)\, g'(z) \sin\theta, -f(z)\, f'(z) \right) =$

$= \left( \sqrt{R^2+z^2} \cos\theta,\ \sqrt{R^2+z^2} \sin\theta, -z \right),$

el qual s'orienta cap a l'interior del cos $W$
(la part externa de l'hiperboloide)




Per tant,

$$\int_{S_3} \langle F, dS \rangle = -\int_{D_3} \langle F \circ \Psi, \Psi_\theta \wedge \Psi_z \rangle \, d\theta\, dz =$$

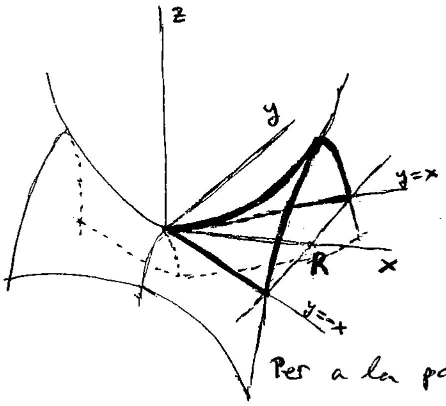
$F(\Psi(\theta,z)) = \left( (R^2+z^2)\cos^2\theta, -(R^2+z^2)\sin^2\theta, z^2 \right)$
i calculem el producte escalar.

$$= -\int_{D_3} \left( (R^2+z^2)^{3/2} (\cos^3\theta - \sin^3\theta) - z^3 \right) d\theta\, dz = 0 + 2\pi \int_0^R z^3\, dz = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2},$$

on hem tornat a usar (✱).

El flux total: $\displaystyle\int_S \langle F, dS \rangle = 0 + \frac{\pi R^4}{2} + \frac{\pi R^4}{2} = \pi R^4.$

(48) Troben el flux del vector $F = (x,y,z)$ a través d'una part de la superfície $z = \frac{H}{R^2}(x^2-y^2)$, tallada pels plans $x = R$, $z = 0$, $x = 0$ i orientada segons la direcció del vector $(0,0,1)$ en el punt $(0,0,0)$.




$z = \frac{H}{R^2}(x^2-y^2)$ paraboloide hiperbòlic.

Notem que $z \geq 0 \iff x^2 \geq y^2 \iff -x \leq y \leq x$ (si $x \geq 0$)

Llavors la superfície $S$ és la gràfica de $f(x,y) = \frac{H}{R^2}(x^2-y^2)$ sobre el domini $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq R,\ -x \leq y \leq x\}$.

Per a la parametrització $\Phi(x,y) = (x, y, f(x,y))$, el vector normal ve donat per

$\Phi_x \wedge \Phi_y = (-f_x, -f_y, 1) = \left( -\frac{2H}{R^2} x,\ \frac{2H}{R^2} y,\ 1 \right)$, que coincideix amb $N = (0,0,1)$ a l'origen.

Llavors,

$$\int_S \langle F, dS \rangle = +\int_D \langle F \circ \Phi, \Phi_x \wedge \Phi_y \rangle \, dx\, dy = \int_D \frac{H}{R^2}(y^2-x^2)\, dx\, dy =$$

$F(\Phi(x,y)) = \Phi(x,y) = (x, y, f(x,y))$

$$= \frac{H}{R^2} \int_0^R dx \int_{-x}^{x} (y^2-x^2)\, dy = \frac{H}{R^2} \int_0^R dx \cdot \left[ \frac{y^3}{3} - x^2 y \right]_{y=-x}^{y=x} = \frac{H}{R^2} \int_0^R \left( -\frac{4}{3} x^3 \right) dx = -\frac{H}{R^2} \cdot \frac{R^4}{3} = -\frac{HR^2}{3}.$$

# (3.1) Camps escalars i vectorials

**1** Sigui $c$ un escalar, $f, g$ camps **escalars** i $F, G$ camps vectorials suficientment diferenciables. Proveu que

(a) i) $\operatorname{grad}(cf+g) = c \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$.

ii) $\operatorname{rot}(cF+G) = c \operatorname{rot} F + \operatorname{rot} G$

iii) $\operatorname{div}(cF+G) = c \operatorname{div} F + \operatorname{div} G$

(b) i) $\operatorname{grad}(f \cdot g) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$

ii) $\operatorname{rot}(f F) = (\operatorname{grad} f) \times F + f \cdot \operatorname{rot} F$

iii) $\operatorname{div}(f F) = \langle \operatorname{grad} f, F \rangle + f \cdot \operatorname{div} F$

iv) $\operatorname{div}(F \times G) = \langle \operatorname{rot} F, G \rangle - \langle F, \operatorname{rot} G \rangle$

(c) i) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$

ii) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$

(a) i) Usem la linealitat de les derivades parcials: $(cf+g)_x = c f_x + g_x$, etc.

ii) iii) } ídem.

(b) i) $\operatorname{grad}(f \cdot g) = \big((f \cdot g)_x, (f \cdot g)_y, (f \cdot g)_z\big) = (f_x \cdot g + f \cdot g_x,\ f_y \cdot g + f \cdot g_y,\ f_z \cdot g + f \cdot g_z) =$

$= g \cdot (f_x, f_y, f_z) + f \cdot (g_x, g_y, g_z) = g \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{grad} g.$

ii) $F = (P, Q, R)$

$\operatorname{rot}(f \cdot F) = \big((f R)_y - (f \cdot Q)_z,\ (f \cdot P)_z - (f \cdot R)_x,\ (f \cdot Q)_x - (f \cdot P)_y\big) =$

$= (f_y \cdot R - f_z \cdot Q,\ f_z \cdot P - f_x \cdot R,\ f_x \cdot Q - f_y \cdot P) + f \cdot (R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y) =$

$= (\operatorname{grad} f) \times F + f \cdot \operatorname{rot} F.$

iii) $\operatorname{div}(f \cdot F) = (f \cdot P)_x + (f \cdot Q)_y + (f \cdot R)_z = f_x \cdot P + f_y \cdot Q + f_z \cdot R + f \cdot (P_x + Q_y + R_z) =$

$= \langle \operatorname{grad} f, F \rangle + f \cdot \operatorname{div} F.$

iv) $F = (P, Q, R)$, $G = (S, T, U)$

$\operatorname{div}(F \times G) = (Q \cdot U - R \cdot T)_x + (R \cdot S - P \cdot U)_y + (P \cdot T - Q \cdot S)_z =$

