- **Def.:** Equacions diferencials ordinàries (edo's) lineals d'ordre n

$$\boxed{a_n(t)\cdot x^{(n)} + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = f(t)} \qquad (1)$$

on: • $x = x(t)$ funció incògnita; $t \equiv$ Variable independent, $' = \frac{d}{dt}$

• $a_0(t), \dots, a_n(t), f(t)$ funcions de t donades, definides per tot $t \in I$, on $I \subset \mathbb{R}$ és un interval arbitrari, amb $a_n(t) \not\equiv 0$ en I.

• D'ara en endavant, suposarem sempre que les funcions involucrades són almenys contínues en I.

- Comentaris.

(a) Si bé la presentació i els exemples els farem en termes d'una funció incògnita $x = x(t)$, en alguns casos de segur que considerarem d'altres notacions per aquesta, com $y = y(t)$ o $y = y(x)$, sense que aquest fet hagi de suposar cap problema.

(b) Si $f(t) \equiv 0$ es diu que l'edo lineal (1) és homogènia. En el cas $f(t) \not\equiv 0$ es diu no homogènia.

(c) Si les funcions $a_0(t), \dots, a_n(t)$ són constants, és diu que l'edo lineal (1) és a coeficients constants.

– Exemples

(i) L'equació de Mathieu $\boxed{x'' + \underbrace{(a+\varepsilon \cos(t))}_{= a_0(t)} x = 0}$, on a i ε són paràmetres,

és una edo lineal i homogènia de 2on. ordre <u>no</u> a coeficients constants (s'usa p. ex. per modelar l'evolució en el temps del perigeu de la Lluna).

(ii) L'equació d'una partícula de massa $m>0$ penjada d'una molla amb constant recuperadora $K>0$ (llei de Hooke), sobre la que actua un fregament proporcional a la velocitat (amb coeficient d'esmorteïment $\alpha \geq 0$) i una força externa $g(t)$ (que pot incloure l'efecte de la gravetat) que suposarem periòdica d'un cert període $p>0$, és de la forma:

$$m \underbrace{x''(t)}_{\text{acceleració}} = -K x(t) - \alpha \underbrace{x'(t)}_{\text{velocitat}} + g(t) \ ,$$

on $x \equiv x(t)$ dóna la posició (deformació de la molla) de la partícula en l'instant t. Dita equació la podem expressar de la forma:

$\boxed{x'' + 2\varepsilon \cdot x' + w^2 x = f(t)}$ (edo lineal de 2on. ordre a coeficients consts.)

on: $w = \sqrt{K/m}$ freqüència natural d'oscil·lació de la molla ($w>0$)

$\varepsilon = \alpha/2m \geq 0$ coef. d'esmorteïment normalitzat; $f(t) = g(t)/m$

Les equacions de la forma $x'' + 2\varepsilon x' + w^2 x = f(t)$, $\varepsilon \geq 0$, $w > 0$ i $f(t)$ periòdica, són equacions que apareixen associades a l'estudi de moviments oscil·latoris en diferents àmbits de la mecànica (p.ex., molles, petites oscil·lacions de pèndols o circuits elèctrics).

- Si $f(t) \equiv 0$ parlem d'oscil·lacions lliures.
  - Si $\varepsilon = 0 \Rightarrow x'' + w^2 x = 0$ són oscil·lacions harmòniques
  - Si $\varepsilon > 0 \Rightarrow x'' + 2\varepsilon x' + w^2 x = 0$ són oscil·lacions (harmòniques) esmorteïdes.
- Si $f(t) \not\equiv 0$ parlem d'oscil·lacions forçades.

- <u>Proposició</u>: Si $a_n(t) \neq 0$, $\forall t \in I$, l'edo. lineal d'ordre n de l'equació (1) és <u>equivalent</u> a un sistema d'edo's lineals de primer ordre i dimensió n (equivalent vol dir que trobar la solució d'una és trobar la de l'altra)

- <u>Demostració</u>: Usem que $a_n(t) \neq 0$, $\forall t \in I$, per aïllar $x^{(n)}$ en (1):

$$a_n(t)\, x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x = f(t) \quad (1)$$

$$\Downarrow$$

$$x^{(n)} = -\frac{a_0(t)}{a_n(t)}\, x - \frac{a_1(t)}{a_n(t)}\, x' - \cdots - \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}\, x^{(n-1)} + \frac{f(t)}{a_n(t)} \qquad (2)$$

A partir de l'expressió (2) volem introduir aquest sistema lineal de 1er. ordre i dimensió n. El vector d'incògnites d'aquest sistema serà $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ on

definim: $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = x''$, $\ldots$, $x_{n-1} = x^{(n-2)}$, $x_n = x^{(n-1)}$ (x és la solució de (1))

Aleshores, les edo's verificades per $x_1, x_2, \ldots x_n$ són:

$$x_1' = x' = x_2$$

$$x_2' = (x')' = x'' = x_3$$

$$\cdots$$

$$x_{n-1}' = (x^{(n-2)})' = x^{(n-1)} = x_n$$

$$x_n' = (x^{(n-1)})' = x^{(n)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{equació (2)}}}{=} -\frac{a_0(t)}{a_n(t)} x - \frac{a_1(t)}{a_n(t)} x' - \cdots - \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} x^{(n-1)} + \frac{f(t)}{a_n(t)} =$$

$$= -\frac{a_0(t)}{a_n(t)} x_1 - \frac{a_1(t)}{a_n(t)} x_2 - \cdots - \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} x_n + \frac{f(t)}{a_n(t)},$$

En conseqüència, el vector $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ verifica un sistema d'edo's lineals de primer ordre i dimensió n de la forma $\boxed{\mathbb{X}' = A(t)\,\mathbb{X} + b(t)}$, on:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0(t)}{a_m(t)} & -\frac{a_1(t)}{a_m(t)} & -\frac{a_2(t)}{a_m(t)} & -\frac{a_3(t)}{a_m(t)} & \cdots & -\frac{a_{m-2}(t)}{a_m(t)} & -\frac{a_{m-1}(t)}{a_m(t)} \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ f(t)/a_m(t) \end{pmatrix}}_{b(t)} \qquad (3)$$

- És important establir quina relació tenim entre les solucions $x(t)$ de l'edo lineal d'ordre m de (1) i els <u>vectors</u> $\underline{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}$ solució del sistema d'edo's lineals de 1er. ordre $\underline{X}' = A(t)\,\underline{X} + b(t)$ de (3):

$x(t)$ <u>funció</u> solució de (1) $\Longleftrightarrow$ $\underline{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \cdots \\ x^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$ <u>vector</u> solució de (3)

- En conseqüència doncs, podem importar al cas d'edo's lineals d'ordre m de (1) tots els resultats i mètodes que tinguem pels sistemes lineals d'edo's de primer ordre de (3).

- <u>Teorema de Picard</u> (d'existència i unicitat de solucions d'edo's lineals d'ordre n)

Considerem l'edo lineal d'ordre n:

$$a_n(t)\,x^{(n)} + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,X = f(t) \qquad (1)$$

on suposem que $a_0(t), \ldots, a_n(t), f(t)$ són funcions definides $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ (interval donat) i són almenys contínues $\forall t \in I$, amb $a_n(t) \neq 0$, $\forall t \in I$. Aleshores, donades condicions inicials (c.i.) $t_0 \in I$, $x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$, el problema de valors inicials (P.V.I.) consistent en ~~buscar~~ $x(t)$ solució de (1) verificant $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_0'$, $\ldots$, $x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$, admet <u>una única solució</u> $x(t)$ <u>definida $\forall t \in I$</u>

- Malauradament, el que no és possible en general és donar mètodes constructius pel càlcul de les solucions explícites de l'edo (1).
Em termes general, podem dir que només tenim mètodes constructius per la resolució de (1) quan $n=1$ o quan l'edo és a coeficients constants (o cas equivalent via alguna transformació). El que sí que podem fer és discutir en general l'estructura de les solucions de (1).

Edo's lineals d'ordre n homogènies $\boxed{f(t) \equiv 0}$

$$a_n(t)\, x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x = 0. \qquad (1)'$$

(Els coeficients són funcions almenys contínues, $\forall t \in I$, i $a_n(t) \neq 0$ arreu)

- Proposició: El conjunt E format per totes les solucions de $(1)'$ té estructura d'espai vectorial de dimensió n (de fet, és un subespai vectorial del conjunt $C^n(I;\mathbb{R})$ de les funcions de classe C^n definides en l'interval I i amb valors en $\mathbb{R}$). Per tant, si coneixem un conjunt de n solucions linealment independents de $(1)'$, aleshores qualsevol altre solució de $(1)'$ s'obté a partir de la combinació lineal dels elements d'aquesta base.

A nivell de terminologia, anomenarem a tota base de E un conjunt fonamental de solucions de $(1)'$. Així, si $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ és un conjunt fonamental de l'edo homogènia $(1)'$, aleshores la seva solució general és de la forma:

$$\underbrace{x(t)}_{\text{solució general}} = \underbrace{c_1 \cdot x_1(t) + c_2\, x_2(t) + \cdots + c_n\, x_n(t)}_{\text{combinació lineal conjunt fonamental}}, \quad \forall\, \underbrace{c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}}_{\text{constants arbitràries}}$$

- Exemple (bàsic): L'edo $\boxed{x'' + w^2 x = 0 \ , \ w > 0}$ (oscil·lador harmònic de freqüència w) admet com a solucions $\{x_1(t) = \cos(wt), x_2(t) = \sin(wt)\}$ que són funcions linealment independents i que formen un conjunt fonamental de solucions de l'edo homogènia. Per tant, la seva solució general és de la forma:

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

En podem determinar una solució concreta si, per exemple, considerem un P.V.I. de la forma: $x(0) = x_0$ (posició inicial) i $x'(0) = x_0'$ (velocitat inicial). Calculant $x'(t) = -c_1 w \sin wt + c_2 w \cos wt$, es té:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = x(0) = c_1 \\ x_0' = x'(0) = c_2 w \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = x_0 \\ c_2 = x_0'/w \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = x_0 \cos wt + \frac{x_0'}{w} \sin wt$$ és l'única solució d'aquest PVI.

(observació: Si les condicions inicials són en $t = t_0$, $x(t_0) = x_0$ i $x'(t_0) = x_0'$, aleshores podem usar el conjunt fonamental $\{\cos(w(t-t_0)), \sin(w(t-t_0))\}$.)

- Qüestió: Si d'alguna forma obtenim n solucions d'una edo lineal d'ordre n homogènia, com verifiquem si formen o no un conjunt fonamental?

- <u>Def</u>: Donades n funcions $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ almenys $n-1$ cops derivables $\forall t \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, definim el ~~ea~~ Wronskià com:

$$W(t) = W(x_1, \dots, x_n)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}, \quad \forall t \in I$$

- Això és, $W(t)$ és una funció de t, definida com el determinant dels n vectors columna definits per cada funció i les seves $n-1$ primeres derivades. Observem que si les funcions $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ són n solucions (qualsevol) de l'edo lineal i homogènia d'ordre n de $(1)'$, aleshores $W(t) = \det(\mathbb{X}_1(t), \dots, \mathbb{X}_n(t))$, on $\mathbb{X}_j(t)$ és la solució del sistema d'edo's de 1er. ordre i dimensió n equivalent a $(1)'$.

