Apunts de l'assignatura *Càlcul Infinitesimal* de l'ETSETB

Ignacio Gracia, Carles Padró
Departament de Matemàtica Aplicada IV

Juny de 2007

Índex

Capítol 1

Els nombres reals. Successions

1.1 Els nombres reals

1.1.1 La recta real

Necessitem un sistema de nombres que ens sigui útil per representar la realitat. Concretament, per mesurar magnituds físiques com ara la distància, el temps, la intensitat d'un corrent elèctric, l'amplitud i la freqüència d'una ona, etc. Per mesurar aquestes magnituds haurem de fixar una unitat (metre, segon, amper,...) i prendre'n fraccions. Si ens centrem en el problema de mesurar distàncies, veiem que hem de cercar un sistema de nombres que ens permeti representar qualsevol punt d'una recta una vegada fixats l'origen i la unitat de mesura, és a dir, els punts corresponents als nombres 0 i 1.

Evidentment, els *nombres racionals o fraccionaris*, que formen el conjunt $\mathbb{Q}$, formaran part del sistema de nombres que estem cercant. Veiem però que no són suficients ja que, per exemple, no ens serveixen per mesurar la llargada de la diagonal d'un quadrat amb costat 1.

Proposició 1.1.1 No existeix cap nombre racional $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$. És a dir, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Demostració. Suposem que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, és a dir, que existeixen enters $p, q \in \mathbb{Z}$ tals que $\sqrt{2} = p/q$, essent p/q una fracció irreduïble. Llavors, $2q^2 = p^2$, d'on deduïm que p^2 és un múltiple de 2 i, per tant, també ho és p. Així doncs, p^2 és múltiple de 4 i, com que $p^2 = 2q^2$, tenim que q ha de ser un múltiple de 2, el que contradiu que p/q és una fracció irreduïble. Així $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ∎

1.1.2 Descripció axiomàtica dels nombres reals

En aquest apartat, presentem les propietats (axiomes) que caracteritzen el sistema de nombres que necessitem. Parlem de *caracterització* ja que es pot demostrar (tot i que no ho farem aquí) que existeix un únic objecte matemàtic que compleix aquests axiomes. Aquest objecte matemàtic és la tupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, és a dir, el conjunt $\mathbb{R}$ dels *nombres reals*, que compleix $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, amb les operacions suma i producte i la relació d'ordre que s'estenen de $\mathbb{Q}$. Comencem amb les propietats relacionades amb les dues operacions internes, *suma* i *producte*, que són l'extensió a $\mathbb{R}$ de la suma i el producte de nombres racionals.

(R1) $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

(R2) $x + 0 = 0 + x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(R3) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exists\, -x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

(R4) $x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Les propietats **(R1)**–**(R4)** es resumeixen dient que $(\mathbb{R}, +)$ és un *grup commutatiu*.

(R5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

(R6) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(R7) $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

(R8) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

Per les propietats **(R1)**–**(R8)** diem que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ és un *anell commutatiu*.

(R9) $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\exists\, x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Les propietats **(R5)**, **(R6)**, **(R7)** i **(R9)**, indiquen que $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ és un *grup commutatiu*. Les propietats **(R1)**–**(R9)** es resumeixen dient que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ és un *cos commutatiu*. Tenim de manera natural una *relació d'ordre* en els nombres racionals, que s'estén a $\mathbb{R}$. De fet, aquesta relació d'ordre és la que podríem definir si tenim en compte que els nombres reals representen els punts d'una recta.

(R10) $x \leq x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(R11) $x \leq y$ i $y \leq x \Longrightarrow x = y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

(R12) $x \leq y$ i $y \leq z \Longrightarrow x \leq z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

(R13) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y$ o bé $y \leq x$.

Les propietats **(R10)**–**(R13)** indiquen que $(\mathbb{R}, \leq)$ és un *conjunt totalment ordenat*. Tenim també dues propietats relacionades amb la compatibilitat de la relació d'ordre amb les operacions.

(R14) $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

(R15) $x \leq y$ i $z \geq 0 \Longrightarrow x \cdot z \leq y \cdot z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

Les propietats **(R1)**–**(R15)** es resumeixen dient que $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ és un *cos ordenat*.

(R16) Per a qualsevol parell de nombres reals $x, y \in \mathbb{R}$ amb $x, y > 0$, podem trobar un natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.

La propietat **(R16)** és la *propietat arquimediana*. Les propietats **(R1)**–**(R16)** indiquen que $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ és un *cos ordenat arquimedià*.

Proposició 1.1.2 $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ també compleix les propietats **(R1)**–**(R16)** i, per tant, és també un cos ordenat arquimedià.

Com hem dit abans, els nombres reals han de contenir els nombres racionals. Això es recull en el següent axioma.

(R17) $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ és un subcòs ordenat de $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$.

Ens falta afegir ara un únic axioma, que ens distingirà els nombres reals dels racionals: la *completesa* dels nombres reals. Precisament per aquest darrer axioma podem afirmar que els nombres reals representen *tots* els punts de la recta. Però abans d'introduir aquest axioma hem de definir alguns conceptes.

Definició 1.1.3 Sigui $A \subset \mathbb{R}$.

- Direm que A és *fitat superiorment* si existeix un nombre real $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \geq x$ per a tot $x \in A$. En aquest cas, direm que α és una *fita superior* de A.
- Direm que A és *fitat inferiorment* si existeix un nombre real $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leq x$ per a tot $x \in A$. En aquest cas, direm que α és una *fita inferior* de A.
- Direm que A és *fitat* si és fitat inferiorment i superiorment.

Definició 1.1.4 Sigui $A \subset \mathbb{R}$ fitat superiorment. Direm que $\alpha \in \mathbb{R}$ és el *suprem* de A, i escriurem $\alpha = \sup A$, si

- α és una fita superior de A.
- Si $\alpha' < \alpha$, existeix un $x \in A$ tal que $\alpha' < x \leq \alpha$.

Definició 1.1.5 Sigui $A \subset \mathbb{R}$ fitat inferiorment. Direm que $\alpha \in \mathbb{R}$ és l'*ínfim* de A, i escriurem $\alpha = \inf A$, si

- α és una fita inferior de A.
- Si $\alpha' > \alpha$, existeix un $x \in A$ tal que $\alpha \leq x < \alpha'$.

Observació 1.1.6 El suprem d'un conjunt, si existeix, és únic. Igualment l'ínfim.

Definició 1.1.7 Sigui $A \subset \mathbb{R}$.

- Direm que $M \in \mathbb{R}$ és el *màxim* de A, i escriurem $M = \max A$, si $M \in A$ i $M \geq x$ per a tot $x \in A$.
- Direm que $m \in \mathbb{R}$ és el *mínim* de A, i escriurem $m = \min A$, si $m \in A$ i $m \leq x$ per a tot $x \in A$.

Observació 1.1.8 Sigui $A \subset \mathbb{R}$.

- Si $M = \max A$, aleshores, $M = \sup A$. Si $\alpha = \sup A$ i $\alpha \in A$, aleshores, $\alpha = \max A$.
- Si $m = \min A$, aleshores, $m = \inf A$. Si $\alpha = \inf A$ i $\alpha \in A$, aleshores, $\alpha = \min A$.

Amb això podem enunciar el darrer axioma dels nombres reals:

(R18) Si $A \subset \mathbb{R}$ és no buit i fitat superiorment, aleshores existeix $\alpha \in \mathbb{R}$ amb $\alpha = \sup A$.

La propietat **(R18)** ens dóna la *completesa* dels nombres reals. Les propietats **(R1)**–**(R16)**, **(R18)** indiquen que $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ és un *cos ordenat arquimedià complet*. Finalment, tenim que els axiomes **(R1)**–**(R18)** caracteritzen els nombres reals.

Teorema 1.1.9 $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ és l'*únic* cos ordenat arquimedià complet que conté els racionals com a subcòs ordenat.

Hem donat els axiomes que ens caracteritzen els nombres reals, el sistema de nombres que utilitzarem per a construir models matemàtics que ens permetin descriure fenòmens físics. Totes les altres propietats dels nombres reals, entre elles les que estudiarem en aquest curs, es dedueixen d'aquests axiomes. Els dos exercicis següents en són exemples molt elementals.

Exercici 1.1.10 Proveu que $0x = 0$ i que $(-1)x = -x$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

Exercici 1.1.11 Si $A \subset \mathbb{R}$ és no buit i fitat inferiorment, aleshores existeix $\alpha \in \mathbb{R}$ amb $\alpha = \inf A$.

1.1.3 Intervals encaixats. Representació decimal dels nombres reals

Definició 1.1.12 Un *interval* en $\mathbb{R}$ és qualsevol conjunt d'algun dels tipus que es donen a continuació. Donats $a, b \in \mathbb{R}$ amb $a < b$, considerem els subconjunts de $\mathbb{R}$:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (*interval tancat*).
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (*interval obert*).
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.
- Per als intervals anteriors, que són subconjunts fitats de $\mathbb{R}$, definim la *longitud de l'interval* com $\ell(I) = b - a$.
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$.
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$.
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$.
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Definició 1.1.13 Sigui $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió on, per a cada $n \in \mathbb{N}$, $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ és un interval tancat. Direm que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és una *successió d'intervals encaixats* si

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$$

i, a més a més, $0 = \inf\{\ell(I_n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 1.1.14 Sigui $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$, una successió d'intervals encaixats. Aleshores existeix un únic nombre real $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \in I_n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, és a dir, tal que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\alpha\}.$$

Demostració. Considerem el conjunt $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ format pels extrems inferiors dels intervals I_n. Aquest conjunt és no buit i fitat superiorment, ja que qualsevol b_n és fita superior. Llavors, per la propietat **(R18)** dels nombres reals, existeix $\alpha = \sup A$.

Com que $a_n \leq \alpha \leq b_n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, tenim que $\alpha \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Així doncs, només ens falta provar que α és l'únic element de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. En efecte, suposem que existeix $\alpha' \neq \alpha$ amb $\alpha' \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Com que $0 = \inf\{\ell(I_n) : n \in \mathbb{N}\}$, existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $\ell(I_n) < |\alpha - \alpha'|$, una contradicció amb el fet que $\alpha, \alpha' \in I_n$. ■

Observació 1.1.15 La propietat dels intervals encaixats de $\mathbb{R}$ que es dóna en el Teorema 1.1.14 és equivalent a la completesa, és a dir, a la Propietat **(R18)**. Per tant, els axiomes **(R1)**–**(R17)** amb la propietat dels intervals encaixats ens caracteritzen també els nombres reals.

Proposició 1.1.16 Per a tot nombre real x amb $0 < x < 1$, existeix una única seqüència infinita $d_1 d_2 \ldots d_k \ldots$ tal que, per a tot $k \geq 1$, $d_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ i

$$\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{d_k}{10^k} \leq x < \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{d_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}.$$

Exercici 1.1.17 Proveu que, per a tot nombre real $x \in \mathbb{R}$, existeix un únic nombre enter $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$.

Exercici 1.1.18 Utilitzeu l'Exercici 1.1.17 per provar la Proposició 1.1.16.

Definició 1.1.19 Els d_k són les *xifres decimals* de x. Escriurem $x = 0, d_1 d_2 \ldots d_k \ldots$, que és la *representació decimal* de x.

Proposició 1.1.20 Recíprocament, per a qualsevol seqüència infinita (d_k) amb $d_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$, existeix un únic nombre real $x \in [0, 1]$ tal que, per a tot $k \geq 1$,

$$x \in \left[\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{d_k}{10^k}, \quad \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{d_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}\right].$$

Demostració. Considerem, per a tot $k \in \mathbb{N}$, l'interval

$$I_k = \left[\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_k}{10^k}, \quad \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}\right].$$

Observem que $I_k \supset I_{k+1}$ per a tot $k \in \mathbb{N}$. A més a més, $\ell(I_k) = 1/10^k$ i, per tant, $0 = \inf\{\ell(I_k) : k \in \mathbb{N}\}$. Així doncs, $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ és una successió d'intervals encaixats i, pel Teorema 1.1.14, existeix un únic nombre real x tal que $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$. ■

Observació 1.1.21 Així doncs, podem identificar el conjunt dels nombres reals entre 0 i 1 amb el conjunt de les successions (d_k) amb $d_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$. No és però una correspondència bijectiva ja que $0,999999\ldots = 1$ i, en general, $0, d_1 \ldots d_{k-1} d_k 99999 \ldots = 0, d_1 \ldots d_{k-1}(d_k + 1)$ si $d_k \neq 9$.

Definició 1.1.22 Un cop introduïda la representació decimal per als reals en $(0, 1)$, podem estendre-la a tots els altres nombres reals.

- Si $x = N \in \mathbb{N}$, la seva representació decimal és $N, 00\ldots$, o bé N.
- Si $x \in \mathbb{R}$ és tal que $x > 0$, prenem $N_x \in \mathbb{N}$ l'únic natural tal que $N_x \leq x < N_x + 1$ i considerem $0, d_1 d_2 \ldots d_k \ldots$ la representació decimal de $x - N_x$. Aleshores la representació decimal de x és $x = N_x, d_1 d_2 \ldots d_k \ldots$.
- Finalment, si $x < 0$, considerem la representacio decimal del seu oposat, $-x = N, d_1 d_2 \ldots d_k \ldots$ i posem $x = -N, d_1 d_2 \ldots d_k \ldots$.

Proposició 1.1.23 Sigui $x = \pm N, d_1 d_2 \ldots d_k \ldots \in \mathbb{R}$. Aleshores, $x \in \mathbb{Q}$ si i només si existeixen naturals k_0 i r tals que $d_{k+r} = d_k$ per a tot $k \geq k_0$, és a dir, si i només si la representació decimal de x és finita ($d_k = 0$ per a tot $k \geq k_0$) o bé periòdica a partir d'un cert lloc.

Demostració. Sigui $x = p/q \in \mathbb{Q}$, on $p, q \in \mathbb{Z}$ i $q > 0$. Les xifres decimals de x s'obtenen aplicant l'algorisme de la divisió amb dividend p i divisor q, afegint a cada pas un zero al residu sempre que aquest sigui no nul. Aquests residus seran sempre menors que q. Per tant, o bé un d'ells és zero (representació decimal finita) o bé ha d'aparèixer algun valor repetit (representació decimal periòdica).

Recíprocament, si $x = \pm N, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots \in \mathbb{R}$ és tal que existeixen naturals k_0 y r amb $d_{k+r} = d_k$ per tot $k \geq k_0$, llavors $10^{k_0+r}x - 10^{k_0}x$ és un nombre enter, d'on es dedueix que x és un nombre racional. ■

Proposició 1.1.24 $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ no compleix la propietat **(R18)**. Per tant, $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ és un cos ordenat arquimedià *no complet*.

Demostració. A partir de la representació decimal de $\alpha = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$, obtenim una successió d'intervals encaixats $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on $I_k = [a_k, b_k]$ amb $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$ i $\ell(I_k) = 10^{-k}$, tal que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k = \{\alpha\}$. Així doncs, el cos ordenat arquimedià $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ admet una successió d'intervals encaixats $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que no existeix cap element $\beta \in \mathbb{Q}$ amb $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k = \{\beta\}$. Com que $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ no compleix la propietat dels intervals encaixats, no és complet. ■

1.1.4 Altres propietats dels nombres reals

Definició 1.1.25 Els elements de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ s'anomenen *nombres irracionals*. Així doncs, tenim una partició del nombres reals en *nombres racionals* i *nombres irracionals*.

Teorema 1.1.26 Siguin $x, y \in \mathbb{R}$ amb $x < y$. Aleshores, existeixen $\alpha \in \mathbb{Q}$ i $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tals que $x < \alpha < y$ i $x < \beta < y$. Tenim doncs que entre dos reals qualssevol hi ha infinits nombres racionals i infinits nombres irracionals.

Demostració. Siguin $x, y \in \mathbb{R}$ amb $x < y$. Per la *propietat arquimediana* dels nombres reals **(R16)**, existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1/(y - x)$. Sigui $m \in \mathbb{Z}$ l'únic nombre enter tal que

$$\frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n}.$$

Vegem que $\alpha = m/n$ és un nombre racional que satisfà $x < \alpha < y$. En efecte, si no fos així, tindríem $y \leq m/n$ i, en conseqüència,

$$y - x \leq \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n} = \frac{1}{n},$$

una contradicció amb el fet que $n > 1/(y - x)$.

Considerem ara l'únic enter $m' \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{m'-1}{\sqrt{2}\,n} \leq x < \frac{m'}{\sqrt{2}\,n}.$$

Donat que $\sqrt{2}\,n > 1/(y - x)$, podem utilitzar el mateix argument per provar que el nombre irracional $\beta = m'/(\sqrt{2}\,n)$ és tal que $x < \beta < y$. ■

Definició 1.1.27 Sigui $a \in \mathbb{R}$. Definim el *valor absolut* de a:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

Proposició 1.1.28 Propietats del valor absolut.

- $|a| \geq 0$. A més a més, $|a| = 0$ si i només si $a = 0$.
- $|ab| = |a| \cdot |b|$.
- Sigui $c \geq 0$. Aleshores $|a| \leq c$ si i només si $-c \leq a \leq c$. En particular, $-|a| \leq a \leq |a|$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$.
- $|a - b| \leq |a| + |b|$.

- $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Demostració. Només demostrarem que $||a|-|b|| \leq |a-b|$. Observem primer que $|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|$ i, per tant, $|a| - |b| \leq |a-b|$. D'altra banda, de $|b| = |b-a+a| \leq |b-a| + |a|$ es deudeix que $|b| - |a| \leq |a-b|$. Així doncs, $||a| - |b|| \leq |a-b|$. ■

Definició 1.1.29 Sigui E un conjunt. Una *distància* en E és una aplicació $d : E \times E \to \mathbb{R}$ tal que, per a qualssevol $x, y, z \in E$,

1. $d(x, y) \geq 0$. A més a més, $d(x, y) = 0$ si i només si $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Un *espai mètric* és un parell (E, d), on d és una distància en el conjunt E.

Proposició 1.1.30 L'aplicació $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $d(x, y) = |y - x|$ és una distància en $\mathbb{R}$. Tenim doncs que $(\mathbb{R}, d)$ és un espai mètric.

Demostració. Les propietats 1 i 2 de distància es comproven fàcilment. Per comprovar la 3, $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$. ■

Definició 1.1.31 Siguin $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunt de nombres reals i un nombre real $a \in \mathbb{R}$.

- Direm que a és un *punt interior* de A si existeix $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subset A$. El conjunt dels punts interiors de A s'escriu $\mathrm{int}(A)$.
- Direm que a és un *punt exterior* de A si existeix $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \cap A = \emptyset$. El conjunt dels punts exteriors de A s'escriu $\mathrm{ext}(A)$.
- Direm que a és un *punt frontera* de A si per a tot $\delta > 0$ tenim que $(a - \delta, a + \delta) \cap A \neq \emptyset$ i també $(a - \delta, a + \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$. El conjunt dels punts frontera de A s'escriu $\mathrm{fr}(A)$.

Proposició 1.1.32 Sigui $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunt de nombres reals. Aleshores:

- $\mathrm{int}(A) \subset A$.
- $\mathrm{ext}(A) \cap A = \emptyset$, és a dir, $\mathrm{ext}(A) \subset \mathbb{R} \setminus A$.
- Els conjunts $\mathrm{int}(A)$, $\mathrm{fr}(A)$ i $\mathrm{ext}(A)$ són disjunts dos a dos i $\mathbb{R} = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{fr}(A) \cup \mathrm{ext}(A)$.

Demostració. Si $a \in \mathrm{int}\,(A)$, aleshores $(a - \delta, a + \delta) \subset A$ per a algun $\delta > 0$ i, per tant, $a \in A$. En conseqüència, $\mathrm{int}(A) \subset A$. La segona afirmació es demostra fàcilment si tenim en compte que $\mathrm{ext}(A) = \mathrm{int}(\mathbb{R} \setminus A)$. Finalment, és clar que qualsevol nombre real $a \in \mathbb{R}$ està en una i només en una de les condicions donades en la Definició 1.1.31. Per tant, $\mathbb{R} = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{fr}(A) \cup \mathrm{ext}(A)$, essent aquests conjunts disjunts dos a dos. ■

Definició 1.1.33 Sigui $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunt de nombres reals.

- Direm que $a \in A$ és un *punt aïllat* de A si existeix $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \cap A = \{a\}$.
- Direm que $a \in \mathbb{R}$ és un *punt d'acumulació* de A si per a tot $\delta > 0$ tenim que $((a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$. El conjunt dels punts d'acumulació de A s'anomena el *conjunt derivat* de A i s'escriu A'.

Teorema 1.1.34 (de Bolzano-Weierstrass). Sigui $A \subset \mathbb{R}$ un conjunt infinit i fitat de nombres reals. Aleshores A té almenys un punt d'acumulació.

Demostració. Sigui $A \subset \mathbb{R}$ un conjunt infinit i fitat de nombres reals. Llavors, existeixen una fita inferior a_0 i una fita superior b_0 per a A. És a dir, $A \subset I_0 = [a_0, b_0]$. Considerem el punt mig $c_0 = (a_0 + b_0)/2$ de l'interval I_0. Com A té infinits elements i $A \subset I_0 = [a_0, c_0] \cup [c_0, b_0]$, almenys una d'aquestes dues meitats de I_0 ha de contenir infinits elements de A. Anomenem aquesta meitat com l'interval $I_1 = [a_1, b_1]$. Si repetim el procés, obtenim una successió d'intervals $I_n = [a_n, b_n]$, cadascun dels quals conté infinits elements de A, i tals que $I_{n+1} \subset I_n$ i $\ell(I_n) = b_n - a_n = (b-a)/2^n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. És a dir, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió d'intervals encaixats. Pel Teorema 1.1.14 existeix un únic nombre real $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\alpha\}$.