$= Q_x \cdot U - R_x \cdot T + R_y \cdot S - P_y \cdot U + P_z \cdot T - Q_z \cdot S + Q \cdot U_x - R \cdot T_x + R \cdot S_y - P \cdot U_y + P \cdot T_z - Q \cdot S_z =$

$= (R_y - Q_z) \cdot S + (P_z - R_x) \cdot T + (Q_x - P_y) \cdot U + P (T_z - U_y) + Q \cdot (U_x - S_z) + R \cdot (S_y - T_x) =$

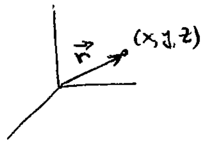
$= \langle \operatorname{rot} F, G \rangle - \langle F, \operatorname{rot} G \rangle.$

(c) i) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = (f_{zy} - f_{yz},\ f_{xz} - f_{zx},\ f_{yx} - f_{xy}) = (0, 0, 0)$, si $f$ és $C^2$.

ii) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = (R_y - Q_z)_x + (P_z - R_x)_y + (Q_x - P_y)_z = 0$, si $F$ és $C^2$.

## 2 Troben

(a) $\operatorname{grad}\left(3r^2-4\sqrt{r}+\frac{6}{\sqrt[3]{r}}\right)$.




Notació: $\vec r=(x,y,z)$, $r=\|\vec r\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Tenim $r^\alpha=(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}$

$\longrightarrow$ derivem: $(r^\alpha)_x=\frac{\alpha}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\cdot 2x=\alpha r^{\alpha-2}x$,

i també $(r^\alpha)_y=\alpha r^{\alpha-2}y$, $(r^\alpha)_z=\alpha r^{\alpha-2}z$. $\Rightarrow \boxed{\operatorname{grad}(r^\alpha)=\alpha r^{\alpha-2}\vec r}$

Llavors,
$$\operatorname{grad}\left(3r^2-4\sqrt{r}+\frac{6}{\sqrt[3]{r}}\right)=\operatorname{grad}\left(3r^2-4r^{1/2}+6r^{-1/3}\right)=\left(6-2r^{-3/2}-2r^{-4/3}\right)\vec r.$$

(b)
$$\operatorname{grad}(r^2e^{-r})=e^{-r}\operatorname{grad}(r^2)+r^2\operatorname{grad}(e^{-r})=e^{-r}2\vec r-r^2\frac{e^{-r}}{r}\vec r=(2-r)e^{-r}\vec r.$$

Calculem: $(e^{-r})_x=-e^{-r}r_x=-e^{-r}r^{-1}x$, $(e^{-r})_y$, $(e^{-r})_z$ semblants $\Rightarrow \operatorname{grad}(e^{-r})=-\frac{e^{-r}}{r}\vec r$

## 3 Calculem

(a) $\operatorname{div} r^3(x,y,z)=\operatorname{div}(r^3\vec r)$

En general, $\boxed{\operatorname{div}(r^\alpha\vec r)=\langle\operatorname{grad}(r^\alpha),\vec r\rangle+r^\alpha\operatorname{div}\vec r\underset{\text{probl. 2}}{=}\langle\alpha r^{\alpha-2}\vec r,\vec r\rangle+r^\alpha\, 3=(\alpha+3)r^\alpha}$

Per tant, $\operatorname{div}(r^3\vec r)=6r^3$

(Obs. $\operatorname{div}\vec r=3$ a $\mathbb{R}^3$, però $\operatorname{div}\vec r=2$ a $\mathbb{R}^2$)

(b) $\operatorname{div}\left(r\underbrace{\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right)}_{=-3r^{-5}\vec r}\right)=-3\operatorname{div}(r^{-4}\vec r)=3r^{-4}$

## 4

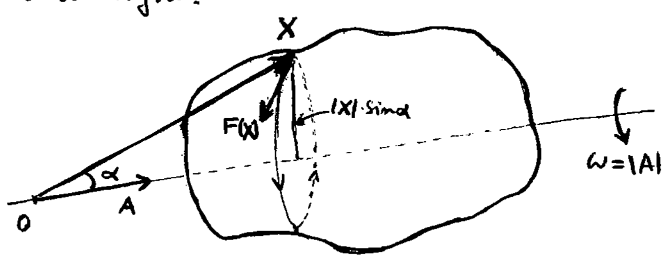
Proveu que si $A$ és un camp vectorial constant, llavors $\operatorname{rot}(A\times X)=2A$, $\operatorname{div}(A\times X)=0$ on $X=(x,y,z)$. En el moviment de rotació d'un sòlid rígid, al voltant d'un eix paral·lel a $A$ que passi per l'origen de coordenades, amb velocitat angular $\omega=|A|$ s'obté que $A\times X$ és el vector velocitat.

Escrivint $A=(a,b,c)$, $X=(x,y,z)$ $\rightsquigarrow$ $A\times X=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a & b & c\\ x & y & z\end{vmatrix}=(bz-cy,\ cx-az,\ ay-bx)$

Calculem:
$$\operatorname{rot}(A\times X)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ bz-cy & cx-az & ay-bx\end{vmatrix}=(2a,2b,2c)=2A$$

$$\operatorname{div}(A\times X)=0+0+0=0.$$

Sòlid rígid:




En un punt donat $X$ del sòlid rígid, el vector velocitat $F(X)$ ha de complir:

- és ortogonal a $A$ i a $X$
- té norma $\omega|X|\sin\alpha=|A\times X|$

$\Rightarrow F(X)=\pm A\times X$ (no es determina el sentit de gir)

**5** Proven que els camps vectorials següents no deriven de potencial:

(a) $F = (\underbrace{y\cos x}_{P}, \underbrace{x\sin y}_{Q})$ , $\underbrace{P_y = \cos x}\ \neq\ \underbrace{Q_x = \sin y} \longrightarrow$ no deriva de potencial.

(b) $F = (x^2+y^2, -2xy, z)$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2+y^2 & -2xy & z \end{vmatrix} = (0,0,-4y) \neq (0,0,0) \longrightarrow \text{no deriva de potencial.}$$

**6** Troben les constants $a,b,c$ de forma que $F=(x+2y+az,\ bx-3y-z,\ 4x+cy+2z)$ sigui irrotacional, i troben en aquest cas una funció potencial de $F$.