- <u>Proposició</u>: Sigui $W(t) = W(x_1, \dots, x_n)(t)$ el Wronskià de la definició anterior. Llavors, si existeix almenys un $t_0 \in I$ tal que $W(t_0) \neq 0$, es té que les funcions $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ són linealment independents en I. (Principi del Wronskià)

- **Atenció 1:** El recíproc de la proposició anterior no és cert en general! Hi ha funcions $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ tals que el seu wronskià és idènticament zero en un cert interval I, però que en canvi són linealment independents en I.

- **Exemple:** $x_1(t) = t^2$ i $x_2(t) = t|t|$ verifiquen: (i) $W(t) = W(x_1, x_2)(t) = 0$ $\forall t \in I = \mathbb{R}$; (ii) $\{x_1(t), x_2(t)\}$ són linealment independents en $I = \mathbb{R}$.

(i) En efecte: observem que

$$x_2(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 0 \\ -t^2, & t \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x_2'(t) = \begin{cases} 2t, & t \geq 0 \\ -2t, & t \leq 0 \end{cases} = 2|t|, \quad \forall t \in I = \mathbb{R}$$

Per tant:

$$W(t) = W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{vmatrix} = 0, \quad \forall t \in I = \mathbb{R}.$$

(ii) Però les funcions $\{x_1(t), x_2(t)\}$ són linealment en $I = \mathbb{R}$. Si no ho fóssim, voldria dir que existirien constants c_1 i c_2, no totes dues nul·les, de forma que $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = 0$, $\forall t \in I = \mathbb{R}$. Això vol dir que cal $c_1 t^2 + c_2 t|t| = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Si $t > 0$ això ens diu $c_1 + c_2 = 0$ i si $t < 0$ ens diu $c_1 - c_2 = 0$. D'aquí $c_1 = c_2 = 0$ i les funcions són independents.

- Atenció 2: La proposició de la diapositiva 9 no usa enlloc que les funcions $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ hàgin de ser solució de cap edo lineal homogènia. El fet de $W(t_0) \neq 0 \Rightarrow$ funcions independents, és cert per funcions generals. La pega, però, és que el resultat de la proposició no és un sí i només sí. En l'exemple de la diapositiva 10 hem vist que pot ser que el wronskià de les funcions doni zero, $\forall t \in I$, però aquestes siguin independents. Però, si considerem només el cas en que les funcions $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ són solucions d'una edo lineal i homogènia d'ordre n de la forma $(1)'$, aleshores la situació de la diapositiva 10 no és pot donar!

- Proposició: siguin $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ n solucions qualsevol d'una edo lineal i homogènia de la forma $(1)'$ i denotem per $W(t)$ el seu wronskià:

Cas 1: Si $\exists t_0 \in I$ t.q. $W(t_0) \neq 0 \Rightarrow W(t) \neq 0, \forall t \in I$ i $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ formen un conjunt fonamental de solucions de l'edo homogènia $(1)'$.

Cas 2: Si $\exists t_0 \in I$ t.q. $W(t_0) = 0 \Rightarrow W(t) = 0, \forall t \in I$ i $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ són n solucions linealment dependents en I de l'edo $(1)'$.

- **Proposició** (Fórmula de Liouville)

Si $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ són n solucions qualsevol de l'edo lineal i homogènia d'ordre n:

$$a_n(t)\, x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x = 0 \quad (1)' \qquad t \in I$$

Si denotem per $W(t) = W(x_1, \dots, x_n)(t)$ el seu Wronskià, aleshores:

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} (a_{n-1}(s)/a_n(s))\, ds}, \quad \forall\, t_0, t \in I.$$

- **Comentari 1**: Aquesta fórmula no només ens diu que si $W(t_0) \neq 0 \Rightarrow W(t) \neq 0, \forall t$, i $W(t_0) = 0 \Rightarrow W(t) = 0, \forall t$, sinó que a més ens dóna una forma de calcular $W(t)$ a partir del seu valor $W(t_0)$ i del càlcul d'una primitiva de $a_{n-1}(t)/a_n(t)$.

- **Comentari 2**: La prova d'aquest resultat surt d'aplicar a les edo's d'ordre n lineals i homogènies el resultat anàleg per sistemes d'edo's lineals de 1er. ordre i dimensió n, de la forma $\boxed{X' = A(t)\, X}$, on $A(t)$ és una matriu $n \times n$. Llavors, si $\Phi(t)$ és una matriu $n \times n$ que té com a columnes n solucions (vectorials) de $X' = A(t)\, X$ es té:

$$\det(\Phi(t)) = \det(\Phi(t_0)) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))\, ds},$$ on $tr(A(t))$ és la traça (suma dels elements de la diagonal) de $A(t)$

En el cas d'edo's d'ordre n, si redu\"im $(1)'$ a un sistema de 1er. ordre i dimensió n, llavors $tr(A(t)) = -a_{n-1}(t)/a_n(t)$ (veure diapositiva 5). Per altra banda, si $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ són n solucions (qualsevol) de $(1)'$, llavors la matriu

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

és una matriu $n \times n$ que té per columnes n solucions del sistema $\underline{X}' = A(t)\underline{X}$ equivalent a $(1)'$. Finalment, la fórmula de Liouville per l'edo lineal i homogènia d'ordre n de $(1)'$ surt d'observar que $W(t) = W(x_1, \dots, x_n)(t) = \det(\Phi(t))$.

- Comentari 3: Si $n = 2$, aleshores es té:

$$a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \underset{a_2(t)\neq 0}{\Longrightarrow} \boxed{x'' + p(t)x' + q(t)x = 0}$$

(on, $p(t) = a_1(t)/a_2(t)$ i $q(t) = a_0(t)/a_2(t)$). En aquest cas, si $\{x_1(t), x_2(t)\}$ són dues solucions de l'edo es té $W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$

i la fórmula de Liouville diu: $W(t) = W(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$.

- **Exemple 1**: Verifiqueu que $\{x_1(t) = \cos(\ln t),\ x_2(t) = \sin(\ln t)\}$ formen un conjunt fonamental de solucions de l'edo lineal i homogènia de 2on ordre

$$t^2 x'' + t x' + x = 0, \quad t \in I = (0, +\infty)$$

i calculeu-ne el seu Wronskià $W(t) = W(x_1, x_2)(t)$.

- Vegem primer que $x_1(t)$ és solució de l'edo (ídem $x_2(t)$).

$$x_1(t) = \cos(\ln t) \Rightarrow x_1'(t) = -\sin(\ln t) \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow x_1''(t) = -\cos(\ln t)\frac{1}{t^2} + \sin(\ln t)\frac{1}{t^2}. \text{ Així:}$$

$$t^2 x_1''(t) + t x_1'(t) + x(t) = t^2\left[-\cos(\ln t)\frac{1}{t^2} + \sin(\ln t)\frac{1}{t^2}\right] + t\left[-\sin(\ln t)\frac{1}{t}\right] + \cos(\ln t) = 0.$$

- Ara calculem el seu Wronskià:

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\ln t) & \sin(\ln t) \\ -\sin(\ln t)\frac{1}{t} & \cos(\ln t)\frac{1}{t} \end{vmatrix} = \frac{1}{t} \neq 0, \ \forall t \in (0, +\infty)$$

Per tant, $\{x_1(t), x_2(t)\}$ formen un conjunt fonamental de solucions de l'edo.

- Alternativament, podem calcular $W(t)$ via la fórmula de Liouville a partir del valor de $W(t)$ per $t = t_0$ i els coeficients de l'edo. P.ex. $W(1) = 1/1 = 1$.

$$t^2 x'' + t x' + x = 0 \Longrightarrow x'' + p(t) x' + q(t) x = 0, \quad p(t) = 1/t, \ q(t) = 1/t^2$$

$$W(t) = W(1)\, e^{-\int_1^t p(s)\,ds} = 1 \cdot e^{-\int_1^t 1/s\,ds} = e^{-[\ln s]_{s=1}^{s=t}} = e^{-(\ln t - \ln 1)} = e^{-\ln t} = \frac{1}{e^{\ln t}} = \frac{1}{t}.$$

- La solució general de l'edo és doncs: $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 \cos(\ln t) + c_2 \sin(\ln t)$ (combinació lineal de $x_1(t)$ i $x_2(t)$).

- <u>Exemple 2</u>: Sigui $W(t) = W(x_1, x_2, x_3)(t)$ el wronskià de 3 solucions de l'edo $t\,x''' + x'' + \sqrt{t}\,x' + t^2 x = 0$, $t \in I = (0, +\infty)$. Calculem $W(t)$ sabent que $W(2) = 3$.

· Si expressem l'edo com $a_3(t)\,x''' + a_2(t)\,x'' + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = 0$, la fórmula de Liouville per $n=3$ i $t_0 = 2$ diu:

$$W(t) = W(2)\, e^{-\int_2^t (a_2(s)/a_3(s))\,ds} = 3\,e^{-\int_2^t (1/s)\,ds} = 3\,e^{-[\ln s]_{s=2}^{s=t}} = 3\,e^{-(\ln t - \ln 2)} = 3\,e^{\ln 2} \cdot e^{-\ln t} = 6/t$$

- <u>Proposició</u>: Siguin $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ funcions definides $\forall t \subset I \subset \mathbb{R}$ (interval) i almenys n cops derivables. Aleshores, la condició necessària i suficient per tal que que existeixi una edo lineal i homogènia d'ordre n que les tingui com a conjunt fonamental de solucions és que el seu wronskià $W(t) = W(x_1, \ldots, x_n)(t)$ verifiqui $W(t) \neq 0$, $\forall t \in I$. (Aquesta edo és única si fem $a_n(t) = 1$, $\forall t \in I$.)

- <u>Exemple 3</u>: Malgrat ser linealment independents $\forall t \in \mathbb{R}$, les funcions $x_1(t) = t^2$ i $x_2(t) = t\,|t|$ compleixen $W(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (veure diapositiva 10). Per tant, no existeix cap edo lineal i homogènia d'ordre 2 que les tingui com a conjunt fonamental de solucions (en cap interval I de $\mathbb{R}$).

- **Exemple 4**: trobeu l'edo lineal i homogènia d'ordre 2 que té $\{x_1(t) = t,\ x_2(t) = 1/t\}$ com a conjunt fonamental de solucions, $\forall t \in I = (0, +\infty)$

- En 1er. lloc calculem el seu Wronskià:

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 1/t \\ 1 & -1/t^2 \end{vmatrix} = -2/t \neq 0,\ \forall t \in I$$

- Per tant, efectivament existeix l'edo de l'enunciat i la busquem de la forma

$$x'' + p(t)\,x' + q(t)\,x = 0,$$ on $p(t)$ i $q(t)$ són a determinar. Les equacions

per $p(t)$ i $q(t)$ són:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x_1''(t) + p(t)\,x_1'(t) + q(t)\,x_1(t) = 0 + p(t)\cdot 1 + q(t)\,t \\ 0 &= x_2''(t) + p(t)\,x_2'(t) + q(t)\,x_2(t) = \frac{2}{t^3} + p(t)\left(-\frac{1}{t^2}\right) + q(t)\,\frac{1}{t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1/t & -1/t^2 \end{pmatrix}}_{\text{determinant } = W(t) \neq 0} \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/t^3 \end{pmatrix}$$

Solucions: $p(t) = 1/t$ i $q(t) = -1/t^2 \Rightarrow$ l'edo és: $\boxed{x'' + \frac{1}{t}x' - \frac{1}{t^2}x = 0}$

- **Exemple 5**: Què ha de complir un interval $I \subset \mathbb{R}$ per tal que existeixi una edo lineal i homogènia d'ordre 2 que tingui com a solucions fonamentals $\{x_1(t) = t^m,\ x_2(t) = t^k e^t\}$, on k, m enters ≥ 0.