Vegem ara que α és un punt d'acumulació de A. En efecte, per a tot $\delta > 0$, existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $\ell(I_n) < \delta$ i, per tant, $I_n = [a_n, b_n] \subset (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Com que I_n conté infinits elements de A, es compleix que $((\alpha - \delta, \alpha + \delta)\backslash\{\alpha\}) \cap A \neq \emptyset$. Així doncs, α és punt d'acumulació de A. ■

1.2 Successions de nombres reals

1.2.1 Convergència i límit

Definició 1.2.1 Una *successió* (a_n) de nombres reals és una aplicació $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, on $\sigma(n) = a_n \in \mathbb{R}$.

Definició 1.2.2 *Operacions amb successions.* Siguin (a_n), (b_n) successions de nombres reals.

- *Suma.* $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$.
- *Producte per escalar.* $\lambda \cdot (a_n) = (\lambda \cdot a_n)$.
- *Producte.* $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$.
- *Quocient.* Si $b_n \neq 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, posem $\dfrac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$.

Definició 1.2.3 Sigui (a_n) una successió de nombres reals. Direm que la successió (a_n) és *convergent* si existeix un nombre real $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0,\ d(a_n, L) = |\, L - a_n \,| < \varepsilon.$$

En aquest cas, direm que L és el *límit* de la successió (a_n) i escriurem $\lim a_n = L$ o bé $(a_n) \to L$.

Proposició 1.2.4 El límit d'una successió, si existeix, és únic.

Demostració: Sigui (a_n) una successió de nombres reals i siguin $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ nombres reals tals que ambdós són límits de (a_n). Sigui $\varepsilon > 0$ arbitrari.

- Com que $\lim a_n = L_1$, existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|L_1 - a_n| < \varepsilon/2$ per a tot $n \geq n_1$.
- Com que $\lim a_n = L_2$, existeix $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|L_2 - a_n| < \varepsilon/2$ per a tot $n \geq n_2$.

En conseqüència, si $n \geq \max\{n_1, n_2\}$,

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2| \leq |L_1 - a_n| + |L_2 - a_n| < \varepsilon.$$

Hem provat doncs que $|L_1 - L_2| < \varepsilon$ per a tot $\varepsilon > 0$ i, per tant, $L_1 = L_2$. ■

Proposició 1.2.5 Tota successió convergent és fitada.

Demostració. Siguin (a_n) una successió convergent i $L = \lim a_n$. Llavors, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|L - a_n| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Així doncs, $|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < \varepsilon + |L|$ per a tot $n \geq n_0$. Per tant, si prenem $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, \varepsilon + |L|\}$, tindrem que $|a_n| \leq M$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Hem provat doncs que la successió (a_n) és fitada. ∎

Proposició 1.2.6 Siguin (a_n), (b_n) successions de nombres reals amb $\lim a_n = 0$ i (b_n) fitada. Aleshores $\lim a_n b_n = 0$.

Demostració. Per ser (b_n) fitada, existeix $k \in \mathbb{R}$ tal que $|b_n| \leq k$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Del fet que $\lim a_n = 0$ es dedueix que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n| < \frac{\varepsilon}{k} \quad \forall n \geq n_0.$$

Per tant, $|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < \frac{\varepsilon}{k} k = \varepsilon$ per a tot $n \geq n_0$. Això és, $\lim a_n b_n = 0$. ∎

Proposició 1.2.7 Siguin (a_n), (b_n) successions convergents de nombres reals amb $\lim a_n = L_1$ i $\lim(b_n) = L_2$. Aleshores

1. $(a_n + b_n)$ és convergent i $\lim(a_n + b_n) = L_1 + L_2$.
2. $(\lambda \cdot a_n)$ és convergent i $\lim(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot L_1$.
3. $(a_n \cdot b_n)$ és convergent i $\lim(a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2$.
4. Si $b_n \neq 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i, a més, $L_2 \neq 0$, aleshores (a_n/b_n) és convergent i $\lim \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{L_1}{L_2}$.
5. Si $a_n \leq b_n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, aleshores $L_1 \leq L_2$.
6. Si $a_n < b_n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, aleshores $L_1 \leq L_2$.

Demostració. Demostrem separadament cada un dels apartats.

1. Si $\lim a_n = L_1$ i $\lim b_n = L_2$, aleshores, per a tot $\varepsilon > 0$,
   - existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|L_1 - a_n| < \varepsilon/2$ per a tot $n \geq n_1$.
   - existeix $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|L_2 - a_n| < \varepsilon/2$ per a tot $n \geq n_2$.

   Si $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, llavors per a tot $n \geq n_0$ es compleix

   $$|(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)| \leq |a_n - L_1| + |b_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

   Per tant, $\lim(a_n + b_n) = L_1 + L_2$.

2. Com que $\lim a_n = L_1$, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L_1| \leq \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$ per a tot $n \geq n_0$. Per tant, $|\lambda a_n - \lambda L_1| = |\lambda|\,|a_n - L_1| < |\lambda| \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$ per a tot $n \geq n_0$. En conseqüència, $\lim(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot L_1$.

3. Suposem que $\lim a_n = L_1$ i $\lim b_n = L_2$. Com que la successió (b_n) és convergent, per la Proposició 1.2.5, és fitada, és a dir, existeix $k \in \mathbb{R}$ tal que $|b_n| \le k$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Si $L_1 = 0$, podem aplicar la Proposició 1.2.6 i tenim que $\lim(a_n b_n) = 0 = L_1 L_2$. Podem suposar doncs que $L_1 \neq 0$. Observem que

$$|a_n b_n - L_1 L_2| = |a_n b_n - L_1 b_n + L_1 b_n - L_1 L_2| \le |a_n - L_1|\,|b_n| + |L_1|\,|b_n - L_2|.$$

A més a més, per a tot $\varepsilon > 0$,

- existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L_1| < \varepsilon/(2k)$ per a tot $n \ge n_1$,
- existeix $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - L_2| < \varepsilon/(2|L_1|)$ per a tot $n \ge n_1$.

Si prenem $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, es compleix que, per a tot $n \ge n_0$,

$$|a_n b_n - L_1 L_2| < \frac{\varepsilon}{2k}|b_n| + \frac{\varepsilon}{2|L_1|}|L_1| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Així doncs, $\lim(a_n b_n) = L_1 L_2$.

4. Vegem en primer lloc que, si (b_n) és una successió convergent tal que $b_n \neq 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ amb $\lim b_n = L_2 \neq 0$, aleshores la successió $(1/b_n)$ també és convergent i

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{L_2}.$$

Observem primer que

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2}\right| = \left|\frac{L_2 - b_n}{b_n L_2}\right|.$$

És fàcil provar que $\lim |b_n| = |L_2|$ i, per tant, donat $k \in \mathbb{R}$ amb $0 < k < |L_2|$, existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $k < |b_n|$ per a tot $n \ge n_1$. A més a més, com que $\lim b_n = L_2$, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - L_2| < k\varepsilon|L_2|$ per a tot $n \ge n_2$. Per tant, per a tot $n \ge n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ es compleix que

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2}\right| = \left|\frac{L_2 - b_n}{b_n L_2}\right| \le \frac{|L_2 - b_n|}{k|L_2|} < \frac{\varepsilon k |L_2|}{k|L_2|} = \varepsilon$$

amb el que obtenim que $\lim 1/b_n = 1/L_2$.

Finalment, podem aplicar la propietat anterior sobre el límit del producte de dues successions convergents per provar que

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}.$$

5. Provarem per reducció a l'absurd que $L_1 \le L_2$ si $a_n \le b_n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Suposem doncs que $L_2 < L_1$ i prenem $M = (L_1 + L_2)/2$, el punt mig de l'interval $[L_2, L_1]$.

   - Com que $\lim a_n = L_1$, existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M$ per a tot $n \ge n_1$.
   - Com que $\lim b_n = L_2$, existeix $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $b_n < M$ per a tot $n \ge n_2$.

   En conseqüència, $a_n > b_n$ per a tot $n \ge n_0 = \max(n_1, n_2)$, una contradicció amb el fet que $a_n \le b_n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

6. És conseqüència de l'anterior. Observeu que encara que $a_n < b_n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, es pot donar que $L_1 = L_2$. Considereu per exemple les successions (a_n) i (b_n) definides per $a_n = 0$ i $b_n = 1/n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

■

Definició 1.2.8 Sigui (a_n) una successió de nombres reals.

- Direm que la successió (a_n) és *monòtona creixent* si $a_n \leq a_{n+1}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.
- Direm que la successió (a_n) és *monòtona decreixent* si $a_n \geq a_{n+1}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.
- Direm que la successió (a_n) és *monòtona* si és monòtona creixent o monòtona decreixent.
- Direm que la successió (a_n) és *estrictament creixent* si $a_n < a_{n+1}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.
- Direm que la successió (a_n) és *estrictament decreixent* si $a_n > a_{n+1}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2.9 Tota successió monòtona i fitada és convergent.

Demostració. Suposem que (a_n) és una successió monòtona creixent i fitada, això és, $a_n \leq a_{n+1}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i existeix $k \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq k$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Així doncs, el conjunt $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ és no buit i fitat superiorment i, per la propietat **(R18)** dels nombres reals, existeix $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup A$.

Vegem que $\alpha = \lim a_n$. En efecte, donat $\varepsilon > 0$, per ser $\alpha = \sup A$ ha d'existir al menys un terme a_{n_0} de la successió tal que $\alpha - \varepsilon < a_{n_0} \leq \alpha$. Com la successió (a_n) és monòtona creixent, també es compleix que $\alpha - \varepsilon < a_n \leq \alpha$ per a tot $n \geq n_0$. Llavors, $\alpha = \lim a_n$. ■

1.2.2 Límits infinits. Indeterminacions

Definició 1.2.10 Sigui (a_n) una successió de nombres reals.

- Direm que la successió (a_n) *tendeix a infinit* o *té límit infinit*, i escriurem $\lim a_n = \infty$, si

$$\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0,\ |a_n| > M.$$

- Direm que $\lim a_n = +\infty$ si

$$\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0,\ a_n > M.$$

- Direm que $\lim a_n = -\infty$ si

$$\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0,\ a_n < -M.$$

Àlgebra de límits infinits

Les propietats dels límits infinits en relació a les operacions amb successions es resumeixen en les Taules 1.1 i 1.2.

1.2.3 Successions parcials. Límit superior i límit inferior d'una successió

Definició 1.2.11 Sigui (a_n) una successió de nombres reals. Direm que una successió (b_k) és una *successió parcial* o *subsuccessió* de (a_n) si, per a tot $k \in \mathbb{N}$, $b_k = a_{n_k}$, on (n_k) és una successió estrictament creixent de nombres naturals.

Proposició 1.2.12 Totes les successions parcials d'una successió convergent són convergents. A més, si $\lim a_n = L$, aleshores $\lim a_{n_k} = L$ per a qualsevol successió parcial (a_{n_k}) de (a_n). Tenim el mateix per als límits infinits: si $\lim a_n = \infty$ $(+\infty, -\infty)$, aleshores $\lim a_{n_k} = \infty$ $(+\infty, -\infty)$ per a qualsevol successió parcial (a_{n_k}) de (a_n).

$(a_n) \to +\infty\ (-\infty, \infty),\ \lambda > 0 \Longrightarrow (\lambda a_n) \to +\infty\ (-\infty, \infty)$ $(a_n) \to +\infty\ (-\infty, \infty),\ \lambda < 0 \Longrightarrow (\lambda a_n) \to -\infty\ (+\infty, \infty)$
(a_n) fitada, $(b_n) \to +\infty\ (-\infty, \infty) \Longrightarrow (a_n + b_n) \to +\infty\ (-\infty, \infty)$
$(a_n) \to +\infty,\ (b_n) \to +\infty \Longrightarrow (a_n + b_n) \to +\infty$ $(a_n) \to -\infty,\ (b_n) \to -\infty \Longrightarrow (a_n + b_n) \to -\infty$
$(a_n) \to +\infty,\ (b_n) \to -\infty \Longrightarrow (a_n + b_n) \to$ **?** $(a_n) \to \infty,\ (b_n) \to \infty \Longrightarrow (a_n + b_n) \to$ **?** **Primera indeterminació:** $\infty - \infty$
$\exists k \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}$ tals que $\|a_n\| \geq k > 0\ \forall n \geq n_0,\ (b_n) \to \infty \Longrightarrow (a_n b_n) \to \infty$
$(a_n) \to 0,\ (b_n) \to \infty \Longrightarrow (a_n b_n) \to$ **?** **Segona indeterminació:** $0 \cdot \infty$
(a_n) fitada, $(b_n) \to \infty \Longrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to 0,\ \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \to \infty$ $\exists k \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}$ tals que $\|a_n\| \geq k > 0\ \forall n \geq n_0,\ (b_n) \to 0 \Longrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \infty,\ \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \to 0$
$(a_n) \to 0, (b_n) \to 0 \Longrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to$ **?** $(a_n) \to \infty, (b_n) \to \infty \Longrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to$ **?** **Tercera indeterminació:** $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Taula 1.1: Àlgebra de límits infinits: sumes, productes i quocients

Suposarem que $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$
$(b_n) \to +\infty \Longrightarrow (e^{b_n}) \to +\infty$ $(b_n) \to -\infty \Longrightarrow (e^{b_n}) \to 0$
$(a_n) \to +\infty \Longrightarrow (\log a_n) \to +\infty$ $(a_n) \to 0 \Longrightarrow (\log a_n) \to -\infty$
$\exists k \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}$ tals que $a_n \geq k > 1\ \forall n \geq n_0 \Longrightarrow \log a_n \geq \log k > 0\ \forall n \geq n_0$ $\exists k \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}$ tals que $a_n \leq k < 1\ \forall n \geq n_0 \Longrightarrow \log a_n \leq \log k < 0\ \forall n \geq n_0$
$\exists k \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}$ tals que $a_n \geq k > 1\ \forall n \geq n_0$, $(b_n) \to +\infty\ (-\infty) \Longrightarrow (a_n^{b_n}) = (e^{b_n \log a_n}) \to +\infty\ (0)$ $\exists k \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}$ tals que $a_n \leq k < 1\ \forall n \geq n_0$, $(b_n) \to +\infty\ (-\infty) \Longrightarrow (a_n^{b_n}) = (e^{b_n \log a_n}) \to 0\ (+\infty)$
$\exists k \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}$ tals que $b_n \geq k > 0\ \forall n \geq n_0$, $(a_n) \to +\infty\ (0) \Longrightarrow (a_n^{b_n}) = (e^{b_n \log a_n}) \to +\infty\ (0)$ $\exists k \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}$ tals que $b_n \leq k < 0\ \forall n \geq n_0$, $(a_n) \to +\infty\ (0) \Longrightarrow (a_n^{b_n}) = (e^{b_n \log a_n}) \to 0\ (+\infty)$
$(a_n) \to 0$, $(b_n) \to 0 \Longrightarrow (a_n^{b_n}) = (e^{b_n \log a_n}) \to$ **?** **Quarta indeterminació:** 0^0
$(a_n) \to +\infty$, $(b_n) \to 0 \Longrightarrow (a_n^{b_n}) = (e^{b_n \log a_n}) \to$ **?** **Cinquena indeterminació:** ∞^0
$(a_n) \to 1$, $(b_n) \to \infty \Longrightarrow (a_n^{b_n}) = (e^{b_n \log a_n}) \to$ **?** **Sisena indeterminació:** 1^∞

Taula 1.2: Àlgebra de límits infinits: exponencials i logaritmes

Demostració. Es dedueix directament de la definició de límit d'una successió. ■

Teorema 1.2.13 Tota successió fitada de nombres reals admet una subsuccessió convergent.

Demostració. Considerem el conjunt $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si el conjunt A és finit, ha d'existir $a \in A$ tal que $a_n = a$ per a infinits valors de n. Clarament, a és el límit d'una successió parcial de (a_n). Si A és infinit, com que també és fitat, podem aplicar el Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 1.1.34) i tenim que existeix punt d'acumulació $\alpha \in \mathbb{R}$ del conjunt A. Vegem que existeix (a_{n_k}), una successió parcial de (a_n) que té límit α. Com que $\alpha \in A'$, per a tot $k \in \mathbb{N}$, l'interval

$$I_k = \left(\alpha - \frac{1}{k}, \alpha + \frac{1}{k}\right)$$

conté infinits elements de A, és a dir, conté infinits termes de la successió. Per tant, per a cada $k \in \mathbb{N}$ posem escollir un $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_k} \in I_k$ i $n_k > n_{k-1}$. Clarament, la successió (a_{n_k}) així construida és una subsuccessió de (a_n) amb límit α. ■

Definició 1.2.14 Sigui (a_n) una successió de nombres reals. Definim el conjunt

$$\mathcal{L}(a_n) = \{L \in \mathbb{R} \,|\, \exists (a_{n_k}),\ \text{successió parcial de } (a_n),\ \text{tal que } L = \lim a_{n_k}\}.$$

Proposició 1.2.15 Si (a_n) una successió fitada de nombres reals, aleshores el conjunt $\mathcal{L}(a_n)$ és no buit i té màxim i mínim.

Demostració. Pel Teorema 1.2.13, el conjunt $\mathcal{L}(a_n)$ és no buit. Demostrem a continuació que aquest conjunt és fitat. En efecte, com que la successió (a_n) és fitada, existeix $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq M$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per a tot $L \in \mathcal{L}(a_n)$, existeix una subsuccessió (a_{n_k}) de (a_n) amb $\lim a_{n_k} = L$. Llavors per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$ per a tot $k \geq k_0$. Així doncs, $|L| \leq |L - a_{n_k}| + |a_{n_k}| < \varepsilon + M$ per a tot $\varepsilon > 0$, d'on es dedueix que $|L| \leq M$ i, per tant, M és fita superior de $\mathcal{L}(a_n)$. Podem trobar anàlogament una fita inferior per a aquest conjunt.

Donat que el conjunt $\mathcal{L}(a_n)$ és no buit i fitat, per la completesa dels nombres reals, existeixen $\alpha = \sup \mathcal{L}(a_n)$ i $\beta = \inf \mathcal{L}(a_n)$.

Vegem que $\alpha = \max \mathcal{L}(a_n)$. Per fer-ho, considerem, per a cada $k \in \mathbb{N}$, l'interval

$$I_k = \left(\alpha - \frac{1}{k}, \alpha\right).$$

Observem que, per a tot $k \in \mathbb{N}$, existeix $L_k \in \mathcal{L}(a_n)$ amb $L_k \in I_k$. Llavors, en cada interval I_k han d'existir infinits termes de la successió (a_n). Ara, per a cada $k \in \mathbb{N}$, podem escollir un $n_k \in \mathbb{N}$ amb $a_{n_k} \in I_k$ i tal que $n_k > n_{k-1}$. La successió (a_{n_k}) així construïda és evidentment una subsuccessió de (a_n) amb límit α i, per tant, $\alpha \in \mathcal{L}(a_n)$ amb el que hem provat $\alpha = \max \mathcal{L}(a_n)$. Es prova anàlogament que $\beta = \min \mathcal{L}(a_n)$. ■

Definició 1.2.16 Sigui (a_n) una successió fitada de nombres reals. El màxim del conjunt $\mathcal{L}(a_n)$ s'anomena *límit superior* de la successió (a_n), és a dir, $\limsup a_n = \max \mathcal{L}(a_n)$. Definim també el *límit inferior* de la successió (a_n), $\liminf a_n = \min \mathcal{L}(a_n)$.

Definició 1.2.17 Sigui (a_n) una successió de nombres reals. Si (a_n) no és fitada superiorment, posarem $\limsup a_n = +\infty$. Si (a_n) no és fitada inferiorment, posarem $\liminf a_n = -\infty$.

1.2.4 Successions de Cauchy

Definició 1.2.18 Sigui (a_n) una successió de nombres reals. Direm (a_n) és una successió de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall m, n \geq n_0,\ d(a_m, a_n) = |\, a_n - a_m \,| < \varepsilon.$$

Teorema 1.2.19 Sigui (a_n) una successió de nombres reals. Aleshores, (a_n) és convergent si i només si (a_n) és una successió de Cauchy.

Demostració. Suposem que (a_n) amb $\lim a_n = L$. Llavors,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0,\ |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per tant,

$$\forall m, n \geq n_0,\ |a_m - a_n| \leq |a_m - L| + |L - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Així doncs, (a_n) és successió de Cauchy.

Recíprocament, suposem que (a_n) és successió de Cauchy. Vegem en primer lloc que (a_n) és fitada. Per ser de Cauchy,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0,\ |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

Llavors $|a_n| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < \varepsilon + |a_{n_0}|$ per a tot $n \geq n_0$. Si prenem $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + \varepsilon\}$, es compleix que $|a_n| \leq M$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Així doncs, pel Teorema 1.2.13, existeix una subsuccessió (a_{n_k}) convergent. Sigui $\alpha = \lim a_{n_k}$. Ara demostrarem que també $\lim a_n = \alpha$. En efecte,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall k \geq k_0,\ |a_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'altra banda, com que (a_n) és de Cauchy es compleix que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall m, n \geq n_0,\ |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si escollim $n_1 = \max(n_{k_0}, n_0)$, llavors, per a tot $n \geq n_1$ es té

$$|a_n - \alpha| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - \alpha| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

on hem escollit $n_k \geq n_1$. Així que (a_n) és una successió convergent. ■

Observació 1.2.20 Observem que la implicació "convergent $\Longrightarrow$ Cauchy" és certa en qualsevol espai mètric. En canvi, la implicació "Cauchy $\Longrightarrow$ convergent" és conseqüència de la completesa dels nombres reals i no es compleix, per exemple, per a successions de nombres racionals. De fet, en un cos ordenat arquimedià, aquesta implicació és equivalent a l'axioma del suprem o a la propietat dels intervals encaixats. Amb aquesta propietat (Cauchy $\Longrightarrow$ convergent) podem definir *espai mètric complet*.