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z \end{vmatrix} = (c+1, a-4, b-2) = (0,0,0)$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{a=4,\ b=2,\ c=-1}}$

Amb aquestes constants, $F = (\underbrace{x+2y+4z}_{P}, \underbrace{2x-3y-z}_{Q}, \underbrace{4x-y+2z}_{R})$.

Per trobar una funció potencial, fem:

$$f(x,y,z) = \int_0^x P(t,0,0)\,dt + \int_0^y Q(x,t,0)\,dt + \int_0^z R(x,y,t)\,dt = \int_0^x t\,dt + \int_0^y (2x-3t)\,dt + \int_0^z (4x-y+2t)\,dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=x} + \left[2xt - \frac{3t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=y} + \left[4xt - yt + t^2\right]_{t=0}^{t=z} = \underline{\underline{\frac{x^2}{2} + 2xy - \frac{3y^2}{2} + 4xz - yz + z^2}},$$

i es comprova que $\underline{\nabla f = F}$.

* Una altra possibilitat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \longrightarrow f(x,y,z) = \int P(x,y,z)\,dx = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz + \varphi(y,z).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \longrightarrow \varphi(y,z) = \int (-3y-z)\,dy = -\frac{3y^2}{2} - yz + \psi(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4x + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 4x - y + \psi'(z) = R \longrightarrow \psi(z) = \int 2z\,dz = z^2 + C$$

$\Rightarrow f(x,y,z) = \cdots$ (com abans, + const.)

[**Obs**: $F = A\vec{r}$, amb $A$ matriu simètrica, i hem obtingut $f = \frac{1}{2}\langle A\vec{r}, \vec{r}\rangle$

**7** Proven que els camps vectorials

(a) $F = (2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$

(b) $F = (y^2 - 2xyz^3, 3 + 2xy - x^2z^3, 6z^3 - 3x^2yz^2)$

són irrotacionals i troben una funció potencial $U$ de $F$ tal que $U(1,-2,2) = 4$.

(a)
$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xyz^3 & x^2z^3 & 3x^2yz^2 \end{vmatrix} = (0,0,0).$$

Un potencial: $f(x,y,z) = \int_0^x 0\,dt + \int_0^y 0\,dt + \int_0^z 3x^2yt^2\,dt = x^2yz^3$, $\nabla f = F$

Com que $f(1,-2,2) = -16$, prenem $U(x,y,z) = f(x,y,z) + 20 = \underline{\underline{x^2yz^3 + 20}}$

(b) $\text{rot } F = \cdots = (0,0,0)$.

$$f(x,y,z) = \int_0^x 0\,dt + \int_0^y (3 + 2xt)\,dt + \int_0^z (6t^3 - 3x^2yt^2)\,dt = 3y + xy^2 + \frac{3z^4}{2} - x^2yz^3, \quad \nabla f = F.$$

$f(1,-2,2) = 38 \rightsquigarrow U(x,y,z) = f(x,y,z) - 34 = \cdots$

# (3.2) Teoremes integrals.

(8) Troben la circulació de $(2xy+z^3, x^2, 3xz^2)$ a través de la corba $\alpha(t) = (\cos t^2, \sin t^2, t^2)$, $0 \le t \le \sqrt{\pi}$.

Comprovem si $F = (2xy+z^3, x^2, 3xz^2)$ és conservatiu (és a dir, deriva de potencial):

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy+z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = (0,0,0),$$

trobem un potencial, $f(x,y,z) = \int_0^x 0\,dt + \int_0^y x^2\,dt + \int_0^z 3xt^2\,dt = x^2y + xz^3$,

que compleix $\nabla f = F$.

Com que $F$ deriva del potencial $f$,

$$\int_\alpha \langle F, dl \rangle = f(\alpha(\sqrt{\pi})) - f(\alpha(0)) = f(-1, 0, \pi) - f(1,0,0) = -\pi^3.$$

(9) Troben $\int_C (10x^4 - 2xy^3)\,dx - 3x^2y^2\,dy$, essent $C$ la corba de $(0,0)$ a $(2,1)$ satisfent l'equació $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$.

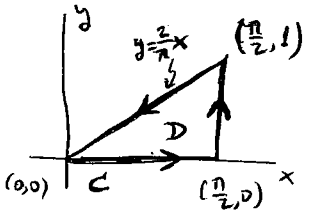
$F = (P,Q) = (10x^4 - 2xy^3, -3x^2y^2)$, compleix $P_y = Q_x = -6xy^2$.

Trobem un potencial,
$$f(x,y) = \int_0^x P(t,0)\,dt + \int_0^y Q(x,t)\,dt = \int_0^x 10t^4\,dt + \int_0^y (-3x^2t^2)\,dt = 2x^5 - x^2y^3, \quad \nabla f = F.$$

Llavors,

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = f(2,1) - f(0,0) = 60.$$

(10) Troben $\int_C (y - \sin x)\,dx + \cos x\,dy$, essent $C$ el triangle de vèrtexs $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$ recorregut en el sentit positiu.




Podem aplicar el teo. de Green:

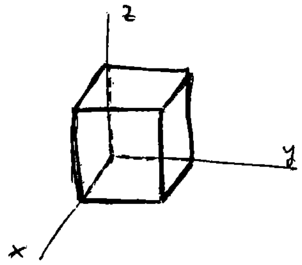
$$\int_{C^+} \underbrace{(y-\sin x)}_{P}\,dx + \underbrace{\cos x}_{Q}\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = -\int_D (\sin x + 1)\,dx\,dy =$$

$$= -\int_0^{\pi/2} (\sin x + 1)\,dx \int_0^{\frac{2}{\pi}x} dy = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (x\sin x + x)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[-x\cos x + \sin x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{\pi^2}{8}\right) = -\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}.$$

[Nota: sense aplicar el teo. de Green, caldria calcular la integral de línia al llarg dels 3 segments.]

**(11)** Troben el flux de $(4xz, -y^2, yz)$ a través del cub unitat.




$W = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

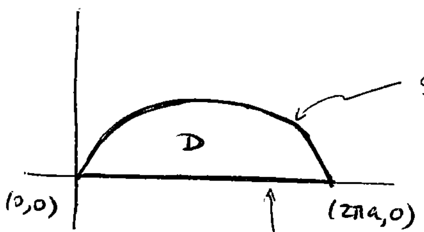
$S = \partial W$ superfície regular a trossos (amb 6 trossos).

