RELATIVITÉ. — *Étude des métriques intérieures raccordables à la métrique de Kerr.* Note (*) de **Francesc Comellas** et **Luis Mas,** présentée par André Lichnerowicz.

On étudie diverses métriques intérieures déduites par variation des constantes de la métrique de Kerr en utilisant le formalisme des repères nuls. Dans le cas le plus simple on retombe dans la métrique de Kerr chargée. On trouve des cas ayant comme source un fluide non-parfait.

Several interior metrics deduced from the Kerr metric by variation of constants are studied using the null tetrad formalism. In the simpler case the charged Kerr metric is recovered. Cases are found with a possible (but non-perfect) fluid as a source.

1. Un des moyens les plus faciles de production de métriques intérieures raccordables à la métrique de Kerr.

$$(1)\quad ds^2=\left(1-\frac{2mr}{\Sigma}\right)du^2+2\,du\,dr-2a\sin^2\theta\,dr\,d\varphi-\Sigma\,d\theta^2 +\frac{4mra\sin^2\theta}{\Sigma}du\,d\varphi-\sin^2\theta\left(\Omega+\frac{2mrd^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right)d\varphi^2$$

(avec, $\Sigma=r^2+a^2\cos^2\theta$, $\Omega=\Gamma+2mr=r^2+a^2$), est de prendre les constantes de la métrique comme des fonctions des coordonnées. Une bonne surface pour raccorder avec la solution du vide serait là où les dérivés premières de ces fonctions sont nulles.

Pour limiter la forme de ces fonctions il y a deux possibilités :

(*a*) Prendre une forme très simple et voir quels tenseurs impulsion-énergie apparaissent.

(*b*) Ne pas délimiter trop la forme de ces fonctions *a priori*, mais alors imposer que le tenseur impulsion-énergie soit celui qui correspond à une certaine source, ou bien imposer certaines conditions sur la surface de raccordement.

La variation par rapport à la coordonnée temporelle a été déjà étudiée dans le cadre du vide [1], dans le but de trouver des solutions avec radiation. En pensant aux sources il serait aussi intéressant d'étudier cette variation mais dans une première approche nous nous bornerons à des sources stationnaires.

Nous avons étudié deux cas :

1° prendre m fonctions de r et de θ,

2° prendre m fonction de r et a fonction de r et de θ.

Pour le premier cas nous avons obtenu des résultats assez précis, moins définis pour le second, résultats que nous développons dans les paragraphes suivants.

2. Dans le système de coordonnées utilisé (1), nous prenons le repère nul.

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} l^\mu:(0,1,0,0),\\ n^\mu:\dfrac{1}{\Sigma}\left(\Omega,-\dfrac{\Gamma}{2},0,a\right),\\ m^\mu:\dfrac{1}{\sqrt{2}(r+ia\cos\theta)}\left(ia\sin\theta,0,1,\dfrac{i}{\sin\theta}\right).\end{array}\right.$$

Pour expliciter les équations d'Einstein nous utilisons le formalisme de Newman-Penrose.

Dans ce formalisme nous pouvons calculer le tenseur d'impulsion-énergie,

$$(3)\quad T^{\mu\nu}=2\varphi_{22}\,l^\mu l^\nu+2\varphi_{00}\,n^\mu n^\nu+2\varphi_{20}\,m^\mu m^\nu+2\bar{\varphi}_{20}\,\bar{m}^\mu\bar{m}^\nu$$
$$+4\varphi_{11}\,[l^{(\mu}n^{\nu)}+m^{(\mu}\bar{m}^{\nu)}]-4\varphi_{21}\,l^{(\mu}m^{\nu)}-4\bar{\varphi}_{21}\,l^{(\mu}\bar{m}^{\nu)}$$
$$-4\varphi_{10}\,n^{(\mu}m^{\nu)}-4\bar{\varphi}_{10}\,n^{(\mu}\bar{m}^{\nu)}+6\Lambda[2\,l^{(\mu}n^{\nu)}-2\,m^{(\mu}\bar{m}^{\nu)}],$$

où les φ (projections du tenseur de Ricci) et le Λ (scalaire de courbure) dépendent des coefficients de spin à travers de formules bien connues [2].

3. *Premier cas* : $m=m(r,\theta)$, $a=$Cte.

