- **Def.:** Una equació diferencial ordinària (l'e.d.o.) de 1er. ordre en forma normal o estàndar ve donada per:

$$\boxed{y' = f(x,y)} \qquad (*)$$

on:

- $x \in \mathbb{R}$ és la variable independent, $' = d/dx$
- $y = y(x)$ és la funció incògnita
- $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció de 2 variables
  $(x, y) \mapsto f(x,y)$

  donada ("la que defineix l'equació"), on $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ és un obert.

- **Def.:** Direm que $y = y(x)$ és una solució particular de $(*)$ si $y(x)$ és una funció derivable, definida $\forall x \in I$ interval de $\mathbb{R}$, i que compleix: $y'(x) = f(x, y(x))$, $\forall x \in I$.

- **Comentari:** En aquesta presentació, usarem la notació $y = y(x)$ per la funció incògnita però, en els exemples, pot ser $x = x(t)$, $y = y(t)$, etc.

– Exemples:

(1) Càlcul de les primitives d'una funció $f(x)$ donada: Busquem $y=y(x)$ tal que $\boxed{y' = f(x)}$

(2) $\boxed{y' = y}$ p. ex., $y(x) = e^x$ n'és una solució (particular)

(3) L'equació logística: $\boxed{y' = r \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{K}\right)}$ $\quad ' = \frac{d}{dt}$

- $y = y(t)$ modela l'evolució en el temps d'una població quan els recursos disponibles són finits (variable independent t és el temps).
- $r > 0$ taxa de creixement "natural" de la població.
- $K > 0$ depèn dels recursos disponibles
- Si $y(t)$ solució particular de l'edo que correspon a una població inicial $y_0 = y(0)$: $\boxed{y(t) = \dfrac{K \cdot y_0 \cdot e^{r \cdot t}}{K + y_0 \cdot (e^{r \cdot t} - 1)}}$, $t \geq 0$,

i verifica: $\lim_{t \to +\infty} y(t) = K$. (si $y_0 > 0$)

- **Def.:** Formes usuals per les solucions d'una edo:

(i) Solucions explícites: Quan coneixem l'expressió de la solució com a funció de la variable independent ("fórmula per la solució").

- **Exemple:** $y(x) = 5\tan(5x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right)$ és solució explícita de l'edo $y' = 25 + y^2$. En efecte:

$$y'(x) = 5\left(1+\tan^2(5x)\right)\cdot 5 = 25 + \left(5\tan(5x)\right)^2 = 25 + y(x)^2.$$

(ii) Solucions implícites: Quan la solució està definida per una equació que relaciona els valors de la funció incògnita i de la variable independent.

- **Exemple:** L'equació $x^2+y^2=25$ defineix de forma implícita dues solucions de l'edo $y' = -x/y$ que, en aquest cas, podem donar també en forma explícita com $y_1(x) = +\sqrt{25-x^2}$, $y_2(x) = -\sqrt{25-x^2}$, $x \in (-5,5)$

En efecte: si en l'equació $x^2+y^2=25$ entenem $y = y(x)$ i la derivem respecte de x: $2x + 2y\cdot y' = 0 \Rightarrow x + y\cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -x/y$

- Comentaris:

(i) Les solucions d'una edo de 1er. ordre no són funcions aïllades sinó que, de forma natural, formen una família depenent d'un paràmetre

(ii) Anomenarem solució general de l'edo a aquella família de solucions que contingui totes les solucions de l'equació.

(iii) Malauradament, només en exemples molt senzills és possible calcular mi que sigui una família de solucions d'una edo donada. Aquest conjunt d'edo's esdevé encara més restrictiu si volem una família de solucions donada de forma explícita. A més, molts cops hem d'admetre que les solucions obtingudes (explícites o implícites) continguin en la seva expressió primitives de funcions que no sabem calcular i que hem de deixar indicades. D'aquesta mena de solucions clàssicament se'n diu solucions per quadratures.

- Exemples:

(a) Primitives d'una funció $f(x)$ donada: La solució general (explícita i per quadratures) de l'edo $y' = f(x)$ és: $y(x;c) = c + \int_a^x f(s)\,ds$, $c \in \mathbb{R}$ (c "constant integració", a fixat pertanyent a l'interval de definició de $f(x)$).

(b) $y(x;c) = c \cdot e^x$ és la solució general explícita de l'edo $y' = y$ $(c \in \mathbb{R})$

(c) $y(x;c) = c\,e^{x^2} + e^{x^2}\int_0^x e^{-s^2}\,ds$, $c \in \mathbb{R}$, és la solució general (explícita i per quadratures) de l'edo $y' = 2x \cdot y + 1$.

(d) $x^2 + y^2 = c$, $c > 0$, defineix una família implícita de solucions de l'edo $y' = -x/y$.

- Comentari:

(i) La forma usual de particularitzar una solució concreta d'una edo és demanant que verifiqui unes condicions inicials (c.i.) donades i resoldre el corresponent Problema de Valors inicials (P.V.I.)

(ii) Si coneixem la solució general de l'edo o una família de solucions, depenent d'una constant c, resoldre un P.V.I. vol dir trobar la constant o constants que associades a les c.i. donades.

- <u>Def.</u>: Donada l'edo $y' = f(x,y)$ i donades c.i. $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, el P.V.I. associat consisteix en buscar $y(x)$ solució de l'edo tal que $y(x_0) = y_0$.

- <u>Comentari</u>: Si $y = y(x)$ és solució de l'edo, la seva gràfica en el pla (x,y) defineix una corba. Resoldre un P.V.I. vol dir buscar una solució de l'edo per la qual aquesta corba passi per un punt concret pre-fixat.

- <u>Teorema</u> (existència i unicitat de solucions d'una edo / Picard)

$$f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x,y)$$ funció donada, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ conjunt obert i $f \in C^1(\Omega)$. ["f de classe C^1" vol dir f contínua i amb derivades parcials també contínues]. Aleshores, donades c.i. $(x_0, y_0) \in \Omega$ qualsevol, $\exists\, y = y(x)$ una <u>única solució local</u> del P.V.I. $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

(Solució local vol dir que $y(x)$ està definida almenys per $x \in I$, on I interval obert de $\mathbb{R}$ que conté x_0 encara que, depenent del cas, aquest interval pugui ser molt petit per un P.V.I. donat).

- <u>Exemple:</u> $y(x;c) = \tan(x+c)$, $c \in [0,\pi)$, és la solució general de $y' = 1+y^2$.