- Resposta: $k = m = 0 \Rightarrow W(t) = e^t \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$; $k + m = 1 \Rightarrow m - k \notin I$; $k + m > 1 \Rightarrow 0, m - k \notin I$

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^m & t^k e^t \\ m t^{m-1} & k t^{k-1} e^t + t^k e^t \end{vmatrix} = t^{m+k-1} e^t (k - m + t)$$

- <u>Mètode de reducció de l'ordre</u> (càlcul d'una segona solució linealment independent d'una edo lineal i homogènia de segon ordre a partir d'una de coneguda)

Considerem l'edo: $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$.

Suposem que $x_1(t) \not\equiv 0$ n'és una solució coneguda. Aleshores:

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t)\,dt}}{(x_1(t))^2}\,dt$$ n'és una segona solució linealment

independent amb $x_1(t)$. (Les integrals de la fórmula denoten primitives qualsevol, a les quals <u>no</u> hem d'afegir cap constant d'integració.)

- <u>Demostració</u>: Usem que $x_1(t)$ és una solució coneguda (i per tant compleix $x_1''(t) + p(t)\,x_1'(t) + q(t)\,x_1(t) = 0$) i busquem una 2a. solució de l'edo de la forma: $x_2(t) = x_1(t) \cdot u(t)$, on $u(t)$ funció a determinar.

Derivant: $$\left.\begin{aligned} x_2' &= x_1' \cdot u + x_1 \cdot u' \\ x_2'' &= x_1'' \cdot u + 2 \cdot x_1' u' + x_1 u'' \end{aligned}\right\}$$ (Ometem arreu la variable t)

Imposem ara que $x_2(t)$ verifiqui l'edo de l'enunciat:

$$0 = x_2'' + p\cdot x_2' + q\cdot x_2 = [x_1''\cdot u + 2x_1' u' + x_1\cdot u''] + p\cdot[x_1' u + x_1\cdot u'] + q\cdot x_1\cdot u =$$

$$= \underbrace{[x_1'' + p\cdot x_1' + q x_1]}_{=0}\cdot u + [2x_1' + p x_1]\cdot u' + x_1\cdot u''$$

Per tant, si definim $v = u'$, alshores: $v' = \underbrace{\left(-2\frac{x_1'(t)}{x_1(t)} - p(t)\right)}_{= a(t)}\cdot v$

Usem ara que la solució general d'una edo lineal i homogènia de 1er. ordre de la forma $v' = a(t)\, v$ és $v(t) = c\, e^{\int a(t)\,dt}$ i fem $c=1$:

$$v(t) = e^{\int\left(-2\frac{x_1'(t)}{x_1(t)} - p(t)\right)dt} = e^{-2\ln|x_1(t)|}\cdot e^{-\int p(t)\,dt} = \frac{e^{-\int p(t)\,dt}}{(x_1(t))^2}$$

Per tant, triem: $u(t) = \int v(t)\,dt = \int \frac{e^{-\int p(t)\,dt}}{(x_1(t))^2}\,dt$ i d'aquí surt la fórmula per $u(t)$.

- Finalment, per veure que $x_1(t)$ i $x_2(t) = x_1(t)\, u(t)$ són independents, en calculem el seu Wronskià $W(t) = W(x_1, x_2)(t)$:

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_1(t)\,u(t) \\ x_1'(t) & x_1'(t)\,u(t) + x_1(t)\,u'(t) \end{vmatrix} = x_1^2(t)\, v(t) = e^{-\int p(t)\,dt} \neq 0$$

- Exemple 1: trobeu la solució general de l'edo lineal i homogènia de segon ordre:

$t^2 x'' - t x' + x = 0$, $t > 0$, sabent que $x_1(t) = t$ n'és una solució.

· Apliquem el mètode/fórmula de reducció de l'ordre. El primer que ens cal fer és normalitzar l'equació: $x'' - \frac{1}{t}x' + \frac{1}{t^2}x = 0 \iff x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$.

Així, una 2a. solució linealment independent és:

$$x_2(t) = x_1(t)\int \frac{e^{-\int p(t)\,dt}}{(x_1(t))^2}\,dt = t\int \frac{e^{-\int(-1/t)\,dt}}{(t)^2}\,dt = t\int \frac{e^{\int dt/t}}{t^2}\,dt = t\int \frac{e^{\ln t}}{t^2}\,dt = t\int \frac{t}{t^2}\,dt = t\int \frac{dt}{t} = t\ln t.$$

Per tant, la solució general és: $x(t) = c_1 t + c_2 t\ln t$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- Exemple 2: Ídem que en l'exemple anterior per l'edo $t^2 x'' + t x' + x = 0$, $t > 0$, sabent ara que $x_1(t) = \cos(\ln t)$ n'és solució.

· Normalitzem l'edo: $x'' + \frac{1}{t}x' + \frac{1}{t^2}x = 0 \iff x'' + p(t)x + q(t)x' = 0$

$$\cdot\; x_2(t) = x_1(t)\int \frac{e^{-\int p(t)\,dt}}{(x_1(t))^2}\,dt = \cos(\ln t)\int \frac{e^{-\int dt/t}}{(\cos(\ln t))^2}\,dt = \cos(\ln t)\int \frac{e^{-\ln t}}{\cos^2(\ln t)}\,dt =$$

$$= \cos(\ln t)\int \frac{1}{\cos^2(\ln t)}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \cos(\ln t)\cdot\tan(\ln t) = \sin(\ln t).$$

· Solució general: $x(t) = c_1\cos(\ln t) + c_2\sin(\ln t)$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- **Exemple 3**: Ídem que en els exemples anteriors per l'edo $tx'' - 2(1+t)x' + (t+2)x = 0$, $t>0$, sabent que $x_1(t) = e^t$ n'és solució

• Normalitzem l'edo: $x'' - \frac{2(1+t)}{t}x' + \frac{t+2}{t}x = 0 \Rightarrow p(t) = -\frac{2(1+t)}{t}$.

• $x_2(t) = x_1(t)\int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{(x_1(t))^2}dt = e^t \int \frac{e^{2\int(\frac{1}{t}+1)dt}}{(e^t)^2}dt = e^t\int \frac{e^{2(\ln t + t)}}{e^{2t}}dt = e^t \int \frac{t^2 e^{2t}}{e^{2t}}dt = e^t\int t^2 dt = \frac{t^3}{3}e^t$

Observem que també és vàlid triar $x_2(t) = t^3 e^t$ com a 2a solució linealment independent.

: Solució general: $x(t) = c_1 e^t + c_2 t^3 e^t$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- **Exemple 4**: Ídem per l'edo $x'' - 2\cdot m\cdot x' + m^2 x = 0$, on $m \in \mathbb{R}$ fixat i $x_1(t) = e^{mt}$.

$$x_2(t) = x_1(t)\int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{(x_1(t))^2}dt = e^{mt}\int \frac{e^{-\int(-2m)dt}}{(e^{mt})^2}dt = e^{mt}\int \frac{e^{2mt}}{e^{2mt}}dt = e^{mt}\int dt = te^{mt}.$$

- **Exercici 1**: Ídem per l'edo $tx'' + 2x' + tx = 0$, $t>0$, $x_1(t) = \frac{\cos t}{t}$. (Sol. $x_2(t) = \frac{\sin t}{t}$)

- **Exercici 2**: Ídem per l'edo $t^2 x'' - 3t x' + 4x = 0$, $t>0$, $x_1(t) = t^2$. (Sol. $x_2(t) = t^2 \ln t$)

- Resolució d'edo's lineals i homogènies d'ordre n a coeficients constants

$\boxed{\text{Cas } n=2}$ $\quad a x'' + b x' + c x = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0 \qquad (3)$

Busquem solucions de la forma $x(t) = e^{mt}$, per un cert m.

$x(t) = e^{mt} \Rightarrow x'(t) = m\, e^{mt} \Rightarrow x''(t) = m^2 e^{mt}$. Així cal:

$0 = a x''(t) + b x'(t) + c x(t) = [a m^2 + b m + c] e^{mt} \Leftrightarrow a m^2 + b m + c = 0.$

- Def.: Anomenem equació característica de l'edo a coeficients constants (3) al polinomi de grau 2 per m donat per $P(m) = a m^2 + b m + c$

Aleshores, si m és tal que $P(m) = 0 \Rightarrow x(t) = e^{mt}$ solució de (3)

Arrels eq. caract.	Solucions fonamentals de (3)	
Reals $m_1 \neq m_2$	$x_1(t) = e^{m_1 t}$, $x_2(t) = e^{m_2 t}$	(cas immediat)
Reals $m_1 = m_2 = m$	$x_1(t) = e^{mt}$, $x_2(t) = t\, e^{mt}$	(veure exemple 4 diapositiva 20)
Complexes conjugades $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$	$x_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ $x_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$	(veure justificació diapositiva següent)

• Per justificar que $\{x_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ x_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)\}$ formen un conjunt fonamental de solucions de l'edo lineal i homogènia a coeficients constants de (3), quan les arrels de l'equació característica són una parella de nombres complexos conjugats de la forma $\alpha \pm i\beta$ (p.ex, és raonable triar sempre $\beta > 0$), usem del resultat següent:

- Proposició: Si $x(t)$ és una solució complexa (això vol dir que $x(t)$ té una certa part real $Re(x(t))$ i una certa part imaginària $Im(x(t))$) d'una edo lineal i homogènia d'ordre n en que els coeficients de l'edo són funcions a valors reals, llavors $Re(x(t))$, $Im(x(t))$ són dues solucions reals (no sempre linealment independents) de l'edo.

• En el nostre cas, (3) és una edo lineal i homogènia a coeficients reals i si $m = \alpha + i\beta$ és una arrel de l'eq. caract., llavors $x(t) = e^{mt}$ n'és una solució complexa. La part real i imaginària de m són $Re(m) = \alpha$, $Im(m) = \beta$. Per $x(t)$:

$$x(t) = e^{mt} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}\cdot e^{i\beta t} \underset{\substack{\text{Fórmula}\\ \text{d'Euler}}}{=} e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) = \underbrace{e^{\alpha t}\cos\beta t}_{Re(x(t))} + i\cdot\underbrace{e^{\alpha t}\sin\beta t}_{Im(x(t))}$$

Per tant $\{e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t)\}$ són dues solucions reals de l'edo. Exercici: Calcular el seu Wronskià i veure que és no nul en tot $\mathbb{R}$ i per tant són independents.

- <u>Exemple</u>: Resoleu els PVI's donats per cadascuna de les edo's lineals de segon ordre i a coeficients constants següents, amb les condicions inicials $x(0)=1$, $x'(0)=-2$.