Definició 1.2.21 Direm que un espai mètric (E, d) és *complet* si tota successió de Cauchy en E té límit en E.

Capítol 2

Funcions reals d'una variable. Límits i continuïtat

2.1 Límits de funcions

2.1.1 Conceptes bàsics sobre funcions

Definició 2.1.1 Un *funció real d'una variable real* és una aplicació

$$\begin{array}{rccc} f: & A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & B \subset \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

El conjunt A és el *domini* de la funció. La *imatge* o *recorregut* de la funció és

$$\operatorname{Im} f = f(A) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, \exists x \in A \text{ amb } f(x) = y\} = \{f(x) \,:\, x \in A\}$$

Donats $A_1 \subset A$ i $B_1 \subset B$, definim els subconjunts

$$f(A_1) = \{f(x) \,:\, x \in A_1\} \subset B, \qquad f^{-1}(B_1) = \{x \in A \,:\, f(x) \in B_1\} \subset A.$$

Definició 2.1.2 Considerem una funció $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$.

- Direm que f és *injectiva* si, per a tot $x, y \in A$ amb $x \neq y$, es compleix $f(x) \neq f(y)$.
- Direm que f és *exhaustiva* si $f(A) = B$.
- Direm que f és *bijectiva* si és injectiva i exhaustiva.

Definició 2.1.3 Si $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ és una funció bijectiva, podem considerar la funció $f^{-1} : B \subset \mathbb{R} \to A \subset \mathbb{R}$, que s'anomena *funció inversa* de f, definida per $f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$.

Definició 2.1.4 Sigui $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció.

- Direm que f és *creixent* en A si $\forall\, x, y \in A,\ x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.
- Direm que f és *estrictament creixent* en A si $\forall\, x, y \in A,\ x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.
- Direm que f és *decreixent* en A si $\forall\, x, y \in A,\ x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.
- Direm que f és *estrictament decreixent* en A si $\forall\, x, y \in A,\ x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$.

- Direm que f és *monòtona* en A si és creixent o decreixent en A. Direm que f és *estrictament monòtona* en A si és estrictament creixent o estrictament decreixent en A.

Definició 2.1.5 (Operacions amb funcions) Siguin $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- *Producte per escalar*. Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ un escalar. Definim la funció $\lambda f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- *Suma*. La funció $f + g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es defineix per $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- *Producte*. La funció $fg : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es defineix per $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
- *Quocient*. Suposem que $g(x) \neq 0$ per a tot $x \in A$. La funció $(f/g)\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es defineix per $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Definició 2.1.6 (Composició de funcions) Siguin $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g\colon B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dues funcions tals que el recorregut de f està inclòs en el domini de g, és a dir, tals que $f(A) \subset B$. La *composició de f amb g* és la funció $g \circ f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Observació 2.1.7 Si $f\colon A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ és bijectiva, la funció inversa f^{-1} és l'única funció $g\colon B \subset \mathbb{R} \to A \subset \mathbb{R}$ tal que $g \circ f = I_A$ i $f \circ g = I_B$, on $I_A\colon A \to A$ és la funció identitat ($I_A(x) = x$).

2.1.2 Límits de funcions

Límit d'una funció en un punt

Definició 2.1.8 Siguin $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció, $a \in A'$ un punt d'acumulació del domini i $L \in \mathbb{R}$ un nombre real. Direm que el *límit de la funció f quan x tendeix a a és igual a L*, i escriurem $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que, per a tot } x \in A \text{ amb } 0 < |x - a| < \delta, \text{ es compleix } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Proposició 2.1.9 El límit d'una funció en un punt, si existeix, és únic. Això es compleix per a tots els tipus de límits que definirem a continuació.

Demostració: Suposem que existeixen dos nombres diferents $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tals que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ i $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$.

Per la definició de límit d'una funció es té que, donat

$$\epsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2} > 0$$

existeix $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L_1| < \epsilon$ sempre que $x \in A$ i $0 < |x - a| < \delta_1$. Anàlogament existeix $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - L_2| < \epsilon$ sempre que $x \in A$ i $0 < |x - a| < \delta_2$.

Per tant, si prenem $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, aleshores per a tot $x \in A$ amb $0 < |x - a| < \delta$, es compleix simultàniament $|f(x) - L_1| < \epsilon$ i $|f(x) - L_2| < \epsilon$. D'aquí deduïm que

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < 2\epsilon$$

i això contradiu l'elecció de ϵ que hem fet. ■

Observació 2.1.10 Observem que no és necessari que a sigui un punt del domini de f per a poder definir $\lim_{x \to a} f(x)$. El que necessitem és que a sigui un *punt d'acumulació* del domini.

Observació 2.1.11 El valor de $f(a)$ no intervé en la definició del límit $\lim_{x \to a} f(x)$.

Límits laterals

Definició 2.1.12 Siguin $A \subset \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$.

- Direm que a és un *punt d'acumulació per la dreta* de A, i escriurem $a \in A'_+$, si $(a, a+\epsilon) \cap A \neq \emptyset$ per a tot $\epsilon > 0$. Equivalentment, $a \in A'_+$ si existeix una successió (x_n), amb $x_n \in A$ i $x_n > a$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim x_n = a$.

- Direm que a és un *punt d'acumulació per l'esquerra* de A, i escriurem $a \in A'_-$, si $(a-\epsilon, a) \cap A \neq \emptyset$ per a tot $\epsilon > 0$. Equivalentment, $a \in A'_-$ si existeix una successió (x_n), amb $x_n \in A$ i $x_n < a$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim x_n = a$.

Definició 2.1.13 Siguin $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció, $a \in A'_+$ un punt d'acumulació per la dreta del domini de f i $L \in \mathbb{R}$ un nombre real. Direm que el *límit de la funció f quan x tendeix a a per la dreta* és igual a L, i escriurem $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = L$, si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que, per a tot } x \in A \text{ amb } 0 < x - a < \delta, \text{ es compleix } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definició 2.1.14 Siguin $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció, $a \in A'_-$ un punt d'acumulació per l'esquerra del domini de f i $L \in \mathbb{R}$ un nombre real. Direm que el *límit de la funció f quan x tendeix a a per l'esquerra* és igual a L, i escriurem $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = L$, si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que, per a tot } x \in A \text{ amb } 0 < a - x < \delta, \text{ es compleix } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Proposició 2.1.15 Siguin $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció i $a \in A'_+ \cap A'_-$. Aleshores

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \exists \lim_{x \to a_+} f(x) = L_1,\ \exists \lim_{x \to a_-} f(x) = L_2 \text{ i } L_1 = L_2$$

Demostració: Per demostrar l'equivalència de l'enunciat s'han de demostrar les dues implicacions. Per demostrar la implicació cap a la dreta, suposem que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Aleshores, per a tot $\epsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in A$ i $0 < |x - a| < \delta$. En particular, $|f(x) - L| < \epsilon$ si $x \in A$ i $0 < x - a < \delta$. Així doncs, el $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$ existeix i és igual a L. Anàlogament, $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = L$.

Per demostrar la implicació recíproca, suposem que els dos límits laterals existeixen i tenen el mateix valor, és a dir, $\lim_{x \to a_+} f(x) = \lim_{x \to a_-} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Per tant, per a tot $\epsilon > 0$, existeix $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ per a tot $x \in A$ amb $0 < x - a < \delta_1$. També existeix $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ per a tot $x \in A$ amb $0 < a - x < \delta_2$. Si prenem $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, llavors $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in A$ i $0 < |x - a| < \delta$. Per tant, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. ∎

Límits en l'infinit

Definició 2.1.16 Sigui $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on el domini A és tal que $(M, +\infty) \cap A \neq \emptyset$ per a tot $M > 0$ i sigui $L \in \mathbb{R}$ un nombre real. Direm que el *límit de la funció f quan x tendeix a més infinit* és igual a L, i escriurem $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, M > 0 \text{ tal que, per a tot } x \in A \text{ amb } x > M, \text{ es compleix } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definició 2.1.17 Anàlogament es defineix $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

Límits infinits

Definició 2.1.18 Siguin $f\colon A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funció i $a\in A'$ un punt d'acumulació del domini. Direm que el *límit de la funció f quan x tendeix a a és infinit*, i escriurem $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, si

$$\forall\, N>0,\ \exists\,\delta>0 \text{ tal que, per a tot } x\in A \text{ amb } 0<|x-a|<\delta,\ \text{es compleix } |f(x)|>N.$$

Definició 2.1.19 Siguin $f\colon A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funció i $a\in A'$ un punt d'acumulació del domini. Direm que el *límit de la funció f quan x tendeix a a és més infinit*, i escriurem $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, si

$$\forall\, N>0,\ \exists\,\delta>0 \text{ tal que, per a tot } x\in A \text{ amb } 0<|x-a|<\delta,\ \text{es compleix } f(x)>N.$$

Definició 2.1.20 Es defineix anàlogament $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Definició 2.1.21 Siguin $f\colon A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funció i $a\in A'_+$ un punt d'acumulació per la dreta del domini de f. Direm que el *límit de la funció f quan x tendeix a a per la dreta és infinit*, i escriurem $\lim\limits_{x\to a_+} f(x)=\infty$, si

$$\forall\, N>0,\ \exists\,\delta>0 \text{ tal que, per a tot } x\in A \text{ amb } 0<x-a<\delta \text{ es compleix } |f(x)|>N.$$

Definició 2.1.22 Anàlogament es defineixen els conceptes: $\lim\limits_{x\to a_+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a_+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a_-} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a_-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a_-} f(x)=-\infty$.

Definició 2.1.23 Sigui $f\colon A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on el domini A és tal que $(M,+\infty)\cap A\neq\emptyset$ per a tot $M>0$. Direm que el *límit de la funció f quan x tendeix a més infinit és igual a infinit*, i escriurem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$, si

$$\forall\, N>0,\ \exists\, M>0 \text{ tal que, per a tot } x\in A \text{ amb } x>M \text{ es compleix } |f(x)|>N.$$

Definició 2.1.24 Anàlogament es defineixen els conceptes: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Proposició 2.1.25 Siguin $f\colon A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funció i $a\in A'_+\cap A'_-$. Aleshores

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty\ (+\infty,-\infty) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to a_+} f(x)=\infty\ (+\infty,-\infty) \\ \text{i} \\ \lim_{x\to a_-} f(x)=\infty\ (+\infty,-\infty) \end{cases}$$

Demostració: Anàloga a la demostració de la Proposició 2.1.15. ■

Proposició 2.1.26 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ si i només si, per a qualsevol successió de nombres reals (x_n) tal que $x_n\in A\setminus\{a\}$ per a tot $n\in\mathbb{N}$ i $\lim x_n=a$, se satisfà $\lim f(x_n)=L$.

Demostració: Suposem que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, i sigui (x_n) una successió de nombres reals tal que $x_n\in A\setminus\{a\}$ i $\lim x_n=a$. Llavors, per a tot $\epsilon>0$, existeix $\delta>0$ tal que $|f(x)-L|<\epsilon$ sempre que $x\in A$ i $0<|x-a|<\delta$. A més a més, la convergència de la successió (x_n) implica que existeix un natural $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $|x_n-a|<\delta$ per a tot $n\geq n_0$ i, per tant, $|f(x_n)-L|<\epsilon$ per a tot $n\geq n_0$. En conseqüència $\lim f(x_n)=L$.

Demostrarem l'altra implicació pel mètode del contrarecíproc. És a dir, suposarem que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no és L i hem de provar que existeix una successió que no compleix la hipòtesi. En efecte, si

$\lim_{x\to a} f(x)$ no és L, aleshores existeix $\epsilon_0 > 0$ tal que per a tot $\delta > 0$ es podria trobar un $x \in A$ tal que $0 < |x-a| < \delta$ i $|f(x) - L| \geq \epsilon_0$. Llavors, per a cada $\delta_n = 1/n$, prenem un $x_n \in A \setminus \{a\}$ que compleixi $0 < |x_n - a| < \delta$ i $|f(x_n) - L| \geq \epsilon_0$. És clar que la successió (x_n) així formada compleix que $x_n \in A \setminus \{a\}$ i $\lim x_n = a$. En canvi, com que $|f(x_n) - L| \geq \epsilon_0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, és obvi que $\lim f(x_n)$ no és L, el que contradiu la hipòtesi. ■

Exercici 2.1.27 Per a tots els altres tipus de límits que hem definit anteriorment, enuncieu una proposició semblant a l'anterior.

Àlgebra de límits

Proposició 2.1.28 Siguin $f, g\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dues funcions i $a \in A'$ un punt d'acumulació del seu domini. Suposem que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ i que $\lim_{x\to a} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$. Aleshores

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ és un escalar, $\lim_{x\to a} (\lambda f)(x) = \lambda L_1$.
- $\lim_{x\to a} (f+g)(x) = L_1 + L_2$.
- $\lim_{x\to a} (fg)(x) = L_1 L_2$.
- Si $L_2 \neq 0$, aleshores $\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L_1}{L_2}$.

Demostració: Farem només la demostració per a la suma. La prova dels altres casos és anàloga. Com que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ i $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, per cada successió de nombres reals (x_n) tal que $x_n \in A \setminus \{a\}$ i $\lim x_n = a$, tenim que $\lim f(x_n) = L_1$ i $\lim g(x_n) = L_2$. Per les propietats dels límits de successions (Proposició 1.2.7), es compleix $\lim(f+g)(x_n) = \lim(f(x_n) + g(x_n)) = L_1 + L_2$, d'on es dedueix que $\lim_{x\to a} (f+g)(x) = L_1 + L_2$. ■

Observació 2.1.29 Les mateixes propietats es compleixen per als límits laterals i per als límits en l'infinit.

Observació 2.1.30 Les propietats dels límits infinits (en un punt, laterals o a l'infinit) en relació a les operacions són les mateixes que les de les successions (vegeu l'Apartat 1.2.2). Així doncs, per a límits infinits de funcions tenim les mateixes indeterminacions que per als límits infinits de successions.

Observació 2.1.31 Siguin $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g\colon B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcions tals que $f(A) \subset B$. Sigui $a \in A'$ i suposem que $\lim_{x\to a} f(x) = b \in B'$ i que $\lim_{y\to b} g(y) = c$. Aleshores *no sempre* es compleix que $\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$.

Demostració: Només cal presentar un contraexemple. Siguin $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on f és la funció constant igual a 0 i g està definida per

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

Llavors, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ i $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$. En canvi,

$$\lim_{x\to 0} (g \circ f)(x) = \lim_{x\to 0} g(f(x)) = g(0) = 1 \neq 0.$$

■

2.2 Continuïtat

2.2.1 Funcions contínues

Definició 2.2.1 Sigui $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció i $a \in A$ un punt del seu domini. Direm que la funció f és *contínua en el punt a* si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que, per a tot } x \in A \text{ amb } |x-a| < \delta,\ \text{ es compleix } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Equivalentment, f és contínua en a si, per a qualsevol successió de nombres reals (x_n) amb $x_n \in A$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i $\lim x_n = a$, es compleix $\lim f(x_n) = f(a)$.

Observació 2.2.2 Si $a \in A$ no és un punt d'acumulació de A, és a dir, si a és un punt aïllat de A, aleshores f és contínua en a.

Proposició 2.2.3 Siguin $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $a \in A \cap A'$. Són equivalents:

1. f és contínua en a.
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Demostració: Conseqüència directa de les Definicions 2.1.8 i 2.2.1. ■

Definició 2.2.4 Direm que una funció $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és contínua en A si és contínua en tots els punts de A.

Proposició 2.2.5 Siguin $f, g\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dues funcions que són contínues en el punt $a \in A$. Aleshores les funcions λf, $f+g$, fg són contínues en el punt a. A més a més, si $g(a) \neq 0$, la funció f/g és també contínua en el punt a.
Si f i g són contínues en A, aleshores les funcions λf, $f+g$, fg són contínues en A. A més a més, f/g és contínua en A si $g(x) \neq 0$ per a tot $x \in A$.

Demostració: Si $a \in A'$, és conseqüència directa de la Proposició 2.2.3 i de les propietats dels límits (Proposició 2.1.28). Si $a \in A$ és un punt aïllat, és evident. ■

Proposició 2.2.6 Siguin $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g\colon B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dues funcions tals que $f(A) \subset B$. Si f és contínua en el punt $a \in A$ i g és contínua en el punt $b = f(a) \in B$, aleshores la composició $g \circ f$ és contínua en el punt a. Si f és contínua en A i g és contínua en B, aleshores la composició $g \circ f$ és contínua en A.

Demostració: Per ser g contínua en $b = f(a) \in B$ és compleix

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta_1 > 0 \text{ tal que, per a tot } y \in B \text{ amb } |y - f(a)| < \delta_1,\ \text{ es compleix } |g(y) - g(f(a))| < \epsilon.$$

Per ser f contínua en $a \in A$, es té que, donat δ_1,

$$\exists\, \delta_2 > 0 \text{ tal que, per a tot } x \in A \text{ amb } |x-a| < \delta_2,\ \text{ es compleix } |f(x) - f(a)| < \delta_1.$$

Per tant, com que $f(A) \subset B$, es té que $|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$ per a tot $x \in A$ amb $|x-a| < \delta_2$. En conseqüència, $g \circ f$ és contínua es a. ■

Observació 2.2.7 Si $f\colon A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ és bijectiva i contínua en A, la funció inversa f^{-1} no és necessàriament contínua en B.

Demostració: Hem de presentar un contraexemple. Sigui $f\colon \{0\} \cup (1,2] \longrightarrow [1,2]$ definida per $f(0) = 1$ i $f(x) = x$ si $x \in (1,2]$. La funció f és bijectiva i contínua, en canvi f^{-1} no és contínua en $[1,2]$. ■

2.2.2 Classificació de les discontinuïtats

Definició 2.2.8 Sigui $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i sigui $a \in A$ tal que f no és contínua en a.

1. Si $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ però $L \neq f(a)$, direm que f presenta una *discontinuïtat evitable* en el punt a.

2. Si $a \in A'_- \cap A'_+$ i existeixen els límits laterals $\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ i $\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = L_2 \in \mathbb{R}$, però $L_1 \neq L_2$, direm que f presenta una *discontinuïtat de salt* en el punt a.

3. Si

   - $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, o bé
   - $a \in A'_- \cap A'_+$ i existeixen els límits laterals $\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = L_1 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ i $\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = L_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on almenys un dels dos límits és infinit,

   direm que f presenta una *discontinuïtat de salt infinit* en el punt a.

   Les desigualtats d'algun d'aquests tres tipus s'anomenen *discontinuïtats de primera espècie*.

4. Si algun dels dos límits laterals en el punt a no existeix en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, direm que la funció f presenta una *discontinuïtat de segona espècie* en el punt a.

2.3 Teoremes sobre funcions contínues

2.3.1 Teorema de Bolzano

Teorema 2.3.1 (Teorema de Bolzano) Sigui $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua en un interval $I \subset \mathbb{R}$. Siguin $a, b \in I$ tals que $a < b$ i $f(a)f(b) < 0$. Aleshores existeix un punt $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demostració: Suposem sense pèrdua de generalitat que $f(a) < 0 < f(b)$. Considerem $c = (a+b)/2$, el punt mig del segment $[a, b]$. Si $f(c) = 0$, ja hem trobat el punt buscat. Si $f(c) < 0$, considerem l'interval $[a_1, b_1] = [c, b]$ i prenem l'interval $[a_1, b_1] = [a, c]$ si $f(c) > 0$.

En qualsevol cas hem obtingut un interval $I_1 = [a_1, b_1] \subset [a, b]$ tal que la seva longitud és la meitat de la de l'interval $I = [a, b]$ i tal que $f(a_1) < 0 < f(b_1)$.

Reiterant el procés obtenim o bé un punt $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$, o bé una successió $I_n = [a_n, b_n]$ d'intervals encaixats amb $\ell(I_n) = \ell(I)/2^n$ i $f(a_n) < 0 < f(b_n)$.

Pel Teorema 1.1.14 existeix un únic nombre real α tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\alpha\}$. La successió $\{a_n\}$ dels extrems inferiors dels intervals I_n és convergent amb límit α, i el mateix es compleix per a la successió $\{b_n\}$ dels extrems superiors d'aquests intervals. A més a més com que f és contínua en $[a, b]$, es té que $\lim f(a_n) = f(\alpha)$ i $\lim f(b_n) = f(\alpha)$. Ara bé, $f(\alpha) \leq 0$ ja que $f(a_n) < 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i, per ser $f(b_n) > 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, tenim $f(\alpha) \geq 0$. Per tant, $f(\alpha) = 0$. ∎

Corol·lari 2.3.2 Sigui $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua en un interval $I \subset \mathbb{R}$. Siguin $a, b \in I$ tals que $a < b$ i $f(a) < f(b)$. Aleshores, per a tot $y \in (f(a), f(b))$, existeix un punt $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = y$.

Demostració: Donat $y \in (f(a), f(b))$, considerem la funció $g\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $g(x) = f(x) - y$. Es tracta d'una funció contínua en I, i tal que $g(a) = f(a) - y < 0$ i $g(b) = f(b) - y > 0$. Llavors, pel Teorema 2.3.1, existeix $x \in (a, b)$ tal que $g(x) = f(x) - y = 0$, això és, $f(x) = y$.

Corol·lari 2.3.3 Sigui $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua en un interval $I \subset \mathbb{R}$. Aleshores el recorregut $f(I) = J$ és també un interval.

Demostració: Pel Corol·lari 2.3.2, el conjunt $f(I)$ satisfà la propietat següent: per a tot parell de punts $y_1, y_2 \in f(I)$ amb $y_1 < y_2$, l'interval $[y_1, y_2]$ està contingut en $f(I)$. Aquesta propietat caracteritza els intervals. ■

Proposició 2.3.4 Siguin $I, J \subset \mathbb{R}$ intervals i $f\colon I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ una funció contínua i bijectiva. Aleshores f és estrictament monòtona.

