TEOREMES INTEGRALS II: idees bàsiques

Comentem aquí les idees principals relacionades amb els teoremes de Gauss i Stokes, mostrant amb detall la seva aplicació en alguns exemples concrets. En tots dos casos, com en el teorema de Green, tenim una igualtat entre integrals de diferents tipus, que ens donen fórmules alternatives per a calcular-les.

1 Teorema de Gauss

- El *teorema de Gauss* o *de la divergència* ens permet calcular el flux d'un camp vectorial a través d'una superfície tancada com la integral triple de la seva divergència sobre el domini sòlid tancat per aquesta superfície. Tot i així, veurem com adaptar-lo al cas d'una superfície no tancada.

- Una superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ s'anomena *tancada* quan és la frontera d'un domini sòlid W, és a dir, $S = \partial W$. De fet, la frontera d'un sòlid pot estar formada per una o més superfícies (pensem per exemple en una corona esfèrica), cadascuna de les quals pot ser regular, o regular a trossos.

  De manera estàndard, la frontera d'un sòlid s'orienta per la *normal exterior*, i aleshores escrivim ∂W^+.

- Vegem la fórmula del teorema de Gauss:

$$\boxed{\oint_{\partial W^+} \langle \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rangle = \int_W \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}$$

  on $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ és un camp vectorial (que ha de ser de classe $\mathcal{C}^1$ a tot el sòlid W), i $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = P_x + Q_y + R_z$ és la seva divergència. El símbol $\oint$ simplement ens recorda que la superfície ∂W és tancada.

  Així, tenim una manera alternativa de calcular el flux a través d'una superfície tancada: en comptes d'aplicar la definició, podem calcular-lo a partir de la integral triple d'una funció escalar. En principi, cap de les dues és millor ni pitjor; depèn de com siguin la superfície, el sòlid, i les funcions involucrades.

- Ara bé, hi ha dos casos en què el teorema de Gauss ens serà especialment útil:

  1. Quan el camp és *solenoidal*, és a dir, $\operatorname{div} \boldsymbol{F} \equiv 0$, en què veiem que el flux total a través de qualsevol superfície tancada és 0. Això vol dir que l'entrada de flux s'equilibra amb la sortida (és el cas d'un fluid incompressible).
  2. Quan el camp té *divergència constant*, $\operatorname{div} F \equiv k$, i el sòlid W té una fórmula coneguda per al volum (cilindre, esfera...), en què el flux és $k \operatorname{vol}(W)$.

  ***Exemple 1**. Calculeu el flux del camp vectorial $\boldsymbol{F} = (5x + x^2y, xz + 3y, -2xyz + y^2)$ a través de l'esfera $S = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, orientada en el punt $(0, 0, R)$ pel vector normal $\boldsymbol{N} = (0, 0, 1)$.*

  Com que la superfície S és tancada i l'orientació que ens donen correspon a la normal exterior, podem aplicar directament el teorema de Gauss prenent com a sòlid W l'esfera sòlida. A més, el camp vectorial té divergència constant, $\operatorname{div} \boldsymbol{F} \equiv 8$. Per tant, obtenim:

$$\oint_{S^+} \langle \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rangle = \int_W \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 8 \operatorname{vol}(W) = \frac{32}{3} \pi R^3.$$

  Observem que si l'orientació de S corresponent a la normal interior, l'únic que hem de fer és canviar el signe a tot el resultat.

- Encara que el teorema de Gauss només s'aplica a superfícies tancades, també és factible aplicar-lo a superfícies no tancades, si podem afegir-hi una o més "*tapes*": superfícies prou senzilles (normalment trossos de pla), de manera que la unió de la nostra superfícies amb aquestes "*tapes*" sigui una superfície tancada.

  Exemple 2. *Calculeu el flux del mateix camp vectorial* $\boldsymbol{F}$ *de l'exemple 1 a través de la semiesfera* $S_1 = \{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z \geq 0\}$, *orientada com a l'exemple 1.*