(a) $\boxed{x''-4x=0}$ $\Rightarrow$ Eq. caract. $m^2-4=0 \Rightarrow$ arrels $\{m_1=2, m_2=-2\}$. Per tant, la seva solució general és de la forma $x(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}$, $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Si calculem $x'(t)=2c_1e^{2t}-2c_2e^{-2t}$ i imposem les condicions inicials:

$$\left.\begin{array}{l}1=x(0)=c_1+c_2\\ -2=x'(0)=2c_1-2c_2\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}c_1=0\\ c_2=1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{La solució del PVI és: } x(t)=e^{-2t}.$$

(b) $\boxed{x''+4x'+4x=0}$ $\Rightarrow$ Eq. caract. $m^2+4m+4=0 \Rightarrow$ arrels $\{m_1=m_2=-2\}$ $\Rightarrow$ La seva solució general és $x(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}$, $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $x'(t)=(-2c_1+c_2)e^{-2t}-2c_2te^{-2t}$. Així:

$$\left.\begin{array}{l}1=x(0)=c_1\\ -2=x'(0)=-2c_1+c_2\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}c_1=1\\ c_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{La solució del PVI és: } x(t)=e^{-2t}.$$

(c) $\boxed{x''+4x'+5x=0}$ $\Rightarrow$ Eq. caract. $m^2+4m+5=0 \Rightarrow$ arrels $\{m_1=-2+i, m_2=-2-i\}$ $(\alpha=-2, \beta=1)$

Solució general: $x(t)=c_1e^{-2t}\cos t+c_2e^{-2t}\sin t$, $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Derivant obtenim: $x'(t)=(-2c_1+c_2)e^{-2t}\cos t+(-c_1-2c_2)e^{-2t}\sin t$. D'aquí:

$$\left.\begin{array}{l}1=x(0)=c_1\\ -2=x'(0)=-2c_1+c_2\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}c_1=1\\ c_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{La solució del PVI és: } x(t)=e^{-2t}\cos t.$$

(d) $\boxed{x''+4x=0}$ $\Rightarrow$ Eq. caract. $m^2+4=0 \Rightarrow$ arrels $\{m_1=2i, m_2=-2i\}$ $(\alpha=0, \beta=2)$

Solució general: $x(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t$, $\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $x'(t)=-2c_1\sin 2t+2c_2\cos 2t$.

$$\left.\begin{array}{l}1=x(0)=c_1\\ -2=x'(0)=2c_2\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}c_1=1\\ c_2=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{La solució del PVI és } x(t)=\cos 2t-\sin 2t.$$

$\boxed{\text{Cas } n > 2}$ $a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ (4)

La seva equació característica és $P(m) = 0$ on $P(m)$ és el polinomi de grau n:

$$P(m) = a_n \cdot m^n + a_{n-1} \cdot m^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot m + a_0.$$

- Per cada arrel real m de $P(m)$, i atenent a la seva multiplicitat K, construïm K solucions independents associades a aquesta arrel de l'edo (4).
- Per cada parella d'arrels complexes conjugades, $m_\mp = \alpha \pm i\beta$, i atenent a la seva multiplicitat K, construïm $2K$ solucions independents associades a aquesta arrel de l'edo (4)
- Per fer-ho usem la següent taula

Arrels eq. caract.	multiplicitat	Solucions edo associades
$m \in \mathbb{R}$	1	e^{mt}
$m \in \mathbb{R}$	K	$e^{mt}, t \cdot e^{mt}, \ldots, t^{K-1} e^{mt}$
$m_+ = \alpha + i\beta$ $m_- = \alpha - i\beta$	1	$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$
$m_+ = \alpha + i \cdot \beta$ $m_- = \alpha - i\beta$	K	$e^{\alpha t} \cos(\beta t), t \cdot e^{\alpha t} \cos(\beta t), \ldots, t^{K-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ $e^{\alpha t} \sin(\beta t), t \cdot e^{\alpha t} \sin(\beta t), \ldots, t^{K-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

- <u>Exemple 1</u>: trobeu la solució general de l'edo lineal i homogènia d'ordre 5 a coeficients constants:

$2x^{(v)} - 7x^{(iv)} + 12x''' + 8x'' = 0$ (Indicació: $1/2$ és arrel de la seva equació característica).

- Eq. caract. $p(m) = 2m^5 - 7m^4 + 12m^3 + 8m^2 = m^2(2m^3 - 7m^2 + 12m + 8) = m^2(m + 1/2)(2m^2 - 8m + 16)$

on hem usat que $-1/2$ és arrel de $2m^3 - 7m^2 + 12m + 8$ i Ruffini per escriure

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 12 & 8 \\ & & -1 & 4 & -8 \\ \hline -1/2 & 2 & -8 & 16 & \boxed{0} \end{array}$$

$2m^3 - 7m^2 + 12m + 8 = (m + 1/2)(2m^2 - 8m + 16)$

Les arrels de $2m^2 - 8m + 16 = 0$ són $m = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 2\cdot 16}}{2\cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{-64}}{4} = 2 \pm 2i$

- Per tant $p(m) = 2m^2(m + 1/2)(m - (2+2i))(m - (2-2i))$.

Les arrels de l'eq. caract. són doncs: $0, 0, -1/2, 2 \pm 2i$. La seva solució general és:

$x(t) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot t + c_3 e^{-1/2 t} + c_4 e^{2t}\cos(2t) + c_5 e^{2t}\sin(2t)$, $\forall c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$

- <u>Exemple 2</u>: Ídem que en l'exemple anterior per $x^{(v)} + 18x''' + 81x' = 0$.

- Eq. caract.: $p(m) = m^5 + 18m^3 + 81m = m(m^4 + 18\cdot m^2 + 81) = m(m^2+9)^2 = 0$ i les seves arrels són $0, \pm 3i, \pm 3i$. La seva solució general és:

$x(t) = c_1 1 + c_2\cos 3t + c_3 \sin 3t + c_4 \cdot t \cdot \cos 3t + c_5 t \cdot \sin 3t$, $\forall c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$

- <u>Exemple 3</u>: solució general d'una edo lineal i homogènia a coeficients constants d'ordre 12 que té com arrels de l'equació característica: $0, 0, 0, 1, 2, 2, 2 \pm 4i, 1 \pm i, 1 \pm i$:

$x(t) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot t + c_3 t^2 + c_4 e^t + c_5 e^{2t} + c_6 t \cdot e^{2t} + c_7 e^{2t}\cos(4t) + c_8 e^{2t}\sin(4t) + c_9 e^t\cos(t) + c_{10} e^t \sin(t) +$
$+ c_{11} t \cdot e^t \cos(t) + c_{12} \cdot t \cdot e^t \sin(t)$.

- <u>Observació</u>: Si coneixem les n arrels de l'equació característica d'una edo lineal i homogènia d'ordre n a coeficients constants, és clar que podem re-construir-ne la seva equació característica $P(m)=0$ fent $P(m):=(m-m_1)(m-m_2)\cdots(m-m_n)$ on $m_1,\dots,m_n$ són les arrels. Si expressem $P(m)=1\cdot m^n+a_{n-1}\cdot m^{n-1}+\dots+a_1 m+a_0$, l'edo que dóna lloc a les arrels és $x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\dots+a_1 x'+a_0 x=0$.

- <u>Exemple 4</u>: Quin és l'ordre mínim que ha de tenir una edo lineal i homogènia d'ordre n per tenir com a solucions $x_1(t)=t^m$ i $x_2(t)=t^k e^t$.

  - En la diapositiva 16 discutiem les condicions per tal que $x_1(t)$ i $x_2(t)$ fossin solucions d'alguna edo lineal i homogènia de segon ordre, però que només és a coeficients constants si $m=k=0$.
  - Si volem que t^m sigui solució d'una edo lineal i homogènia a coef. consts. aquesta ha de tenir una arrel 0 de multiplicitat (almenys) $m+1$. Si volem que ho sigui $x_2(t)=t^k e^t$ ha de tenir una arrel 1 de multiplicitat (almenys) $k+1$. L'eq caract. d'aquesta edo d'ordre mínim $m+k-2$ és de la forma $P(\lambda)=0$ on $P(\lambda)=\lambda^{m+1}\cdot(\lambda-1)^{k+1}$.

- <u>Exemple 5</u>: Troben l'ordre n mínim de l'edo lineal i homogènia a coeficients constants que pot tenir $f(t)$ per solució així com les arrels que com a mínim ha de tenir la seva eq. caract.

$$f(t)=\underbrace{1}_{0}+\underbrace{2t^3}_{0,0,0,0}+\underbrace{te^{5t}}_{5,5}+\underbrace{t^4e^{5t}}_{5,5,5,5,5}+\underbrace{4\sin(2t)}_{\pm 2i}+\underbrace{3e^{3t}\cos(4t)}_{3\pm 4i}+\underbrace{t^2e^{3t}\sin(4t)}_{3\pm 4i,\,3\pm 4i,\,3\pm 4i}$$

← Arrels que calen per tal que la solució tingui cada terme de $f(t)$

Arrels que ha de tenir $P(m)$: $0,0,0,0,5,5,5,5,5,\pm 2i,3\pm 4i,3\pm 4i,3\pm 4i$

Ordre mínim $n=17$.

Edo's lineals d'ordre n no homogènies $\boxed{f(t) \not\equiv 0}$

$$a_n(t)\,x^{(n)} + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = f(t) \qquad (1)$$

(Els coeficients i $f(t)$ són funcions almenys contínues de $t \in I$ i $a_n(t) \neq 0$, $\forall t \in I$)

- Proposició: Suposem coneguts:
  (i) $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$ un conjunt fonamental de solucions de l'edo homogènia $(1)'$ associada a (1): $a_n(t)\,x^{(n)} + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = 0$. $(1)'$
  (ii) $x_p(t)$ una solució (particular) qualsevol de l'edo no homogènia (1)
  Llavors la solució general de (1) és de la forma:

$$x(t) = x_p(t) + \underbrace{c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t)}_{x_h(t)\,\equiv\,\text{solució general edo homogènia associada a (1)}}, \quad \forall\, c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

- Demostració: Sigui $x_p(t)$ una solució particular de (1). Llavors, si $x(t)$ és qualsevol altre solució de (1) i considerem $\tilde{x}(t) := x(t) - x_p(t)$, quina edo verifica $\tilde{x}(t)$?

$$a_n(t)\,\tilde{x}^{(n)}(t) + \cdots + a_1\tilde{x}'(t) + a_0\,\tilde{x}(t) = a_n\big(x^{(n)}(t) - x_p^{(n)}(t)\big) + \cdots + a_1(t)\big(x'(t) - x_p'(t)\big) + a_0(t)\big(x(t) - x_p(t)\big) =$$

$$= \big(a_n(t)\,x^{(n)}(t) + \cdots + a_1(t)\,x'(t) + a_0(t)\,x(t)\big) - \big(a_n(t)\,x_p^{(n)}(t) + \cdots + a_1(t)\,x_p' + a_0(t)\,x_p(t)\big) = f(t) - f(t) = 0.$$

Per tant $\tilde{x}(t) = x(t) - x_p(t)$ és solució de l'edo homogènia $(1)'$ i per tant de la forma $\tilde{x}(t) = x(t) - x_p(t) = x_h(t) \Rightarrow x(t) = x_p(t) + x_h(t)$.

- Mètode dels Coeficients indeterminats

Considerem una edo lineal d'ordre n a coeficients constants, de la forma:

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = f(t) \qquad (5)$$

Per la qual el terme independent $f(t)$ també és solució d'una (altra) edo lineal i homogènia a coeficients constants d'un cert ordre k.

Pas 1: Calculem $m_1, m_2, \dots, m_n$ les arrels de l'equació característica de l'edo lineal i homogènia d'ordre n a coeficients constants associada a (5)

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0 \qquad (5)'$$

Pas 2: Siguin $\mu_1, \dots, \mu_k$ les arrels de l'equació característica d'una edo lineal i homogènia d'ordre k a coef. consts. que té $f(t)$ per solució. (No ens cal conèixer l'edo, només les arrels de la seva eq. caract. La idea pràctica és que k sigui l'ordre mínim possible per aquesta edo)-

Pas 3: Sigui $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_k(t)\}$ el conjunt fonamental de solucions de l'edo lineal i homogènia d'ordre $n+k$ que té $m_1, \dots, m_n, \mu_1, \dots, \mu_k$ per arrels de l'eq. caract., essent $\{x_1(t), \dots x_n(t)\}$ solucions associades a les arrels $m_1, \dots, m_n$ (formant un conjunt fonamental de (5)') i $\{\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_k(t)\}$ solucions associades a les arrels $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ (atenent a si n'hi ha de repetides amb les m_j's).