Demostració: Suposem que f no fos estrictament monòtona. Aleshores existeixen punts $a, b, c \in I$ tals que $b < a < c$ i, o bé $f(b) < f(a)$ i $f(c) < f(a)$, o bé $f(b) > f(a)$ i $f(c) > f(a)$. Per simetria, podem suposar que estem en el primer cas. Sigui $y \in \mathbb{R}$ tal que $\max(f(b), f(c)) < y < f(a)$. Pel Corol·lari 2.3.2, existirien punts $x_1 \in (b, a)$ i $x_2 \in (a, c)$ tals que $f(x_1) = f(x_2) = y$, que contradiu la injectivitat de f. ■

Proposició 2.3.5 Siguin $I, J \subset \mathbb{R}$ intervals i $f\colon I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ una funció contínua i bijectiva. Aleshores la funció inversa $f^{-1}\colon J \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$ és contínua.

Demostració: Com que f és una funció contínua i bijectiva, per la Proposició 2.3.4 sabem que és estrictament monòtona. Suposem que és estrictament creixent, llavors f^{-1} també ho és.

Volem demostrar que, per a tot $y_0 \in J$, donat $\epsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que si $|y - y_0| < \delta$, llavors $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon$. En efecte, sigui $x_0 = f^{-1}(y_0)$ i siguin $y_1 = f(x_0 - \epsilon)$ i $y_2 = f(x_0 + \epsilon)$. Per ser f estrictament monòtona creixent s'ha de complir que $y_1 < y_0 < y_2$. Sigui $\delta > 0$ tal que $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (y_1, y_2)$. Per ser f^{-1} estrictament creixent, es compleix $f^{-1}(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, i això és precisament el que volíem demostrar. ■

2.3.2 Teorema de Weierstrass

Definició 2.3.6 Sigui $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció.

- Si existeix un punt $a \in A$ tal que $f(x) \leq f(a)$ per a tot $x \in A$, direm que $M = f(a)$ és el *valor màxim absolut* de la funció f. En aquest cas, direm que el màxim absolut de la funció f s'assoleix en el punt a.
- Si existeix un punt $b \in A$ tal que $f(x) \geq f(b)$ per a tot $x \in A$, direm que $m = f(a)$ és el *valor mínim absolut* de la funció f. En aquest cas, direm que el mínim absolut de la funció f s'assoleix en el punt b.

Proposició 2.3.7 *Sigui* $f\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funció contínua en l'interval tancat* $[a, b]$. *Aleshores el recorregut* $f([a, b])$ *és un interval fitat.*

Demostració: Pel Corol·lari 2.3.3, $f([a, b]) = J$ és un interval. Suposem que no està fitat superiorment. Aleshores existeix una successió (y_n) amb $y_n \in J$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim y_n = +\infty$. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, prenem un element $x_n \in [a, b]$ amb $f(x_n) = y_n$. Obtenim així una successió fitada (x_n) de nombres reals que, pel Teorema 1.2.13, admet una successió parcial (x_{n_k}) convergent. Sigui $\alpha \in [a, b]$ el límit d'aquesta successió parcial. Com que $\lim f(x_n) = +\infty$, aleshores $\lim f(x_{n_k}) = +\infty$. D'altra banda, com que f és contínua, $\lim f(x_{n_k}) = f(\alpha)$, una contradicció. ■

Teorema 2.3.8 (Teorema de Weirstrass) Sigui $f\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua en l'interval tancat $[a, b]$. Aleshores, existeixen $\alpha, \beta \in [a, b]$ tals que $m = f(\alpha)$ i $M = f(\beta)$ són, respectivament, el màxim absolut i el mínim absolut de la funció f.

Demostració: Per la Proposició 2.3.7, $f([a,b]) = J$ és un interval fitat. Sigui $M = \sup J$, hem de veure que existeix $\beta \in [a,b]$ tal que $f(\beta) = M$. Per ser M el suprem de J, per a tot $n \in \mathbb{N}$ existeix $y_n \in J$ amb $M - \frac{1}{n} < y_n < M$. Observem que $\lim y_n = M$. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, prenem $x_n \in [a,b]$ amb $f(x_n) = y_n$. Com abans, la successió (x_n) és fitada i, pel Teorema 1.2.13, admet una successió parcial (x_{n_k}) convergent. Sigui $\lim x_{n_k} = \beta \in [a,b]$. Per ser f continua en $[a,b]$, es té que $\lim f(x_{n_k}) = f(\beta)$. Ara bé, $\{f(x_{n_k})\}$ és una subsuccessió de $\{f(x_n)\}$, que també és convergent. Llavors ambdues han de tenir el mateix límit, això és $f(\beta) = M$ com volíem demostrar. Anàlogament es demostra que, si $m = \inf J$, existeix $\alpha \in [a,b]$ tal que $f(\alpha) = m$. ∎

Corol·lari 2.3.9 Sigui $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua en l'interval tancat $[a,b]$. Aleshores el recorregut de la funció f és també un interval tancat. És a dir, existeixen dos reals $m, M \in \mathbb{R}$ tals que $f([a,b]) = [m,M]$.

Demostració: És conseqüència directa del teorema anterior. ∎

2.4 Continuïtat uniforme

Definició 2.4.1 Direm que una funció $f\colon A \to \mathbb{R}$ és *uniformement contínua* si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \forall x, y \in A \text{ amb } |x-y| < \delta \text{ es compleix } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Observació 2.4.2 Recordeu que $f\colon A \to \mathbb{R}$ és contínua en A si i només si

$$\forall\, \epsilon > 0, \forall x \in A,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \forall y \in A \text{ amb } |x-y| < \delta \text{ es compleix } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Tot i la semblança de les definicions, l'ordre dels quantificadors és molt important. Observeu que, en la definició de continuïtat uniforme, el valor de δ és el mateix per a tot $x \in A$, mentre que per a la continuïtat δ pot dependre de x. És fàcil comprovar que tota funció uniformement contínua és contínua. En canvi, com veurem en l'exemple següent, algunes funcions contínues no són uniformement contínues.

Exemple 2.4.3 La funció $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = 1/x$ és contínua però no és uniformement contínua.

Demostració: Per a cada $\delta \in (0,1)$, prenem $x = \delta$ i $y = \delta/2$. Clarament, $|x-y| < \delta$ mentre $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{\delta} > 1$. Per tant, si $\epsilon < 1$, no existeix cap $\delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta$ impliqui $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. ∎

Teorema 2.4.4 Tota funció contínua en un interval tancat és uniformement contínua.

Demostració: Sigui $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua. Suposem que no és uniformement contínua. Aleshores, existeix $\epsilon_0 > 0$ tal que, per a tot $n \in \mathbb{N}$ existeixen $x_n, y_n \in [a,b]$ amb $|x_n - y_n| < 1/n$ però $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon_0$. Pel Teorema 1.2.13, la successió (x_n) admet una subsuccessió (x_{n_k}) convergent, és a dir, existeix $\lim\limits_k x_{n_k} = L \in [a,b]$. Com que $\lim\limits_k (x_{n_k} - y_{n_k}) = 0$, tenim que la subsuccessió (y_{n_k}) també és convergent i $\lim\limits_k y_{n_k} = L$. De la continuïtat de la funció f en deduïm que $\lim\limits_k f(x_{n_k}) = \lim\limits_k f(y_{n_k}) = f(L)$, però això és contradictori amb el fet que $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| > \epsilon_0$ per a tot $k \in \mathbb{N}$. ∎

Capítol 3

Derivació

3.1 Derivada d'una funció

3.1.1 Definició de derivada. Funcions derivables

Definició 3.1.1 Siguin $I \subset \mathbb{R}$ un interval obert, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció definida en aquest interval i $a \in I$. Direm que la funció f és *derivable en el punt* a si existeix el límit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

El valor d'aquest límit s'anomena la *derivada* de la funció f en el punt a i s'escriu com $f'(a)$.

Proposició 3.1.2 Si f és derivable en a, aleshores f és contínua en a.

Demostració: Suposem que existeix $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Per a tot $x \neq a$ es pot expressar

$$f(x) = f(a) + (x - a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

i, com que $\lim\limits_{x \to a}(x - a)\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \cdot f'(a) = 0$, deduïm que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, això és, f és contínua en a. ∎

Observació 3.1.3 El recíproc de la proposició anterior és fals en general.

Demostració: La funció $f(x) = |x|$ és clarament contínua en 0 i, en canvi, no és derivable en aquest punt. En efecte,

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_+} \frac{|x|}{x} = 1,$$

mentre que

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Per tant, f no és derivable en 0. ∎

Exercici 3.1.4 Proveu que qualsevol funció constant $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és derivable en tot punt $a \in \mathbb{R}$ i proveu que $f'(a) = 0$.

Exercici 3.1.5 Proveu que, per a tot $n \in \mathbb{N}$, la funció $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x^n$ és derivable en tot punt $a \in \mathbb{R}$ i proveu que $f'(a) = na^{n-1}$.

Definició 3.1.6 Siguin $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció i $a \in A'$ un punt d'acumulació del seu domini. Direm que f és un *infinitèsim* en a si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Direm que f és un *infinit* en a si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Definició 3.1.7 Siguin f i g dos infinitèsims (o infinits) en a. Direm que $f = o(g)$ si $\lim_{x\to a} (f(x)/g(x)) = 0$. Direm que f i g són infinitèsims (o infinits) equivalents en a si $\lim_{x\to a} (f(x)/g(x)) = 1$.

Definició 3.1.8 Sigui $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció definida en un interval obert I i sigui $a \in I$ un punt d'aquest interval. Direm que la recta $y = r(x) = f(a) + \lambda(x-a)$, on $\lambda \in \mathbb{R}$, és *tangent a la gràfica* de la funció f en el punt a si $f(x) - r(x) = o(x-a)$ com a infinitèsims en a.

Proposició 3.1.9 Sigui $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció definida en un interval obert I i sigui $a \in I$ un punt d'aquest interval. Aleshores, existeix la recta tangent $y = r(x) = f(a) + \lambda(x-a)$ a la gràfica de f en el punt a si i només si f és derivable en a. En aquest cas, $f'(a) = \lambda$, és a dir, $f'(a)$ és el pendent de la recta tangent a la gràfica de f en el punt a.

Demostració: La funció f és derivable en a si i només si existeix $\lambda \in \mathbb{R}$ amb $\lambda = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, és a dir, si i només si existeix $\lambda \in \mathbb{R}$ amb $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-\lambda(x-a)}{x-a} = 0$, és a dir, si i només si la recta $y = r(x) = f(a) + \lambda(x-a)$ és tangent a la gràfica de f en el punt a. ■

Observació 3.1.10 Sigui $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció derivable en $a \in I$. Aleshores

- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) = r(x) + o(x-a)$ (com a infinitèsims en a).
- Si $f'(a) \neq 0$, tenim que $f(x) - f(a)$ i $r(x) - r(a) = f'(a)(x-a)$ són infinitèsims equivalents en a.

Definició 3.1.11 Sigui $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció definida en un interval obert de $\mathbb{R}$. Direm que f és *derivable en* I si és derivable en tots els punts de I. En aquest cas, podem definir la *funció derivada* de f:

$$f' : \begin{array}{ccc} I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Definició 3.1.12 Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és derivable en I i la funció derivada f' és derivable en $a \in I$, podem considerar la *segona derivada* de la funció f en el punt a:

$$f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}.$$

Si f' és derivable en I, podem considerar la *funció derivada segona* de f, $f'' : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Anàlogament es defineixen les derivades tercera, quarta i, en general, la derivada n-èsima $f^{(n)}$ de la funció f. Si existeix la derivada n-èsima de f, direm que f és *n vegades derivable* (en un punt o en un interval). Si, per a tot $n \in \mathbb{N}$, existeix la funció derivada n-èsima $f^{(n)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, direm que f és *indefinidament derivable* en I.

Definició 3.1.13 Sigui $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció definida en un interval obert.

- Si f és contínua en I, direm que f és de *classe* $\mathcal{C}^0$ en I i escriurem $f \in \mathcal{C}^0(I)$.
- Si f és derivable en I i f' és contínua en I, direm que f és *derivable amb continuïtat* en I o de *classe* $\mathcal{C}^1$ en I i escriurem $f \in \mathcal{C}^1(I)$.
- En general, si existeix la funció derivada n-èsima $f^{(n)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i és contínua en I, direm que f és *n vegades derivable amb continuïtat* en I o de *classe* $\mathcal{C}^n$ en I i escriurem $f \in \mathcal{C}^n(I)$.

3.1.2 Propietats de la derivada

Proposició 3.1.14 Siguin $I \subset \mathbb{R}$ un interval obert i $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dues funcions derivables en $a \in I$. Aleshores

1. Per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$, la funció λf és derivable en a i $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.
2. La funció $f + g$ és derivable en a i $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
3. La funció fg és derivable en a i $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
4. Si $g(x) \neq 0$ per a tot $x \in I$, la funció $1/g$ és derivable en a i
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}.$$
5. Si $g(x) \neq 0$ per a tot $x \in I$, la funció f/g és derivable en a i
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Demostració: La primera i la segona propietats són evidents a partir de la definició de derivada i les propietats dels límits. La propietat relativa a la derivada del producte es dedueix de:

$$\lim_{x\to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Hem fet us del fet que la funció g, per ser derivable en a, és contínua en a. Per demostrar la quarta propietat, utilitzem que $g(x) \neq 0$ per a tot $x \in I$ i fem:

$$\lim_{x\to a} \frac{(\frac{1}{g})(x) - (\frac{1}{g})(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \lim_{x\to a} -\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \frac{1}{g(x)g(a)} = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Finalment, la cinquena propietat es prova combinant les dues anteriors:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) =$$

$$= \frac{f'(a)}{g(a)} - f(a)\frac{g'(a)}{(g(a))^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

■

Proposició 3.1.15 (Regla de la cadena) Siguin $I, J \subset \mathbb{R}$ intervals oberts i dues funcions $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tals que $f(I) \subset J$. Suposem que f és derivable en $a \in I$ i que g és derivable en $b = f(a) \in J$. Aleshores la composició $g \circ f$ és derivable en a i

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Demostració: Abans de presentar la demostració correcta, convé dir que l'argument:

$$\lim_{x\to a} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{y\to b} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g'(b)f'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

és erroni, ja que poden existir valors $x \in I$ propers a a tals que $f(x) = f(a)$ i en aquest cas les igualtats anteriors no serien certes.

Per obtenir una demostració correcta, introduirem la funció auxiliar $G\colon J \to \mathbb{R}$ donada per

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(b)}{y-b} & \text{si } y \neq b \\ g'(b) & \text{si } y = b \end{cases}$$

Clarament, $\lim_{y\to b} G(y) = G(b)$ i, per tant, G és contínua en b. Per la Proposició 2.2.6, la funció $G\circ f$ és contínua en a. Així doncs, $\lim_{x\to a} G(f(x)) = G(f(a)) = g'(b)$. A més a més, per a tot $x \in I$,

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = G(f(x))\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

En efecte, si $f(x) \neq f(a)$, la igualtat és evident, mentre que tots dos termes s'anul·len si $f(x) = f(a)$. Amb tot això,

$$\lim_{x\to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} G(f(x)) \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g'(b)f'(a),$$

que conclou la demostració. ■

Proposició 3.1.16 Siguin $I, J \subset \mathbb{R}$ intervals oberts i $f\colon I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ una funció contínua i bijectiva. Suposem que f és derivable en $a \in I$ i que $f'(a) \neq 0$. Aleshores, la funció inversa $f^{-1}\colon J \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$ és derivable en $b = f(a) \in J$ i

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Demostració: Considerem la funció $F\colon I \to \mathbb{R}$ definida per

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

Aquesta funció és contínua en $a \in I$ i la funció $f^{-1}\colon J \to I$ és contínua en J per la Proposició 2.3.5. Per tant, per la Proposició 2.2.6, la funció $F\circ f^{-1}$ és contínua en $b \in J$. Així doncs,

$$f'(a) = (F\circ f^{-1})(b) = \lim_{y\to b}(F\circ f^{-1})(y) = \lim_{y\to b} \frac{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)} = \lim_{y\to b} \frac{y-b}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}.$$

Finalment, com que $f'(a) \neq 0$,

$$\lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

■

3.2 Teoremes sobre funcions derivables

3.2.1 Teoremes de Rolle, de Cauchy i del Valor Mig

Definició 3.2.1 Sigui $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció definida en un interval obert.

- Direm que f té un *màxim relatiu* en el punt $a \in I$ si
$$\exists\, \delta > 0 \text{ tal que } f(x) \leq f(a)\ \forall x \in (a - \delta, a + \delta).$$
- Direm que f té un *mínim relatiu* en el punt $a \in I$ si
$$\exists\, \delta > 0 \text{ tal que } f(x) \geq f(a)\ \forall x \in (a - \delta, a + \delta).$$
- Direm que f té un *extrem relatiu* en el punt $a \in I$ si té un màxim relatiu o un mínim relatiu en aquest punt.

Proposició 3.2.2 Sigui $I \subset \mathbb{R}$ un interval obert i $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció derivable en $a \in I$. Si f presenta un extrem relatiu en el punt a, aleshores $f'(a) = 0$.

Demostració: Suposem, sense pèrdua de generalitat, que f presenta un màxim relatiu en el punt a. Aleshores, existeix $\delta > 0$ tal que $f(x) - f(a) \leq 0$ per a tot $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Així doncs, $(f(x) - f(a))/(x - a) \geq 0$ si $a - \delta < x < a$ mentre que $(f(x) - f(a))/(x - a) \leq 0$ si $a < x < a + \delta$. D'aquí es dedueix fàcilment que $f'(a) = 0$. ∎

Teorema 3.2.3 (Teorema de Rolle) Sigui $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció tal que:

- f és contínua en $[a, b]$,
- f és derivable en (a, b),
- $f(a) = f(b)$.

Aleshores existeix $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.

Demostració: Pel Teorema de Weirstrass (Teorema 2.3.8), existeixen $\alpha, \beta \in [a, b]$ tals que $f(\alpha) = m$ i $f(\beta) = M$ amb $m \leq f(x) \leq M$ per a tot $x \in [a, b]$. Si $\alpha, \beta \in \{a, b\}$, aleshores la funció f és constant i, per tant, $f'(\xi) = 0$ per a tot $\xi \in (a, b)$. Si, per exemple, $\beta \in (a, b)$, aleshores f presenta un màxim local en β i, per la Proposició 3.2.2, $f'(\beta) = 0$. ∎

Teorema 3.2.4 (Teorema de Cauchy) Siguin $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dues funcions tals que:

- f i g són contínues en $[a, b]$,
- f i g són derivables en (a, b),
- $g(a) \neq g(b)$,
- $\forall\, x \in (a, b)$, $f'(x) \neq 0$ o bé $g'(x) \neq 0$.

Aleshores existeix $\xi \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Demostració: Considerem la funció $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$. Clarament, h és contínua en $[a, b]$, derivable en (a, b) i també $h(a) = h(b)$. És a dir, la funció h compleix les hipòtesis del Teorema de Rolle. Per tant, existeix $\xi \in (a, b)$ tal que

$$h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0.$$

Observem que $g'(\xi) \neq 0$, ja que si $g'(\xi) = 0$, aleshores tindríem que $(g(b) - g(a))f'(\xi) = 0$ i, per tant, o bé $g(b) - g(a) = 0$ o bé $f'(\xi) = 0$, el que contradiu les hipòtesis. ∎

Teorema 3.2.5 (Teorema del Valor Mig) Sigui $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció tal que:

- f és contínua en $[a, b]$,
- f és derivable en (a, b).

Aleshores existeix $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demostració: Es dedueix del Teorema de Cauchy prenent $g(x) = x$. ∎

Corol·lari 3.2.6 Sigui $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció derivable en l'interval obert I tal que $f'(x) > 0$ per a tot $x \in I$. Aleshores f és estrictament creixent en I. Si $f'(x) < 0$ per a tot $x \in I$, aleshores f és estrictament decreixent en I.

Demostració: Suposem per exemple que $f'(x) > 0$ per a tot $x \in I$. Donats $x_1, x_2 \in I$ amb $x_1 < x_2$, pel Teorema del Valor Mig existeix $\xi \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$. ∎

Exercici 3.2.7 Siguin $I \subset \mathbb{R}$ un interval obert i $f : I \to \mathbb{R}$ una funció derivable en I tal que $f'(x) = 0$ per a tot $x \in I$. Proveu que f és una funció constant.

3.2.2 Regla de l'Hôpital

La Regla de l'Hôpital s'utilitza per resoldre indeterminacions que apareixen en calcular el límit del quocient de dues funcions.

Proposició 3.2.8 Sigui $A = (a - r, a + r) \setminus \{a\} \subset \mathbb{R}$, on $a, r \in \mathbb{R}$ i $r > 0$. Siguin $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tals que

- f i g són derivables en A,
- $\forall\, x \in A$, $g(x) \neq 0$ i $g'(x) \neq 0$,
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

Aleshores

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \Longrightarrow \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Demostració Suposem primer que $L \in \mathbb{R}$. Aleshores, per a tot $\epsilon > 0$, existeix δ amb $0 < \delta < r$ tal que

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \epsilon$$

per a tot $x \in (a, a + \delta)$. Prenem dos punts x, y amb $a < y < x < \delta$. Pel Teorema de Cauchy, existeix $\xi \in (y, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Observem que, donat que g' no s'anul·la en $(a, a+r)$, com a conseqüència del Teorema de Rolle tenim que $g(x) \neq g(y)$. Així doncs,

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - L \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L \right| < \epsilon$$

per a tot parell de punts x, y amb $a < y < x < a + \delta$. Si ara fixem $x \in (a, a+\delta)$ i tenim en compte que $\lim_{y \to a} f(y) = \lim_{y \to a} g(y) = 0$, obtenim

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leq \epsilon$$

per tot $x \in (a, a+\delta)$. Amb això hem demostrat que

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Anàlogament es prova que el límit per l'esquerra també és igual a L.