- En primer lloc, observem que si $c_1 - c_2 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, llavors $\tan(x+c_1) = \tan(x+c_2)$.
  Per això és suficient restringir el paràmetre $c \in [0,\pi)$.
- Clarament $y(x;c)$ verifica l'edo $y' = 1+y^2$, $\forall c \in \mathbb{R}$.
- $f(x,y) = 1+y^2 \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ i, donades c.i. $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ qualsevol,
  llavors el P.V.I. $y(x_0) = y_0$ sempre té (única) solució en la família:

  $y_0 = y(x_0;c) = \tan(x_0+c) \iff x_0 + c = \arctan(y_0) + k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z} \iff$

  $\iff c = \arctan(y_0) - x_0 + k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z}$,

  on $\arctan(\cdot) : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, i llavors triem l'únic $k \in \mathbb{Z}$ pel qual el corresponent $c \in [0,\pi)$.
- Totes les solucions estan definides en un interval obert de longitud π.
  Per exemple, si:

  $x_0 = y_0 = 0 \implies y(x) = \tan(x)$ definida $\forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

• Casos concrets d'edo's 1-dimensionals de 1er. ordre que abordem:

(I) Edo's separables: $y' = f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$

(II) Edo's lineals: $y' = a(x) \cdot y + b(x)$

(III) Edo's Bernouilli: $y' = a(x) \cdot y + b(x)\, y^r$, $r \neq 0, 1$

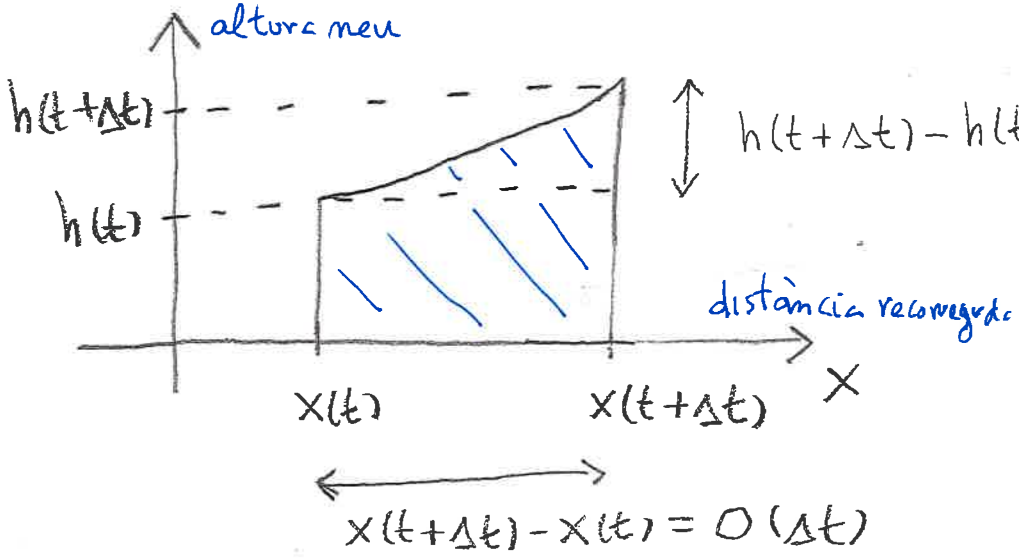
(IV) Edo's exactes: $P(x,y) + Q(x,y)\, y' = 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Usarem aquests casos per resoldre alguns exemples concrets que, tractarem que en la mesura del possible corresponguin a una formalització matemàtica (senzilla) de problemes aplicats (del "món real").

Problema 19: Està nevant amb regularitat. A les 12h surt una màquina llevaneus que avança 2Km en la 1a. hora i 1Km en la 2a. A quina hora ha començat a nevar? (suposem que la quantitat de neu treta per la màquina per unitat de temps és constant).

- Entenem doncs que la màquina pot desplaçar un volum de neu constant per unitat de temps. Com que l'amplada de la pala de la màquina és la que és, aquest volum ve donat per l'àrea ocupada per la neu si fem una secció longitudinal en la direcció del moviment de la màquina que, a falta de més informació, suposem que segueix una trajectòria recta.
- Denotem per $t_0 \leq 12$ l'instant de temps (en hores) en que ha començat a nevar. Entenem que abans no hi havia neu.
- $h(t) = K\cdot(t-t_0)$ és l'altura de la neu en l'instant $t \geq t_0$, on K és una constant que depen de la intensitat de la nevada.
- $X(t)$ distància recorreguda (en Km) per la màquina si $t \geq 12$.

• Les dades inicials són: $X(12)=0$, $X(13)=2$, $X(14)=3$.



• Fixem un $t \geq t_0$ i triem $\Delta t > 0$ petit

• Podem identificar l'àrea de la regió (\\\) amb la quantitat de neu treta per la màquina entre els instants t i $t+\Delta t$.

• Observem que si, a priori, presuposem que $X(t)$ serà una funció almenys C^1 en t, llavors $X(t+\Delta t)-X(t)$ és d'ordre Δt. Això vol dir $|X(t+\Delta t)-X(t)| \leq \text{const.}\ \Delta t$. Clarament, $h(t+\Delta t)-h(t)=O(\Delta t)$.

• L'àrea de la regió (\\\) és igual a l'àrea del rectangle de base $X(t+\Delta t)-X(t)$ i altura $h(t)$, més un petit excés que és difícil de calcular però que és menor que l'àrea del rectangle de base $X(t+\Delta t)-X(t)=O(\Delta t)$ i altura $K\cdot\Delta t$. Per tant, l'àrea d'aquest petit excés és d'ordre $O(\Delta t^2)$.

• Per tant, la igualtat "quantitat de neu treta per unitat de temps és constant" ens diu que:

$$(x(t+\Delta t) - x(t)) \cdot h(t) + O(\Delta t^2) = Q \cdot \Delta t$$

Per una certa constant $Q > 0$. Dividint per Δt:

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \cdot h(t) + O(\Delta t) = Q$$

Fent $\Delta t \to 0^+$: $x'(t) \cdot h(t) = Q \Rightarrow x'(t) = \frac{Q}{K \cdot (t-t_0)} = \frac{M}{t-t_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = M \cdot \ln(t-t_0) + C$, per unes certes constants $M > 0$ i $t_0 \leq 12$.

Llavors, fent $t = 12, 13, 14$:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = x(12) = M \ln(12-t_0) + C \\ 2 = x(13) = M \ln(13-t_0) + C \\ 3 = x(14) = M \ln(14-t_0) + C \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{a 2a., 3a}]{\text{Restem 1a.}} \left\{\begin{array}{l} M \ln\left(\frac{13-t_0}{12-t_0}\right) = 2 \\ M \ln\left(\frac{14-t_0}{12-t_0}\right) = 3 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{quocient}]{\text{Fem}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{\ln\left(\frac{13-t_0}{12-t_0}\right)}{\ln\left(\frac{14-t_0}{12-t_0}\right)} \Rightarrow \ln\left(\frac{14-t_0}{12-t_0}\right)^2 = \ln\left(\frac{13-t_0}{12-t_0}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{14-t_0}{12-t_0}\right)^2 = \left(\frac{13-t_0}{12-t_0}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_0^2 - 25 t_0 + 155 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{25 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} - \quad \boxed{11.38h} & \text{hora en que ha començat nevar!} \\ + \quad 13.6h & (\text{és} > 12h) \end{cases}$$

Edo's separables

- Són aquelles que podem escriure com: $\boxed{y' = f(x,y) = g(x) \cdot h(y)}$ (això és: $f(x,y)$ és producte d'una funció que depèn de x per una que depèn de y).