- Pas 4: Existeix una única solució particular $x_p(t)$ de l'edo no homogènia (5) de la forma $x_p(t) = c_1\tilde{x}_1(t) + \cdots + c_k\tilde{x}_k(t)$, per uns certs coeficients $c_1, \ldots, c_k$ unívocament determinats i que es calculen substituint $x_p(t)$ en l'edo (5) i "igualant coeficients".

- Tot seguit anem a abordar diversos exemples de resolució d'edos via el mètode dels coeficients indeterminats. Els dos primers exemples corresponen al cas en què no hi ha cap arrel comú entre l'equació característica de la part homogènia i l'edo que té el terme independent per solució.

- Exemple 1: Resolem el PVI $x'' - x' - 6x = -e^t + 12t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$.

  - Pas 1: L'eq. caract. de l'edo homogènia associada $x'' - x' - 6x = 0$ és $m^2 - m - 6 = 0$ i té per arrels $m_1 = -2$, $m_2 = 3$. Per tant les solucions associades a aquestes arrels són $x_1(t) = e^{-2t}$, $x_2(t) = e^{3t}$.

  - Pas 2: $f(t) = -e^t + 12t$ és solució d'una edo lineal i homogènia a coeficients constants d'ordre 3 que té per arrels $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 0$ (3 és l'ordre mínim).

  - Pas 3: Si juntem les arrels del Pas 1 i Pas 2 obtenim el conjunt d'arrels (repetides segons la seva multiplicitat) $\{m_1 = -2, m_2 = 3, \mu_1 = 1, \mu_2 = 0, \mu_3 = 0\}$. Ara toca escriure les solucions associades a aquestes 5 arrels, essent les 2 primeres $x_1(t)$ i $x_2(t)$.

Aquestes 5 solucions són $\{\underbrace{x_1(t)=e^{-2t}}_{\text{Via } m_1=-2},\ \underbrace{x_2(t)=e^{3t}}_{\text{Via } m_2=3},\ \underbrace{\tilde{x}_1(t)=e^{t}}_{\text{Via } \mu_1=1},\ \underbrace{\tilde{x}_2(t)=1,\ \tilde{x}_3(t)=t}_{\text{Via } \mu_2=\mu_3=0}\}$

- Pas 4: Existeix $x_p(t)=c_1\tilde{x}_1(t)+c_2\tilde{x}_2(t)+c_3\tilde{x}_3(t)=c_1e^t+c_2+c_3t$, solució de l'edo no homogènia inicial. Per una única tria dels coeficients c_1, c_2, c_3, que determinem substituint $x_p(t)$ en l'edo:

$x_p(t)=c_1e^t+c_2+c_3t \Rightarrow x_p'(t)=c_1e^t+c_3 \Rightarrow x_p''(t)=c_1e^t$, i volem:

$$\boxed{-e^t+12t}=x_p''(t)-x_p'(t)-6x_p(t)=[c_1e^t]-[c_1e^t+c_3]-6[c_1e^t+c_2+c_3t]=$$

$$\boxed{=-6c_1e^t-6c_3t-c_3-6c_2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}-1=-6c_1\\ 12=-6c_3\\ 0=-c_3-6c_2\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}c_1=1/6\\ c_3=-2\\ c_2=1/3\end{array}\right\}$$

Per tant, obtenim la solució particular:

$$x_p(t)=\frac{1}{6}e^t+\frac{1}{3}-2t$$

- La solució general de l'edo no homogènia inicial és:

$$x(t)=x_p(t)+x_h(t)=x_p(t)+\underbrace{c_1x_1(t)+c_2x_2(t)}_{\text{Solució general edo homogènia}}=\frac{1}{6}e^t+\frac{1}{3}-2t+c_1e^{-2t}+c_2e^{3t}$$

- Per resoldre el PVI $x(0)=1$ i $x'(0)=-2$ Calculem $x'(t)=\frac{1}{6}e^t-2-2c_1e^{-2t}+3c_2e^{3t}$

$$\left.\begin{array}{l}1=x(0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+c_1+c_2\\ -2=x'(0)=\frac{1}{6}-2-2c_1+3c_2\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}c_1+c_2=1/2\\ -2c_1+3c_2=-1/6\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}c_1=1/3\\ c_2=1/6\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x(t)=\frac{1}{6}e^t+\frac{1}{3}-2t+\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{3t}}$$

- Exemple 2: trobeu la solució general de $x'' - 7x' + 12x = 8\sin t$.

- Pas 1: L'eq. caract. de l'edo homogènia associada $x'' - 7x' + 12x = 0$ és $m^2 - 7m + 12 = 0$ i té per arrels $m_1 = 4$, $m_2 = 3$. Les solucions associades a aquestes arrels són $x_1(t) = e^{4t}$ i $x_2(t) = e^{3t}$.

- Pas 2: $f(t) = 8\sin t$ és solució d'una edo lineal i homogènia a coef. consts. d'ordre (mínim) 2 que té per arrels de la seva eq. caract. $\mu_1 = i$, $\mu_2 = -i$.

- Pas 3: Si juntem les arrels del pas 1 i pas 2 obtenim el conjunt d'arrels (repetides segons la seva multiplicitat) $\{m_1 = 4, m_2 = 3, \mu_1 = i, \mu_2 = -i\}$. Les solucions associades a aquestes 4 arrels són $\{x_1(t) = e^{4t}, x_2(t) = e^{3t}, \tilde{x}_1(t) = \cos t, \tilde{x}_2(t) = \sin t\}$.

- Pas 4: Busquem $x_p(t) = c_1\tilde{x}_1(t) + c_2\tilde{x}_2(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$, solució de l'edo no homogènia inicial, per una única tria dels coeficients c_1, c_2 que determinem substituint $x_p(t)$ en l'edo:

$x_p(t) = c_1\cos t + c_2\sin t \Rightarrow x_p'(t) = -c_1\sin t + c_2\cos t \Rightarrow x_p''(t) = -c_1\cos t - c_2\sin t$.

Volem:

$$\boxed{8\sin t =} \; x_p''(t) - 7x_p'(t) + 12x_p(t) = [-c_1\cos t - c_2\sin t] - 7[-c_1\sin t + c_2\cos t] +$$
$$+12[c_1\cos t + c_2\sin t] = \boxed{[-c_1 - 7c_2 + 12c_1]\cos t + [-c_2 + 7c_1 + 12c_2]\sin t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 = 11c_1 - 7c_2 \\ 8 = 7c_1 + 11c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = 28/85 \\ c_2 = 44/85 \end{array}\right\} \Rightarrow x_p(t) = \frac{28}{85}\cos t + \frac{44}{85}\sin t.$$

- La solució general de l'edo no homogènia inicial és:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = x_p(t) + c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = \frac{28}{85}\cos t + \frac{44}{85}\sin t + c_1 e^{4t} + c_2 e^{3t}, \forall c_1, c_2$$

- <u>Exercici 1</u>: Solució general de $x'' + 9x = 2t^2 - 5$ [solució: $x(t) = \frac{2}{9}t^2 - \frac{49}{81} + c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$]
- <u>Exercici 2</u>: Solució general de $x'' - 2x' + x = \sin t$. [Solució: $x(t) = \frac{1}{2}\cos t + c_1 e^t + c_2 t e^t$]
- <u>Exercici 3</u>: Solució general de $x'' + 6x' + 25x = 8e^{-7t}$ [Solució: $x(t) = \frac{1}{4}e^{-7t} + c_1 e^{-3t}\cos 4t + c_2 e^{-3t}\sin 4t$]
- <u>Exercici 4</u>: Solució general de $x'' + 9x = t^2 e^{3t}$ [Solució: $x(t) = \left(\frac{1}{162} - \frac{1}{27}t + \frac{1}{18}t^2\right)e^{3t} + c_1\cos 3t + c_2 \sin 3t$]
- Els 4 propers exemples corresponen a casos en què hi ha "ressonància" (això és arrels comuns) entre les arrels $\{m_j\}$ de l'eq. caract. de l'edo homogènia i $\{\mu_j\}$ de l'edo que té per solució el terme independent $f(t)$.

– <u>Exemple 3</u>: troben la solució general de $x'' - 2x' = 6t^2$.

- <u>Pas 1</u>: L'eq. caract. de l'edo homogènia associada $x'' - 2x' = 0$ és $m^2 - 2m = 0$ i té arrels $m_1 = 0$, $m_2 = 2$ i solucions associades $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = e^{2t}$.
- <u>Pas 2</u>: $f(t) = 6t^2$ és solució d'una edo lineal i homogènia a coeficients constants d'ordre (mínim) 3 que té per arrels $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ (arrel triple).

• **Pas 3**: Si juntem les arrels del pas 1 i pas 2 obtenim el conjunt d'arrels (repetint l'arrel en el zero fins 4 cops) $\{m_1 = 0, m_2 = 2, \mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \mu_3 = 0\}$. Les solucions d'aquestes 5 arrels són (fent que les dues primeres siguin $X_1(t) = 1$ i $X_2(t) = e^{2t}$) són:
$\{X_1(t) = 1, X_2(t) = e^{2t}, \tilde{X}_1(t) = t, \tilde{X}_2(t) = t^2, \tilde{X}_3(t) = t^3\}$.

• **Pas 4**: Busquem $X_p(t) = c_1 \tilde{X}_1(t) + c_2 \tilde{X}_2(t) + c_3 \tilde{X}_3(t) = c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$, solució de l'edo inicial per una única tria dels coeficients c_1, c_2 i c_3 unívocament determinats que calculem substituint $X_p(t)$ a l'edo. Per fer-ho, calculem:

$$X_p(t) = c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 \Rightarrow X_p'(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 \Rightarrow X_p''(t) = 2c_2 + 6c_3 t. \text{ Així:}$$

$$\boxed{6t^2 =} X_p''(t) - 2X_p'(t) = [2c_2 + 6c_3 t] - 2[c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2] = \boxed{(2c_2 - 2c_1) + (6c_3 - 4c_2)t - 6c_3 t^2}$$

Igualant coeficients:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 2c_2 - 2c_1 \\ 0 = 6c_3 - 4c_2 \\ 6 = -6c_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_3 = -1 \\ c_2 = -3/2 \\ c_1 = -3/2 \end{array}\right\} \Rightarrow X_p(t) = -\frac{3t}{2} - \frac{3}{2}t^2 - t^3.$$

• La solució general de l'edo no homogènia inicial és:

$$X(t) = X_p(t) + X_h(t) = X_p(t) + c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) = -\frac{3}{2}t - \frac{3}{2}t^2 - t^3 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot e^{2t}.$$

- Exemple 4: trobem la solució general de $x''-5x'+4x=e^{4t}$

- Pas 1: L'eq. caract. de l'edo homogènia associada, $x''-5x'+4x=0$, és $m^2-5m+4=0$ i té arrels $m_1=1$, $m_2=4$ i solucions associades $x_1(t)=e^{t}$, $x_2(t)=e^{4t}$.
- Pas 2: $f(t)=e^{4t}$ és solució d'una edo lineal homogènia a coeficients constants d'ordre (mínim) 1 que té arrel $\mu_1=4$ per la seva equació característica.
- Pas 3: Si juntem les arrels del pas 1 i pas 2 obtenim el conjunt d'arrels (en que 4 apareix dues cops) $\{m_1=1, m_2=4, \mu_1=4\}$. Les solucions associades a aquestes 3 arrels (fent que les dues primeres siguin $x_1(t)=e^{t}$, $x_2(t)=e^{4t}$) són: $\{x_1(t)=e^{t}, x_2(t)=e^{4t}, \tilde{x}_1(t)=te^{4t}\}$.
- Pas 4: Busquem $x_p(t)=c_1\tilde{x}_1(t)=c_1te^{4t}$ on c_1 el determinem substituint $x_p(t)$ en l'edo no homogènia.. observem $x_p'(t)=c_1(1+4t)e^{4t}$, $x_p''(t)=c_1(8+16t)e^{4t}$, i:

$$\boxed{e^{4t}=}x_p''(t)-5x_p'(t)+4x_p(t)=c_1\cdot(8+16t)e^{4t}-5\cdot c_1(1+4t)e^{4t}+4\cdot c_1te^{4t}=\boxed{3c_1e^{4t}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=3c_1\Rightarrow c_1=1/3\Rightarrow x_p(t)=\frac{1}{3}te^{4t}.$$

- Per tant, la solució general de l'edo no homogènia inicial és:

$$x(t)=x_p(t)+x_h(t)=x_p(t)+c_1x_1(t)+c_2x_2(t)=\frac{1}{3}te^{4t}+c_1e^{t}+c_2e^{4t}.$$

- Exemple 5: troben la solució general de $x'' + x = t\cos t$.