Suposem ara que

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty.$$

Aleshores, per a tot $K > 0$, existeix $\delta \in \mathbb{R}$ amb $0 < \delta < r$ tal que

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| > K$$

per a tot $x \in (a, a+\delta)$. Com abans, prenem dos punts x, y amb $a < y < x < a + \delta$. Pel Teorema de Cauchy, existeix $\xi \in (y, x)$ tal que

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| > K.$$

Si ara fixem $x \in (a, a+\delta)$ i tenim en compte que $\lim_{y \to a} f(y) = \lim_{y \to a} g(y) = 0$, obtenim

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \geq K$$

per tot $x \in (a, a+\delta)$. Amb això hem demostrat que

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Anàlogament es prova que el límit per l'esquerra també és infinit. ■

Observació 3.2.9 La proposició anterior es pot adaptar fàcilment al càlcul de límits laterals de la forma $\displaystyle\lim_{x \to a_+} \frac{f(x)}{g(x)}$ quan $\displaystyle\lim_{x \to a_+} f(x) = \lim_{x \to a_+} g(x) = 0$.

Proposició 3.2.10 Sigui $A = (M, +\infty) \subset \mathbb{R}$. Siguin $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tals que

- f i g són derivables en A,
- $\forall\, x \in A$, $g(x) \neq 0$ i $g'(x) \neq 0$,

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Aleshores
$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \Longrightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Demostració: Clarament podem suposar que $M > 0$. Considerem les funcions $F, G\colon (0, 1/M) \to \mathbb{R}$ definides per $F(t) = f(1/t)$ i $G(t) = g(1/t)$. Observem que

- F i G són derivables en $(0, 1/M)$,
- per a tot $t \in (0, 1/M)$, $G(t) \neq 0$ i $G'(t) = -(1/t^2)g'(1/t) \neq 0$,
- $\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{t\to 0} G(t) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

A més a més
$$\lim_{t\to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{-(1/t^2)f'(1/t)}{-(1/t^2)g'(1/t)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Així doncs, per la Proposició 3.2.8,
$$L = \lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

∎

Proposició 3.2.11 Sigui $A = (a-r, a+r) \setminus \{a\} \subset \mathbb{R}$, on $a, r \in \mathbb{R}$ i $r > 0$. Siguin $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tals que

- f i g són derivables en A,
- $\forall x \in A$, $g(x) \neq 0$ i $g'(x) \neq 0$,
- $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ o bé $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$.

Aleshores
$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \Longrightarrow \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Demostració: Suposem que $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ i que $L \in \mathbb{R}$. Com que $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = L$, per a tot $\epsilon > 0$, existeix $\delta \in \mathbb{R}$ amb $0 < \delta < r$ tal que
$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \frac{\epsilon}{2}$$
per a tot $x \in (a, a+\delta)$. Prenem dos punts x, y amb $a < y < x < a + \delta$. Com en la demostració de la Proposició 3.2.8, tenim que $g(x) \neq g(y)$. Pel Teorema de Cauchy, existeix $\xi \in (y, x)$ tal que
$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Així doncs,
$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - L \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

per a tot parell de punts x, y amb $a < y < x < a+\delta$. Fixem $x \in (a, a+\delta)$. Com que $\lim_{y\to a} g(y) = +\infty$, existeix $\delta_1 \in \mathbb{R}$ amb $0 < \delta_1 < x-a < \delta$ tal que $g(y) > g(x)$ i $g(y) > 0$ per a tot $y \in (a, a+\delta_1)$ Multiplicant les desigualtats

$$L - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} < L + \frac{\epsilon}{2}$$

per $(g(y)-g(x))/g(y)$, que és positiu, obtenim

$$\left(L - \frac{\epsilon}{2}\right)\frac{g(y)-g(x)}{g(y)} < \frac{f(y)-f(x)}{g(y)} < \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)\frac{g(y)-g(x)}{g(y)}$$

i per tant,

$$\left(L - \frac{\epsilon}{2}\right) - \left(L - \frac{\epsilon}{2}\right)\frac{g(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)} < \frac{f(y)}{g(y)} < \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right) - \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)\frac{g(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)}$$

sempre que $a < y < a+\delta_1$. Donat que $\lim_{y\to a} g(y) = +\infty$, existeix $\delta_2 \in \mathbb{R}$ amb $0 < \delta_2 < \delta_1$ tal que, per a tot y amb $a < y < a+\delta_2$,

$$\left|-\left(L - \frac{\epsilon}{2}\right)\frac{g(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)}\right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{i també} \quad \left|-\left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)\frac{g(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)}\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

i, per tant,

$$L - \epsilon < \frac{f(y)}{g(y)} < L + \epsilon$$

Amb això hem demostrat que

$$\lim_{y\to a_+} \frac{f(y)}{g(y)} = L.$$

Anàlogament es prova que el límit per l'esquerra també és igual a L.

Suposem ara que $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ i que $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = +\infty$. Així doncs, per a tot $K > 0$, existeix $\delta \in \mathbb{R}$ amb $0 < \delta < r$ tal que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > 2K$$

per a tot $x \in (a, a+\delta)$. Prenem dos punts x, y amb $a < y < x < a+\delta$. Com abans, $g(x) \neq g(y)$. Pel Teorema de Cauchy, existeix $\xi \in (y, x)$ tal que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Així doncs,

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > 2K$$

per a tot parell de punts x, y amb $a < y < x < a+\delta$. Fixem $x \in (a, a+\delta)$. Com al cas anterior, existeix $\delta_1 \in \mathbb{R}$ amb $0 < \delta_1 < x-a < \delta$ tal que $(g(y)-g(x))/g(y) > 0$ per a tot $y \in (a, a+\delta_1)$. Multiplicant la desigualtat anterior per aquesta quantitat,

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)} > 2K\,\frac{g(y)-g(x)}{g(y)}$$

i per tant,

$$\frac{f(y)}{g(y)} > 2K - 2K\,\frac{g(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)}$$

sempre que $a < y < a + \delta_1$. Donat que $\lim_{y \to a} g(y) = +\infty$, existeix $\delta_2 \in \mathbb{R}$ amb $0 < \delta_2 < \delta_1$ tal que, per a tot y amb $a < y < a + \delta_2$,

$$\left| -2K \frac{g(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)} \right| < K$$

i, per tant,

$$\frac{f(y)}{g(y)} > K$$

Amb això hem demostrat que

$$\lim_{y \to a_+} \frac{f(y)}{g(y)} = +\infty.$$

Anàlogament es prova que el límit per l'esquerra també és $+\infty$. S'obté també de manera análoga la demostració per al cas $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$. ∎

Observació 3.2.12 Amb algunes variacions en les proposicions anteriors, es pot demostrar que la Regla de l'Hôpital es pot utilitzar també per resoldre indeterminacions dels tipus següents:

- $\dfrac{\infty}{\infty}$ quan $x \to a_+$ o bé $x \to a_-$.
- $\dfrac{\infty}{\infty}$ quan $x \to +\infty$ o bé $x \to -\infty$

3.3 Polinomis de Taylor

3.3.1 Teorema de Taylor

Definició 3.3.1 Sigui $I \subset \mathbb{R}$ un interval obert i sigui $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^n$ en I. El *polinomi de Taylor de grau n de la funció f en el punt $a \in I$* és el polinomi

$$PT(f, a, n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Proposició 3.3.2 El polinomi de Taylor de grau n de la funció f en el punt $a \in I$, $PT(f, a, n)$, és l'únic polinomi $p(x)$ de grau menor o igual que n tal que $p(a) = f(a)$ i $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ per a tot $k = 1, \ldots, n$.

Demostració: Sigui p un polinomi de grau menor o igual que n tal que $p(a) = f(a)$ i $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ per a tot $k = 1, \ldots, n$. Si dividim el polinomi p pel polinomi $x - a$, tenim que existeixen un polinomi $p_1 \in \mathbb{R}[x]$ amb $\deg(p_1) \leq n - 1$ i un nombre real $b_0 \in \mathbb{R}$ tals que $p(x) = b_0 + (x-a)p_1(x)$. Si fem el mateix per a p_1, tenim $p_1(x) = b_2 + (x-a)p_2(x)$, on $p_2 \in \mathbb{R}[x]$ és un polinomi amb $\deg(p_2) \leq n - 2$ i $b_2 \in \mathbb{R}$. Per tant, $p(x) = b_0 + b_1(x-a) + (x-a)^2 p_2(x)$. Si repetim el procés, veiem que existeixen nombres reals $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, unívocament determinats per p, tals que

$$p(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n.$$

Observem que $f(a) = p(a) = b_0$. A més a més $f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a) = k!\, b_k$ per a tot $k = 1, \ldots, n$ i per tant

$$b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Això implica que $p = PT(f, a, n)$. ∎

Teorema 3.3.3 (Teorema de Taylor) Sigui $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^n$ en l'interval obert I. Siguin $a \in I$ i el polinomi de Taylor $p = PT(f, a, n)$. Aleshores $f(x) - p(x) = o((x-a)^n)$ quan $x \to a$. A més, el polinomi de Taylor $p = PT(f, a, n)$ és l'únic polinomi de grau menor o igual que n amb aquesta propietat.

Demostració: Hem de provar que
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^n} = 0.$$
Ho farem aplicant repetidament la Regla de l'Hôpital. Posem $F(x) = f(x) - p(x)$ i $G(x) = (x-a)^n$. Observem que, $F(a) = 0$ i que, per a tot $k = 1, \ldots, n$, la funció $F^{(k)}(x)$ és contínua i

$$F^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - p^{(k)}(a) = 0$$

per la Proposició 3.3.2. A més a més, G i les seves derivades de qualsevol ordre també són funcions contínues. Observem que $G(a) = 0$ i que

$$G^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k}$$

i, per tant, $G^{(k)}(a) = 0$ si $1 \le k \le n-1$ mentre $G^{(n)}(a) = n!$. Així doncs, com que

$$\lim_{x\to a} \frac{F^{(n)}(x)}{G^{(n)}(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x) - p^{(n)}(x)}{n!} = 0,$$

podem aplicar la Regla de l'Hôpital n vegades i obtenim

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to a} \frac{F^{(n)}(x)}{G^{(n)}(x)} = 0$$

com volíem demostrar.

Per provar la unicitat, considerem un polinomi $q \in \mathbb{R}[x]$ amb $\deg(q) \le n$, diferent del polinomi de Taylor $p = PT(f, a, n)$. Aleshores, per la propietat d'unicitat en la Proposició 3.3.2, $f^{(k)}(a) \neq q^{(k)}(a)$ per a algun $k \le n$ (aquí considerem que la derivada zero-èsima és la funció). Considerem el mínim enter k en aquesta situació. Aleshores, podem aplicar com abans la Regla de l'Hôpital i obtenim
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - q(x)}{G(x)} = \cdots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(k)}(x) - q^{(k)}(x)}{G^{(k)}(x)}$$
Aquest darrer límit és infinit si $k < n$ o bé és un real diferent de 0 si $k = n$. En tot cas, $f(x) - q(x) \neq o((x-a)^n)$ quan x tendeix a a. ∎

Teorema 3.3.4 (Teorema del residu de Lagrange) Sigui $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ en l'interval obert I. Considerem $p = PT(f, a, n)$, el polinomi de Taylor de grau n de la funció f en el punt $a \in I$. Aleshores, per a tot $x \in I$,

$$f(x) = p(x) + R_{n+1}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x),$$

on
$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

per a cert valor ξ de l'interval (x, a) o de l'interval (a, x) segons el cas.

Demostració: Suposem que $x > a$. Prenem les funcions $F(x) = f(x) - p(x)$ i $G(x) = (x-a)^{n+1}$. Clarament podem aplicar el Teorema de Cauchy a aquestes funcions a l'interval $[a, x]$. Tenim doncs que existeix un valor $\xi_1 \in (a, x)$ tal que

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}.$$

Si apliquem ara una altra vegada el mateix resultat a l'interval $[a, \xi_1]$, veiem que ha d'existir $\xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a, x)$ tal que

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}.$$

Si repetim el procés, obtenim que

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{n+1}(\xi)}{G^{n+1}(\xi)}$$

per a algún $\xi \in (a, x)$. Donat que la derivada $(n+1)$-èsima del polinomi p és nul·la, $F^{n+1}(\xi) = f^{n+1}(\xi)$. A més a més, $G^{n+1}(\xi) = (n+1)!$. Per tant

$$\frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

d'on es dedueix que

$$R_{n+1}(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

com volíem demostrar. El cas $x < a$ es demostra anàlogament. ■

3.3.2 Estudi local de funcions

Definició 3.3.5 Siguin $I \subset \mathbb{R}$ un interval obert, $a \in I$ i $f \in \mathcal{C}^1(I)$. Sigui $r(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ la recta tangent a la gràfica de f en el punt a.

- Direm que la funció f és *convexa en el punt* a si existeix $\delta > 0$ tal que $f(x) > r(x)$ per a tot $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$.
- Direm que la funció f és *còncava en el punt* a si existeix $\delta > 0$ tal que $f(x) < r(x)$ per a tot $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$.
- Direm que la funció f presenta un *punt d'inflexió* en a si, per a tot $\delta > 0$ existeixen $x_1, x_2 \in (a-\delta, a+\delta)$ tals que $f(x_1) > r(x_1)$ i $f(x_2) < r(x_2)$.

Proposició 3.3.6 Siguin $I \subset \mathbb{R}$ un interval obert, $a \in I$ i una funció $f \in \mathcal{C}^{2n}(I)$ tal que $f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(2n-1)}(a) = 0$ i $f^{(2n)}(a) \neq 0$. Aleshores

- Si $f^{(2n)}(a) > 0$, la funció f és convexa en el punt a.
- Si $f^{(2n)}(a) < 0$, la funció f és còncava en el punt a.

Demostració: Suposem que $f^{(2n)}(a) > 0$. Sigui $p = PT(f, a, 2n)$. Aleshores, pel Teorema 3.3.3,

$$f(x) = p(x) + o((x-a))^{2n} = f(a) + f'(a)(x-a) + f^{(2n)}(a)(x-a)^{2n} + o((x-a))^{2n}.$$

Per tant, si $r(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ és la recta tangent a la gràfica de f en el punt a, tenim que

$$f(x) - r(x) = f^{(2n)}(a)(x - a)^{2n} + g(x),$$

on

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{(x - a)^{2n}} = 0.$$

Per tant, existeix $\delta > 0$ tal que, per a tot $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$,

$$\left| \frac{g(x)}{(x - a)^{2n}} \right| < |f^{(2n)}(a)|.$$

i, per tant $|g(x)| < |f^{(2n)}(a)(x - a)^{2n}| = f^{(2n)}(a)(x - a)^{2n}$ per a tot $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$. En conseqüència, $f(x) - r(x) > 0$ per a tot $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ i la funció és convexa en el punt a.

La demostració és anàloga per al cas $f^{(2n)}(a) < 0$. ■

Proposició 3.3.7 Siguin $I \subset \mathbb{R}$ un interval obert, $a \in I$ i una funció $f \in \mathcal{C}^{2n+1}(I)$ tal que $f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(2n)}(a) = 0$ i $f^{(2n+1)}(a) \neq 0$. Aleshores f presenta un punt d'inflexió en a.

Demostració: Suposem que $f^{(2n+1)}(a) > 0$ Com en la demostració de la Proposició 3.3.6, tenim que

$$f(x) - r(x) = f^{(2n+1)}(a)(x - a)^{2n+1} + g(x),$$

on $r(x)$ és la recta tangent a la gràfica de f en el punt a i

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{(x - a)^{2n+1}} = 0.$$

Així doncs, existeix $\delta_1 > 0$ tal que $|g(x)| < |f^{(2n+1)}(a)(x - a)^{2n+1}|$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$. Per tant, $f(x) - r(x) < 0$ si $x \in (a - \delta_1, a)$ i $f(x) - r(x) > 0$ si $x \in (a, a + \delta_1)$. Observem que, per a qualsevol $\delta > 0$, podem prendre valors $x_1 \in (a - \delta, a) \cap (a - \delta_1, a) \neq \emptyset$ i també $x_2 \in (a, a + \delta) \cap (a, a + \delta_1) \neq \emptyset$. Per tant, existeixen $x_1, x_2 \in (a - \delta, a + \delta)$ tals que $f(x_1) - r(x_1) < 0$ i $f(x_2) - r(x_2) > 0$. En conseqüència, f presenta un punt d'inflexió en a. ■

Proposició 3.3.8 Siguin $I \subset \mathbb{R}$ un interval obert, $a \in I$ i una funció $f \in \mathcal{C}^n(I)$ tal que $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ i $f^{(n)}(a) \neq 0$. Aleshores

- Si n és parell i $f^{(n)}(a) > 0$, aleshores f té un mínim relatiu en el punt a.
- Si n és parell i $f^{(n)}(a) < 0$, aleshores f té un màxim relatiu en el punt a.
- Si n és senar, aleshores f no té cap extrem relatiu en el punt a.

Demostració: Com que $f'(a) = 0$, la recta tangent a la gràfica de f en el punt a és la funció constant $r(x) = f(a)$.

Si n és parell i $f^{(n)}(a) > 0$, aleshores f és convexa en a per la Proposició 3.3.6 i per tant existeix $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq r(x) = f(a)$ per a tot $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Així doncs, f té un mínim relatiu en el punt a.

Anàlogament, f té un màxim relatiu en el punt a si n és parell i $f^{(n)}(a) < 0$.

En canvi, si n és senar, aleshores, per la Proposició 3.3.7, f té un punt d'inflexió en el punt a. Per tant, per a tot $\delta > 0$ existeixen valors $x_1, x_2 \in (a - \delta, a + \delta)$ tals que $f(x_1) > r(x_1) = f(a)$ mentre $f(x_2) < r(x_2) = f(a)$. Així doncs, f no presenta cap extrem local en el punt a. ■

3.3.3 Polinomis de Taylor d'algunes funcions

Proposició 3.3.9 Sigui p un polinomi de grau menor o igual que n. Aleshores, $p = PT(p, a, n)$ per a tot $a \in \mathbb{R}$.

Proposició 3.3.10 Siguin $f, g \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dues funcions de classe $\mathcal{C}^n$ en l'interval obert I. Considerem els polinomis de Taylor $p = PT(f, a, n)$ i $q = PT(g, a, n)$, on $a \in I$. Aleshores,

1. $PT(\lambda f + \mu g, a, n) = \lambda p + \mu q$ per a tot $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. $PT(f', a, n-1) = p'$.
3. Si F és una funció tal que $F' = f$ en I, i P és l'únic polinomi amb $P' = p$ i $P(a) = 0$, aleshores $PT(F, a, n+1) = F(a) + P$.
4. $PT(fg, a, n) = (pq)_{|n-\text{truncat}}$, és a dir, el polinomi format pels termes del polinomi pq amb potències de $(x-a)$ de grau menor o igual que n.
5. $PT(f \circ r, 0, n) = (p \circ r)_{|n-\text{truncat}}$, on r és un polinomi sense terme independent.

Proposició 3.3.11 Es donen a continuació els polinomis de Taylor d'algunes funcions.

- $PT(e^x, 0, n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.
- $PT(\operatorname{ch} x, 0, 2n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $PT(\operatorname{sh} x, 0, 2n+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $PT(\cos x, 0, 2n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $PT(\sin x, 0, 2n+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Proposició 3.3.12 Aquest resultat es pot considerar com una generalització de la Fórmula del Binomi de Newton. Per a tot $r \in \mathbb{R}$,

$$PT((1+x)^r, 0, n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} x^k = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \cdots + \binom{r}{n} x^n,$$

on $\displaystyle\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}$.

Corol·lari 3.3.13 A partir de les Proposicions 3.3.10 i 3.3.12 obtenim els polinomis de Taylor següents.

- $PT\left(\dfrac{1}{1+x}, 0, n\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$.

- $PT(\log(1+x), 0, n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.
- $PT(\operatorname{arctg} x, 0, 2n+1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
- $PT(\arcsin x, 0, 2n+1) = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k+1} =$

  $x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^5 + \cdots + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^{2n+1}$.

Exercici 3.3.14 Demostreu tots els resultats d'aquest apartat.

Capítol 4

Integració

4.1 La integral de Riemann

4.1.1 Definició. Funcions integrables

Definició 4.1.1 Sigui $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un interval tancat. Una *partició* de l'interval I és qualsevol subconjunt finit $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ amb $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Amb això tenim que $I = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$.

Definició 4.1.2 Sigui $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció fitada i sigui $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ una partició de l'interval I. Per a cada $k = 1, \ldots, n$, considerem $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ i $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$. Definim la *suma inferior de la funció f respecte de la partició P* com

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}).$$

Definim també la *suma superior de la funció f respecte de la partició P* com

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Lema 4.1.3 Sigui $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció fitada i considerem $m = \inf(f)$ i $M = \sup(f)$. Aleshores, per a tota partició P de l'interval I, $m(b - a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b - a)$.

Demostració: Donat que $b - a = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})$,

$$m(b - a) \leq \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) \leq M(b - a).$$

$\blacksquare$

Definició 4.1.4 Siguin P i Q dues particions d'un interval tancat $I = [a, b]$. Direm que Q és un *refinament* de P si $P \subset Q$.

Lema 4.1.5 Siguin $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció fitada i P i Q dues particions de I tals que Q és un refinament de P. Aleshores $L(Q, f) \geq L(P, f)$ i $U(Q, f) \leq U(P, f)$.