- <u>Resolució edo's separables:</u> Sigui $G(x)$ una primitiva qualsevol de $g(x)$ i $H(y)$ una primitiva qualsevol de $1/h(y)$. Llavors, l'expressió:

$$H(y) = G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (*)$$

defineix una família implícita (per quadratures) de solucions de l'edo.

En efecte: Suposem que $y = y(x)$ verifica la relació $(*)$ per algun valor de $C \in \mathbb{R}$: $H(y(x)) = G(x) + C$. Derivant respecte x:

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = G'(x) \underset{\substack{G'(x) = g(x) \\ H'(y) = 1/h(y)}}{\Longrightarrow} \frac{1}{h(y(x))} \cdot y'(x) = g(x).$$

Per tant: $y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$.

- <u>Regla mnemotècnica per resoldre edo's separables:</u>

$$y' = g(x)\cdot h(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx \Rightarrow \boxed{\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx + C}$$

Aquí, i en tot el que segueix, escriurem $\int \boxed{//}$ per indicar una primitiva qualsevol (sense cap constant d'integració) de la funció $\boxed{//}$.

- <u>Comentari:</u> No sempre és possible convertir l'expressió implícita d'aquesta família de solucions d'una edo separable en una relació explícita. Depèn del cas. Així mateix, i com comentarem en un dels exemples, no sempre aquesta família de solucions ens proporciona la solució general de l'edo.

- Exemple 1: Troben una família de solucions explícites de l'edo separable següent i resolen el P.V.I. que s'indica:

$$y \cdot y' + (1+y^2) \cdot \sin x = 0, \qquad y(0) = 1.$$

L'expressem com: $y \dfrac{dy}{dx} = -(1+y^2)\sin x \iff \dfrac{y}{1+y^2} \cdot \dfrac{dy}{dx} = -\sin x$

i la resolem com a edo separable que és:

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy = -\int \sin x\,dx + C \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \cos x + C}_{\text{família implícita solucions}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(1+y^2) = 2\cos x + 2C \Rightarrow 1+y^2 = e^{2\cos x + 2C} \Rightarrow \underbrace{y(x;C) = \pm\sqrt{e^{2\cos x + 2C} - 1}}_{\text{família explícita}}$$

· Resoldre el P.V.I. vol dir trobar el valor / valors de C (i en aquest cas també el signe $\pm$) que fa que $y(x) = y(x;C)$ verifiqui $y(0) = 1 > 0$. Clarament doncs, cal triar el signe $+$. Atenció: El valor de C millor calcular-lo via la relació implícita i no pas via la explícita!

Em efecte: $\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \cos x + c \Longrightarrow \frac{1}{2}\ln(2) = 1 + c \Rightarrow c = \frac{1}{2}\ln(2) - 1$

Fem: $x=0$
$y=1$

Finalment, la solució del PVI és: $y(x) = +\sqrt{e^{2\cos x + \ln 2 - 2} - 1} = \sqrt{2e^{2(\cos x - 1)} - 1}$

-Exemple 2: Trobeu l'expressió implícita de la solució del PVI $\begin{cases} y' = 1 + \frac{1}{y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{y^2} \Rightarrow \int \frac{y^2}{1+y^2}\,dy = \int dx + c \Rightarrow \underbrace{y - \arctan(y) = x + c}_{\text{família implícita solucions}}$$

on hem usat:

$$\frac{y^2}{1+y^2} = \frac{(y^2+1)-1}{1+y^2} = 1 - \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow \int \frac{y^2}{1+y^2}\,dy = y - \arctan(y)$$

Per tant, fent $x=0$, $y=1$ en la relació implícita obtinguda:

$1 - \arctan(1) = c \Rightarrow c = 1 - \pi/4$.

obtenim la solució implícita: $y - \arctan(y) = x + 1 - \pi/4$

- Exemple 3: Ídem que en l'exemple 1 per PVI: $\begin{cases} e^{-y}\cdot(1+y')=1 \\ y(0)=\ln 2 \end{cases}$

$$e^{-y}\frac{dy}{dx}=1-e^{-y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^{y}-1 \Rightarrow \int\frac{dy}{e^{y}-1}=\int dx+C_1$$

Fem el canvi de variable $u=e^{y}$, $du=e^{y}dy=u\,dy$ en la integral:

$$\int\frac{dy}{e^{y}-1}=\int\frac{du}{(u-1)u}=\int\left(-\frac{1}{u}+\frac{1}{u-1}\right)du=-\ln|u|+\ln|u-1|=\ln\left|\frac{u-1}{u}\right|=$$

$$=\ln\left|\frac{e^{y}-1}{e^{y}}\right|$$, on hem descomposat en fraccions simples:

$$\frac{1}{(u-1)u}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1} \Leftrightarrow 1=A(u-1)+B\cdot u \quad \begin{cases} \text{Fent } u=0 \Rightarrow 1=A\cdot(-1) \Rightarrow A=-1 \\ \text{Fent } u=1 \Rightarrow 1=B \end{cases}$$

Hem obtingut doncs la família implícita de solucions:

$$\ln\left|\frac{e^{y}-1}{e^{y}}\right|=x+C_1 \Rightarrow \left|\frac{e^{y}-1}{e^{y}}\right|=\underbrace{e^{C_1}}_{>0}\cdot e^{x} \Rightarrow \overbrace{\frac{e^{y}-1}{e^{y}}=c\cdot e^{x}}^{(*)} \Rightarrow$$

Treiem el valor absolut permetent que $c=e^{C_1}$ pugui ser també ≤ 0 ($c=0$ també dóna solució)

$$\Rightarrow e^{y}(1-c\,e^{x})=1$$

$$\Rightarrow y(x;c)=\ln\left(\frac{1}{1-c\,e^{x}}\right)$$ família explícita.

Fent $x=0$, $y=\ln 2$ en $(*)$ obtenim: $c=1/2 \Rightarrow y(x)=\ln\left(\frac{2}{2-e^{x}}\right)$ solució PVI

- Problema 24. Perdua de solucions en la resolució edo's separables.

(a) obtingueu una família de solucions explícites de l'edo

$$\boxed{y' = f(x,y) = (x-3)\cdot(1+y)^{2/3}} \quad (*)$$

via el mètode de resolució d'edo's separables.

$$\underbrace{\int \frac{dy}{(1+y)^{2/3}}}_{\int (1+y)^{-2/3}\,dy} = \int (x-3)\,dx + C_1 \Rightarrow \frac{(1+y)^{1/3}}{1/3} = \frac{x^2}{2} - 3x + C_1 \Rightarrow (1+y)^{1/3} = \frac{x^2}{6} - x + \overbrace{\frac{C_1}{3}}^{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{obtenim la família: } \boxed{y(x;c) = -1 + \left(\frac{x^2}{6} - x + c\right)^3} \quad (**)$$

(b) Vegeu que el P.V.I. $y(0)=-1$ per l'edo $(*)$ té una única solució dins la família

És clar que si volem $y(0;c)=-1$ en $(**)$ cal triar $c=0 \Rightarrow y_1(x) = y(x;0) = -1 + \left(\frac{x^2}{6} - x\right)^3$ és l'única solució d'aquest PVI dins la família.