· Pas 1: L'eq. caract. de l'edo homogènia associada, $x''+x=0$, és $m^2+1=0$ i té arrels $m_1=i$, $m_2=-i$ (Complexes conjugades). Les solucions associades són $x_1(t)=\cos t$, $x_2(t)=\sin t$.

· Pas 2: $f(t)=t\cos t$ és solució d'una edo lineal i homogènia a coeficients constants d'ordre (mínim) 4 que té per arrels $\mu_1=i$, $\mu_2=-i$, $\mu_3=i$, $\mu_4=-i$ (una parella d'arrels complexes conjugades dobles).

· Pas 3: Si juntem les arrels del pas 1 i pas 2 obtenim el conjunt d'arrels ($\pm i$ de multiplicitat 3) $\{m_1=i, m_2=-i, \mu_1=i, \mu_2=-i, \mu_3=i, \mu_4=-i\}$. Les solucions associades a aquestes 6 arrels (fent que les dues primeres segueixin $x_1(t), x_2(t)$) = $\{x_1(t)=\cos t,\ x_2(t)=\sin t,\ \tilde{x}_1(t)=t\cos t,\ \tilde{x}_2(t)=t\sin t,\ \tilde{x}_3(t)=t^2\cos t,\ \tilde{x}_4(t)=t^2\sin t\}$

· Pas 4: Busquem $x_p(t)=c_1\tilde{x}_1(t)+c_2\tilde{x}_2(t)+c_3\tilde{x}_3(t)+c_4\tilde{x}_4(t)=c_1t\cos t+c_2t\sin t+$ $+c_3t^2\cos t+c_4t^2\sin t$) on cal determinar c_1, c_2, c_3, c_4 substituint a l'edo:

$$x_p(t) = c_1 t\cos t + c_2 t\sin t + c_3 t^2\cos t + c_4 t^2 \sin t$$

$$x_p'(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + (c_2+2c_3)t\cos t + (-c_1+2c_4)t\sin t + c_4 t^2\cos t - c_3 t^2\sin t$$

$$x_p''(t) = (2c_2+2c_3)\cos t + (-2c_1+2c_4)\sin t + (-c_1+4c_4)t\cos t + (-c_2-4c_3)t\sin t -$$
$$- c_3 t^2\cos t - c_4 t^2\sin t$$

Així:

$\boxed{t\cos t} = x_p''(t) + x_p(t) = \{(2c_2+2c_3)\cos t + (-2c_1+2c_4)\sin t + (-c_1+4c_4)t\cos t + (-c_2-4c_3)t\sin t -$

$- c_3 t^2\cos t - c_4 t^2 \sin t\} + \{c_1 t\cos t + c_2 t\sin t + c_3 t^2\cos t + c_4 t^2 \sin t\} =$

$= \boxed{(2c_2+2c_3)\cos t + (-2c_1+2c_4)\sin t + 4c_4 t\cos t - 4c_3 t\sin t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Coef}(\cos t): & 0 = 2c_2+2c_3 \\ \text{Coef}(\sin t): & 0 = -2c_1+2c_4 \\ \text{Coef}(t\cos t): & 1 = 4c_4 \\ \text{Coef}(t\sin t): & 0 = -4c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 0 \\ c_4 = 1/4 \\ c_2 = 0 \\ c_1 = 1/4 \end{cases} \Rightarrow x_p(t) = \frac{1}{4}t\cos t + \frac{1}{4}t^2\sin t.$$

- La solució general de l'edo no homogènia inicial és:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = x_p(t) + c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = \frac{1}{4}t\cos t + \frac{1}{4}t^2\sin t + c_1\cos t + c_2 \sin t$$

- Exemple 6: Trobeu la solució del PVI $x''' - x' = te^t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

- Pas 1: L'eq. caract. de l'edo homogènia associada, $x''' - x' = 0$, és $m^3 - m = 0$ i té arrels $m_1 = 0$, $m_2 = -1$, $m_3 = 1$. Les solucions associades són $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = e^{-t}$, $x_3(t) = e^t$.
- Pas 2: $f(t) = te^t$ és solució d'una edo lineal i homogènia a coeficients constants, d'ordre (mínim) 2 que té per arrels $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$ (doble)
- Pas 3: Si juntem les arrels del Pas 1 i Pas 2 obtenim el conjunt d'arrels (on 1 té multiplicitat 3) $\{m_1 = 0, m_2 = -1, m_3 = \mu_1 = \mu_2 = 1\}$. Les solucions associades (fent que les 3 primeres siguin $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$) són $\{x_1(t) = 1, x_2(t) = e^{-t}, x_3(t) = e^t, \tilde{x}_1(t) = te^t, \tilde{x}_2(t) = t^2e^t\}$

- Pas 4: Busquem $x_p(t) = c_1 \tilde{x}_1(t) + c_2 \tilde{x}_2(t) = c_1 t e^t + c_2 t^2 e^t$, on c_1, c_2 els determinem

Substituint $x_p(t)$ a l'edo. Es té:

$x_p(t) = c_1 t e^t + c_2 t^2 e^t \Rightarrow x_p'(t) = c_1 e^t + (c_1 + 2c_2) t e^t + c_2 t^2 e^t \Rightarrow$

$\Rightarrow x_p''(t) = (2c_1 + 2c_2) e^t + (c_1 + 4c_2) t e^t + c_2 t^2 e^t \Rightarrow x_p'''(t) = (3c_1 + 6c_2) e^t + (c_1 + 6c_2) t e^t + c_2 t^2 e^t$

Així:

$\boxed{t e^t =}$ $x_p'''(t) - x_p'(t) = [(3c_1 + 6c_2) e^t + (c_1 + 6c_2) t e^t + c_2 t^2 e^t] - [c_1 e^t + (c_1 + 2c_2) t e^t + c_2 t^2 e^t] =$

$= \boxed{(2c_1 + 6c_2) e^t + 4c_2 t e^t} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = 2c_1 + 6c_2 \\ 1 = 4c_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_2 = 1/4 \\ c_1 = -3/4 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x_p(t) = -\frac{3}{4} t e^t + \frac{1}{4} t^2 e^t}$

- La solució general de l'edo no homogènia inicial és:

$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = x_p(t) + c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) = -\frac{3}{4} t e^t + \frac{1}{4} t^2 e^t + c_1 \cdot 1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^t$

- Per resoldre el PVI $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ calculem:

$x'(t) = -\frac{3}{4} e^t - \frac{1}{4} t e^t + \frac{1}{4} t^2 e^t - c_2 e^{-t} + c_3 e^t$; $x''(t) = -e^t + \frac{1}{4} t e^t + \frac{1}{4} t^2 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^t$

Així:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = x(0) = c_1 + c_2 + c_3 \\ 0 = x'(0) = -\frac{3}{4} - c_2 + c_3 \\ 0 = x''(0) = -1 + c_2 + c_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ -c_2 + c_3 = 3/4 \\ c_2 + c_3 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_3 = 7/8 \\ c_2 = 1/8 \\ c_1 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{3}{4} t e^t + \frac{1}{4} t^2 e^t - 1 + \frac{1}{8} e^{-t} + \frac{7}{8} e^t}$$

- **Exercici 5:** Solució general de $x'' - 7x' + 12x = e^{3t}$ [solució: $x(t) = -t e^{3t} + c_1 e^{4t} + c_2 e^{3t}$]

- **Exercici 6:** Solució general de $x'' + 4x = t \sin 2t$ [solució: $x(t) = -\frac{1}{8} t^2 \cos 2t + \frac{1}{16} t \sin 2t + c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$]

- Mètode de variació de les constants

Considerem l'edo lineal d'ordre n (no homogènia i normalitzada):

$$x^{(n)} + b_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \dots + b_1(t)\, x' + b_0(t)\, x = g(t) \qquad (6)$$

i suposem que $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ és un conjunt fonamental (conegut) de solucions de l'edo homogènia associada i denotem per $W(t) = W(x_1, \dots, x_n)(t)$ el seu wronskià. Aleshores, l'edo no homogènia (6) admet una solució particular de la forma:

$$x_p(t) = u_1(t)\, x_1(t) + u_2(t)\, x_2(t) + \dots + u_n(t)\, x_n(t),$$

on $u_1(t), \dots, u_n(t)$ són funcions primitives qualsevol (sense constant d'integració) definides via les n equacions següents:

$$\boxed{u_j'(t) = \frac{W_j(t)}{W(t)}} \quad \text{on} \quad W_j(t) = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccc} & & \text{columna } j & & \\ & & \downarrow & & \end{array}$$

$$W_j(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & 0 & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \cdots & 0 & \cdots & x_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-2)}(t) & \cdots & 0 & \cdots & x_n^{(n-2)}(t) \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & g(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}, \quad \text{per } j = 1, \dots, n.$$

(És a dir, $W_j(t)$ és el mateix determinant que defineix el wronskià $W(t)$ però substituint la columna j del wronskià per vector $(0, 0, \dots, 0, g(t))$ on $g(t)$ és el terme independent de l'edo normalitzada (6)).

- Metode de variació de les constants per $n=2$

$$a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t) \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} x'' + p(t)x' + q(t)x = g(t) \text{ , on:}$$

$a_2(t) \neq 0 \Rightarrow$ normalitzem $\quad p(t) = \dfrac{a_1(t)}{a_2(t)}$, $q(t) = \dfrac{a_0(t)}{a_2(t)}$, $g(t) = \dfrac{f(t)}{a_2(t)}$

Sigui $\{x_1(t), x_2(t)\}$ un conjunt fonamental de solucions de l'edo homogènia associada. Aleshores, podem calcular una solució particular de l'edo no-homogènia:

$$x_p(t) = u_1(t)\,x_1(t) + u_2(t)\,x_2(t)$$

on calculem:

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} \text{ , } u_1(t) = -\int \frac{g(t)\,x_2(t)}{W(t)}\,dt, \quad u_2(t) = \int \frac{g(t)\,x_1(t)}{W(t)}\,dt.$$

- Exemple 1: Resolem el PVI $\; x'' + x = \dfrac{1}{\cos t}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x(0)=1, x'(0)=0$.