Apliquem el teo. de la divergència. Per al camp $F = (4xz, -y^2, yz)$, el flux sortint del cub és:

$$\int_{S^+} \langle F, dS \rangle = \int_W \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \int_W (4z - y)\, dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (4z - y)\, dz =$$

$$= \int_0^1 4z\, dz - \int_0^1 y\, dy = \underline{3/2}.$$

**(14)** Troben l'àrea limitada per un arc de la cicloide i l'eix $x$, fent servir la fórmula de Green-Riemann.




cicloide: $\alpha(t) = \big(a(t - \sin t), a(1 - \cos t)\big)$, $0 \le t \le 2\pi$.

segment: $\beta(t) = (t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi a$.

La frontera $\partial D$, recorreguda en sentit positiu (antihorari), està formada per la cicloide $\alpha(t)$ recorreguda en sentit invers, i pel segment $\beta(t)$.

Llavors,

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D^+} (-y)\, dx + x\, dy = -\frac{1}{2} \int_\alpha + \frac{1}{2} \int_\beta .$$

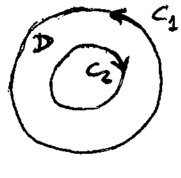
$$\int_\alpha (-y)dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} \big(-y(t)\,x'(t) + x(t)\,y'(t)\big)\, dt = \int_0^{2\pi} \big(-a^2(1-\cos t)^2 + a^2(t - \sin t)\sin t\big)\, dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (t \sin t + 2\cos t - 2)\, dt = -6\pi a^2$$

$\int_\beta (-y)dx + x\,dy = 0$, ja que $(-y, x) \perp (1,0)$ per a $y = 0$.

Per tant, $A(D) = -\frac{1}{2}(-6\pi a^2) + 0 = \underline{\underline{3\pi a^2}}$.

(15) Verifiquen el teorema de Green-Riemann integrant $(2x^3-y^3)dx+(x^3+y^3)dy$, al llarg de la vora de la regió del pla determinada per $a^2 \le x^2+y^2 \le b^2$.




$D = \{ a^2 \le x^2+y^2 \le b^2 \}$

$\partial D = C_1 \cup C_2$

Per tenir $\partial D$ orientada positivament $(\partial D^+)$, considerem les parametritzacions

$$\begin{cases} C_1: & \alpha(t) = (b\cos t,\ b\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ C_2: & \beta(t) = (a\cos t,\ -a\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

$F = (P,Q) = (2x^3-y^3,\ x^3+y^3)$, hem de comprovar: $\underbrace{\int_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy}_{= \int_{C_1} + \int_{C_2}} = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$

Calculem:

$$\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \int_0^{2\pi}\Big[\big(2(b\cos t)^3-(b\sin t)^3\big)\cdot(-b\sin t) + \big((b\cos t)^3+(b\sin t)^3\big)b\cos t\Big]\,dt =$$

$$= b^4\int_0^{2\pi}\left(-2\cos^3 t\sin t + \sin^4 t + \cos^4 t + \sin^3 t\cdot\cos t\right)dt = b^4\cdot\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{3\pi b^4}{2}}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^3 t\sin t = -\frac{\cos^4 t}{4}\Big]_0^{2\pi} = 0, \quad \int_0^{2\pi}\sin^3 t\cdot\cos t = \frac{\sin^4 t}{4}\Big]_0^{2\pi} = 0.$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^4 t\,dt = 4\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\,dt = 2B\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}\right) = 2\frac{\Gamma(5/2)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)} = \frac{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}}{2!} = \frac{3\pi}{4}.$$

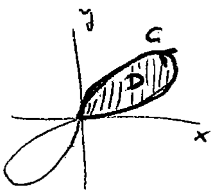
$$\int_0^{2\pi}\cos^4 t\,dt = 4\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,dt = 4\int_0^{\pi/2}\sin^4 dt$$

$$\int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \int_0^{2\pi}\Big[\big(2(a\cos t)^3-(-a\sin t)^3\big)(-a\sin t) + \big((a\cos t)^3+(-a\sin t)^3\big)\cdot(-a\cos t)\Big]\,dt =$$

$$= a^4\int_0^{2\pi}\left(-2\cos^3 t\sin t - \sin^4 t - \cos^4 t + \sin^3 t\cos t\right)dt = -\frac{3\pi a^4}{2}$$

$$\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_D (3x^2+3y^2)\,dx\,dy \underset{\text{(polars)}}{=} 2\pi\int_a^b 3r^2\cdot r\,dr = 6\pi\,\frac{r^4}{4}\Big]_a^b = \frac{3\pi}{2}(b^4-a^4).$$

(17) Calculen l'àrea d'un pètal de rosa $r = 3\sin 2\theta$, usant el teorema de Green-Riemann.




$C: \quad r = 3\sin 2\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi/2.$

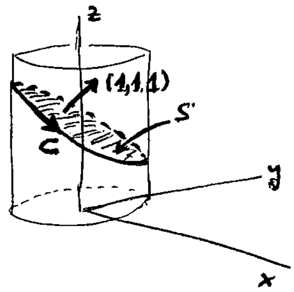
$\rightarrow$ ve parametritzada per $\alpha(\theta) = (r(\theta)\cdot\cos\theta,\ r(\theta)\cdot\sin\theta) = (\overbrace{3\sin 2\theta\cdot\cos\theta}^{x(\theta)},\ \overbrace{3\sin 2\theta\cdot\sin\theta}^{y(\theta)})$, $0 \le \theta \le \pi/2$.

(orientació positiva)

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_C (-y)\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\Big[-3\sin 2\theta\cdot\sin\theta\cdot(\cancel{6\cos 2\theta\cdot\cos\theta} - 3\sin 2\theta\cdot\sin\theta) + 3\sin 2\theta\cdot\cos\theta(\cancel{6\cos 2\theta\cdot\sin\theta} + 3\sin 2\theta\cdot\cos\theta)\Big]\,d\theta =$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\cdot(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,d\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta = \frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{8}$$

**(19)** Fen servir el teorema de Stokes per calcular la integral de $-y^3dx + x^3dy - z^3dz$ a través de la intersecció del cilindre $x^2+y^2=1$ i el pla $x+y+z=1$, orientada amb el vector normal $(1,1,1)$.