  En aquest cas, la superfície no és tancada, però podem "tancar-la" fàcilment afegint un tros de pla, concretament un cercle: $S_2 = \{(x,y,z)\ :\ z = 0,\ x^2+y^2 \leq R^2\}$. Aleshores tenim $S_1 \cup S_2 = \partial W_1$, essent $W_1 = \{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ z \geq 0\}$, la semiesfera sòlida. Ja tenim S_1 orientada per la normal exterior a W_1, i en el cas de S_2 la normal exterior ve donada pel vector $\boldsymbol{N}_2 = (0,0,-1)$. Aplicant el teorema de Gauss com hem fet a l'exemple 1, ara obtenim $\oint_{\partial W_1^+} \langle \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}\rangle = 8\,\mathrm{vol}(W_1) = \frac{16}{3}\pi R^3$, però aquest flux és la suma dels fluxos a través de S_1 i S_2. Per tant, només ens cal restar el flux a través de S_2, que com que és un tros de pla és molt fàcil de calcular:

  $$\int_{S_2^+} \langle \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}\rangle = \int_{S_2} \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{N}_2\rangle\,\mathrm{d}S = -\int_{S_2} y^2\,\mathrm{d}S = -\int_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{4}\pi R^4.$$

  on hem usat parametritzat S_2 com la gràfica $z = 0$ sobre el domini $D = \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leq R^2\}$, i hem calculat la integral doble fent el canvi a polars. Finalment,

  $$\int_{S_1^+} \langle \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}\rangle = \frac{16}{3}\pi R^3 - \int_{S_2^+} \langle \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}\rangle = \frac{16}{3}\pi R^3 + \frac{1}{4}\pi R^4.$$

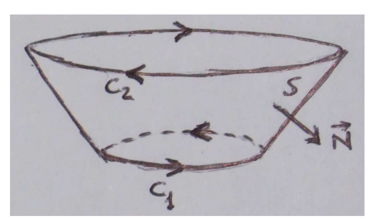
2 Teorema de Stokes

- El *teorema de Stokes* o *del rotacional 3D* ens permet calcular la circulació d'un camp vectorial al llarg de la vora d'una superfície com el flux del seu rotacional a través de tota la superfície. En aquest teorema, tenim com a dificultat afegida el fet que cal orientar tant la superfície com la seva vora, i cal fer-ho de manera compatible.

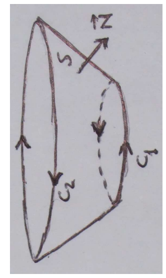
- Donada una superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, la seva *vora* (o frontera) es denota ∂S, i estarà formada per una o més corbes tancades, cadascuna de les quals pot ser regular, o regular a trossos. Estem entenent que la superfície S no és tancada, ja que una superfície tancada no té vora (quina seria la vora d'una esfera?).

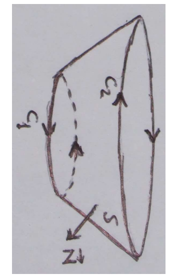
  Suposem que tenim una orientació S^+ de la superfície, donada per un vector normal unitari $\boldsymbol{N}$ en cada punt. Aquesta orientació determina una orientació *compatible* de la vora, que escriurem ∂S^+. Per saber quina és aquesta orientació compatible, ens situant-nos a la cara de S determinada pel vector $\boldsymbol{N}$ (la "cara superior"), i s'ha de complir que, recorrent la vora ∂S segons aquesta orientació, la superfície S ens quedi a mà esquerra.

  Exemple 3. *Determineu l'orientació de la vora de la superfície lateral d'un tronc cònic,* $S = \{(x,y,z)\ :\ z^2 = x^2+y^2,\ 1 \leq z \leq 2\}$ *(vegeu la figura), orientada al punt* $(3/2, 0, 3/2)$ *pel vector normal* $\boldsymbol{N} = (1,0,-1)/\sqrt{2}$.



La vora de S està formada per dues circumferències disconnexes, $\partial S = C_1 \cup C_2$, essent $C_1 = \{(x,y,z) \ : \ z=1, \ x^2+y^2=1\}$ i $C_2 = \{(x,y,z) \ : \ z=2, \ x^2+y^2=4\}$. Llavors cal recórrer C_1 en sentit antihorari, i C_2 en sentit horari (sobre el pla horitzontal on cadascuna està continguda). Tot i que ho podem veure a la figura inicial, ho veurem més clarament si tombem el tronc cònic cap a un costat o cap a l'altre. Fàcilment podem donar parametritzacions de C_1 i C_2 que respecten aquesta orientació: $\sigma_1(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ i $\sigma_2(t) = (2\cos t, -2\sin t, 2)$ respectivament, ambdues amb $t \in [0, 2\pi]$.