Pour les coefficients de spin nous avons obtenu :

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
&\varkappa=\sigma=\lambda=\varepsilon=0,\\
&\rho=-\frac{1}{r-ia\cos\theta},\\
&\nu=\frac{m'r}{\sqrt{2}}\rho^2\bar{\rho},\\
&\pi\bar{\rho}=-\tau\rho=\frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}}\rho^2\bar{\rho},\\
&\mu=\frac{\Gamma}{2}\rho^2\bar{\rho},\\
&\beta=-\frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}}\bar{\rho},\\
&\gamma=\mu+\frac{r-m-\dot{m}r}{2}\rho\bar{\rho},\\
&\alpha=\pi-\bar{\beta},
\end{aligned}\right.$$

où le point indique la dérivation par rapport à r et l'apostrophe la dérivation par rapport à θ.

Avec ces résultats les composantes du tenseur de Ricci, et le scalaire de courbure dans le repère sont

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
&\varphi_{00}=\varphi_{01}=\varphi_{02}=0,\\
&\varphi_{11}=\dot{m}r^2\rho^2\bar{\rho}^2-\frac{2\dot{m}+\ddot{m}r}{4}\rho\bar{\rho},\\
&\varphi_{12}=\frac{rm'}{\sqrt{2}}\rho^2\bar{\rho}^2+\frac{m'+\dot{m}'r}{2\sqrt{2}}\rho\bar{\rho}^2\\
&\varphi_{22}=-\frac{r(m''+m'\cot\theta)}{2}\rho^2\bar{\rho}^2,\\
&\Lambda=\frac{2\dot{m}+\ddot{m}r}{12}\rho\bar{\rho}.
\end{aligned}\right.$$

Nous avons donc pour le tenseur d'impulsion-énergie (3) la forme suivante :

$$(6)\quad T^{\mu\nu}=2\varphi_{22}\,l^\mu l^\nu+(4\varphi_{11}+12\Lambda)\,l^{(\mu}n^{\nu)}-4\varphi_{21}\,l^{(\mu}m^{\nu)}$$
$$-4\bar{\varphi}_{21}\,l^{(\mu}m^{\nu)}+(4\varphi_{11}-12\Lambda)\,m^{(\mu}\bar{m}^{\nu)},$$

ce qui nous donne avec les indices du repère

$$\text{(7)} \qquad T^a{}_b : \begin{pmatrix} 2\varphi_{11}+6\Lambda & 2\varphi_{22} & 2\bar{\varphi}_{21} & 2\varphi_{21} \\ 0 & 2\varphi_{11}+6\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\varphi_{21} & -(2\varphi_{11}-6\Lambda) & 0 \\ 0 & -2\bar{\varphi}_{21} & 0 & -(2\varphi_{11}-6\Lambda) \end{pmatrix}.$$

Nous allons étudier les vecteurs propres qu'ont ces types de tenseur d'impulsion-énergie. Du point de vue physique et en pensant à un fluide il est nécessaire d'avoir un vecteur propre du type temps. Pour le $T^a{}_b$ de (7) nous avons les valeurs propres doubles

$$\text{(8)} \qquad \lambda_1 = 2\varphi_{11}+6\Lambda, \ \lambda_2 = -2\varphi_{11}+6\Lambda.$$

Pour les vecteurs propres nous avons les cas suivants :

1° le coefficient φ_{11} n'est pas nul :

(*a*) correspondant à λ_1 et si $\varphi_{11}\varphi_{22} \neq \varphi_{21}\bar{\varphi}_{21}$, un vecteur isotrope

$$\text{(9)} \qquad V_{\lambda_1}{}^{\mu} = a l^{\mu};$$

correspondant à λ_1 et si $\varphi_{11}\varphi_{22} = \varphi_{21}\bar{\varphi}_{21}$, deux vecteurs, un pouvant être du type temps

$$\text{(10)} \qquad V_{\lambda_1}{}^{\mu} = a l^{\mu} + b\left(n^{\mu} - \frac{\varphi_{21}}{2\varphi_{11}} m^{\mu} - \frac{\bar{\varphi}_{21}}{2\varphi_{11}} \bar{m}^{\mu}\right) \qquad \text{avec} \quad a, b \text{ arbitraires};$$