(c) Vegeu que $y_0(x) \equiv -1$ és solució particular de l'edo $(*)$ i també verifica el PVI $y(0)=-1$, però no forma part de la família $(**)$ per cap c. Expliqueu-me la causa.

La funció $f(x,y) = (x-3)\cdot(1+y)^{2/3}$ és contínua en tot $\mathbb{R}^2$, però només és C^1 si $y \neq -1$, ja que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}(x-3)\cdot(1+y)^{-1/3}$ no té sentit si $y=-1$. El fet de que $f(x,y)$ no sigui C^1 si $y=-1$ vulnera el Teorema d'existència i unicitat de solucions d'edo's i cap P.V.I. $y(x_0)=y_0$ amb $y_0=-1$ té perquè tenir solució única.

Edo's lineals ("lineal" vol dir "lineal en y")

- Són de la forma: $\boxed{y' = f(x,y) = a(x)\cdot y + b(x)}$

- Cas homogeni: $\boxed{b(x) \equiv 0}$ La solució general és $y(x;c) = c\cdot e^{\int a(x)dx}$

En efecte: $\dfrac{dy}{dx} = a(x)\, y \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx + c_1 \Rightarrow \ln|y| = \int a(x)dx + c_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |y| = \underset{\overset{\vee}{0}}{e^{c_1}}\cdot e^{\int a(x)dx} \Rightarrow y(x;c) = c\, e^{\int a(x)dx} \quad \text{(edo separable)}$$

↑ treiem valor absolut permetent $c \in \mathbb{R}$.

- Cas no homogeni: $\boxed{b(x) \not\equiv 0}$ La solució general és:

$$y(x;c) = \underbrace{c\cdot e^{\int a(x)dx}}_{\substack{\text{solució general} \\ \text{edo homogènia} \\ \text{associada} \\ y' = a(x)\,y}} + \underbrace{e^{\int a(x)dx}\int \frac{b(x)}{e^{\int a(x)dx}}\,dx}_{\substack{\shortparallel \\ y_p(x) \text{ dóna una solució} \\ \text{particular de l'edo no} \\ \text{homogènia } y' = a(x)\,y + b(x)}}$$

• La primera idea bàsica darrera la fórmula anterior és que si $y_p(x)$ és una solució (particular) qualsevol de $y' = a(x)y + b(x)$, i $y(x)$ és qualsevol altre solució de l'edo no homogènia, llavors $z(x) = y(x) - y_p(x)$ verifica l'edo homogènia $z' = a(x)z$. En efecte:

$$z = y - y_p \Rightarrow z' = y' - y_p' = (a(x)y + b(x)) - (a(x)y_p + b(x)) = a(x)\underbrace{(y - y_p)}_{= z}$$

• Per tant, usant que <u>sabem</u> resoldre l'edo homogènia $z' = a(x)z$. Podem reduir el càlcul de la solució general de $y' = a(x)y + b(x)$ al càlcul d'una única solució particular $y_p(x)$ de l'edo no homog. tindrem:

$$\underbrace{y(x)}_{\substack{\text{solució}\\ \text{general}\\ \text{edo no}\\ \text{homogènia}}} = \underbrace{c \cdot e^{\int a(x)dx}}_{\substack{\text{solució general}\\ \text{edo homogènia}}} + y_p(x)$$

• La segona idea bàsica refereix al càlcul d'una solució particular de $y' = a(x)y + b(x)$ via el mètode de variació de les constants, que consisteix en buscar $\boxed{y_p(x) = e^{\int a(x)\,dx} \cdot u(x)}$, per una certa funció $u(x)$ a determinar (observeu que si triem $u(x) \equiv C = \text{const.}$ llavors la $y_p(x)$ obtinguda és solució de l'edo homogènia $y' = a(x)y$

Si volem $y_p = e^{\int a(x)\,dx} \cdot u$ verifiqui l'edo no homogènia, cal:

$$\left.\begin{array}{l} y_p' = a(x)\, e^{\int a(x)dx} \cdot u + e^{\int a(x)dx} \cdot u' \\ \parallel \leftarrow \text{volem} \\ a(x)\, y_p + b(x) = a(x)\, e^{\int a(x)dx} \cdot u + b(x) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow e^{\int a(x)dx} \cdot u' = b(x)$$

D'aquí $u' = b(x) / e^{\int a(x)dx} \Rightarrow u(x) = \int \dfrac{b(x)}{e^{\int a(x)dx}}\,dx$.

• <u>Exercici</u>: Fórmula tancada per la solució del PVI $\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(r)\,dr} \cdot y_0 + e^{\int_{x_0}^{x} a(r)\,dr} \int_{x_0}^{x} \frac{b(s)}{e^{\int_{x_0}^{s} a(r)\,dr}}\,ds \qquad (*)$$

Aquesta fórmula també la podem escriure com:

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(r)\,dr} \cdot y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_s^x a(r)\,dr} \cdot b(s)\,ds \qquad (*)$$

té interès teòric (i l'usarem en algun exemple de caire teòric) però no ~~re~~comenem usar-la com a mètode per resoldre un PVI donat per a una edo lineal. Creiem preferible calcular-ne la seva solució general en termes d'un paràmetre $C \in \mathbb{R}$ i determinar-lo per tal que dita solució verifiqui el PVI.

· <u>Exercici</u>: Considereu el P.V.I. $y' = -\frac{2}{x} y + \frac{1}{x^2}$, $x > 0$, $y(1) = 0$

(a) Solució general: $y(x, c) = c/x^2 + 1/x$, $x > 0$

(b) Determineu que $c = -1$ dona lloc a la solució del PVI: $y(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

(c) Vegeu que també podem calcular $y(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ fent $a(x) = -2/x$, $b(x) = 1/x^2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ en la fórmula $(*)$ de la part alta de la pàgina o l'equivalent del peu pàgina anterior.