$C = \{x^2+y^2=1,\ x+y+z=1\}$

$S = \{x^2+y^2 \leq 1,\ x+y+z=1\}$, amb l'orientació donada per $N = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$; la vora de $S$ és $C$.

L'orientació de $C$ és la compatible amb $N$.

$\mathbf{F} = (-y^3, x^3, -z^3)$

$$\int_C \langle F, dl\rangle = \int_S \langle \text{rot } F, dS\rangle = \int_S \langle \text{rot } F, N\rangle dS = \sqrt{3}\int_S (x^2+y^2)\,dS = \sqrt{3}\int_D (x^2+y^2)\sqrt{3}\,dx\,dy =$$

$\text{rot } F = (0, 0, 3x^2+3y^2)$
$N = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

$S$ ve parametritzada per $\Phi(x,y) = (x,y,1-x-y)$, $(x,y) \in D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

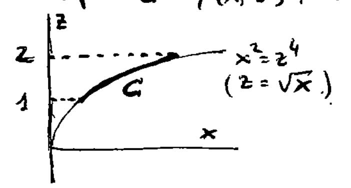
$\|\Phi_x \wedge \Phi_y\| = \sqrt{3}$

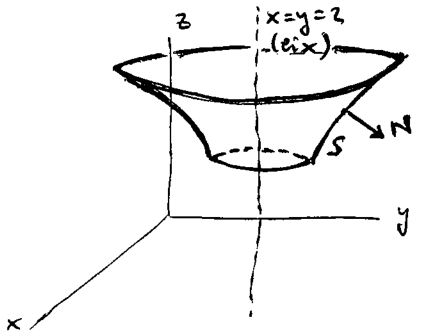
$$= 3\cdot 2\pi \int_0^1 r^2 \cdot r\,dr = \frac{3\pi}{2}$$

polars

**(20)** Calculeu el flux de $\mathbf{F} = (ze^{-x}y,\ y^2e^{-x},\ 1)$ a través de $S = \{(x-2)^2+(y-2)^2 = z^4,\ 1 \leq z \leq 2\}$, orientada pel camp de vectors normals $N = (x-2, y-2, -2z^3)$

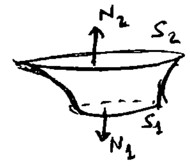
Obs. La superfície $S$ s'obté com a translació de $\tilde{S} = \{x^2+y^2=z^4,\ 1\leq z\leq 2\}$, la qual és la superfície de revolució generada per $C = \{(x,z) :\ x^2=z^4,\ 1\leq z\leq 2,\ x\geq 0\}$ quan gira al voltant de l'eix z.




$N = (x-2, y-2, -2z^3)$ és un vector normal a $S$ (no unitari), orientat cap a l'exterior.

Com veiem, la superfície $S$ no és sup. tancada, però podem afegir-li unes "tapes" $S_1$ i $S_2$ per a completar una sup. tancada:




$S_1 = \{(x-2)^2+(y-2)^2 \leq 1,\ z=1\}$, amb vector normal exterior $N_1 = (0,0,-1)$

$S_2 = \{(x-2)^2+(y-2)^2 \leq 16,\ z=2\}$, " " " $N_2 = (0,0,1)$.

Llavors, $S \cup S_1 \cup S_2 = \partial W$, amb $W = \{(x-2)^2+(y-2)^2 \leq z^4,\ 1\leq z\leq 2\}$.

Pel teo. de la divergència, $\int_W \text{div } F = \int_{\partial W^+} \langle F, dS\rangle = \int_S \langle F,dS\rangle + \int_{S_1}\langle F,dS\rangle + \int_{S_2}\langle F,dS\rangle$.

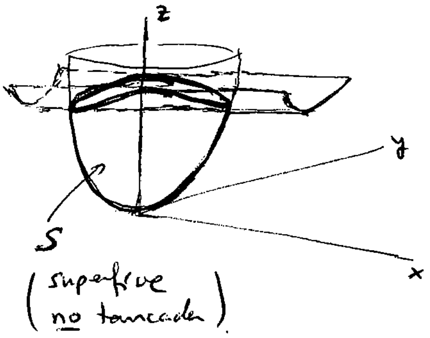
Tenim: $\text{div } F = -ze^{-x}y + 2ye^{-x} + 0 = 0 \Rightarrow \int_W \text{div } F = 0$.

$\int_{S_1}\langle F,dS\rangle = \int_{S_1}\langle F,N_1\rangle dS = \int_{S_1}(-1)\,dS = -A(S_1) = -\pi$

$\int_{S_2}\langle F,dS\rangle = \int_{S_2}\langle F,N_2\rangle dS = \int_{S_2} 1\cdot dS = A(S_2) = 16\pi$

$\Rightarrow \int_S \langle F,dS\rangle = 0 - (-\pi) - 16\pi = -15\pi$

**(21)** Es considera la superfície $S$ definida per $z = x^2+4y^2$, $z \leq 3y^2+1$, orientada pel camp normal $N=(-2x,-8y,1)$. Calculeu el flux del camp $F=(1,0,2)$ a través de $S$.




$z = x^2+4y^2$ paraboloide el·líptic (no de revolució)

$z = 3y^2+1$ cilindre parabòlic.

$S = \{ z = x^2+4y^2,\ z \leq 3y^2+1 \}$, parametritzada per

$\Phi(x,y) = (x, y, \underbrace{x^2+4y^2}_{f(x,y),\ \text{gràfica}})$, $(x,y) \in D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ $[z = x^2+4y^2 \leq 3y^2+1]$

$\Phi_x \wedge \Phi_y = (-f_x, -f_y, 1) = (-2x,-8y,1) = N$.

