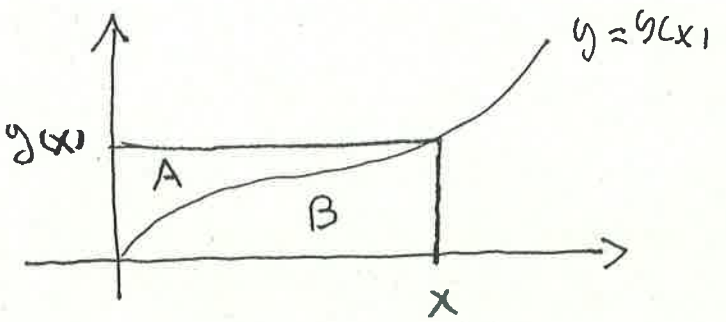
(15) Per un punt arbitrari d'una corba que passa per l'origen es consideren dues rectes paral·leles als eixos. La corba divideix el rectangle que es forma en dues parts A i B tal que

Àrea(A) = α Àrea(B), per un cert $\alpha > 0$.

Trobeu la corba



· Suposem $y(x) > 0$ si $x > 0$

· Sabem $y(0) = 0$.

· Àrea(B) $= \int_0^x y(s)\,ds$

· Àrea(A) $= \underbrace{x \cdot y(x)}_{\text{àrea rectangle}} -$ Àrea(B) $= x \cdot y(x) - \int_0^x y(s)\,ds$

Així: $x \cdot y(x) - \int_0^x y(s)\,ds = \alpha \cdot \int_0^x y(s)\,ds$

Derivem resp. de x: $y(x) + x\,y'(x) - y(x) = \alpha\, y(x)$

Així $y = y(x)$ verifica l'edo separable:

$$y' = \alpha \frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\alpha}{x} + c \Rightarrow \ln y = \alpha \ln x + c$$

d'on: $y(x) = e^{\alpha \ln x + c} = e^c \cdot e^{\ln x^\alpha} = c_1 x^\alpha$

que clarament compleix $y(0) = 0$.