- **Exemple 1**: Resolem el P.V.I. $y(0)=1$ per l'edo (lineal):

$$(1-x^2)y' + xy = 1, \quad x\in(-1,1) \iff y' = \underbrace{\frac{x}{x^2-1}}_{a(x)}\, y + \underbrace{\frac{1}{1-x^2}}_{b(x)}, \quad x\in(-1,1)$$

$$A(x) := e^{\int a(x)dx} = e^{\int \frac{x}{x^2-1}dx} = e^{\frac{1}{2}\ln|x^2-1|} = e^{\ln(1-x^2)^{1/2}} = (1-x^2)^{1/2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$B(x) := \int \frac{b(x)}{A(x)}dx = \int \frac{1/1-x^2}{(1-x^2)^{1/2}}dx = \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \int (1-x^2)^{-3/2}dx = \left\{\begin{array}{l}\text{canvi:}\\ x=\sin u\\ dx = \cos u\, du\end{array}\right\} =$$

$$= \int (1-\sin^2 u)^{-3/2}\cos u\, du = \int (\cos^2 u)^{-3/2}\cos u\, du = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u = \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Finalment, la solució general de l'edo lineal és:

$$y(x) = A(x)\cdot C + A(x)B(x) = C\sqrt{1-x^2} + x, \quad C\in\mathbb{R}$$

Busquem $C\in\mathbb{R}$ que resol el PVI:

$$1 = y(0) = C\sqrt{1-0^2} + 0 = C \iff C=1$$

obtenim la següent solució: $y(x) = \sqrt{1-x^2} + x$

· **Problema 29**: Trobeu la solució general de les següents equacions:

(b) $2xy' - y = 3x^2, \; x > 0 \iff y' = \underbrace{\frac{1}{2x}}_{a(x)} y + \underbrace{\frac{3}{2}x}_{b(x)}, \quad x > 0$

$$A(x) := e^{\int a(x)dx} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}} = e^{\frac{1}{2}\ln x} = e^{\ln(x^{1/2})} = x^{1/2} = \sqrt{x}$$

$$B(x) := \int \frac{b(x)}{A(x)} dx = \frac{3}{2}\int \frac{x}{x^{1/2}} dx = \frac{3}{2}\int x^{1/2} dx = \frac{3}{2}\frac{x^{3/2}}{(3/2)} = x^{3/2}$$

Solució general: $y(x) = c \cdot A(x) + A(x)B(x) = c\sqrt{x} + x^2, \quad c \in \mathbb{R}$

(c) $y' + y\cos x = \sin x \cdot \cos x \iff y' = \underbrace{-\cos x}_{a(x)} \cdot y + \underbrace{\sin x \cdot \cos x}_{b(x)}$

$$A(x) = e^{\int a(x)dx} = e^{-\int \cos x \, dx} = e^{-\sin x}$$

$$B(x) = \int \frac{b(x)}{A(x)} dx = \int e^{\sin x} \cdot \sin x \cdot \cos x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Integració per parts} & \\ u = \sin x & \to du = \cos x \, dx \\ dv = e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx & \to v = e^{\sin x} \end{array} \right\} =$$

$$= u \cdot v - \int v \, du = e^{\sin x} \cdot \sin x - \int e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx = e^{\sin x} \cdot \sin x - e^{\sin x}$$

Solució general: $y(x) = c \cdot A(x) + A(x)B(x) = c\, e^{-\sin x} + \sin x - 1$

Problema 31: Donats $\alpha, c > 0$, siguin $a(\cdot), b(\cdot) : (\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ funcions contínues verificant $a(t) \leq -c < 0$, $\forall t > \alpha$ i $\lim_{t \to +\infty} b(t) = 0$.

Proveu que tota solució $x(t)$ de l'edo $x' = a(t)x + b(t)$ compleix $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

Triem $t_0 > \alpha$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ qualsevol i $x(t)$ solució del PVI $x(t_0) = x_0$.

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr} \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(r)\,dr} b(s)\,ds, \quad \forall t > \alpha.$$

- Triem $t \geq t_0 > \alpha$. Llavors, si $r \in [t_0, t]$ es compleix $t \geq r \geq t_0 > \alpha \Rightarrow a(r) \leq -c$, d'on:

$$\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr \leq \int_{t_0}^{t} (-c)\,dr = -c \cdot (t - t_0) \Rightarrow e^{\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr} \leq e^{-c \cdot (t - t_0)}.$$

En conseqüència, $\lim_{t \to +\infty} e^{\int_{t_0}^{t} a(r)\,dr} \cdot x_0 = 0$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Amb el mateix argument, si triem $t \geq s \geq t_0 > \alpha$, llavors si $r \in [s, t]$ es compleix $a(r) \leq -c \Rightarrow e^{\int_s^t a(r)\,dr} \leq e^{-c \cdot (t - s)}$. Per tant:

$$\left| \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(r)\,dr} b(s)\,ds \right| \leq \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(r)\,dr} \cdot |b(s)|\,ds \leq \int_{t_0}^{t} e^{-c \cdot (t - s)} \cdot |b(s)|\,ds, \quad \forall t \geq t_0 > \alpha.$$

Si veiem $L := \lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} e^{-c\cdot(t-s)} \cdot |b(s)| ds = 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(r)dr} \cdot b(s) ds = 0.$

D'aquí podem concloure $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Per veure que $L=0$ observem: $\lim_{t\to+\infty} b(t) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} |b(t)| = 0$

A més, en ser $b(t)$ contínua $\Rightarrow |b(t)|e^{c\cdot t}$ contínua $\Rightarrow B(t) := \int_{t_0}^{t} |b(s)| e^{c\cdot s} ds$

és C^1 si $t \geq t_0 > \alpha$ i, pel teorema fonamental del càlcul, $B'(t) = |b(t)| e^{c\cdot t}$.

Llavors, expressem:

$$L = \lim_{t\to+\infty} e^{-c\cdot t} \int_{t_0}^{t} |b(s)| e^{c\cdot s} ds = \lim_{t\to+\infty} \frac{B(t)}{e^{c\cdot t}}$$ i distingim dos casos:

(1) $\lim_{t\to+\infty} B(t) = B_0$ finit $\Rightarrow L = \frac{B_0}{+\infty} = 0$.

(2) $\lim_{t\to+\infty} B(t) = +\infty$. Llavors, ens cal aplicar la regla de L'Hôpital:

$$L = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} \frac{B'(t)}{c\cdot e^{ct}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{|b(t)| e^{ct}}{c\cdot e^{c\cdot t}} = \frac{1}{c} \lim_{t\to+\infty} |b(t)| = 0.$$

Edo's de Bernoulli

- Són de la forma: $\boxed{y' = a(x)y + b(x)y^r}$ $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0, 1$.