Calculem el flux directament:

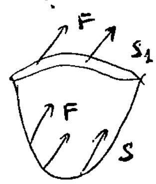
$$\int_S \langle F, dS\rangle = \int_D \langle F\circ\Phi, \Phi_x\wedge\Phi_y\rangle\, dx\,dy = \int_D (-2x+2)\,dx\,dy \underset{\text{(polars)}}{=} \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (-2r\cos\theta+2)\, r\, d\theta = \underline{2\pi}$$

Obs. També es pot aplicar el teo. de la divergència, considerant

$W = \{ x^2+4y^2 \leq z \leq 3y^2+1 \}$, $\partial W = S \cup S_1$, essent $S_1 = \{ z = 3y^2+1,\ z \geq x^2+4y^2 \}$ ("tapa superior")

$$\int_W \underbrace{\mathrm{div}\, F}_{\overset{\parallel}{0}} = \int_{\partial W^+} \langle F, dS\rangle = \int_{S^+} \langle F, dS\rangle + \int_{S_1^+} \langle F, dS\rangle$$

normals exteriors a $W$.

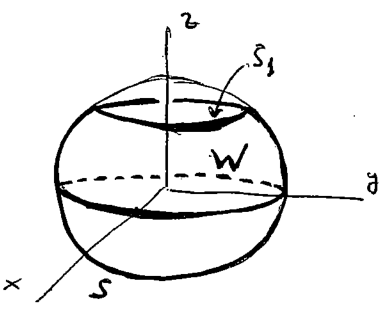



Com que en el nostre cas $S$ ve orientada per $N$, normal interior, resulta:

$$\int_S \langle F, dS\rangle = -\int_{S^+} \langle F, dS\rangle = \int_{S_1^+} \langle F, dS\rangle = \int_D \langle F\circ\Psi, \Psi_x\wedge\Psi_y\rangle\, dx\,dy = \int_D 2\,dx\,dy = \underline{2\pi}$$

$\Psi(x,y) = (x,y,3y^2+1)$,
domini: $3y^2+1 \geq x^2+4y^2 \to D$.
$\Psi_x \wedge \Psi_y = (0,-6y,1)$, normal exterior.

**(24)** Sigui $S$ la superfície definida per $x^2+y^2+z^2=1$, $z \leq 1/2$, orientada pel camp de vectors normals $N=(x,y,z)$. Sigui $F$ el camp vectorial definit per $F(x,y,z) = (x,y,-2z)$. Troben el flux de $F$ a través de $S$.




$S = \{ x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \leq 1/2 \}$ orientada per $N = (x,y,z)$ (normal exterior).

Considerem $W = \{ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \leq 1/2 \}$,

tenim $\partial W = S \cup S_1$, essent $S_1 = \{ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z = 1/2 \} = \{ x^2+y^2 = \frac{3}{4},\ z = \frac{1}{2} \}$ (cercle de radi $\sqrt{3}/2$)

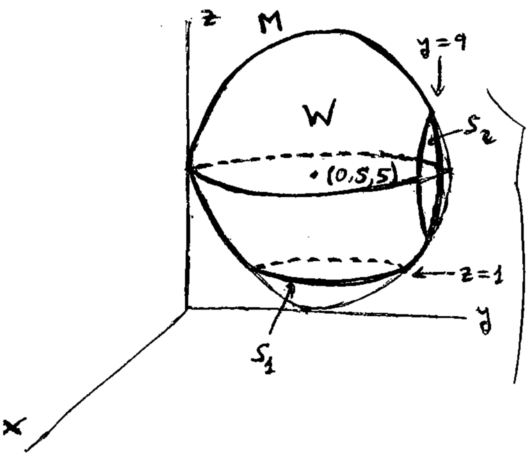
Tenim $\mathrm{div}\, F = 1+1-2 \equiv 0$. Aplicant el teo. de la divergència,

$$0 = \int_W \mathrm{div}\, F = \int_{\partial W^+} \langle F, dS\rangle = \int_S \langle F, dS\rangle + \int_{S_1} \langle F, dS\rangle$$

$N_1 = (0,0,1)$ normal ext. a $S_1$

$$\Rightarrow \int_S \langle F, dS\rangle = -\int_{S_1} \langle F, dS\rangle = -\int_{S_1} \langle F, N_1\rangle\, dS = \int_{S_1} 2z\, dS \overset{z\equiv 1/2 \text{ sobre } S_1}{=} A(S_1) = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \underline{\frac{3\pi}{4}}$$

(22) Sigui $M$ el subconjunt de $\mathbb{R}^3$ definit per $M = \{ x^2+(y-5)^2+(z-5)^2 = 25,\ z \geq 1,\ y \leq 9 \}$. Sigui $F(x,y,z) = (-x, 0, x+z)$, determineu el flux de $F$ a través de $M$, orientat pel camp de vectors normals $N = (2x, 2(y-5), 2(z-5))$.




Considerem $W = \{ x^2+(y-5)^2+(z-5)^2 \leq 25,\ z \geq 1,\ y \leq 9 \}$.

Tenim $\partial W = M \cup S_1 \cup S_2$,

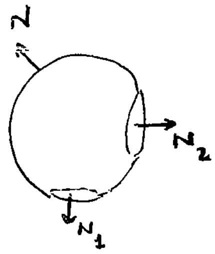
$S_1 = \{ x^2+(y-5)^2+(z-5)^2 \leq 25,\ z=1 \} = \{ x^2+(y-5)^2 \leq 9,\ z=1 \}$

$S_2 = \{ x^2+(y-5)^2+(z-5)^2 \leq 25,\ y=9 \} = \{ x^2+(z-5)^2 \leq 9,\ y=9 \}$

($S_1$ i $S_2$ són cercles de radi 3).

$\operatorname{div} F \equiv 0 \longrightarrow$ pel teo. de la divergència,

$$0 = \int_W \operatorname{div} F = \int_{\partial W^+} \langle F, dS \rangle = \int_M \langle F, dS \rangle + \int_{S_1} \langle F, dS \rangle + \int_{S_2} \langle F, dS \rangle,$$




amb $M$, $S_1$ i $S_2$ orientades per la normal exterior.

En el cas de $M$, ens venia orientada ja per la normal exterior $N = (2x, 2(y-5), 2(z-5))$.

• Calculem: $\displaystyle\int_{S_1} \langle F, dS \rangle = \int_{S_1} \langle F, N_1 \rangle\, dS = \int_{S_1} (-x-z)\, dS = \int_{D_1} (-x-1)\, dx\, dy =$

$N_1 = (0,0,-1)$

parametrització:
$\Phi(x,y) = (x,y,1)$,
$D_1 = \{ x^2+(y-5)^2 \leq 9 \}$
$\Phi_x \wedge \Phi_y = (0,0,1)$, $\|\Phi_x \wedge \Phi_y\| = 1$

$$= \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} (-r\cos\theta - 1)\, dr\, d\theta = -9\pi$$

polars centrades al $(0,5)$:
$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = 5 + r\sin\theta. \end{cases}$

• D'altra banda, $\displaystyle\int_{S_2} \langle F, dS \rangle = \int_{S_2} \langle F, N_2 \rangle = 0$

$N_2 = (0,1,0)$
$\langle F, N_2 \rangle \equiv 0$.