- Conjunt fonamental solucions edo homogènia associada $x''+x=0$: $\begin{cases} x_1(t) = \cos t \\ x_2(t) = \sin t. \end{cases}$

- Wronskià de $\{x_1(t), x_2(t)\}$: $W(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1.$

- Solució particular edo no homogènia. Calculem:

$$u_1(t) = -\int \frac{(1/\cos t)\cdot \sin t}{1}\,dt = -\int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt = \ln(\cos t) + \cancel{K}^{\,0}$$

$$u_2(t) = \int \frac{(1/\cos t)\cos t}{1}\,dt = \int 1\,dt = t + \cancel{c_2}^{\,0}$$

obtenim: $x_p(t) = u_1(t)\,x_1(t) + u_2(t)\,x_2(t) = \ln(\cos t)\cdot\cos t + t\,\sin t.$

- Solució general edo no homogènia:

$$x(t) = x_p(t) + c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = \ln(\cos t)\cdot\cos t + t\sin t + c_1\cos t + c_2 \sin t.$$

- Resolem el PVI. Calculem: $x'(t) = -\ln(\cos t)\sin t + t\cos t - c_1 \sin t + c_2\cos t$;

$$\left.\begin{aligned} 1 &= x(0) = c_1 \\ 0 &= x'(0) = c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x(t) = \ln(\cos t)\cdot\cos t + x\sin t + \cos t.$$

- Exemple 2: Trobeu la solució general de l'edo $t^2x'' - t x' + x = 4t\ln t$, $t>0$, sabent que $\{x_1(t) = t,\ x_2(t) = t\ln t\}$ n'és un conjunt fonamental de solucions de l'edo homogènia associada (Veure exemple 1 reducció de l'ordre, diapositiva 19).

- Normalitzem l'edo: $x'' - \frac{1}{t}x' + \frac{1}{t^2}x = \frac{4\ln t}{t} = g(t).$

- Wronskià de $\{x_1(t), x_2(t)\}$: $W(t) = \begin{vmatrix} t & t\cdot\ln t \\ 1 & \ln t + 1 \end{vmatrix} = t.$

- Solució particular edo homogènia. Calculem:

$$u_1(t) = -\int \frac{\left(\frac{4\ln t}{t}\right)\cdot t\ln t}{t}\,dt = -4\int (\ln t)^2\cdot\frac{1}{t}\,dt = -\frac{4}{3}(\ln t)^3 + \cancel{c_1}^{\,0}$$

$$u_2(t) = \int \frac{\left(\frac{4\ln t}{t}\right)\cdot t}{t}\,dt = 4\int \ln t \cdot \frac{1}{t}\,dt = 2(\ln t)^2 + \cancel{c_2}^{\,0}$$

obtenim: $x_p(t) = u_1(t)\,x_1(t) + u_2(t)\,x_2(t) = -\frac{4}{3}(\ln t)^3 \cdot t + 2(\ln t)^2 \cdot t\ln t = \frac{2}{3}\,t\cdot(\ln t)^3$

- Solució general edo no homogènia:

$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = x_p(t) + c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = \frac{2}{3}\,t(\ln t)^3 + c_1 t + c_2 t\cdot\ln t$

- Exemple 3: troben la solució general de $x''' - x' = te^t$ (Veure exemple 6 mètode dels coeficients indeterminats, diapositives 36-37 per la resolució via coeficients indeterminats).
  - $\{x_1(t) = 1,\ x_2(t) = e^t,\ x_3(t) = e^{-t}\}$ conjunt fonamental solucions edo homog.

  - $W(t) = W(x_1, x_2, x_3)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & x_3'(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) & x_3''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^t & e^{-t} \\ 0 & e^t & -e^{-t} \\ 0 & e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = 2.$

  - Calculem $u_1(t)$, $u_2(t)$ i $u_3(t)$ usant $g(t) = te^t$:

$$u_1'(t) = \frac{1}{W(t)}\begin{vmatrix} 0 & x_2(t) & x_3(t) \\ 0 & x_2'(t) & x_3'(t) \\ g(t) & x_2''(t) & x_3''(t) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & e^t & e^{-t} \\ 0 & e^t & -e^{-t} \\ te^t & e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = -te^t \Rightarrow u_1(t) = -\int te^t\,dt = \left\{\begin{matrix} u = t \to du = dt \\ dv = e^t dt \to v = e^t \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\left\{te^t - \int e^t dt\right\} = -te^t + e^t + \cancel{c_1}^{\,0}$$

$$u_2'(t) = \frac{1}{W(t)}\begin{vmatrix} x_1(t) & 0 & x_3(t) \\ x_1'(t) & 0 & x_3'(t) \\ x_1''(t) & g(t) & x_3''(t) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-t} \\ 0 & 0 & -e^{-t} \\ 0 & te^t & e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{t}{2} \Rightarrow u_2(t) = \int \frac{t}{2}\,dt = \frac{t^2}{4} + \cancel{c_2}^{\,0}$$

$$u_3'(t)=\frac{1}{W(t)}\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & 0\\ x_1'(t) & x_2'(t) & 0\\ x_1''(t) & x_2''(t) & g(t)\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & e^t & 0\\ 0 & e^t & 0\\ 0 & e^t & te^t\end{vmatrix}=\frac{t}{2}e^{2t} \Rightarrow u_3(t)=\frac{1}{2}\int te^{2t}dt=\left\{\begin{matrix} u=t\to du=dt\\ dv=e^{2t}dt\to v=\frac{e^{2t}}{2}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{te^{2t}}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2t}dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}te^{2t}-\frac{1}{8}e^{2t}+\cancel{c_3}^{\,0}$$

- La solució particular és:

$$x_p(t)=u_1(t)x_1(t)+u_2(t)x_2(t)+u_3(t)x_3(t)=(-te^t+e^t)\cdot 1+\left(\frac{t^2}{4}\right)\cdot e^t+\left(\frac{1}{4}te^{2t}-\frac{1}{8}e^{2t}\right)e^{-t}=\frac{t^2}{4}e^t-\frac{3}{4}te^t+\frac{7}{8}e^t$$

observem que, donat que $x_2(t)=e^t$ és solució de l'edo homogènia, també és una solució particular $x_p(t)=\frac{t^2}{4}e^t-\frac{3}{4}te^t$.

- Solució general de l'edo: $x(t)=x_p(t)+x_h(t)=\frac{t^2}{4}e^t-\frac{3}{4}te^t+c_1\cdot 1+c_2\cdot e^t+c_3e^{-t}$.

- Exercici 1: Useu el mètode de variació de les constants per trobar la solució general de l'edo $x''-2x'+x=e^t$ [Solució: $x(t)=\frac{t^2}{2}e^t+c_1e^t+c_2te^t$]

- Exercici 2: Trobeu la solució general de $x''+x'=\frac{1}{1+e^t}$ [Solució: $x(t)=t-(1+e^{-t})\ln(1+e^t)+$ $+c_1\cdot 1+c_2\cdot e^{-t}$]

- Exercici 3: Trobeu la solució general de $t^2x''-3tx'+4x=t^3$, $t>0$, sabent que $x_1(t)=t^2$ és una solució de l'edo homogènia associada: (a) Useu el mètode de reducció de l'ordre per calcular $x_2(t)$ segona solució independent amb $x_1(t)$ de l'edo homogènia associada (b) Calculeu $x_p(t)$ una solució particular de l'edo no homogènia i doneu-me la seva solució general. [Solució: $x_2(t)=t^2\ln t$, $x(t)=t^3+c_1t^2+c_2t^2\ln t$]

- Exemple: Donada l'edo lineal de 2on. ordre (no homogènia!):

$$(2t+3)\cdot t\cdot x'' + 2\cdot(2t^2-3)\cdot x' - 12\cdot(t+1)\,x = (2t+3)^2.$$

(a) troben $\lambda \in \mathbb{R}$ per tal que $x_1(t) = t^\lambda$ solució edo. homogènia associada.

· Volem λ per tal que $x_1(t) = t^\lambda$ verifiqui:

$$0 = (2t+3)\cdot t\cdot x_1''(t) + 2\cdot(2t^2-3)\cdot x_1'(t) - 12\cdot(t+1)\,x_1(t) =$$

$$= (2t+3)\cdot t\cdot\left[\lambda(\lambda-1)\,t^{\lambda-2}\right] + 2\cdot(2t^2-3)\cdot\left[\lambda t^{\lambda-1}\right] - 12\cdot(t+1)\left[t^\lambda\right] =$$

$$= 2\lambda(\lambda-1)\,t^\lambda + 3\lambda(\lambda-1)\,t^{\lambda-1} + 4\lambda t^{\lambda+1} - 6\lambda t^{\lambda-1} - 12\,t^{\lambda+1} - 12t^\lambda$$

Igualem a zero totes les potències de t involucrades en l'expressió:

Coef. $t^{\lambda+1}$: $4\lambda - 12 = 0 \iff \lambda = 3$

Coef. t^λ: $2\lambda(\lambda-1) - 12 = 0$ és cert si $\lambda = 3$

Coef. $t^{\lambda-1}$: $3\lambda(\lambda-1) - 6\lambda = 0$ és cert si $\lambda = 3$

La solució és doncs $x_1(t) = t^3$.

(b) Trobeu $m \in \mathbb{R}$ per tal que $x_2(t) = e^{mt}$ solució edo homogènia associada.

Volem m per tal que $x_2(t) = e^{mt}$ verifiqui:

$$0 = (2t+3)\cdot t \cdot x_2''(t) + 2\cdot(2t^2-3)\cdot x_2'(t) - 12(t+1)\,x_2(t) =$$

$$= (2t+3)\cdot t \cdot [m^2 e^{mt}] + 2\cdot(2t^2-3)[m e^{mt}] - 12(t+1)[e^{mt}] =$$

$$= 2m^2 t^2 e^{mt} + 3m^2 t e^{mt} + 4mt^2 e^{mt} - 6m e^{mt} - 12 t e^{mt} - 12 e^{mt}$$

Igualem a zero totes les "potències" $t^k e^{mt}$ involucrades en l'expressió:

$\text{Coef}(e^{mt})$: $-6m - 12 = 0 \iff m = -2$

$\text{Coef}(t e^{mt})$: $3m^2 - 12 = 0$ és cert si $m = -2$.

$\text{Coef}(t^2 e^{mt})$: $2m^2 + 4m = 0$ és cert si $m = -2$.

La solució és $x_2(t) = e^{-2t}$.

(c) Useu variació de les consts. per calcular solució particular edo completa

Edo normalitzada: $x'' + \dfrac{2(2t^2-3)}{(2t+3)t}x' - \dfrac{12(t+1)}{(2t+3)t}x = \boxed{\dfrac{2t+3}{t} = f(t)}$

• Usem $\{x_1(t)=t^3,\ x_2(t)=e^{-2t}\}$ cjt. fonamental sols. edo homogènia. El seu Wronskià és:

$$W(t)=W(x_1,x_2)(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} t^3 & e^{-2t} \\ 3t^2 & -2e^{-2t}\end{vmatrix}=-t^2e^{-2t}(2t+3)$$

• Busquem solució particular $x_p(t)=u_1(t)\,x_1(t)+u_2(t)\,x_2(t)$, on:

$$u_1(t)=-\int\frac{x_2(t)\cdot f(t)}{W(t)}dt=-\int\frac{e^{-2t}\cdot\left(\frac{2t+3}{t}\right)}{-t^2e^{-2t}(2t+3)}dt=\int\frac{dt}{t^3}=\int t^{-3}dt=-\frac{t^{-2}}{2}+\cancel{c_1}^{\,0}$$

$$u_2(t)=\int\frac{x_1(t)\cdot f(t)}{W(t)}dt=\int\frac{t^3\cdot\left(\frac{2t+3}{t}\right)}{-t^2e^{-2t}(2t+3)}dt=-\int e^{2t}dt=-\frac{e^{2t}}{2}+\cancel{c_2}^{\,0}$$

$$x_p(t)=u_1(t)\,x_1(t)+u_2(t)\,x_2(t)=-\frac{t^{-2}}{2}\cdot t^3-\frac{e^{2t}}{2}\cdot e^{-2t}=-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$$

(d) Resolem el PVI $x(-1)=-1$, $x'(-1)=5/2$ per l'edo inicial.