- Resolució de les edo's de Bernoulli

Si fem el canvi de variable $\boxed{z = y^{1-r}}$ en l'equació, llavors

z verifica l'edo lineal $\boxed{z' = (1-r)\,a(x)\,z + (1-r)\,b(x)}$

Llavors, resolent aquesta edo lineal, la relació $z = y^{1-r}$ ens permet calcular la solució general de l'edo de Bernoulli. En efecte:

$$z = y^{1-r} \Rightarrow z' = (1-r)\,y^{-r}\cdot y' = (1-r)\,y^{-r}\left[a(x)y + b(x)y^r\right]$$

$$= (1-r)\,a(x)\,y^{1-r} + (1-r)\,b(x) = (1-r)\,a(x)\,z + (1-r)\,b(x).$$

- Exemple: Resoleu l'edo $y' + xy - x^3y^3 = 0$

Aïllem $y' = -xy + x^3y^3$ Bernoulli amb $\boxed{\begin{array}{l} r = 3 \\ a(x) = -x \\ b(x) = x^3 \end{array}}$

Canvi: $\boxed{z = y^{1-r} = y^{-2}} \Rightarrow z' = (1-r)\,a(x)\,z + (1-r)\,b(x) = \underbrace{2x}_{\tilde{a}(x)}\,z \underbrace{-2x^3}_{\tilde{b}(x)}$

· Resolem l'edo lineal per z:

$$\tilde{A}(x) = e^{\int \tilde{a}(x)\,dx} = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

$$\tilde{B}(x) = \int \frac{\tilde{b}(x)}{\tilde{A}(x)}\,dx = -2\int e^{-x^2}\cdot x^3\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{integració per parts}\\ u = x^2 \quad \to du = 2x\\ dv = e^{-x^2}x\,dx \to v = -e^{-x^2}/2\end{array}\right\} =$$

$$= -2\left[u\cdot v - \int v\,du\right] = -2\left[-\frac{x^2}{2}e^{-x^2} + \int e^{-x^2}x\,dx\right] = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2}$$

Per tant, la solució general per z és:

$$z(x;c) = \tilde{A}(x)\cdot c + \tilde{A}(x)\,\tilde{B}(x) = e^{x^2}\cdot c + e^{x^2}\left[x^2e^{-x^2} + e^{-x^2}\right] = e^{x^2}\cdot c + x^2 + 1$$

Finalment: $y(x;c) = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{z(x;c)}} = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{e^{x^2}\cdot c + x^2 + 1}}$

• Exercici: el canvi de variable $y = u(x)\cdot z$ amb $u(x) = e^{\int a(x)\,dx}$, transforma l'edo de Bernouilli $y' = a(x)y + b(x)y^r$ en l'edo separable $z' = b(x)\,u(x)^{r-1}\cdot z^r$

$\boxed{\text{Edo's exactes}}$ (Notació: Usem sub-índexs per denotar derivades parcials)

Són de la forma: $\boxed{P(x,y) + Q(x,y)\cdot y' = 0}$ on $\boxed{P_y = Q_x}$

· <u>Resolució edo's exactes</u>: Existeix $U(x,y)$ verificant les equacions: $\boxed{U_x = P \quad \& \quad U_y = Q}$ (Dita U està definida de forma única, excepte la suma d'una constant en qualsevol domini on P, Q siguin C^1 i que sigui simplement connex, això és, sense forats)

Aleshores, l'expressió $\boxed{U(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R}}$ defineix una família implícita de solucions (per quadratures) de l'edo.

No fem els detalls de l'existència de $U(x,y)$, però sí observem que si U és C^2 i verifica l'equació $U_x = P$, $U_y = Q$, llavors, per la regla de Schwarz de les derivades creuades cal:

$$P_y = (U_x)_y = U_{xy} = U_{yx} = (U_y)_x = Q_x$$

Finalment, observem que si $\exists\, U(x,y)$ verificant $U_x = P$, $U_y = Q$ i $y = y(x)$ és una funció definida implícitament per l'equació $U(x,y) = C$, per una certa $C \in \mathbb{R}$, llavors és solució de l'edo $P(x,y) + Q(x,y)\,y' = 0$.

En efecte: Derivem respecte de x la relació:

$$U(x, y(x)) = C \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regla de la cadena}}}{\Rightarrow} U_x(x, y(x)) \cdot 1 + U_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\underset{U_x = P,\ U_y = Q}{\Rightarrow} \quad P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0 \Rightarrow y(x) \text{ solució edo.}$$

- ~~observació~~: Usant llenguatge de formes diferencials (geometria diferencial) és usual escriure una edo de la forma $P(x,y) + Q(x,y)\,y' = 0$ com $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

Fixeu-vos que dividint, formalment, per dx obtenim l'edo $P + Q\,y' = 0$ considerada.

• **Exemple 1**: Usem el mètode de resolució d'edo's exactes per trobar una expressió implícita per la solució del PVI:

$$\underbrace{e^x+3y}_{P(x,y)}+\underbrace{(3x+\cos y)}_{Q(x,y)}\,y'=0,\qquad y(0)=\pi.$$

• Verifiquem que l'edo és exacta $\Leftrightarrow P_y=Q_x$. En efecte:

$P_y=3$, $Q_x=3$

• Busquem $U=U(x,y)$ verificant:

$$\left.\begin{array}{l}(eq_1)\ U_x=P=e^x+3y\\(eq_2)\ U_y=Q=3x+\cos y\end{array}\right\}$$

Constatem que resoldre (eq_1) o (eq_2) té el mateix grau de dificultat. Comencem doncs resolent (eq_1)

$$U_x=e^x+3y\Rightarrow U(x,y)=\int(e^x+3y)\,dx+\underbrace{\varphi(y)}_{\text{“constant integració” = “funció de } y\text{”}}=e^x+3xy+\varphi(y)$$

Ara, determinem $\varphi(y)$ via (eq_2):

$$U_y=3x+\varphi'(y)\underset{\text{volem}}{=}3x+\cos y\Rightarrow\varphi'(y)=\cos y\Rightarrow\varphi(y)=\sin y+\underbrace{C}_{\text{“constant”}}$$

Per tant, $U(x,y) = e^x + 3xy + \varphi(y) = e^x + 3xy + \sin y + C$, on $C \in \mathbb{R}$ és una constant arbitrària que, ara i sempre, triarem $C = 0$.

Per tant, fent $\bar{U}(x,y) = e^x + 3xy + \sin y$, hem obtingut la següent família de solucions implícites de l'edo:

$$U(x,y) = C \iff e^x + 3xy + \sin y = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

- Si volem C per tal que dita solució verifiqui el P.V.I. $y(0) = \pi$, tem $x = 0$, $y = \pi \Rightarrow C = e^0 + 3 \cdot 0 \cdot \pi + \sin \pi = 1$

Per tant, la solució del P.V.I. compleix: $e^x + 3xy + \sin y = 1$.