Per tant,

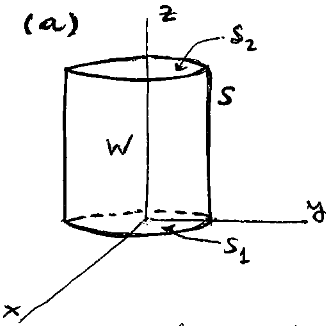
$$\int_M \langle F, dS \rangle = -\int_{S_1} \langle F, dS \rangle - \int_{S_2} \langle F, dS \rangle = -(-9\pi) - 0 = \underline{\underline{9\pi}}$$

(25) Donat el camp $F = (2x, y, 3z)$ i la superfície $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2=4,\ 0 \le z \le 5\}$ orientada segons el vector normal $N = (x, y, 0)$,

(a) Troben el flux del camp $F$ a través de $S$.

(b) Troben la circulació del camp $F$ a través de $\partial S$.

(a)



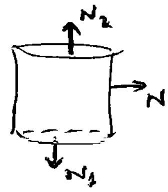

$W = \{x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 5\}$

$\partial W = S \cup S_1 \cup S_2$, amb $S_1 = \{z=0,\ x^2+y^2 \le 4\}$,
$S_2 = \{z=5,\ x^2+y^2 \le 4\}$.

Aplicant el teo. de la divergència,

$$\int_W \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \int_{\partial W^+} \langle F, dS\rangle = \int_S \langle F, dS\rangle + \int_{S_1} \langle F, dS\rangle + \int_{S_2} \langle F, dS\rangle,$$

on cal orientar les superfícies per la normal exterior a $W$:
$N = (x,y,0)$ per a $S$; $N_1 = (0,0,-1)$ per a $S_1$, $N_2 = (0,0,1)$ per a $S_2$.




Calculem:

$$\int_W \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = 6 \operatorname{vol}(W) = 6 \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 120\pi$$

$\operatorname{div} F = 2+1+3 = 6$

$$\int_{S_1} \langle F, dS\rangle = \int_{S_1} \langle F, N_1\rangle \, dS = 0$$

$\langle F, N_1\rangle = 0$ sobre $S_1$

$$\int_{S_2} \langle F, dS\rangle = \int_{S_2} \langle F, N_2\rangle \, dS = 15\, A(S_2) = 15 \cdot \pi \cdot 2^2 = 60\pi.$$

$\langle F, N_2\rangle = 3z = 15$

Per tant, $\int_S \langle F, dS\rangle = 120\pi - 0 - 60\pi = \underline{60\pi}$.

(b) $\partial S = C_1 \cup C_2$


Aplicant el teo. de Stokes, $\int_{\partial S} \langle F, dl\rangle = \int_S \langle \operatorname{rot} F, dS\rangle = \underline{0}$

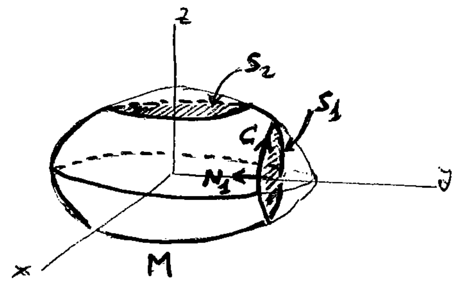
$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x & y & 3z \end{vmatrix} \equiv 0$$

(28) Sigui $M$ el subconjunt de $\mathbb{R}^3$ definit pel sistema $9x^2+6y^2+9z^2=9$, $y\leq 1$, $z\leq 2/3$.

(a) Sigui $C$ la corba d'intersecció de $M$ amb el pla $y=1$, i $F=(z,y,-x)$. Considerant en $C$ l'orientació pel camp de vectors tangents $(-z,0,x)$, calculeu la circulació de $F$ a través de $C$.

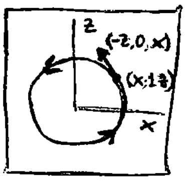
(b) Calculeu el flux del camp $G=(0,1,0)$, orientant $M$ de manera compatible amb l'orientació de $C$ en l'apartat anterior.

$9x^2+6y^2+9z^2=9$
el·lipsoide de semieixos $\underset{(x)}{1}$, $\underset{(y)}{\sqrt{3/2}}$, $\underset{(z)}{1}$.




(a) $C = M \cap \{y=1\} = \left\{x^2+z^2=\frac{1}{3},\ y=1\right\}$,
circumferència de radi $1/\sqrt{3}$
$\left(\text{obs. } \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{2}{3} \Rightarrow C \text{ no talla la intersecció de } M \text{ amb } z=2/3\right)$

Orientació de $C$:




pla $y=1$
(vist des de l'esquema)

Parametritzem $C$: $\alpha(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t,\ 1,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t\right)$, $0\leq t\leq 2\pi$.

Llavors, $\displaystyle\int_C \langle F, dl\rangle = \int_0^{2\pi}\langle F(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\, dt = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\right)dt = \boxed{-\frac{2\pi}{3}}$

$F(\alpha(t)) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t,\ 1,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\right)$
$\alpha'(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t,\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\right)$

- També es pot aplicar el teorema de Stokes, considerant que la corba $C$ és la vora de $S_1=\left\{y=1,\ x^2+z^2\leq\frac{1}{3}\right\}$, tros de pla orientat per $N_1=(0,0,-1)$.

$$\int_C\langle F, dl\rangle = \int_{S_1}\langle \mathrm{rot}\, F, dS\rangle = \underbrace{\int_{S_1}\langle \mathrm{rot}\, F, N_1\rangle\, dS}_{\text{(la "tapa dreta")}} = -2A(S_1) = -2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = -\frac{2\pi}{3}$$