• La seva solució general és: $x(t)=x_p(t)+c_1x_1(t)+c_2x_2(t)=-\frac{t}{2}-\frac{1}{2}+c_1t^3+c_2e^{-2t}$.

• Imposem les c.i.:

$$\left.\begin{aligned}-1&=x(-1)=-c_1+c_2e^2\\ 5/2&=x'(-1)=-\frac{1}{2}+3c_1-2c_2e^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}c_1&=1\\ c_2&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x(t)=-\frac{t}{2}-\frac{1}{2}+t^3 \text{ és \underline{la} solució PVI.}$$

Problemes amb valors a la frontera per l'edo model $X'' = \mu X$

- Donada una edo lineal i homogènia de 2on. ordre de la forma
$$a_2(x) X'' + a_1(x) X' + a_0(x) X = f(x) \quad , \quad x \in I \subset \mathbb{R} \text{ (interval)}$$
amb $a_0(x), a_1(x), a_2(x), f(x)$ funcions contínues en I, $a_2(x) \neq 0$ en I, llavors el teorema d'existència i unicitat de solucions ens diu que donades c.i. $(x_0, X_0, X_0') \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, llavors existeix $X(t)$ única solució de l'edo, definida $\forall t \in I$, complint $X(x_0) = X_0$, $X'(x_0) = X_0'$.
- Si enlloc de verificar c.i. en $x = x_0$, demanem que $X(x)$ compleixi dues condicions diferents que involucren els valors de $X(x)$ i de les seves derivades en dos punts $x = a$ i $x = b$ diferents de I (típicament els extrems de l'interval) parlarem d'un problema amb valors a la frontera (P.V.F.) per l'edo lineal i a les condicions demanades per $X(x)$ les anomenarem condicions de frontera (c.f.).

• En el cas en què les c.f. siguin combinacions lineals dels valors de $X(x)$ i de les seves derivades en $x=a$ i $x=b$, llavors la resolució del P.V.F. equival a la resolució d'un sistema d'equacions lineals de dimensió 2 (les incògnites són els mateixos coeficients c_1, c_2 que determinem per resoldre un PVI). Però, en aquest cas, podem tenir existència i unicitat de solucions (sist. compatible determinat), no existència de solucions (sistema incompatible) o infinites solucions (sist. compatible indeterminat).

• Si l'edo lineal és homogènia i les c.f. són lineals i homogènies, llavors $X(x) \equiv 0$ és solució del P.V.F. i, per tant, la pregunta interessant en aquest cas és si el P.V.F. té o no més solucions no trivials $X(x) \not\equiv 0$.

La gràcia en aquest context està en considerar e.d.o.'s lineals dependents d'un paràmetre i preguntar-no per a quins valors del paràmetre el PVI té solucions no trivials. Obtenim un problema "anàleg" al càlcul dels VAP's i VEP's d'una matriu. Als valors del paràmetre pels quals tenim solucions no trivials són els valors propis (VAP's) del P.V.F. i les solucions no trivals són les funcions pròpies (FUP's) del PVF.

- <u>Exemple 1</u>: Trobeu els VAP's i FUP's del següent PVF per l'edo model:

$$X'' = \mu X \quad \& \quad X(0) = X(L) = 0 \quad (L > 0 \text{ fixat})$$

- Això és, hem de trobar els valors $\mu \in \mathbb{R}$ pels quals el PVF té solució $X \not\equiv 0$ i les corresponents solucions $X \not\equiv 0$.
- Típicament, pel tipus de c.f. considerades en aquests exemples, esperem que els VAP's μ siguin tots $\mu \leq 0$, èssent el cas $\mu = 0$ un cas excepcional. No esperem tenir VAP's amb $\mu > 0$.
- La resolució del PVF s'aborda en tres casos que s'aborden separadament: Cas $\mu > 0$; Cas $\mu = 0$; Cas $\mu < 0$.
- $\boxed{\text{CAS } \mu > 0}$ Expressem $\mu = \lambda^2$ amb $\lambda > 0$ i calcular els valors de λ que donen llocs a VAP's μ del PVF.

Edo: $X'' = \lambda^2 X \Rightarrow$ Solució general $X(x) = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x} =$

$$= C \cosh(\lambda x) + D \sinh(\lambda x)$$

(Relació: $A = \frac{C+D}{2}$, $B = \frac{C-D}{2}$)

($\cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$, $\sinh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$)

Tractem de determinar C', D per tal que $X(x) = C' \cosh(\lambda x) + D \sinh(\lambda x)$ verifiqui les c.f. $X(0) = X(L) = 0$. Cal:

$0 = X(0) = C' \cosh(0) + D \sinh(0) = C' \Rightarrow C' = 0$

$0 = X(L) = C' \cosh(\lambda L) + D \sinh(\lambda L) = D \sinh(\lambda L) \Rightarrow D \sinh(\lambda L) = 0$

Però, en ser $\lambda \cdot L > 0$ llavors $\sinh(\lambda L) > 0 \Rightarrow D = 0$.

Per tant, si $\mu = \lambda^2 > 0$ només $X(x) \equiv 0$ verol el PVF. No hi ha VAP's amb $\mu > 0$.

$\boxed{\text{CAS } \mu = 0}$ Edo $X'' = 0 \Rightarrow$ Solució general $X(x) = Ax + B$

Imposem les c.f.:

$0 = X(0) = B \Rightarrow B = 0$

$0 = X(L) = A \cdot L + B = AL \Rightarrow A \cdot L = 0 \xRightarrow{L>0} A = 0$

$\Big\}$ $X(x) \equiv 0$ i $\mu = 0$ no és VAP del PVF.

$\boxed{\text{Cas } \mu < 0}$ Expressem $\mu = -\lambda^2$ amb $\lambda > 0$ i calculem els valors de λ que donen lloc a VAP's del PVF.

Edo: $X'' = -\lambda^2 X \Rightarrow$ Solució general $X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$

Tractem de determinar A, B per tal que $X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$

Verifiqui les c.f. $X(0) = X(L) = 0$. Cal:

$0 = X(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = A \Rightarrow A = 0$

$0 = X(L) = A\cos(\lambda L) + B\sin(\lambda L) = B\sin(\lambda L) \Rightarrow B\sin(\underset{0 <}{\lambda L}) = 0$

Si volem tenir solucions no trivial $X \not\equiv 0$ cal $B \neq 0$. Per tant ha de ser:

$\sin(\lambda L) = 0 \Leftrightarrow \lambda L = n \cdot \pi$, per algun $n = 1, 2, 3, \ldots \Leftrightarrow \lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$, $n = 1, 2, \ldots$

$\Leftrightarrow \mu = \mu_n = -\lambda_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ infinits VAP's del PVF

Les corresponents FUP's són: $X_n(x) = B\sin(\lambda_n x) = B\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

- Exemple 2: Trobeu els VAP's i les FUP's del següent PVF per l'edo model:

$X'' = \mu X$ & $X'(0) = X(L) = 0$ $(L > 0$ fixat$)$

$\boxed{\text{CAS } \mu = 0}$ Edo $X'' = 0 \Rightarrow$ solució general $X(x) = Ax + B$, $X'(x) = A$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = X'(0) = A \Rightarrow A = 0 \\ 0 = X(L) = A \cdot L + B = B \Rightarrow B = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} X(x) \equiv 0 \text{ única solució del PVF} \\ \text{i } \mu = 0 \text{ no és VAP.} \end{array}$$

$\boxed{\text{CAS } \mu>0}$ Fem $\mu=\lambda^2$, $\lambda>0$: Edo $X''=\lambda^2 X \Rightarrow \underbrace{X(x)=C\cosh(\lambda x)+D\sinh(\lambda x)}_{\text{solució general}}$

(observem: $X'(x)=C\lambda\sinh(\lambda x)+D\lambda\cosh(\lambda x)$)

$0=X'(0)=C\lambda\sinh(0)+D\lambda\cosh(0)=D\lambda \Rightarrow D\lambda=0 \xRightarrow{\lambda>0} D=0.$

$0=X(L)=C\cosh(\lambda L)+D\sinh(\lambda L)=C\cosh(\lambda L) \Rightarrow C\cosh(\lambda L)=0$

En ser $\lambda L\neq 0 \Rightarrow \cosh(\lambda L)\neq 0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow X(x)\equiv 0 \Rightarrow$ No hi ha cap VAP $\mu>0$.

$\boxed{\text{CAS } \mu<0}$ Fem $\mu=-\lambda^2$, $\lambda>0$: Edo $X''=-\lambda^2 X \Rightarrow \underbrace{X(x)=A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x)}_{\text{solució general}}$

(observem: $X'(x)=-A\lambda\sin(\lambda x)+B\lambda\cos(\lambda x)$.)

$0=X'(0)=-A\lambda\sin(0)+B\lambda\cos(0)=B\lambda \Rightarrow B\lambda=0 \xRightarrow{\lambda>0} B=0$

$0=X(L)=A\cos(\lambda L)+B\sin(\lambda L)=A\cos(\lambda L) \Rightarrow A\cos(\lambda L)=0.$

Si volem tenir solució no trivial $X\not\equiv 0$ cal $A\neq 0$. Per tant, ha de ser:

$\cos(\lambda L)=0 \Leftrightarrow \lambda L=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n=0,1,2,\dots \Leftrightarrow \lambda=\lambda_n=\frac{(n+1/2)\pi}{L},\ n=0,1,2,\dots$

$\Leftrightarrow \mu=\mu_n=-\lambda_n^2=-\left(\frac{(n+1/2)\pi}{L}\right)^2,\ n=0,1,2,\dots$ infinits VAP's del PVF

Les corresponents FUP's són: $X_n(x)=A\cos(\lambda_n x)=A\cos\left(\frac{(n+1/2)\pi}{L}\right)$, $n=0,1,2,\dots$

· Tot seguit teniu un quadre amb aquests dos exemples i d'altres anàlegs

Exemples bàsics de solucions de P.V.F. per $\boxed{X'' = \mu X}$

CONDICIÓ FRONTERA	VAPS	FUPS
$X(0) = X(L) = 0$	$\mu_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\ n \geq 1$	$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
$X'(0) = X'(L) = 0$	$\mu_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\ n \geq 0$	$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
$X(0) = X'(L) = 0$	$\mu_n = -(n+\frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{L^2},\ n \geq 0$	$X_n(x) = \sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\right)$
$X'(0) = X(L) = 0$	$\mu_n = -(n+\frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{L^2},\ n \geq 0$	$X_n(x) = \cos\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\right)$
$X(-L) = X(L)$ $X'(-L) = X'(L)$	$\{\mu_0 = 0$ Vap simple$\}$ $\left\{\mu_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right.$ Vap's dobles $\left.n \geq 1\right\}$	$\{X_0(x) = 1\}$ $\left\{X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ \tilde{X}_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}$