(32) Sigui $a(t)$ una funció contínua $\forall t \in \mathbb{R}$ i periòdica de període $T > 0$ ($a(t+T) = a(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$), i $b \in \mathbb{R}$.

<u>Proveu:</u> tota solució $x(t)$ de l'edo (lineal)

$x' = a(t)x + b$ és T-periòdica sii $\int_0^T a(s)\,ds = 0$ i $b = 0$.

· <u>observació:</u> $x(t)$ és una solució T-periòdica de l'edo $x' = a(t)x + b(t)$, on $a(t)$ i $b(t)$ són contínues i T-periòdiques $\iff x(0) = x(T)$.

· <u>Demostració (observació)</u>:

[$\Rightarrow$] $x(t)$ solució T-periòdica vol dir $x(t) = x(t+T)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Només cal fer $t = 0$.

[$\Leftarrow$] $x(t)$ solució de $x' = a(t)x + b(t)$ on $a(t), b(t)$ són T-periòdiques implica que $y(t) = x(t+T)$ també és solució. En efecte, tenim $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ per tot $t \in \mathbb{R}$ i llavors:

$$y'(t) = x'(t+T) = a(t+T)x(t+T) + b(t+T) = a(t)y(t) + b(t)$$

i $y(t)$ verifica $y' = a(t)y + b(t)$. Observem ara que les condicions inicials de $x(t)$ i $y(t)$ en $t = 0$ són $x(0)$ i $y(0) = x(T)$, respectivament. Si és el cas que $x(0) = y(0)$, llavors pel teorema d'exist. i unicitat de solucions $x(t) = y(t)$ per tot t.

Així: $x(0) = x(T) \Rightarrow x(t) = x(t+T)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

- Demostració (enunciat del problema)

Sigui $x(t)$ una solució qualsevol de $x' = a(t)x + b$ t.q. $x(0) = x_0$ per un cert x_0. Llavors, sabem:

$$x(t) = e^{\int_0^t a(s)ds} \cdot x_0 + \int_0^t e^{\int_s^t a(r)dr} \cdot \underbrace{b}_{\text{constant}} ds$$

Si volem $x(t)$ solució periòdica de període T, cal (per l'observació anterior) que $X(T) = x(0) = x_0$.

Així:

$$x(T) = e^{\int_0^T a(s)ds} \cdot x_0 + b \int_0^T e^{\int_s^T a(r)dr} ds = x(0) = x_0$$

Llavors, x_0 verifica:

$$\left(e^{\int_0^T a(s)ds} - 1\right) x_0 = -b \int_0^T e^{\int_s^T a(r)dr} ds$$

Com que la part dreta no depèn de x_0 i l'esquerra sí, l'única opció per tal que la igualtat sigui certa $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ (com volem) és que $e^{\int_0^T a(s)ds} - 1 = 0$ i per tant la part esquerra no depengui de x_0. Això vol dir $\int_0^T a(s)ds = 0$.

Llavors, la part dreta ha de ser també zero i com $\int_0^T e^{\int_s^T a(r)dr} ds > 0$, això vol dir que $b = 0$.