$\mathrm{rot}\, F=(0,2,0)$

(b) Hem d'orientar $M$ per la normal exterior.
Considerem també $S_2=\{z=2/3,\ 9x^2+6y^2+9z^2\leq 9\}$ (la "tapa superior"),
i llavors $M\cup S_1\cup S_2=\partial W$, amb el sòlid $W=\left\{9x^2+6y^2+9z^2\leq 9,\ y\leq 1,\ z\leq\frac{2}{3}\right\}$

Pel teo. de la divergència,
$$\int_W \underset{\overset{\parallel}{0}}{\mathrm{div}\, G} = \int_{\partial W^+}\langle G, dS\rangle = \int_M + \int_{S_1} + \int_{S_2}$$
orientades per la normal exterior a $W$

$\displaystyle\int_{S_1}\langle G, dS\rangle = \frac{1}{2}\int_{S_1}\langle \mathrm{rot}\, F, dS\rangle = \frac{1}{2}\cdot\left(+\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

apartat (a), però cal invertir l'orientació

$\displaystyle\int_{S_2}\langle G, dS\rangle = \int_{S_2}\langle G, N\rangle\, dS = 0$

$N=(0,1,0)$

$\Rightarrow \displaystyle\int_M\langle G, dS\rangle = -\frac{\pi}{3}$

(*) [ex. final juny '09]

(a) Donada una superfície $S$ amb vora $C$, proveu que si $F(x,y,z)=\vec{v}$ és un camp vectorial constant, es compleix la igualtat
$$2\int_S \langle \vec{v}, dS\rangle = \int_C \langle \vec{v}\wedge\vec{r}, dl\rangle,$$
essent $\vec{r}=(x,y,z)$, i suposant que $S$ i $C$ tenen orientacions compatibles.

(b) Per a la superfície $S=\{(x,y,z):\ z=x^2+y^2,\ z\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$, orientada en el punt $(1/2,1/2,1/2)$ pel vector $N=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$, calculeu el flux del camp vectorial $F=(1,0,0)$ a través de $S$, aplicant el teorema de Stokes.

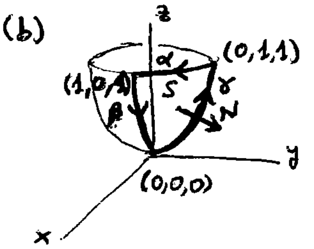
(c) El mateix flux de l'apartat (b), ara calculat directament (és a dir, usant la definició de flux).

(a) Escrivint $G(x,y,z)=\vec{v}\wedge\vec{r}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ v_1 & v_2 & v_3\\ x & y & z\end{vmatrix}=(v_2z-v_3y,\ v_3x-v_1z,\ v_1y-v_2x)$,

tenim $\operatorname{rot} G=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ v_2z-v_3y & v_3x-v_1z & v_1y-v_2x\end{vmatrix}=(2v_1,2v_2,2v_3)=2\vec{v}.$

Pel teo. de Stokes, $\int_C \underbrace{\langle G, dl\rangle}_{\vec{v}\wedge\vec{r}} = \int_S \langle \underbrace{\operatorname{rot} G}_{2\vec{v}}, dS\rangle$

(b)




La vora de $S$ és una corba regular a trossos $C$, amb 3 trossos que parametritzem d'acord amb l'orientació de $S$:

$$\begin{cases}\alpha(t)=(\sin t,\cos t,1), & 0\le t\le \pi/2,\\ \beta(t)=(1-t,0,(1-t)^2), & 0\le t\le 1,\\ \gamma(t)=(0,t,t^2), & 0\le t\le 1.\end{cases}$$

$F=(1,0,0)=\vec{v} \rightsquigarrow$ prenem $G=\vec{v}\wedge\vec{r}=(0,-z,y)$

Pel teo. de Stokes o l'apartat (a),

$$\int_S\langle F,dS\rangle=\frac12\int_C\langle G,dl\rangle=\frac12\left[\int_\alpha\langle G,dl\rangle+\int_\beta\langle G,dl\rangle+\int_\gamma\langle G,dl\rangle\right]=\frac12\left(1+0+\frac13\right)=\frac23$$

Calculem: $\int_\alpha\langle G,dl\rangle=\int_0^{\pi/2}\langle G(\alpha(t)),\alpha'(t)\rangle dt=\int_0^{\pi/2}\langle(0,-1,\cos t),(\cos t,-\sin t,0)\rangle dt=\int_0^{\pi/2}\sin t\,dt=1$

$\int_\beta\langle G,dl\rangle=\int_0^1\langle G(\beta(t)),\beta'(t)\rangle dt=\int_0^1\langle(0,-(1-t)^2,0),(-1,0,-2(1-t))\rangle dt=0$

$\int_\gamma\langle G,dl\rangle=\int_0^1\langle G(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle dt=\int_0^1\langle(0,-t^2,t),(0,1,2t)\rangle dt=\int_0^1 t^2dt=\frac13$

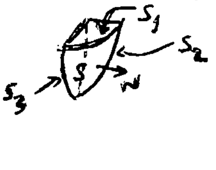
(c) Parametritzem $S$ com una gràfica: $\Phi(x,y)=(x,y,x^2+y^2)$, $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1,\ x,y\ge 0\}$.

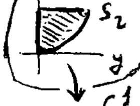
Tenim: $\Phi_x\wedge\Phi_y=(-2x,-2y,1)$; avaluant en el punt $(\frac12,\frac12,\frac12)$ obtenim $(-1,-1,1)$, orientació inversa a $N$.

Per la definició de flux,

$$\int_S\langle F,dS\rangle=-\int_D\langle F(\Phi(x,y)),\Phi_x\wedge\Phi_y\rangle dx\,dy=-\int_D\langle(1,0,0),(-2x,-2y,1)\rangle dx\,dy=2\int_D x\,dx\,dy=$$
canvi a polars
$$=2\int_0^1 dr\int_0^{\pi/2} r\cos\theta\cdot r\,d\theta=2\int_0^1 r^2dr\cdot\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta=2\cdot\frac13\cdot 1=\frac23$$

(*) També es pot aplicar el teo. divergència, usant que $\operatorname{div} F\equiv 0$.




Com que $F$ és tangent a $S_1$ i $S_3$, resulta:

$$\int_S\langle F,dS\rangle=-\int_{S_2}\langle F,dS\rangle=-\int_{S_2}\langle F,(-1,0,0)\rangle dS=A(S_2)=\int_0^1(1-y^2)\,dy=\frac23$$