- Exemple 2: Ídem per P.V.I.: $\underbrace{4x^3 e^{x+y} + x^4 e^{x+y} + 2x}_{P(x,y)} + \underbrace{(x^4 e^{x+y} + 2y)}_{Q(x,y)} y' = 0$, $y(0) = 1$

- Verifiquem que l'edo és exacta $\iff P_y = Q_x$. En efecte:

$$P_y = 4x^3 e^{x+y} + x^4 e^{x+y}, \quad Q_x = 4x^3 e^{x+y} + x^4 e^{x+y}$$

• Busquem $U = U(x,y)$ verificant:

$$\left.\begin{array}{l}(eq_1)\ U_x = P = 4x^3e^{x+y} + x^4e^{x+y} + 2x \\ (eq_2)\ U_y = Q = x^4 e^{x+y} + 2y\end{array}\right\}$$ Resolem 1er. (eq_2) ja que resoldre (eq_1) força a integrar $\int x^3e^x dx$, $\int x^4 e^x dx$.

$$U_y = x^4e^{x+y} + 2y \Rightarrow U(x,y) = \int (x^4e^{x+y} + 2y)\,dy = x^4e^x\int e^y dy + 2\int y\,dy$$

Per tant: $U(x,y) = x^4e^{x+y} + y^2 + \varphi(x)$ ("Const. integració" = "funció de x")

Ara, determinem $\varphi(y)$ via (eq_1):

$$U_x = 4x^3e^{x+y} + x^4e^{x+y} + \varphi'(x) \underset{\text{volem}}{=} 4x^3e^{x+y} + x^4e^{x+y} + 2x$$

D'aquí: $\varphi'(x) = 2x \Rightarrow \varphi(x) = x^2 + C$, on triem $C = 0$. Així:

$U(x,y) = x^4e^{x+y} + y^2 + \varphi(x) = x^4e^{x+y} + y^2 + x^2$ i hem obtingut la següent família de solucions implícites de l'edo:

$$U(x,y) = C \Leftrightarrow \cancel{4}x^4e^{x+y} + y^2 + x^2 = C,\quad C \in \mathbb{R} \quad (*)$$

• Busquem C per resoldre el P.V.I. $y(0)=1$ tent $x=0, y=1$: $C = 1$

Per tant la solució del PVI compleix $(*)$ amb $C=1$

- <u>Comentari</u>: Què podem fer si l'edo $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ No és exacta?

observeu que si $\mu(x,y) \neq 0$, llavors l'edo que obtenim multiplicant per $\mu(x,y)$ la inicial, $\underbrace{\mu(x,y)P(x,y)}_{\tilde{P}(x,y)} + \underbrace{\mu(x,y)Q(x,y)}_{\tilde{Q}(x,y)}y' = 0$ té les mateixes solucions que la inicial $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$. Però, si triem $\mu(x,y)$ de forma adequada, pot ser que ara $\tilde{P} + \tilde{Q}y' = 0$ sí que sigui exacta. A tal expressió $\mu(x,y)$, que sempre existeix però no és en general calculable, se l'anomena un <u>factor integrant</u> de l'edo inicial. P. ex., per l'edo lineal

$y' = a(x)y + b(x) \Longleftrightarrow a(x)y + b(x) - y' = 0$, un factor integrant n'és $\mu(x,y) = e^{-\int a(x)dx}$. Això és, l'edo $\underbrace{e^{-\int a(x)dx}(a(x)y + b(x))}_{\tilde{P}(x,y)} \underbrace{- e^{-\int a(x)dx}}_{\tilde{Q}(x,y)} \cdot y' = 0$

és exacta:

$\tilde{P}_y = e^{-\int a(x)dx} \cdot a(x) = \tilde{Q}_x$.

• **Problema 1**: Segons la llei de Malthus, el creixement de les poblacions grans i aïllades és proporcional al nombre d'individus. Usant aquesta llei, troben l'expressió $p(t)$ per la població de la Terra (en funció del temps t), usant que al any 1800 era de $p(1800) = 0.978 \times 10^9$ i a l'any 1900 era $p(1900) = 1.65 \times 10^9$. Quant valdria llavors $p(2000)$?

$$\underbrace{p'(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Velocitat creixent} \\ \text{població en } t}} = K \cdot p(t) \leftarrow \text{proporcional } n^{\circ} \text{ individus en } t, \text{ per una certa } K>0$$

$\Rightarrow p(t) = e^{K \cdot t} \cdot C, \quad C \in \mathbb{R}$

Si ajustem C via el PVI

$p(t_0) = P_0 \Rightarrow p(t) = e^{K \cdot (t - t_0)} \cdot P_0$

(triem $t_0 = 1800$)

Així: $p(t) = 0.978 \times 10^9 \cdot e^{K \cdot (t-1800)}$

Fent $t = 1900 \Rightarrow 1.65 \times 10^9 = p(1900) = 0.978 \times 10^9 \, e^{K \cdot 100}$

Així: $K = \frac{1}{100} \ln\left(\frac{1.65}{0.978}\right) \simeq 5.23 \times 10^{-3}$

$p(2000) = 0.978 \times 10^9 \cdot e^{K \cdot 200} = 0.978 \times 10^9 \cdot \left(e^{100K}\right)^2 = 0.978 \times 10^9 \cdot \left(\frac{1.65}{0.978}\right)^2 \simeq 2.78 \times 10^9$

(Realment $p(2000) = 6.14 \times 10^9$)

Problema 3.-: El model de Verhulst per a una població està basat en l'edo logística $y' = a\cdot y - by^2$, $a,b>0$. Concretament, si $y(t)$ és el nombre d'individus en l'instant t, l'expressem com:

$$y' = r\cdot\left(1-\frac{y}{K}\right)\cdot y, \qquad (*) \qquad \left(y' = dy/dt\right)$$

On: $r>0$ és el paràmetre que modela el creixement natural de la població segons la llei de Malthus (suposant recursos il·limitats) i $K>0$ depèn dels recursos disponibles (com veurem, de fet K és el topall de població que podem sostenir amb els recursos disponibles).

(a) Trobeu una expressió explícita per la solució general de l'edo separable (*).

$$\int \frac{dy}{\left(1-\frac{y}{K}\right)y} = \int r\,dt + c_1 \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{1-y/K}\right| = rt + c_1 \Rightarrow \left|\frac{y}{1-y/K}\right| = \underset{\substack{\| \\ c>0}}{e^{c_1}}\cdot e^{rt}$$

Treiem el valor absolut, permetent que c pugui pendre valors arbitraris en $\mathbb{R}$ ($c=0$ dóna la solució $y\equiv 0$)

obtenim: $\dfrac{y}{1-y/K} = ce^{rt} \Rightarrow y = ce^{rt} - \dfrac{c}{K}e^{rt}y \Rightarrow \left(1+\dfrac{c}{K}e^{rt}\right)y = ce^{rt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{c\,e^{rt}}{1+ce^{rt}/K} = \frac{cK e^{rt}}{K+ce^{rt}}, \quad \forall c \in \mathbb{R} \qquad (**)$$

. Detalls càlcul integral via descomposició en fraccions simples:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{y}{K}\right)\cdot y} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y/K} \Leftrightarrow 1 = A\cdot\left(1-\frac{y}{K}\right) + By \quad \begin{cases} \text{Fent } y=0 \Rightarrow A=1 \\ \text{Fent } y=K \Rightarrow B=1/K \end{cases}$$

Així:

$$\int \frac{dy}{\left(1-\frac{y}{K}\right)y} = \int \frac{dy}{y} - \int \frac{\left(-\frac{1}{K}\right)dy}{1-y/K} = \ln|y| - \ln\left|1-\frac{y}{K}\right| = \ln\left|\frac{y}{1-y/K}\right|$$

(b) Usem el resultat de (a) per resoldre el P.V.I. $y(0)=y_0$.

