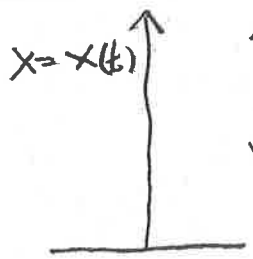
18 Un paracaigudista (i el seu paracaigudes) cau partint del repòs. Suposant que s'obre el seu paracaigudes des del moment que salta, calculau la velocitat límit, en funció del pes W i del coeficient de fregament β. (Suposem que el fregament és proporcional a la velocitat al quadrat.)



Suposem $x(0) = h > 0$

$x'(0) = 0$

$$m x'' = -mg + \beta (x')^2 \Rightarrow x'' = -g + \frac{\beta}{m}(x')^2$$

Fem $v = x' \Rightarrow v' = -g + \frac{\beta}{m} v^2$ Separable

$$\int \frac{dv}{-g + \frac{\beta}{m} v^2} = \frac{m}{\beta} \int \frac{dv}{v^2 - \frac{gm}{\beta}} = \frac{m}{\beta} \int \left(\frac{1/2\alpha}{v - \alpha} + \frac{-1/2\alpha}{v + \alpha} \right) dv$$

$\alpha = \sqrt{\frac{gm}{\beta}}$

$$= \frac{m}{2\beta\alpha} \left(\ln|v - \alpha| - \ln|v + \alpha| \right) = \frac{m}{2\alpha\beta} \ln \left| \frac{v - \alpha}{v + \alpha} \right| =$$

$$= t + c \Rightarrow \frac{v - \alpha}{v + \alpha} = c\, e^{\frac{2\alpha\beta}{m} t}$$

$$v(t) = \frac{\alpha \left(1 + c\, e^{2\alpha\beta t/m} \right)}{1 - c\, e^{2\alpha\beta t/m}}$$

$v(0) = 0 \Leftrightarrow c = -1$

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = -\alpha = -\sqrt{gm/\beta}$$

Velocitat límit si cau indefinidament

$$x(t) = h + \int_0^t v(t)\, dt$$

també podem estudiar $v = v(x)$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv/dt}{dx/dt} = \frac{x''}{v} = -\frac{g}{v} + \frac{\beta}{m} v \qquad \text{Bernoulli } r = -1$$

canvi: $u = v^{1-r} = v^2$

$$\frac{du}{dx} = 2v\frac{dv}{dx} = -2g + 2\beta/m\, u \qquad \text{lineal}$$

$$u(x) = e^{2\beta x/m} \cdot c + e^{2\beta x/m} \int e^{-2\beta x/m}(-2g)\,dx =$$

$$= e^{2\beta x/m} c + 2g\,\frac{m}{2\beta} = e^{2\beta x/m} \cdot c + \frac{gm}{\beta}$$

$$v(x) = -\sqrt{e^{2\beta x/m} \cdot c + gm/\beta}$$

$$v(h) = 0 \Rightarrow \quad c = -gm/\beta\, e^{-2\beta h/m}$$

$$v(x) = -\sqrt{\frac{gm}{\beta}\left(1 - e^{2\beta(x-h)/m}\right)}$$

Així la velocitat límit és $v(0) = -\sqrt{\frac{gm}{\beta}\left(1 - e^{-2\beta h/m}\right)}$

Velocitat límit en tocar a terra

$$= -d\sqrt{1 - e^{-2\beta h/m}}$$