(6) Dos productes químics A i B reaccionen formant un nou C. S'observa que la velocitat a la qual es forma C és directament proporcional al producte de les quantitats de A i B presents, i que la seva formació requereix 2kg de A per cada kg de B.

(a) Si inicialment hi ha 10kg de A i 20 kg de B, i denotem per $A(t)$, $B(t)$ i $C(t)$ les quantitats de productes en funció de t, deduïu l'equació:

$$C' = K\left(10 - \frac{2}{3}C\right)\cdot\left(20 - \frac{1}{3}C\right)$$

- $A(t) = A(0) - \frac{2}{3}C(t) = 10 - \underbrace{\frac{2}{3}C(t)}$ cada kg de A que es forma requereix 2/3 kg de C
- $B(t) = 20 - \frac{1}{3}C(t)$
- $C(0) = 0 \leftarrow$ inicialment no hi ha C

Així: $\underbrace{C'(t)}_{\text{Velocitat formació } C} = \underbrace{K\cdot A(t)\cdot B(t)}_{\text{K-Proporcional al producte de les quantitats de A i B}}$

(b) trobeu la quantitat de C en qualsevol moment sabent $C(0)=0$ i que als 20 min. s'han format 6 kg de C. En quin instant s'atura la reacció?

$$\int \frac{dC}{\left(10 - \frac{2}{3}C\right)\left(20 - \frac{1}{3}C\right)} = \int k\,dt + C \quad \text{(edo separable)}$$

Exercici:
$$\frac{1}{(10-\frac{2}{3}G)(20-\frac{1}{3}G)} = \frac{-2/30}{2/3\,G-10} + \frac{1/30}{1/3\,G-20}$$

Integrant:
$$-\frac{2}{30}\cdot\frac{3}{2}\ln\left|\frac{2}{3}G-10\right| + \frac{1}{30}\cdot 3\ln\left|\frac{1}{3}G-20\right| = Kt + C$$

$$-\ln\left|\frac{2}{3}G-10\right| + \ln\left|\frac{1}{3}G-20\right| = 10Kt + 10C$$

$$\ln\left|\frac{1/3\,G-20}{2/3\,G-10}\right| = 10Kt + 10C$$

$$\left|\frac{1/3\,G-20}{2/3\,G-10}\right| = \underbrace{e^{10C}}_{\substack{\shortparallel \\ c'>0}} e^{10Kt}$$

treiem el valor absolut i permetem $c'>0$ o $c'<0$.

$$\underbrace{\frac{1/3\,G-20}{2/3\,G-10} = c'e^{10Kt}}\Rightarrow \boxed{G(t) = \frac{-10c'e^{10Kt}+20}{1/3-2/3\,c'e^{10Kt}}}$$

- Imposem que quan $t=0 \Rightarrow G=0$

llavors: $\frac{-20}{-10} = c' \Rightarrow \boxed{c'=2}$

- Imposem que quan $t=20 \Rightarrow G=6$

llavors: $\frac{1/3\,6-20}{2/3\,6-10} = 2\cdot e^{200K} \Rightarrow e^{200K} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

Així $\boxed{K = \frac{1}{200}\ln(3/2)}$

- La reacció es pararà si A s'esgota, això és, si $G(t)=15$ per algun t. Com $\lim_{t\to+\infty} G(t) = 15$, això no succeix mai.