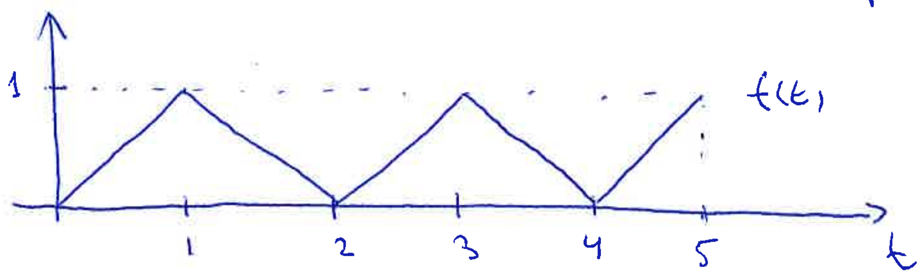
(13) Calculeu la transformada de Laplace de la funció "ona triangular" de la figura usant que és periòdica de període $T=2$.



$$f(t)=\begin{cases} t & , t\in[0,1] \\ 2-t & , t\in[1,2]\end{cases} \text{ + extensió periòdica de període } T=2.$$

Usem la fórmula de la transformada d'una funció T-periòdica

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)](s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

Llavors, en el nostre cas:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}f(t)\,dt=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left\{\int_0^1 t\cdot e^{-st}dt+\int_1^2(2-t)\,e^{-st}dt\right\}$$

Integrant per parts:

$$\int_0^1 t\,e^{-st}\,dt=\left\{\begin{array}{l} u=t \to du=dt \\ dv=e^{-st}dt \to v=\frac{e^{-st}}{-s}\end{array}\right\}=\left[-\frac{t\,e^{-st}}{s}\right]_{t=0}^{t=1}-\int_0^1\frac{e^{-st}}{-s}dt=$$

$$=-\frac{e^{-s}}{s}+\frac{1}{s}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{t=1}=-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}-\left(-\frac{1}{s^2}\right)=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}(s+1)}{s^2}$$

$$\int_1^2(2-t)\,e^{-st}dt=\left\{\begin{array}{l} u=2-t \to du=-dt \\ dv=e^{-st}dt \to v=\frac{e^{-st}}{-s}\end{array}\right\}=\left[(2-t)\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=1}^{t=2}-\int_1^2\frac{e^{-st}}{-s}\cdot(-dt)=$$

$$=\frac{e^{-s}}{s}-\frac{1}{s}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=1}^{t=2}=\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}=\frac{e^{-2s}}{s^2}+\frac{e^{-s}(s-1)}{s^2}$$

Per tant:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left\{\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}\right\}=\frac{(1-e^{-s})^2}{(1-e^{-s})(1+e^{-s})\,s^2}=\frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})}$$