Demostració: Demostrarem que $L(Q,f) \geq L(P,f)$, essent la prova de l'altra desigualtat anàloga. Posem $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ i $Q = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$. Per a cada $i = 1, \ldots, n$, El subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ corresponent a la partició P és la unió de diversos subintervals corresponents a la partició Q, és a dir,

$$[x_{i-1}, x_i] = \bigcup_{j=k_{i-1}}^{k_i} [y_{j-1}, y_j].$$

Per a cada $i = 1, \ldots, n$, posem $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ i posem $m'_j = \inf\{f(x) : x \in [y_{j-1}, y_j]\}$ per a cada $j = 1, \ldots, m$. Clarament, $m'_j \geq m_i$ si $[y_{j-1}, y_j] \subset [x_{i-1}, x_i]$. Aleshores

$$\sum_{j=k_{i-1}}^{k_i} m'_j (y_j - y_{j-1}) \geq m_i \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i} (y_j - y_{j-1}) = m_i (x_i - x_{i-1}).$$

I, per tant,

$$L(Q,f) = \sum_{j=1}^{m} m'_j (y_j - y_{j-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = L(P,f).$$

■

Lema 4.1.6 Siguin $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció fitada i P_1 i P_2 dues particions qualssevol de I. Aleshores $L(P_1,f) \leq U(P_2,f)$.

Demostració: La partició $Q = P_1 \cup P_2$ és un refinament tant de P_1 com de P_2. Podem aplicar doncs el Lemes 4.1.3 i 4.1.5 i tenim $L(P_1,f) \leq L(Q,f) \leq U(Q,f) \leq U(P_2,f)$. ■

Observació 4.1.7 Observem que el conjunt $\{L(P,f) : P \text{ és una partició de } I\} \subset \mathbb{R}$ de tots els possibles valors de les sumes inferiors d'una funció fitada f en un interval $[a,b]$ és no buit i fitat superiorment. En efecte, pel Lema 4.1.3, el valor $M(b-a)$ n'és una fita superior. Per tant, existeix un nombre real que és el suprem d'aquest conjunt. Anàlogament, el conjunt de tots els possibles valors de les sumes superiors és no buit i fitat inferiorment i, en conseqüència, admet ínfim.

Definició 4.1.8 Sigui $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció fitada. La *integral inferior de la funció f en l'interval* $[a,b]$ es defineix com

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P,f) : P \text{ és una partició de } I\}.$$

Definim també la *integral superior de la funció f en l'interval* $[a,b]$:

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P,f) : P \text{ és una partició de } I\}.$$

Observació 4.1.9 Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció fitada. Aleshores, $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Definició 4.1.10 Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció fitada. Direm que f és *integrable segons Riemann en l'interval* $[a,b]$ si

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

En aquest cas, aquest valor s'anomena la *integral de Riemann de f en l'interval* $[a,b]$:

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Observació 4.1.11 Sigui $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció integrable. Sigui $A \in \mathbb{R}$ tal que $L(P,f) \leq A \leq U(P,f)$ per a tota partició P de l'interval $[a,b]$. Aleshores, $A = \int_a^b f$.

Proposició 4.1.12 Sigui $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció fitada. Aleshores f és integrable en I si i només si per a tot $\epsilon > 0$ existeix una de partició P de I tal que $U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$.

Demostració: Suposem que f és integrable. Com que

$$\int_a^b f = \sup\{L(P,f) \,:\, P \text{ és una partició de } I\} = \inf\{U(P,f) \,:\, P \text{ és una partició de } I\},$$

per a tot $\epsilon > 0$ existeixen particions Q, Q' de I tals que $\int_a^b f - L(Q,f) < \epsilon/2$ i $U(Q',f) - \int_a^b f < \epsilon/2$. Si prenem $P = Q \cup Q'$, que és un refinament comú a aquestes dues particions, tindrem

$$U(P,f) - L(P,f) \leq U(Q',f) - L(Q,f) = U(Q',f) - \int_a^b f + \int_a^b f - L(Q,f) < \epsilon.$$

Provem ara el recíproc. Donat $\epsilon > 0$ qualsevol, prenem una partició P de $[a,b]$ amb $U(P,f) - L(P,f)) < \epsilon$. Aleshores,

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq U(P,f) - L(P,f)) < \epsilon.$$

Com que la desigualtat és vàlida per a tot $\epsilon > 0$, tenim que $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ i, per tant, la funció f és integrable en I. ■

Teorema 4.1.13 Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció monòtona (i, per tant, fitada). Aleshores f és integrable.

Demostració: Suposem que f és creixent. Donat $\epsilon > 0$, prenem $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \epsilon$$

i considerem la partició $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ amb $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$ per a cada $k = 1, \ldots, n$. Aleshores $m_k = \inf\{f(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_{k-1})$ i també $M_k = \sup\{f(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_k)$. Així doncs,

$$U(P_n, f) = \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

A més a més,

$$L(P_n, f) = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}).$$

Clarament,

$$U(P_n, f) - L(P_n, f) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \epsilon.$$

Per tant, per la Proposició 4.1.12, la funció f és integrable en $[a,b]$. ■

Exercici 4.1.14 Per a la funció $f(x) = x$, calculeu $\int_0^1 f$ a partir de la definició de integral.

Teorema 4.1.15 Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua (i, per tant, fitada). Aleshores f és integrable.

Demostració: Prenem $\epsilon > 0$ arbitrari. Pel Teorema 2.4.4, la funció f és uniformement contínua. Per tant, existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon/(b-a)$ sempre que $|x - y| < \delta$. Sigui $n \in \mathbb{N}$ amb $n > (b-a)/\delta$ i considerem la partició $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ amb $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$ per a tot $k = 1, \ldots, n$. Aleshores qualsevol subinterval $[x_{k-1}, x_k]$ de la partició P_n té llargada menor que δ. A més a més, com que f és contínua, per a cada $k = 1, \ldots n$, existeixen $\alpha_k, \beta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tals que $m_k = f(\alpha_k)$ i $M_k = f(\beta_k)$ són, respectivament, els valors mínim i màxim absoluts de f en aquest subinterval. Per tant, com que $|\beta_k - \alpha_k| < \delta$, tenim que $M_k - m_k = |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \epsilon/(b-a)$. Amb tot això

$$U(P_n, f) - L(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n} = \epsilon.$$

■

4.1.2 Propietats de la integral

Proposició 4.1.16 Siguin $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dues funcions integrables i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Aleshores la funció $\lambda f + \mu g$ és integrable i $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.

Demostració: Demostrarem primer que λf és integrable i que $\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$. Això és clarament cert per a $\lambda = 0$. Ho provem a continuació per a $\lambda > 0$. Per a qualsevol partició $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de l'interval $[a, b]$,

$$\inf\{\lambda f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = \lambda \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

i també

$$\sup\{\lambda f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = \lambda \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Així doncs, $L(P, \lambda f) = \lambda L(P, f)$ i $U(P, \lambda f) = \lambda U(P, f)$. Com que f és integrable, donat $\epsilon > 0$ arbitrari, existeix una partició P de l'interval $[a, b]$ tal que $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon/\lambda$, i per tant $U(P, \lambda f) - L(P, \lambda f) < \epsilon$. Així doncs λf és integrable per la Proposició 4.1.12. A més a més, $L(P, \lambda f) \leq \lambda \int_a^b f \leq U(P, \lambda f)$ per a qualsevol partició P de $[a, b]$. Això implica que $\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$ per l'Observació 4.1.11. Per provar el cas $\lambda < 0$, n'hi ha prou provant que $-f$ és integrable i que $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$. En primer lloc,

$$\inf\{-f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = -\sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

i

$$\sup\{-f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = -\inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

D'aquí, $L(P, -f) = -U(P, f)$ i $U(P, -f) = -L(P, f)$ i, en conseqüència, per a tot $\epsilon > 0$, existeix una partició P de $[a, b]$ tal que $U(P, -f) - L(P, -f) = -L(P, f) + U(P, f) < \epsilon$. Per tant, la funció $-f$ és integrable. A més a més, com que $L(P, -f) \leq -\int_a^b f \leq U(P, -f)$ per a qualsevol partició P, tenim que $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$.

Hem de demostrar ara que $f + g$ és integrable i que $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. Per a cada partició $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de l'interval $[a, b]$, tenim

$$\inf\{(f+g)(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \geq \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} + \inf\{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

i també

$$\sup\{(f+g)(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k]\} \leq \sup\{f(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k]\} + \sup\{g(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Amb tot això,

$$L(P,f) + L(P,g) \leq L(P,f+g) \leq U(P,f+g) \leq U(P,f) + U(P,g) \qquad (4.1)$$

per a qualsevol partició P de l'interval $[a,b]$. Per a $\epsilon > 0$ arbitrari, prenem Q, Q' particions de $[a,b]$ tals que $U(Q,f) - L(Q,f) < \epsilon/2$ i $U(Q',g) - L(Q',g) < \epsilon/2$. Prenem un refinament comú $P = Q \cup Q'$. Aleshores, de les desigualtats en (4.1) en deduïm que

$$U(P,f+g) - L(P,f+g) \leq (U(P,f) + U(P,g)) - (L(P,f) + L(P,g)) =$$

$$= (U(P,f) - L(P,f)) + (U(P,g) - L(P,g)) \leq (U(Q,f) - L(Q,f)) + (U(Q',g) - L(Q',g)) < \epsilon$$

i, per tant, $f+g$ és integrable. A més a més, usant una altra vegada les desigualtats en (4.1), per a tota partició P de l'interval $[a,b]$,

$$L(P,f) + L(P,g) \leq L(P,f+g) \leq \int_a^b (f+g) \leq U(P,f+g) \leq U(P,f) + U(P,g).$$

D'altra banda, tenim també

$$L(P,f) + L(P,g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq U(P,f) + U(P,g).$$

Com que, per a cada $\epsilon > 0$, existeix una partició P amb $(U(P,f)+U(P,g))-(L(P,f)+L(P,g)) < \epsilon$, obtenim que $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. ■

Proposició 4.1.17 Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció integrable i siguin $m, M \in \mathbb{R}$ tals que $m \leq f(x) \leq M$ per a tot $x \in [a,b]$. Aleshores $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

Demostració: Conseqüència immediata del Lema 4.1.3. ■

Proposició 4.1.18 Siguin $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcions integrables tals que $f(x) \leq g(x)$ per a tot $x \in [a,b]$. Aleshores $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Demostració: Per la Proposició 4.1.16, la funció $g-f$ és integrable en $[a,b]$ i $\int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f$. Com que $g(x) - f(x) \geq 0$ per a tot $x \in [a,b]$, per la Proposició 4.1.17, $\int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$. ■

Proposició 4.1.19 Siguin $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció fitada i $c \in (a,b)$. Aleshores f és integrable en $[a,b]$ si i només si f és integrable en els intervals $[a,c]$ i $[c,b]$. A més a més, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Demostració: Donades $Q = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, partició de l'interval $[a,c]$, i $R = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$, partició de l'interval $[c,b]$, obtenim una partició

$$P = Q \sqcup R = \{x_0, x_1, \ldots, x_n = y_0, y_1, \ldots, y_m\}$$

de l'interval $[a,b]$. Es obvi que $L(P,f) = L(Q,f) + L(R,f)$ i també $U(P,f) = U(Q,f) + U(R,f)$.

Suposem que f és integrable en els intervals $[a,c]$ i $[c,b]$. Prenem $\epsilon > 0$ arbitrari i considerem particions Q, de l'interval $[a,c]$ i R de l'interval $[c,b]$ tals que $U(Q,f) - L(Q,f) < \epsilon/2$ i $U(R,f) -$

$L(R,f) < \epsilon/2$. Aleshores, és clar que $U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$ si prenem $P = Q \sqcup R$. Així doncs, f és integrable en $[a,b]$.

Recíprocament, si f és integrable en $[a,b]$, per a cada $\epsilon > 0$ podem trobar una partició P' de $[a,b]$ tal que $U(P',f) - L(P',f) < \epsilon$. Si refinem la partició P' afegint el punt c, obtindrem una partició P de $[a,b]$ que també compleix $U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$. A més a més, la partició P és de la forma $P = Q \sqcup R$, on Q i R són particions dels intervals $[a,c]$ i $[c,b]$, respectivament. Aleshores, $U(Q,f) - L(Q,f) \leq U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$ i, per tant, f és integrable en $[a,c]$. Anàlogament, f és integrable en $[c,b]$.

Finalment, hem de provar que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Donades dues particions qualssevol Q de l'interval $[a,c]$ i R de l'interval $[c,b]$, si $P = Q \sqcup R$,

$$L(P,f) = L(Q,f) + L(R,f) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq U(Q,f) + U(R,f) = U(P,f)$$

i, per l'Observació 4.1.11, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. ■

Definició 4.1.20 Si f és integrable en l'interval $[a,b]$, es defineix

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Observeu que aquest conveni és congruent amb la propietat d'additivitat de les integrals respecte dels intervals d'integració que hem vist en la Proposició 4.1.19.

Proposició 4.1.21 Siguin $I, J \subset \mathbb{R}$ dos intervals tancats i siguin $f : I \to J$ una funció integrable i $g : J \to \mathbb{R}$ una funció contínua. Aleshores la funció $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ és integrable en I.

Demostració: Posem $I = [a,b]$. Pel Teorema 2.3.8, existeixen $m, M \in \mathbb{R}$ tals que $m \leq g(y) \leq M$ per a tot $y \in J$. Posem $I = [a,b]$, i també $K = M - m$, i prenem $\epsilon > 0$ arbitrari. Donat que, pel Teorema 2.4.4, g és uniformement contínua, existeix $\delta > 0$ tal que $|g(y) - g(y')| < \epsilon/(b-a+K)$ sempre que $|y - y'| < \delta$. A més a més, podem suposar que $\delta < \epsilon/(b-a+K)$. Com que f és integrable en $I = [a,b]$, existeix una partició $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ d'aquest interval tal que $U(P,f) - L(P,f) < \delta^2$. Per a cada $k = 1, \ldots, n$, considerem

$$m_k = \inf\{f(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad M_k = \sup\{f(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Considerem $\mathcal{P}, \mathcal{G} \subset \{1, \ldots, n\}$ definits per $\mathcal{P} = \{k \,:\, M_k - m_k < \delta\}$ i $\mathcal{G} = \{k \,:\, M_k - m_k \geq \delta\}$. Aleshores,

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k \in \mathcal{P}} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k \in \mathcal{G}} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \delta^2.$$

Observem que

$$\delta \sum_{k \in \mathcal{G}} (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k \in \mathcal{G}} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \delta^2$$

i, per tant, $\sum_{k \in \mathcal{G}} (x_k - x_{k-1}) < \delta$. Per a cada $k = 1, \ldots, n$, prenem

$$m'_k = \inf\{(g \circ f)(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad M'_k = \sup\{(g \circ f)(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Com que

$$m'_k \geq \inf\{g(y) \,:\, y \in [M_k, m_k]\}, \qquad M'_k \leq \sup\{g(y) \,:\, y \in [M_k, m_k]\},$$

tenim que $M'_k - m'_k \leq \sup\{|g(y) - g(y')| \,:\, y, y' \in [M_k, m_k]\}$, i per tant $M'_k - m'_k \leq \epsilon/(b - a + K)$ sempre que $k \in \mathcal{P}$. Amb tot això,

$$U(P, g \circ f) - L(P, g \circ f) = \sum_{k=1}^{n} (M'_k - m'_k)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k \in \mathcal{P}} (M'_k - m'_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k \in \mathcal{G}} (M'_k - m'_k)(x_k - x_{k-1}) \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{b - a + K} \sum_{k \in \mathcal{P}} (x_k - x_{k-1}) + K \sum_{k \in \mathcal{G}} (x_k - x_{k-1}) < \frac{\epsilon}{b - a + K}(b - a) + K \frac{\epsilon}{b - a + K} = \epsilon.$$

En conseqüència, la funció $g \circ f$ és integrable. ■

Proposició 4.1.22 Siguin $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dues funcions integrables. Aleshores la funció fg és integrable.

Demostració: Per la Proposició 4.1.16, la funció $f+g$ és integrable. Considerem la funció $h(y) = y^2$. Per la Proposició 4.1.21, les funcions $f^2 = h \circ f$, $g^2 = h \circ g$ i $(f+g)^2 = h \circ (f+g)$ també són integrables en $[a, b]$. Finalment, apliquem la Proposició 4.1.16 una altra vegada i veiem que la funció $fg = ((f+g)^2 - f^2 - g^2)/2$ és integrable en $[a, b]$. ■

Proposició 4.1.23 Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció integrable. Aleshores la funció $|f|$ és integrable i

$$\int_a^b |f| \geq \left| \int_a^b f \right|.$$

Demostració: La funció $|f|$ és integrable per la Proposició 4.1.21. Com que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ per a tot $x \in [a, b]$, tenim per la Proposició 4.1.18 que $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. ■

4.2 Càlcul integral

4.2.1 Teorema Fonamental del Càlcul

Definició 4.2.1 Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Direm que una funció $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ és una *primitiva* de f si

- F és contínua en $[a, b]$,
- F és derivable en (a, b) i
- $F'(x) = f(x)$ per a tot $x \in (a, b)$.

Observació 4.2.2 Si F_1 i F_2 són dues primitives de f, aleshores $F_1 - F_2$ és una funció constant.

Teorema 4.2.3 (Teorema Fonamental del Càlcul, versió 1: Regla de Barrow) Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció integrable i sigui $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una primitiva de f. Aleshores

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Demostració: Sigui $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partició de $[a, b]$. Pel Teorema del Valor Mig (Teorema 3.2.5), per a cada $k = 1, \dots, n$ existeix $z_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que $F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(z_k)(x_k - x_{k-1}) = f(z_k)(x_k - x_{k-1})$. Per tant, de

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = U(P, f)$$

en deduïm que

$$L(P, f) \leq \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = F(b) - F(a) \leq U(P, f)$$

per a tota partició P de l'interval $[a, b]$. Així doncs, per l'Observació 4.1.11, $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. ■

Observació 4.2.4 Observeu que, usant el conveni de la Definició 4.1.20, la Regla de Barrow es pot aplicar també si $b < a$ ja que, en aquest cas, $\int_a^b f = -\int_b^a f = -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a)$.

Teorema 4.2.5 (Teorema Fonamental del Càlcul, versió 2) Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció integrable i considerem la funció $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida per $F(x) = \int_a^x f$ per a tot $x \in [a, b]$. Aleshores

- F és contínua en $[a, b]$ i,
- si f és contínua en $c \in (a, b)$, aleshores F és derivable en c i $F'(c) = f(c)$.

Demostració: Demostrem primer que F és contínua en qualsevol punt $c \in [a, b]$. Com que f és fitada, existeix $K > 0$ tal que $K \geq |f(x)|$ per a tot $x \in [a, b]$. Per a cada $\epsilon > 0$, prenem $\delta = \epsilon/K$. Aleshores, si $|x - c| < \delta$, tenim que

$$|F(x) - F(c)| = \left| \int_a^x f - \int_a^c f \right| = \left| \int_c^x f \right| \leq \left| \int_c^x |f| \right| \leq K|x - c| < K\delta = \epsilon.$$

Observeu que, si tenim en compte el conveni en la Definició 4.1.20, aquesta fitació és vàlida tant si $x \geq c$ com si $x \leq c$.

Provem a continuació que, si f és contínua en el punt $c \in (a, b)$, aleshores F és derivable en c i $F'(c) = f(c)$. Prenem $\epsilon > 0$ arbitrari. Com que f és contínua en c, existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ si $|x - c| < \delta$. Així doncs, si $|x - c| < \delta$,

$$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| = \left| \frac{\int_c^x f - f(c)(x - c)}{x - c} \right| = \left| \frac{\int_c^x (f - f(c))}{x - c} \right| \leq \frac{\left| \int_c^x |f - f(c)| \right|}{|x - c|} \leq \frac{|\epsilon(x - c)|}{|x - c|} = \epsilon.$$

Això demostra que $\lim_{x \to c} \dfrac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c)$. ■

Corol·lari 4.2.6 Siguin $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua i $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ la funció definida per $F(x) = \int_a^x f$. Aleshores F és una primitiva de f

Corol·lari 4.2.7 Siguin $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dues funcions contínues i suposem a més que F és derivable en (a, b). Són equivalents

1. $F'(x) = f(x)$ per a tot $x \in (a, b)$ i $F(a) = 0$.
2. $F(x) = \int_a^x f$ per a tot $x \in [a, b]$.

Exercici 4.2.8 Sigui $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua amb $f(x) \geq 0$ per a tot $x \in [a,b]$. Proveu que, si existeix $c \in [a,b]$ amb $f(c) > 0$, aleshores $\int_a^b f > 0$.

Teorema 4.2.9 (Teorema del Valor Mig per a Integrals) Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua. Aleshores existeix $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^b f = f(c)(b-a)$.

Demostració: El resultat és obvi si la funció f és constant. Suposem que f no és constant. Pel Teorema de Weirstrass (Teorema 2.3.8), existeixen $\alpha, \beta \in [a,b]$ tals que $m = f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) = M$, per a tot $x \in [a,b]$. Com que f no és constant, $m < M$ i, sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $\alpha < \beta$. Per la Proposició 4.1.18 i l'Exercici 4.2.8, $m(b-a) < \int_a^b f < M(b-a)$, i per tant

$$f(\alpha) < \frac{\int_a^b f}{b-a} < f(\beta).$$

Així doncs, pel Corol·lari 2.3.2, existeix $c \in (\alpha, \beta) \subset (a,b)$ tal que $f(c) = \dfrac{\int_a^b f}{b-a}$. ∎

Exercici 4.2.10 Doneu una prova alternativa del Teorema 4.2.9 utilitzant el Teorema del Valor Mig (Teorema 3.2.5) i el Teorema Fonamental del Càlcul (Teorema 4.2.5).

4.2.2 Càlcul de primitives

Per la Regla de Barrow (Teorema 4.2.3), podem determinar el valor de la integral $\int_a^b f$ si coneixem una primitiva $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de la funció f. Es donen en aquest apartat alguns mètodes per trobar primitives d'algunes funcions.