(*b*) correspondant à λ_2 on a deux vecteurs orientés dans l'espace

$$\text{(11)} \qquad V_{\lambda_2}{}^{\mu} = -\frac{\bar{\varphi}_{21} c + \varphi_{21}\bar{c}}{2\varphi_{11}} l^{\mu} + c m^{\mu} + \bar{c}\bar{m}^{\mu} \qquad \text{avec} \quad c \text{ arbitraire};$$

2° le coefficient φ_{11} est nul :

(*a*) si $\varphi_{21} \neq 0$, on a deux vecteurs orientés dans l'espace

$$\text{(12)} \qquad V_{\lambda}{}^{\mu} = a l^{\mu} + i d(\varphi_{21} m^{\mu} - \bar{\varphi}_{21}\bar{m}^{\mu}) \qquad \text{avec} \quad a, d \text{ réels arbitraires};$$

(*b*) si aussi φ_{21} est nul on doit avoir $\varphi_{22}=0$ et alors n'importe quel vecteur est propre; ce dernier cas correspond à m égal constante.

Le cas le plus intéressant correspond à 1° (*a*) et (*b*) pour

$$\text{(13)} \qquad \varphi_{11}\varphi_{22} = \varphi_{21}\bar{\varphi}_{21}$$

puisque nous pouvons avoir un vecteur du type temps et trois du type espace (10) et (11). Dans ce cas il est facile de voir [3] que le tenseur que nous trouvons ne représente pas un fluide parfait ou bien un fluide parfait plus champ électromagnétique; il peut représenter un fluide non parfait. La condition (13) qui est nécessaire pour avoir un vecteur du type temps donne sous forme explicite,

$$r^2 \Delta \ddot{m} m'' + r^2 \Delta \cot\theta \, \ddot{m} m' - 2r\Delta \dot{m} m'' - 2r\Delta \cot\theta \, \dot{m} m' + 2r\Delta \dot{m}' m' - r^2 \Sigma (\dot{m}')^2 - \Sigma (m')^2 = 0,$$

où, $\Delta = r^2 - a^2\cos^2\theta$.

Dans ce cas particulier, si nous nous limitons à prendre m comme fonction de r seulement, on retombe sur des résultats bien connus [4]; si nous demandons que le tenseur d'impulsion-énergie soit celui d'un champ électromagnétique, le coefficient Λ doit être nul et comme champ on trouve,

$$F_{\mu\nu}=-4\,\mathrm{Re}(\varphi_{11})\,l_{[\mu}n_{\nu]}+4\,i\,\mathrm{Im}(\varphi_{11})\,m_{[\mu}\bar{m}_{]},$$

ce qui explicité donne

$$F_{10}=\frac{\sqrt{2}\,e}{\Sigma^2}(\sin K.2\,ar\cos\theta-\cos K.\Delta)=\frac{F_{13}}{a\sin^2\theta},$$

$$F_{20}\,\Omega=F_{23}\,a=\sqrt{2}\,e\,\Omega\,a\sin\theta(\cos K.2\,ar\cos\theta+\sin K.\Delta)$$

(avec $e.K$ arbitraires).

Ce champ est celui associé à la métrique de Kerr chargée sauf une rotation de dualité puisque nous partons d'un tenseur d'impulsion-énergie.

4. *Second cas :* $m=m(r)$ et $a=a(r,\theta)$ dans les termes qui ont $2\,mr/\Sigma$.

Nous avons fait l'analyse du tenseur d'impulsion-énergie résultant et nous avons vu aussi qu'on a un vecteur propre du type temps seulement si nous avons la relation (13). Cette condition oblige la fonction $a(r,\theta)$ à être constante et nous retombons dans le cas particulier déjà cité dans le paragraphe antérieur.

(*) Remise le 2 juin 1980.

[1] C. González, L. Herrera et J. Jiménez, *J. Math. Phys.*, 20, 1979, p. 837.
[2] E. Newman et R. Penrose, *J. Math. Phys.*, 3, 1962, p. 566.
[3] A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.
[4] J. Martin et L. Mas, *Comptes rendus*, 271, série A, 1970, p. 338.

F. C. : *Dept. Física Teórica, Universitat Autònoma, Bellaterra (Barcelona-Espagne).*
L. M. : *Depto. Física Teórica, Universidad de Granada, Granada (Espagne).*