(11) D'acord amb la llei de la radiació de Stefan, la rapidesa amb la que varia la temperatura absoluta T d'un cos és $\frac{dT}{dt} = K\cdot(M^4 - T^4)$, on M és la temperatura absoluta del medi circumdant i $K>0$ constant. Trobeu la solució de l'edo. Proveu també que quan $T-M$ és petit, comparat amb M, la llei de Newton del refredament, $\frac{dT}{dt} = \bar{K}(M-T)$, per una certa $\bar{K}>0$, és una bona aproximació de la llei de Stefan.

La llei de Stefan defineix una edo separable i

$$\int \frac{dT}{M^4 - T^4} = \int K\,dt + C$$ dona una família implícita de solucions.

Factoritzant: $T^4 - M^4 = (T^2 - M^2)(T^2 + M^2) = (T-M)(T+M)(T^2+M^2)$,

d'on: $$\frac{1}{T^4 - M^4} = \frac{A}{T-M} + \frac{B}{T+M} + \frac{C' + DT}{T^2 + M^2} \iff$$

$$\iff 1 = A(T+M)(T^2+M^2) + B(T-M)(T^2+M^2) + (C' + DT)(T^2 - M^2)$$

Fent: $T=M \Rightarrow A = 1/4M^3$; $T=-M \Rightarrow B = -1/4M^2$

$T=0 \Rightarrow 1 = AM^3 - BM^3 - C'M^2 \Rightarrow C' = -1/2M$

igualem coeficient de T^3: $0 = A + B + D \Rightarrow D = 0$.

Així:

$$\int \frac{dT}{T^4 - M^4} = \frac{1}{4M^3}\ln|T-M| - \frac{1}{4M^3}\ln|T+M| - \frac{1}{2M^3}\arctan(T/M),$$

On usem: $$\int \frac{dT}{T^2+M^2} = \frac{1}{M}\int \frac{d(T/M)}{1+(T/M)^2} = \frac{1}{M}\arctan(T/M)$$

obtenim doncs la família de solucions implícites:

$$-\frac{1}{4M^3}\ln|T-M| + \frac{1}{4M^3}\ln|T+M| + \frac{1}{4M^3}\arctan(T/M) = Kt + C$$

Finalment: Si $\frac{T-M}{M}$ és petit, tenim:

$$\frac{T+M}{M} = 2 + \frac{T-M}{M} \simeq 2 \; ; \quad \frac{T^2+M^2}{M^2} = 1+\left(\frac{T}{M}\right) = 1+\left(1+\frac{T-M}{M}\right)^2 \simeq 2$$

Per tant:

$$\frac{dT}{dt} = K\cdot(T-M)(T+M)(T^2+M^2) = KM^3\,(T-M)\left(\frac{T+M}{M}\right)\left(\frac{T^2+M^2}{M^2}\right) \simeq$$

$$\simeq KM^3\cdot(T-M)\cdot 2\cdot 2 = \bar{K}\cdot(T-M) \quad \text{on } \bar{K} = 4KM^3$$