Notació 4.2.11 Siguin $F, f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Si F és una primitiva de f, escriurem

$$\int f = F + C.$$

Així, el símbol $\int$ sense indicar l'interval d'integració denotarà la primitiva d'una funció. Amb aquesta notació indiquem que les funcions $F + C$, on $C \in \mathbb{R}$ és una constant arbitrària, són totes les primitives de la funció f. Usualment, s'utilitza l'expressió *integral definida* per a $\int_a^b f$, és a dir, la integral d'una funció en un interval, mentre que s'usa *integral indefinida* per a $\int f$, les primitives de f.

Proposició 4.2.12 (Mètode d'integració per parts) Siguin $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dues funcions integrables amb primitives $F, G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, respectivament. Aleshores

$$\int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b fG.$$

Demostració: És conseqüència directa del fet que la funció FG és una primitiva de la funció $Fg + fG$.

Observació 4.2.13 El mètode d'integració per parts ens permet també calcular algunes integrals indefinides, és a dir, determinar les primitives d'algunes funcions. En aquest cas escriurem

$$\int Fg = FG - \int fG.$$

Observació 4.2.14 El mètode d'integració per parts s'aplica per a trobar primitives de funcions dels tipus $p(x)e^x$, $p(x)\sin x$, $p(x)\cos x$, on $p(x)$ és un polinomi. També ens permet trobar les primitives de $e^x \sin x$, $e^x \cos x$. A part, hi ha moltes altres funcions que es poden integrar amb aquest mètode.

Exemple 4.2.15 Calculem, amb el mètode d'integració per parts, una primitiva de la funció $h(x) = x^2 e^{3x}$. Si posem $F(x) = x^2$ i $g(x) = e^{3x}$, aleshores $f(x) = 2x$ i $G(x) = e^{3x}/3$. Per tant,

$$\int x^2 e^{3x} = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int x e^{3x}.$$

En aquest punt tornem a aplicar el mètode prenent $F(x) = x$ i $g(x) = e^{3x}$:

$$\int x^2 e^{3x} = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{x e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\right) = \frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 2) + C.$$

Proposició 4.2.16 (Canvi de variable) Siguin $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua i $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una primitiva de f. Sigui $\phi\colon [c, d] \to [a, b]$ una funció contínua que és derivable amb continuïtat en l'interval obert (c, d) i tal que $\phi(c) = a$ i $\phi(d) = b$. Aleshores,

$$\int_a^b f = \int_c^d (f \circ \phi)\phi'.$$

Demostració: La funció $(f \circ \phi) \cdot \phi'\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ és contínua i $F \circ \phi\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ n'és una primitiva. Per tant, per la Regla de Barrow, $\int_c^d (f \circ \phi) \cdot \phi' = (F \circ \phi)(d) - (F \circ \phi)(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f$.■

Observació 4.2.17 El canvi de variable també funciona si $\phi(c) = b$ i $\phi(d) = a$. En aquest cas,

$$\int_a^b f = \int_d^c (f \circ \phi)\phi' = -\int_c^d (f \circ \phi)\phi'.$$

Notació 4.2.18 A vegades és convenient escriure $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ en lloc de $\displaystyle\int_a^b f$. Amb aquesta notació es fa palès quina és la variable de la funció que estem integrant en el cas que puguin aparèixer altres variables indicant paràmetres o constants. A més a més, aquesta notació és congruent amb el mètode del canvi de variable que hem introduït en la Proposició 4.2.16. Així, quan fem un canvi de variable, canviem x per $\phi(t)$ i canviem $\mathrm{d}\,x$ per $\phi'(t)\mathrm{d}\,t$. És a dir,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Exemple 4.2.19 Si volem calcular

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x,$$

podem considerar el canvi de variable $\phi : [0, 2] \to [0, 4]$ amb $\phi(t) = t^2$. Aleshores

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}\,t = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}\,t = 4 - 2(\log 3 - \log 1) = 4 - 2\log 3.$$

4.3 Integració impròpia

4.3.1 Classificació de les integrals impròpies

Hem definit la integral de Riemann per a funcions *fitades* definides en un interval *tancat* i *fitat*. Les *integrals impròpies* ens permeten estendre el concepte d'integral a funcions amb domini *no fitat* (*integrals impròpies de primera espècie*) i a funcions *no fitades* (*integrals impròpies de segona espècie*).

Definició 4.3.1 Sigui $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funció tal que f és integrable en $[a, M]$ per a tot $M > a$. Direm que la *integral impròpia de primera espècie* $\int_a^{+\infty} f$ és *convergent* si existeix el límit $\lim_{M\to+\infty} \int_a^M f \in \mathbb{R}$. En aquest cas, el valor de la integral impròpia és, per definició, el valor d'aquest límit.

Definició 4.3.2 Sigui $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ una funció tal que f és integrable en $[\delta, b]$ per a tot δ amb $a < \delta \le b$. Direm que la *integral impròpia de segona espècie* $\int_a^b f$ és *convergent* si existeix el límit $\lim_{\delta\to a_+} \int_\delta^b f \in \mathbb{R}$. En aquest cas, el valor de la integral impròpia és, per definició, el valor d'aquest límit.

Observació 4.3.3 Es defineix anàlogament la convergència de les integrals impròpies del tipus $\int_{-\infty}^a f$ (primera espècie) i també les del tipus $\int_a^b f$ quan el domini de f és l'interval $[a, b)$ (segona espècie).

Proposició 4.3.4 La integral impròpia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, \mathrm{d}\, x$ és convergent si i només si $\alpha > 1$.

Demostració: Si $\alpha \ne 1$, la funció $F(x) = x^{-\alpha+1}/(-\alpha + 1)$ és una primitiva de $f(x) = x^{-\alpha}$. Per tant, si $\alpha \ne 1$,

$$\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\, \mathrm{d}\, x = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(M^{1-\alpha} - 1\right).$$

Aquest límit existeix si i només si $\alpha > 1$. D'altra banda, si $\alpha = 1$,

$$\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x}\, \mathrm{d}\, x = \lim_{M\to+\infty} \log M$$

i aquest límit és infinit. ∎

Proposició 4.3.5 La integral impròpia $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\, \mathrm{d}\, x$ és convergent si i només si $\alpha < 1$.

Demostració: Si $\alpha \ne 1$,

$$\lim_{\delta\to a_+} \int_\delta^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\, \mathrm{d}\, x = \lim_{\delta\to a_+} \frac{1}{1-\alpha} \left((b-a)^{1-\alpha} - (\delta - a)^{1-\alpha}\right).$$

Aquest límit existeix si i només si $\alpha < 1$. Si $\alpha = 1$, tenim

$$\lim_{\delta\to a_+} \int_\delta^b \frac{1}{x-a}\, \mathrm{d}\, x = \lim_{\delta\to a_+} (\log(b-a) - \log(\delta - a))$$

i aquest límit és infinit. ∎

4.3.2 Convergència absoluta

Teorema 4.3.6 (Criteri de Cauchy)

- La integral impròpia de primera espècie $\int_a^{+\infty} f$ és convergent si i només si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, M > a \text{ tal que } \forall\, x, y > M,\ \left|\int_x^y f\right| < \epsilon.$$

- La integral impròpia de segona espècie $\int_a^b f$ és convergent si i només si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, x_0 \text{ amb } a < x_0 \le b \text{ tal que } \forall\, x, y \in (a, x_0),\ \left|\int_x^y f\right| < \epsilon.$$

Demostració: Suposem que la integral impròpia $\int_a^{+\infty} f$ és convergent i posem $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f = I \in \mathbb{R}$. Aleshores, per a tot $\epsilon > 0$, existeix $M > a$ tal que $|I - \int_a^x f| < \epsilon/2$ per a tot $x \ge M$. Per tant, si $x, y \ge M$,

$$\left|\int_x^y f\right| = \left|\int_a^y f - \int_a^x f\right| \le \left|\int_a^y f - I\right| + \left|I - \int_a^x f\right| < \epsilon.$$

Per demostrar el recíproc, provarem que, si es compleix la condició donada, aleshores per a tota successió (x_n) amb $x_n > a$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i amb $\lim x_n = +\infty$ es té que la sucessió (I_n) donada per $I_n = \int_a^{x_n} f$ és convergent. Això implica que la integral impròpia $\int_a^{+\infty} f$ és convergent. Sigui doncs (x_n) una tal successió i prenem $\epsilon > 0$ arbitrari. Per tant, existeix $M > a$ tal que $\left|\int_x^y f\right| < \epsilon$ si $x, y \ge M$. Com que $\lim x_n = +\infty$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \ge M$ per a tot $n \ge n_0$. Per tant, per a tot $m, n \ge n_0$,

$$|I_m - I_n| = \left|\int_a^{x_m} f - \int_a^{x_n} f\right| = \left|\int_{x_n}^{x_m} f\right| < \epsilon.$$

Així doncs, la successió (I_n) és una successió de Cauchy i, per tant, convergent.

La segona part del teorema es demostra anàlogament. ■

Definició 4.3.7 Direm que la integral impròpia de primera espècie $\int_a^{+\infty} f$ és *absolutament convergent* si la integral impròpia $\int_a^{+\infty} |f|$ és convergent. Direm que la integral impròpia de segona espècie $\int_a^b f$ és *absolutament convergent* si la integral impròpia $\int_a^b |f|$ és convergent.

Proposició 4.3.8 Si una integral impròpia és absolutament convergent, aleshores és convergent. La implicació recíproca no és certa en general.

Demostració: Suposem que la integral impròpia de primera espècie $\int_a^{+\infty} f$ és absolutament convergent, és a dir, que la integral impròpia $\int_a^{+\infty} |f|$ és convergent. Aleshores, pel Criteri de Cauchy,

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, M > a \text{ tal que } \forall\, x, y > M,\ \left|\int_x^y |f|\right| < \epsilon.$$

Per tant, $\left|\int_x^y f\right| \le \left|\int_x^y |f|\right| < \epsilon$ per a tot $x, y > M$. Això vol dir que la integral impròpia $\int_a^{+\infty} f$ és convergent. El mateix raonamet s'aplica a les integrals impròpies de segona espècie.

Es pot demostrar que la integral impròpia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}\, x$ és convergent però no absolutament convergent. ■

Proposició 4.3.9 Siguin $\int_a^{+\infty} f$ i $\int_a^{+\infty} g$ dues integrals impròpies de primera espècie (absolutament) convergents i siguin $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Aleshores la integral impròpia $\int_a^{+\infty}(\lambda f+\mu g)$ és (absolutament) convergent. El mateix resultat és cert per a integrals impròpies de segona espècie.

Demostració: Si les integrals impròpies $\int_a^{+\infty} f$ i $\int_a^{+\infty} g$ són convergents, aleshores també és convergent la integral impròpia $\int_a^{+\infty}(\lambda f + \mu g)$ ja que

$$\lim_{M\to\infty} \int_a^M (\lambda f + \mu g) = \lambda \lim_{M\to\infty} \int_a^M f + \mu \lim_{M\to\infty} \int_a^M g.$$

Sigui $K = 1 + \max\{|\lambda|, |\mu|\} > 0$. Si $\int_a^{+\infty} f$ i $\int_a^{+\infty} g$ són absolutament convergents, aleshores

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, M > a \text{ tal que } \forall\, x, y \geq M,\ \left|\int_x^y |f|\right| < \frac{\epsilon}{2K} \text{ i també } \left|\int_x^y |g|\right| < \frac{\epsilon}{2K}.$$

Així doncs, per a tot $x, y \geq M$,

$$\left|\int_x^y |\lambda f + \mu g|\right| \leq \left||\lambda| \int_x^y |f| + |\mu| \int_x^y |g|\right| \leq |\lambda| \left|\int_x^y |f|\right| + |\mu| \left|\int_x^y |g|\right| < \epsilon$$

i, per tant, la integral impròpia $\int_a^{+\infty}(\lambda f + \mu g)$ també és absolutament convergent. La demostració és anàloga per a integrals impròpies de segona espècie. ∎

4.3.3 Integrals impròpies de funcions positives

Proposició 4.3.10 Sigui $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funció tal que f és integrable en $[a, M]$ per a tot $M > a$ i $f(x) \geq 0$ per a tot $x \in [a, +\infty)$. Aleshores, o bé la integral impròpia $\int_a^{+\infty} f$ és convergent o bé $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \int_a^M f = +\infty$. En aquest darrer cas direm que la integral impròpia és *divergent*. El mateix passa per a integrals impròpies de segona espècie de funcions positives.

Proposició 4.3.11 (Criteri de comparació)

- Siguin $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ funcions integrables en $[a, M]$ per a tot $M > a$. Suposem que existeix $M_0 > a$ tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per a tot $x > M_0$. Aleshores,

$$\int_a^{+\infty} g \text{ és convergent } \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ és convergent.}$$

- Siguin $f, g :\ (a, b] \to \mathbb{R}$ funcions integrables en $[\delta, b]$ per a tot $\delta \in (a, b]$. Suposem que existeix $\delta_0 \in (a, b]$ tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per a tot $x \in (a, \delta_0]$. Aleshores,

$$\int_a^b g \text{ és convergent } \Longrightarrow \int_a^b f \text{ és convergent.}$$

Demostració: Si la integral impròpia $\int_a^{+\infty} g$ és convergent,

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, M > a \text{ tal que } \forall\, x, y > M,\ \left|\int_x^y g\right| < \epsilon.$$

Evidentment, podem suposar que $M > M_0$ i, com que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per a tot $x > M_0$,

$$\left|\int_x^y f\right| \leq \left|\int_x^y g\right| < \epsilon$$

per a tot $x, y > M$, i per tant la integral impròpia $\int_a^{+\infty} f$ és convergent. El mateix raonament demostra el resultat per a les integrals impròpies de segona espècie. ∎

Proposició 4.3.12 (Criteri del quocient per integrals impròpies de primera espècie) Siguin $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ funcions integrables en $[a, M]$ per a tot $M > a$ tals que $f(x) \geq 0$ i $g(x) > 0$ per a tot $x \in [a, +\infty)$. Aleshores,

- Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, aleshores $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ és convergent $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f$ és convergent.
- Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, aleshores $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ és convergent $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} g$ és convergent.
- Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, aleshores $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ és convergent $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f$ és convergent.

Demostració: Es dedueix fàcilment de la Proposició 4.3.11. Només cal observar els fets següents.

- Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, aleshores existeix $M_0 > a$ tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per a tot $x > M_0$.
- Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, aleshores existeix $M_0 > a$ tal que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ per a tot $x > M_0$.
- Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, aleshores $L > 0$ i, donat $\epsilon > 0$ tal que $L - \epsilon > 0$, existeix $M_0 > a$ tal que $0 \leq (L - \epsilon)g(x) \leq f(x) \leq (L + \epsilon)g(x)$ per a tot $x > M_0$. ∎

Proposició 4.3.13 (Criteri del quocient per integrals impròpies de segona espècie) Siguin $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ funcions integrables en $[\delta, b]$ per a tot si $\delta \in (a, b]$ tals que $f(x) \geq 0$ i $g(x) > 0$ per a tot $x \in (a, b]$. Aleshores,

- Si $\displaystyle\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, aleshores $\displaystyle\int_a^b g$ és convergent $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f$ és convergent.
- Si $\displaystyle\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, aleshores $\displaystyle\int_a^b f$ és convergent $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b g$ és convergent.
- Si $\displaystyle\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, aleshores $\displaystyle\int_a^b g$ és convergent $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_a^b f$ és convergent.

Demostració: Totalment anàloga a la de la proposició anterior. ∎

Capítol 5

Sèries numèriques i sèries de potències

5.1 Sèries numèriques

5.1.1 Generalitats

Definició 5.1.1 Sigui (a_n) una successió de nombres reals. Considerem (s_n) la successió definida per $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ per a tot $n \geq 0$. Escriurem $\sum_{n\geq 0} a_n$ per denotar la successió (s_n) i i direm que és la *sèrie numèrica* amb *successió de termes* (a_n). En aquesta situació direm que (s_n) és la *successió de sumes parcials* de la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$

Observació 5.1.2 Qualsevol successió (b_n) de nombres reals es pot expressar com una sèrie: només cal prendre $\sum_{n\geq 0} a_n$ amb $a_n = b_n - b_{n-1}$.

Definició 5.1.3 Direm que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és *convergent* si la successió (s_n) de sumes parcials és convergent. En aquest cas, el límit d'aquesta successió, $S = \lim s_n$, s'anomena *suma* de la sèrie i s'escriu $S = \sum_{n\geq 0} a_n$.

Observació 5.1.4 Si la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent, aleshores $\lim a_n = 0$. La implicació recíproca és falsa en general.

Demostració: Sigui (s_n) la successió de sumes parcials de la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$. Si la sèrie és convergent, aleshores la successió (s_n) és convergent. Com que $a_n = s_n - s_{n-1}$ per a tot $n \geq 1$, tenim que $\lim a_n = 0$.

Mostrem a continuació un exemple d'una sèrie $\sum_{n\geq 1} a_n$ no convergent amb $\lim a_n = 0$. Concretament, prenem la sèrie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ i considerem (s_n) la seva successió de sumes parcials. Aleshores, si $n = 2^k$,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + 8\frac{1}{16} + \cdots + 2^{k-1}\frac{1}{2^k} \geq \frac{k+1}{2}.$$

Per tant, la successió (s_n) té una subsuccessió (s_{n_k}) amb $\lim_k s_{n_k} = +\infty$. Com que la successió (s_n) és monòtona creixent, això implica que $\lim s_n = +\infty$. ■

Proposició 5.1.5 Siguin $\sum_{n\geq 0} a_n$ i $\sum_{n\geq 0} b_n$ dues sèries convergents amb suma S i T respectivament. Aleshores, per a qualssevol constants $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la sèrie $\sum_{n\geq 0}(\lambda a_n + \mu b_n)$ és convergent amb suma $\lambda S + \mu T$.

Demostració: Si (s_n) i (t_n) són les successions de sumes parcials de les sèries $\sum_{n\geq 0} a_n$ i $\sum_{n\geq 0} b_n$, aleshores $(\lambda s_n + \mu t_n)$ és la successió de sumes parcials de la sèrie $\sum_{n\geq 0}(\lambda a_n + \mu b_n)$. ■

Proposició 5.1.6 La sèrie $\sum_{n\geq 0} r^n$, que s'anomena *sèrie geomètrica de raó r*, és convergent si i només si $|r| < 1$. En aquest cas, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} r^n = \frac{1}{1-r}$.

Demostració: Sigui (s_n) la successió de sumes parcials de la sèrie $\sum_{n\geq 0} r^n$. Si $r = 1$, aleshores $s_n = n + 1$ i la sèrie no és convergent. Si $r \neq 1$, tenim que

$$s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Per tant, si $|r| < 1$, la successió (s_n) és convergent amb límit $1/(1 - r)$. Si $r = -1$ o bé $|r| > 1$, la successió (s_n) no és convergent. ■

Proposició 5.1.7 La sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent si i només si la successió de sumes parcials (s_n) és de Cauchy, és a dir, si i només si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall\, n \geq n_0 \text{ i } \forall\, m > 0,\ |s_m - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \epsilon.$$

Demostració: La successió (s_n) és convergent si i només si és una successió de Cauchy. ■

Definició 5.1.8 Direm que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és *absolutament convergent* si la sèrie $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ és convergent.

Proposició 5.1.9 Tota sèrie absolutament convergent és convergent. El recíproc d'aquesta afirmació és fals en general.

Demostració: Si $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ és convergent, per la Proposició 5.1.7,

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall\, n \geq n_0 \text{ i } \forall\, m > 0,\ |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+m}| < \epsilon.$$

Com que $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+m}|$, tenim que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent.

Demostrarem més endavant (Proposició 5.1.22) que la sèrie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n}$ és convergent, i hem vist a l'Observació 5.1.4 que la sèrie $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ no és convergent. ■

5.1.2 Sèries de termes positius i sèries alternades

Observació 5.1.10 Si $\sum_{n\geq 0} a_n$ és una sèrie de termes positius, és a dir, si $a_n \geq 0$ per a tot $n \geq 0$, aleshores la successió de sumes parcials (s_n) és monòtona creixent. Per tant, o bé $\lim s_n = S \in \mathbb{R}$ (la sèrie és convergent), o bé $\lim s_n = +\infty$ (la sèrie és *divergent*).

Observació 5.1.11 Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n$ una sèrie de termes positius. Aleshores, com que la successió (s_n) de sumes parcials és monòtona creixent, tenim que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent si i només si la successió de les seves sumes parcials és fitada superiorment.

Proposició 5.1.12 (Criteri de comparació) Siguin $\sum_{n\geq 0} a_n$ i $\sum_{n\geq 0} b_n$ dues sèries de termes positius tals que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ amb $0 \leq a_n \leq b_n$ per a tot $n \geq n_0$. Aleshores

$$\sum_{n\geq 0} b_n \text{ és convergent } \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \text{ és convergent.}$$

Demostració: Siguin (s_n) i (t_n) les successions de sumes parcials de les sèries $\sum_{n\geq 0} a_n$ i $\sum_{n\geq 0} b_n$, respectivament. Suposem que la sèrie $\sum_{n\geq 0} b_n$ és convergent, és a dir, que la successió (t_n) és fitada superiorment. Aleshores, per a tot $n \geq n_0$,

$$s_n = s_{n_0-1} + \sum_{k=n_0}^{n} a_k \leq s_{n_0-1} + \sum_{k=n_0}^{n} b_k = t_n - t_{n_0-1} + s_{n_0-1}.$$

Així doncs, la successió (s_n) també és fitada superiorment i, per tant, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent. ∎

Proposició 5.1.13 (Variant del criteri de comparació) Siguin $\sum_{n\geq 0} a_n$ i $\sum_{n\geq 0} b_n$ dues sèries de termes positius.