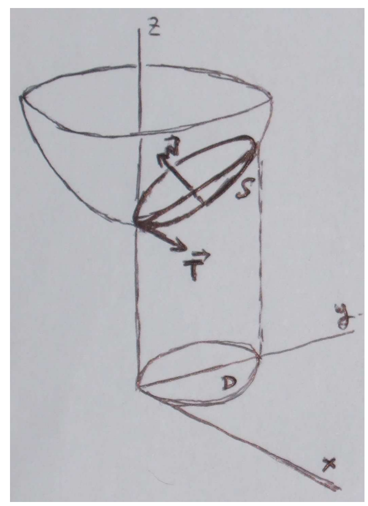
- Vegem la fórmula del teorema de Stokes:

$$\boxed{\oint_{\partial S^+} \langle \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \rangle = \int_{S^+} \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rangle}$$

on $\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$ és un camp vectorial (que ha de ser de classe $\mathcal{C}^1$ a tota la superfície S), i $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$ és el seu rotacional.

Així, tenim una manera alternativa de calcular la circulació al llarg d'una corba tancada: en comptes d'aplicar la definició, podem calcular-ho com un flux a través d'una superfície que tingui la corba donada com a vora. També en aquest teorema, cap de les dues integrals és millor ni pitjor; depèn de com siguin la corba, la superfície, i les funcions involucrades.

Exemple 4. *Calculeu la circulació del camp vectorial* $\boldsymbol{F} = (z,x,y)$ *al llarg de la corba* $C = \{(x,y,z) \ : \ z = 2+x^2+y^2, \ x^2+(y-1)^2 = 1\}$, *orientada pel vector* $\boldsymbol{T} = (1,0,0)$ *en el punt* $(0,0,2)$.



La corba C és la intersecció entre un paraboloide i un cilindre, i fàcilment la podem veure com la vora $C = \partial S$ del tros de paraboloide que queda dins del cilindre sòlid $S = \{(x,y,z) \ : \ z = 2+x^2+y^2, \ x^2+(y-1)^2 \le 1\}$. Aquesta superfície S és la gràfica de la funció $z(x,y) = 2+x^2+y^2$, sobre el cercle $D = \{(x,y) \ : \ x^2+(y-1)^2 \le 1\}$, i la corba C és la part de la gràfica que es projecta sobre la circumferència ∂D. El vector tangent $\boldsymbol{T}$ ens diu que aquesta projecció es recorre en sentit antihorari, i això fa que l'orientació de S compatible amb la de C és aquella per a la qual el vector normal apunta cap amunt (tercera component positiva). Llavors podem calcular el flux del rotacional, $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = (1,1,1)$, a través de S amb aquesta orientació. Per calcular aquest flux, parametritzem S com una gràfica, $\Phi(x,y) = (x,y,z(x,y))$, amb D com a domini, i vector normal $\Phi_x \wedge \Phi_y = (-z_x, -z_y, 1)$ que té l'orientació que ens interessa. Per tant,

$$\oint_{C^+} \langle \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \rangle = \int_{S^+} \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rangle = \int_D \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\Phi(x,y)), \Phi_x \wedge \Phi_y \rangle \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_D (1-2x-2y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -\pi.$$

on hem usat que la integral de $2x$ és 0 per simetria (però no la de $2y$), i hem integrat $1-2y$ fent un canvi a coordenades polars centrades al punt $(0,1)$.

- Hem vist que el teorema de Stokes ens permet calcular la circulació al llarg d'una corba tancada a partir d'un flux, però ara ens preguntem si és possible el procés invers: calcular el flux d'un camp vectorial $\boldsymbol{G}$ a través d'una superfície orientada S^+ com una circulació al llarg de la seva vora ∂S^+. Per fer això, ens caldrà conèixer un *potencial vector* del camp $\boldsymbol{G}$, és a dir, un camp vectorial $\boldsymbol{H}$ tal que $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}$ (compareu aquest concepte amb el de potencial escalar que s'utilitza en el teorema de Newton–Leibniz), i llavors podem escriure: $\int_{S^+} \langle \boldsymbol{G}, \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rangle = \oint_{\partial S^+} \langle \boldsymbol{H}, \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \rangle$.

  No tot camp vectorial $\boldsymbol{G}$ admet un potencial vector; la identitat $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{H}) \equiv 0$ (si $\boldsymbol{H}$ és de classe $\mathcal{C}^2$) ens diu que una *condició necessària* és que el camp $\boldsymbol{G}$ sigui solenoidal: $\operatorname{div} \boldsymbol{G} \equiv 0$. Com a exemple, al problema 47 podem veure com trobar un potencial vector en el cas d'un camp vectorial constant.