Fent $t=0$, $y=y_0$ en $\dfrac{y}{1-y/K} = ce^{rt} \Rightarrow c = \dfrac{y_0}{1-y_0/K}$, d'on, via $(**)$:

$$y(t) = \frac{K\cdot y_0\cdot e^{rt}}{K + y_0\cdot(e^{rt}-1)} = \frac{y_0\, e^{rt}}{1+(y_0/K)(e^{rt}-1)}$$

(c) Useu el resultat de (b) per calcular $\lim_{t \to +\infty} y(t)$ en funció de $y_0 > 0$.

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \frac{K \cdot y_0}{y_0} = K$$ ← valor límit per la població independent de y_0

(d) Si per la població humana estimem $r = 0.029$ i usem que en 1961 la població de la Terra era $y(1961) = 3.06 \times 10^9$ i creixia un 2% anualment, useu el model de Verhulst per estimar-ne el valor límit.

Triem l'origen de temps $t=0$ en 1961. Observem que $y'(0)$ ens dona la velocitat de creixement de la població en $t=0$ i, per tant:

$$\underbrace{2\% = 0{,}02 = \frac{y'(0)}{y(0)}}_{\text{igualem "tants per u"}} \underset{\text{Via eq. } y' = r \cdot \left(1 - \frac{y}{K}\right) y}{=} r \cdot \left(1 - \frac{y_0}{K}\right) \Rightarrow \frac{y_0}{K} = 1 - \frac{0.02}{r} \underset{r = 0.029}{\simeq} 0.31$$

D'aquí $K = \dfrac{y_0}{0.31} = \dfrac{3.06 \times 10^9}{0.31} \simeq 9.87 \cdot 10^9$ (població límit) i, a més:

$$y(t) = \frac{3.06 \times 10^9 \cdot e^{0.029 \cdot t}}{1 + 0.31 \cdot (e^{0.029 t} - 1)}$$

(e) Torneu a fer l'apartat (a), però ara resolent l'edo de Verhulst com a edo de Bernoulli.

$y' = \underbrace{r}_{\substack{\shortparallel \\ a(t)}} \cdot y - \underbrace{\frac{r}{K}}_{\substack{\shortparallel \\ b(t)}} \cdot y^2$ és de Bernoulli amb exponent $\tilde{r} = 2$.

Si fem el canvi de variable $z = y^{1-\tilde{r}} = y^{-1}$, obtenim l'edo lineal per z:

$z' = (1-\tilde{r})\, a(t)\, z + (1-\tilde{r})\, b(t) = \underbrace{-r}_{\substack{\shortparallel \\ \tilde{a}(t)}} \cdot z + \underbrace{\frac{r}{K}}_{\substack{\shortparallel \\ \tilde{b}(t)}}$. Llavors:

$$\tilde{A}(t) = e^{\int \tilde{a}(t)\,dt} = e^{-\int r\,dt} = e^{-rt}$$

$$\tilde{B}(t) = \int \frac{\tilde{b}(t)}{\tilde{A}(t)}\,dt = \frac{r}{K}\int e^{rt}\,dt = e^{rt}/K$$

D'aquí, la solució general de l'edo lineal és:

$$z(t) = \tilde{A}(t)\cdot\tilde{c} + \tilde{A}(t)\cdot\tilde{B}(t) = e^{-rt}\cdot\tilde{c} + 1/K, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Finalment: $y(t) = \dfrac{1}{z(t)} = \dfrac{1}{\frac{1}{K} + \tilde{c}\, e^{-rt}} = \dfrac{(1/\tilde{c})\cdot K e^{rt}}{K + (1/\tilde{c})\cdot e^{rt}}$

($\tilde{c} = 1/c$ si c és la de (a)).

Problemes 14/15: La velocitat de desintegració de les partícules radioactives d'una mostra donada d'un isòtop radioactiu és proporcional al nombre de partícules radioactives presents en la mostra en aquell instant de temps. Si anomenem λ a aquesta constant de proporcionalitat (= constant de desintegració) i denotem per $N(t)$ el nombre d'isòtops radioactius presents en la mostra en l'instant t, llavors $N(t)$ verifica l'edo: $\boxed{N' = -\lambda \cdot N}$ (*)

(a) La semi-vida $t_{1/2}$ d'un isòtop radioactiu és el temps que cal perquè es desintegrin la meitat dels àtoms inicials. Relacioneu $t_{1/2}$ i λ.

$\boxed{N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}}$ és la solució de (*) en termes de $N(0)$

$$N(t_{1/2}) = N(0)/2 = N(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t_{1/2}} \Rightarrow e^{\lambda \cdot t_{1/2}} = 2 \Rightarrow \boxed{t_{1/2} = \frac{1}{\lambda} \ln(2)}$$

(b) Una mostra de carbó de la cova de Lascaux presentava, al 1950, una mitjana de 0.97 desintegracions de Carboni 14 = ^{14}C per minut i per gram, quan per arbres vius acostuma a ser de 6.68 (per una planta viva, raó ingestió ^{14}C = raó desintegració ^{14}C).

Estimem la data en la qual van ser fetes les pintures rupestres de Lascaux. Usem $t_{1/2} \simeq 5730 \pm 40$ anys pel ^{14}C.

— $N(t) \equiv$ nº isòtrops radioactius en 1gr de carbó de Lascaux en l'instant t, on t el mesurem en anys i prenem $t=0$ en 1950.

$N'(t) \equiv$ nº isòtrops radioactius que es desintegren per unitat de temps, en l'instant t, en 1gr de carbó de Lascaux.

Si denotem per $t_0 < 0$ l'instant de temps en que va morir la planta la combustió de la qual va generar el carbó (i per tant, en que va deixar d'absorbir ^{14}C), tenim, via l'edo (*):

- En $t=0$ (correspon a 1950): $0.97 \cdot M = \lambda \cdot N(0)$ ($M =$ nº minuts 1 any)
- En t_0 (mort planta): $6.68 \cdot M = \lambda \cdot N(t_0) = \lambda N(0)\, e^{-\lambda \cdot t_0}$

Per tant: $e^{-\lambda \cdot t_0} = \dfrac{6.68}{0.97} \simeq 6.8866 \Rightarrow (-t_0) \simeq \dfrac{1}{\lambda} \ln(6.8866) \simeq \dfrac{1.9296}{\lambda}$

Usant (a): $(-t_0) \simeq 1.9296 \cdot \dfrac{t_{1/2}}{\ln(2)} \simeq 2.7838\,(5730 \pm 40) \simeq 15951 \pm 111$ anys

Per tant, restant 1950, les pintures daten del 14000 ± 111 A.C.