- Si $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, aleshores $\sum_{n\geq 0} b_n$ convergent $\Longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ convergent.
- Si $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$, aleshores $\sum_{n\geq 0} a_n$ convergent $\Longrightarrow \sum_{n\geq 0} b_n$ convergent.
- Si $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, aleshores $\sum_{n\geq 0} b_n$ convergent $\Longleftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ convergent.

Demostració: Podem aplicar en tots els casos la Proposició 5.1.12. En efecte, si $\lim a_n/b_n = 0$, aleshores existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq a_n \leq b_n$ per a tot $n \geq n_0$. En canvi, si $\lim a_n/b_n = \infty$, tenim que $0 \leq b_n \leq a_n$ a partir de cert lloc. Finalment, si $\lim a_n/b_n = L \in \mathbb{R} - \{0\}$, prenem $\epsilon > 0$ amb $L - \epsilon > 0$ i tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(L-\epsilon)b_n \leq a_n \leq (L+\epsilon)b_n$ per a tot $n \geq n_0$. ∎

Proposició 5.1.14 (Criteri de la integral) Sigui $f\colon [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, on $n_0 \in \mathbb{N}$, una funció monòtona decreixent tal que $f(x) \geq 0$ per a tot $x \in [n_0, +\infty)$. Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n$ una sèrie tal que $a_n = f(n)$ per a tot $n \geq n_0$. Aleshores, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent si i només si la integral impròpia $\int_{n_0}^{+\infty} f$ és convergent.

Demostració: Per a cada $n \geq n_0$, considerem $I_n = \int_{n_0}^{n} f$. La integral impròpia $\int_{n_0}^{+\infty} f$ és convergent si i només si la successió (I_n) és convergent. Això és conseqüència del fet que $I_n \leq \int_{n_0}^{x} f \leq I_{n+1}$ per a tot $n \geq n_0$ i per a tot $x \in [n, n+1]$. Com que (I_n) és monòtona creixent, aquesta successió és convergent si i només si és fitada superiorment. Per ser f monòtona decreixent, tenim que $a_{n+1} = f(n+1) \leq \int_{n}^{n+1} f \leq f(n) = a_n$ per a tot $n \geq n_0$. Així doncs, per a tot $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} a_{k+1} \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} \int_{k}^{k+1} f = \int_{n_0}^{n} f = I_n \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} a_k.$$

Per tant, si (s_n) és la successió de sumes parcials de la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$,

$$s_n - s_{n_0} \leq I_n \leq s_{n-1} - s_{n_0-1}$$

per a tot $n \geq n_0$. En conseqüència, la successió (s_n) és fitada superiorment si i només si la successió (I_n) és fitada superiorment. ■

Proposició 5.1.15 La sèrie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ és convergent si i només si $\alpha > 1$. Les sèries d'aquest tipus s'anomenen *sèries harmòniques*.

Demostració: Apliquem el Criteri de la Integral (Proposició 5.1.14) i el fet que la integral impròpia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}\,x$ és convergent si i només si $\alpha > 1$ (Proposició 4.3.4). ■

Proposició 5.1.16 (Criteri de Prinsheim) Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n$ una sèrie de termes positius.

- Si existeixen $\alpha > 1$, $K \in \mathbb{R}$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tals que $n^\alpha a_n \leq K$ per a tot $n \geq n_0$, aleshores la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent. En particular, la sèrie és convergent si existeix $\alpha > 1$ tal que $\lim n^\alpha a_n = L \in \mathbb{R}$

- Si existeixen $\alpha \leq 1$, $K > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tals que $n^\alpha a_n \geq K$ per a tot $n \geq n_0$, aleshores la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és divergent. En particular, la sèrie és convergent si existeix $\alpha \geq 1$ tal que $\lim n^\alpha a_n = L > 0$ o bé $\lim n^\alpha a_n = \infty$.

Demostració: En els dos casos, s'apliquen les Proposicions 5.1.12 i 5.1.15. Concretament, comparem la sèrie donada amb sèries del tipus $\sum_{n\geq 1}(K/n^\alpha)$. ■

Proposició 5.1.17 (Criteri de Cauchy o de l'arrel) Siguin $\sum_{n\geq 0} a_n$ una sèrie de termes positius i $L = \limsup \sqrt[n]{a_n} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Aleshores,

- si $L < 1$, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent, i

- si $L > 1$, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és divergent.

Demostració: Suposem que $L < 1$ i sigui $r \in \mathbb{R}$ amb $L < r < 1$. Aleshores existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ per a tot $n \geq n_0$. Per tant, $a_n \leq r^n$ per a tot $n \geq n_0$. Com que la sèrie $\sum_{n\geq 0} r^n$ és convergent, tenim per la Proposició 5.1.12 que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent.

Si, en canvi, $L > 1$, podem prendre $r \in \mathbb{R}$ amb $1 < r < L$ i tenim que $\sqrt[n]{a_n} > r$, i per tant $a_n > r^n > 1$, per a infinits valors de n. Per tant, la successió (a_n) no tendeix a 0 i, en conseqüència, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és divergent. ■

Proposició 5.1.18 (Criteri d'Alembert o del quocient) Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n$ una sèrie de termes positius. Considerem $L_1 = \limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ i també $L_2 = \liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Aleshores,

- si $L_1 < 1$, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent, i

- si $L_2 > 1$, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és divergent.

Demostració: Si $L_1 < 1$, prenem $r \in \mathbb{R}$ amb $L_1 < r < 1$ i tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n+1}/a_n < r$ per a tot $n \geq n_0$. Així doncs,

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} < \frac{a_n}{r^n}$$

per a tot $n \geq n_0$. Això implica que

$$\frac{a_n}{r^n} < \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}} = K$$

per a tot $n > n_0$. Com que la sèrie $\sum_{n\geq 0}(K/r^n)$ és convergent, tenim per la Proposició 5.1.12 que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent.

En el cas que $L_2 > 1$, podem prendre $r \in \mathbb{R}$ amb $1 < r < L_2$ i tindrem que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n+1}/a_n > r$ per a tot $n \geq n_0$. En particular, $a_{n+1} > a_n$ per a tot $n \geq n_0$ i això implica que la successió (a_n) no pot tenir límit 0 i, per tant, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és divergent. ■

Observació 5.1.19 En particular, podem aplicar els criteris anteriors si existeix (i podem calcular-lo) algun dels límits $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ o $\lim \sqrt[n]{a_n}$. Si algun d'aquests límits és igual a 1, el criteri corresponent no decideix. Recordeu que, si existeix $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, aleshores també existeix $\lim \sqrt[n]{a_n}$ i té el mateix valor. Per tant, si el criteri del quocient no decideix, tampoc decidirà el criteri de l'arrel.

Proposició 5.1.20 (Criteri de Raabe) Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n$ una sèrie de termes positius tal que $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ i existeix el límit $\lim n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$. Aleshores

- Si $L > 1$, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent.
- Si $L < 1$, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és divergent.

Demostració: Suposem que $L > 1$ i prenem $r > 0$ tal que $1 < 1 + r < L$. Aleshores existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1 + r$$

i, per tant, $(n-1)a_n - na_{n+1} > ra_n$ per a tot $n \geq n_0$. En conseqüència, si (s_n) és la successió de sumes parcials de $\sum_{n\geq 0} a_n$,

$$rs_n = rs_{n_0-1} + \sum_{k=n_0}^{n} ra_k < rs_{n_0-1} + \sum_{k=n_0}^{n}((k-1)a_k - ka_{k+1}) = rs_{n_0-1} + (n_0-1)a_{n_0} - na_{n+1}$$

i obtenim que la successió (s_n) és fitada superiorment.

Suposem ara que $L < 1$. En aquest cas existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n(1 - a_{n+1}/a_n) < 1$ per a tot $n \geq n_0$. Per a cada $n \geq 2$, prenem $b_n = 1/(n-1)$. Tenim doncs que $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \dfrac{a_n}{b_n}$ per a tot $n \geq n_0$. Això implica que existeix $K > 0$ tal que $a_n > Kb_n$ sempre que $n > n_0$. Com que la sèrie $\sum_{n\geq 2} b_n$ és divergent, tenim que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és divergent. ■

Definició 5.1.21 Una *sèrie alternada* és una sèrie de la forma $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$, on $a_n \geq 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Proposició 5.1.22 (Criteri de Leibniz per a sèries alternades) Sigui $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ una sèrie alternada tal que la successió (a_n) és monòtona decreixent i $\lim a_n = 0$. Aleshores la sèrie alternada $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ és convergent.

Demostració: De la successió (s_n) de sumes parcials en prenem dues subsuccessions: (s_{2n}), formada pels termes amb índex parell, i (s_{2n+1}), la que formen els termes amb índex senar. Observem que $s_{2(n+1)} = s_{2n} - a_{2n-1} + a_{2n+2}$ Com que la successió (a_n) és monòtona decreixent, tenim que $s_{2(n+1)} \leq s_{2n}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, és a dir, la subsuccessió (s_{2n}) és monòtona decreixent. També, $s_{2(n+1)+1} = s_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq s_{2n+1}$, i per tant la subsuccessió (s_{2n+1}) és monòtona creixent. A més a més, $s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Així doncs, $s_{2n} \geq s_{2n+1} \geq s_1$, i per tant la subsuccessió (s_{2n}) és fitada inferiorment. Com hem vist abans que és decreixent, existeix $\lim s_{2n} = S_0$. Anàlogament, la subsuccessió (s_{2n+1}) és creixent i fitada superiorment i existeix doncs $\lim s_{2n+1} = S_1$. Finalment, com que $s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1}$ i $\lim a_n = 0$, tenim que $S_0 = \lim s_{2n} = \lim s_{2n+1} = S_1$. Això implica que la successió (s_n) de sumes parcials és convergent amb $\lim s_n = S = S_0 = S_1$. ■

Observació 5.1.23 Sigui $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ una sèrie alternada tal que la successió (a_n) és monòtona decreixent i $\lim a_n = 0$. Per la Proposició 5.1.22, sabem que aquesta sèria és convergent. A més a més, si (s_n) és la successió de sumes parcials i $S = \lim s_n$ és la suma de la sèrie, es compleix que $|S - s_n| \leq a_{n+1}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. És a dir, l'error que es comet en aproximar la suma per la suma parcian n-èsima és menor o igual que el priemr terme menyspreat.

Demostració: Suposem que n és parell, és a dir, $n = 2k$. A partir de la demostració de la Proposició 5.1.22, tenim que $s_{2k+1} \leq S \leq s_{2k}$. Així doncs, $|S - s_n| = |S - s_{2k}| \leq |s_{2k} - s_{2k+1}| = a_{2k+1} = a_{n+1}$. Si n és senar, el resultat es demostra anàlogament. ■

5.2 Sèries de potències

5.2.1 Radi de convergència

Definició 5.2.1 Una *sèrie de potències* és una expressió del tipus $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, on (a_n) és una successió de nombres reals.

Observació 5.2.2 Observem que, per a cada valor de $x \in \mathbb{R}$, obtenim una sèrie numèrica. Si $D \subset \mathbb{R}$ és el conjunt dels valors $x \in \mathbb{R}$ tals que la sèrie numèrica $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és convergent, podem definir una funció $f : D \to \mathbb{R}$, on $f(x)$ és la suma de la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Teorema 5.2.3 Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ una sèrie de potències i prenem $\gamma = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Aleshores

1. Si $\gamma = 0$, la sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és absolutament convergent per a tot $x \in \mathbb{R}$.
2. Si $0 < \gamma < +\infty$, la sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és absolutament convergent si $|x| < 1/\gamma$ i no és convergent si $|x| > 1/\gamma$.
3. Si $\gamma = +\infty$, aleshores la sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ no és convergent per a tot $x \neq 0$.

Demostració: Per a cada valor fixat de x, aplicarem el Criteri de Cauchy (Proposició 5.1.17) a la sèrie de termes positius $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$. Per fer-ho, hem de considerar

$$L(x) = \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = |x|\, \gamma.$$

Amb això podem discutir el comportament de la sèrie $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ en funció dels valors de γ.

1. Si $\gamma = 0$, tenim que $L(x) = 0 < 1$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. Per tant, la sèrie $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ és convergent per a tot $x \in \mathbb{R}$.

2. Si $0 < \gamma < +\infty$, aleshores la sèrie $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ és convergent si $|x| < 1/\gamma$, mentre és divergent si $|x| > 1/\gamma$. Hem vist doncs que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és absolutament convergent si $|x| < 1/\gamma$ i no és absolutament convergent si $|x| > 1/\gamma$. Ens falta veure que, si $|x| > 1/\gamma$, la sèrie no és convergent. Prenem $r \in \mathbb{R}$ amb $1/\gamma < r < |x|$. com que $1/r < \gamma$, tenim que $\sqrt[n]{|a_n|} > 1/r$ per a infinits valors de n i, per tant,
$$|a_n x^n| > \left(\frac{|x|}{r}\right)^n > 1$$
per a infinits valors de n. En conseqüència, $\lim a_n x^n \neq 0$ i la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ no és convergent.

3. Si $\gamma = +\infty$, aleshores $L(x) = +\infty$ per a tot $x \neq 0$. Per tant, la sèrie $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ és divergent per a tot $x \neq 0$. Amb un raonament semblant al del cas anterior, veiem que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ no és convergent si $x \neq 0$.

Observació 5.2.4 Si existeix $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$, clarament el seu valor és γ. A més a més, si existeix $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, aleshores també existeix $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ i té el mateix valor. Per tant, en aquest cas, $\gamma = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Definició 5.2.5 Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ una sèrie de potències i sigui $\gamma = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Definim el *radi de convergència* ρ de la sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ com:
$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma = +\infty \\ 1/\gamma & \text{si } 0 < \gamma < +\infty \\ +\infty & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$
Observeu que $\rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Observació 5.2.6 Si ρ és el radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, la funció $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ està definida per a tot $x \in (-\rho, \rho)$.

5.2.2 Funcions definides per sèries de potències

Definició 5.2.7 Siguin $I \subset \mathbb{R}$ un interval i $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funció. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, prenem una funció $f_n\colon I \to \mathbb{R}$, és a dir, prenem la *successió de funcions* (f_n) en I. Direm que la successió de funcions (f_n) és *uniformement convergent* en l'interval I amb *límit* la funció f si
$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0,\ \forall x \in I.$$

Observació 5.2.8 Si la la successió de funcions (f_n) convergeix uniformement cap a la funció f en l'interval I, tenim en particular que, per a tot $x_0 \in I$, la successió de nombres reals $(f_n(x_0))$ és convergent amb límit $f(x_0)$. És a dir, $\lim f_n(x_0) = f(x_0)$ per a tot $x_0 \in I$.

Proposició 5.2.9 Sigui (f_n) una successió de funcions en l'interval I. Aleshores la successió (f_n) convergeix uniformement en I cap a alguna funció $f\colon I \to \mathbb{R}$ si i només si
$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \forall m, n \geq n_0,\ \forall x \in I.$$

Demostració: Suposem (f_n) és uniformement convergent amb límit f. Aleshores, per a cada $\epsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/2$ per a tot $n \geq n_0$ i per a tot $x \in I$. Per tant, per a tot $m, n \geq n_0$ i per a tot $x \in I$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Provem ara la implicació recíproca. Per a cada $x \in I$, la successió de nombres reals $(f_n(x))$ és de Cauchy i, per tant, convergent. Així doncs, podem prendre $f(x) = \lim_n f_n(x) \in \mathbb{R}$ i hem definit així una funció $f\colon I \to \mathbb{R}$. Per a cada $\epsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ per a tot $x \in I$ sempre que $n \geq m \geq n_0$. Per tant, per a cada $x \in I$,

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_n |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

si $m \geq n_0$. Això implica que la successió (f_n) convergeix uniformement cap a f en l'interval I. ■

Teorema 5.2.10 Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ una sèrie de potències amb radi de convergència $\rho > 0$. Considerem la funció $f\colon (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ i, per a cada $n \in \mathbb{N}$, la funció $f_n\colon (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ definida per $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Aleshores, per a tot $r \in \mathbb{R}$ amb $0 \leq r < \rho$, la successió de funcions (f_n) és uniformement convergent en l'interval $[-r, r]$ amb límit f.

Demostració: Prenem $r_1 \in \mathbb{R}$ amb $r < r_1 < \rho$. Aleshores existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/r_1$ per a tot $n \geq n_1$ i tenim doncs que $|a_n||x^n| < (r/r_1)^n$ per a tot $n \geq n_1$ i per a tot $x \in [-r, r]$. Com que $r < r_1$, la sèrie $\sum_{n\geq 0}(r/r_1)^n$ és convergent. Per la Proposició 5.1.7, per a tot $\epsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$, del que podem suposar que $n_0 \geq n_1$, tal que per a tot $n \geq n_0$ i per a tot $m \geq 1$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \left(\frac{r}{r_1}\right)^k < \epsilon.$$

Per tant, per a tot $x \in [-r, r]$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k x^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |a_k x^k| < \sum_{k=n+1}^{n+m} \left(\frac{r}{r_1}\right)^k < \epsilon$$

i, en conseqüència,

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_m \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k x^k\right| \leq \epsilon$$

per a tot $n \geq n_0$. ■

Teorema 5.2.11 Sigui (f_n) una successió de funcions que convergeix uniformement cap a una funció f en l'interval $I \subset \mathbb{R}$. Aleshores, si les funcions f_n són contínues en I, també és contínua en I la funció f.

Demostració: Sigui $a \in I$. Per a tot $\epsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/3$ per a tot $n \geq n_0$ i per a tot $x \in I$. Com que f_{n_0} és contínua, existeix $\delta > 0$ tal que $|f_{n_0}(a) - f_{n_0}(x)| < \epsilon/3$ sempre que $|a - x| < \delta$. Per tant, si $|a - x| < \delta$,

$$|f(a) - f(x)| \leq |f(a) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Tenim doncs que f és contínua en a per a tot $a \in I$. ■

Teorema 5.2.12 Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ una sèrie de potències amb radi de convergència $\rho > 0$. Aleshores, la funció $f\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és contínua en $(-\rho,\rho)$.

Demostració: Posem $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Sigui $a \in (-\rho,\rho)$ i sigui $r \in \mathbb{R}$ amb $|a| < r < \rho$. Pel Teorema 5.2.10, la successió de funcions (f_n) convergeix uniformement cap a la funció f en l'interval $[-r, r]$. Com que les funcions f_n són contínues, tenim pel Teorema 5.2.11 que la funció f és contínua en $[-r, r]$. Així doncs, f és contínua en a per a tot $a \in (-\rho,\rho)$. ■

Lema 5.2.13 Les sèries de potències $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ i $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ tenen el mateix radi de convergència.

Demostració: Sigui $\gamma = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ Com que $\lim \sqrt[n-1]{n} = 1$, tenim que $\limsup \sqrt[n-1]{|n a_n|} = \gamma$ i, per tant, el radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ és el mateix que el de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. ■

Teorema 5.2.14 Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ una sèrie de potències amb radi de convergència $\rho > 0$. Aleshores, la funció $f : (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és derivable en $(-\rho,\rho)$ i $f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$.

Demostració: Posem com abans $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Pel Lema 5.2.13, podem considerar la funció $h\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}$ definida per $h(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$. Si per a cada $n \in \mathbb{N}$ prenem $h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$, tenim clarament que $h_n = f_n'$. Considerem $a \in (-\rho,\rho)$ i prenem $r \in \mathbb{R}$ amb $|a| < r < \rho$. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, definim la funció

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ f_n'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

Prenem també la funció

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ h(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

Per l'Observació 5.2.8, per a cada punt $x \in [-r, r]$ amb $x \neq a$, tenim que

$$\lim_n g_n(x) = \lim_n \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g(x).$$

A més a més, $\lim_n g_n(a) = \lim_n f_n'(a) = \lim_n h_n(a) = h(a) = g(a)$. Pel Teorema 5.2.10, la successió (h_n) és uniformement convergent cap a h en l'interval $[-r, r]$. Per tant, per la Proposició 5.2.9, per a cada $\epsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|h_m(x) - h_n(x)| < \epsilon$ per a tot $m, n \geq n_0$ i per a tot $x \in [-r, r]$. Per a tot $x \in [-r, r] \setminus \{a\}$ i per a qualssevol $m, n \geq n_0$, pel Teorema del Valor Mig (Teorema 3.2.5) aplicat a la funció $f_n - f_m$, existeix un punt ξ entre x i a tal que

$$(g_n - g_m)(x) = \frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(a)}{x - a} = (f_n' - f_m')(\xi) = h_n(\xi) - h_m(\xi)$$

i, per tant,

$$|g_n(x) - g_m(x)| = |h_n(\xi) - h_m(\xi)| < \epsilon.$$

Igualment,

$$|g_n(a) - g_m(a)| = |h_n(a) - h_m(a)| < \epsilon.$$

Així doncs, per la Proposició 5.2.9, la successió de funcions (g_n) és uniformement convergent en $[-r, r]$. Com que hem vist que $\lim_n g_n(x) = g(x)$ per a tot $x \in [-r, r]$, la funció g és el límit uniforme de la successió de funcions (g_n). Com que les funcions g_n són contínues, tenim pel Teorema 5.2.11 que la funció g és contínua. En conseqüència,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} g(x) = g(a) = h(a),$$

i per tant f és derivable en l'interval $(-\rho, \rho)$ i $f' = h$. ■

Corol·lari 5.2.15 Sigui $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ una sèrie de potències amb radi de convergència $\rho > 0$. Aleshores, la funció $f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ és indefinidament derivable en $(-\rho, \rho)$ i

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Observació 5.2.16 Sigui $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ una sèrie de potències amb radi de convergència $\rho > 0$. Aleshores la sèrie $\sum_{n \geq 0} a_n (x-c)^n$ és absolutament convergent per a tot $x \in (c - \rho, c + \rho)$. Per tant, tenim una funció $f : (c - \rho, c + \rho) \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x-c)^n$. Les propietats que hem vist en aquest apartat per a les funcions del tipus $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ són vàlides també per a les funcions de la forma $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x-c)^n$.