(14) (a) Demostrar que si f és contínua a trossos, d'ordre exponencial i que existeix $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$, aleshores si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ es té:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^{+\infty} F(u)\,du.$$

Les condicions de l'enunciat van encaminades a garantir que existeixen les transformades de $f(t)$ i $f(t)/t$. Anem a provar doncs la fórmula. Per fer-ho, usarem el teorema de Fubini per canviar l'ordre d'integració en dominis infinits sense donar-hi ara cap justificació. Tenim, per definició:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s\cdot t} f(t)\,dt.$$

Fem ara $s = u$ i obtenim

$$F(u) = \int_0^{+\infty} e^{-u\cdot t} f(t)\,dt.$$

Integrem respecte de u entre $u = s$ i $u = +\infty$ (s valor fixat):

$$\int_s^{+\infty} F(u)\,du = \int_s^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-u\cdot t} f(t)\,dt\right)du \underset{\uparrow}{=} \int_0^{+\infty}\left(\int_s^{+\infty} e^{-ut} f(t)\,du\right)dt$$

Fubini: permutem l'ordre de les integrals

observem: $\int_s^{+\infty} e^{-ut} f(t)\,du = f(t)\int_s^{+\infty} e^{-ut}\,du = f(t)\left[\frac{e^{-ut}}{-t}\right]_{u=s}^{u=+\infty} = e^{-st}\frac{f(t)}{t}$

on hem usat que si $t > 0$ llavors $\lim_{u\to+\infty} e^{-u\cdot t} = 0$.

Per tant:

$$\int_s^{+\infty} F(u)\,du = \int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{f(t)}{t}\,dt \overset{\text{definició}}{=} \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s), \text{ com volíem.}$$

(c) Demostreu que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} F(u)\,du$ si existeixen les integrals.

Hem vist en (a)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definició}}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{f(t)}{t}\,dt \overset{\substack{(a)\\ \downarrow}}{=} \int_s^{+\infty} F(u)\,du.$$ i fem $s=0$.

(b) Calculeu la transformada de Laplace de la funció sinus-integral.

$$f(t)=\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du = Si(t)$$

$$\mathcal{L}\{Si(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\} \underset{\uparrow}{=} \frac{\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}}{s} \underset{\uparrow}{=} \frac{\arctan(1/s)}{s}.$$

Formula transformada d'una integral

Es prova usant (a) que $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \arctan(1/s)$ en les diapositives de teoria (No ho repetim aquí)

(d) Com a aplicació calculeu la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

tenim que la integral correspon al valor $s=0^+$ de la transformada de Laplace del $\sin t/t$. En efecte:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-0t}\frac{\sin t}{t}\,dt = \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(0^+) = \lim_{s\to 0^+} \arctan(1/s) =$$

$$= \arctan(1/0^+) = \arctan(+\infty) = \pi/2$$

(el fet que el límit sigui $s \to 0^+$ respon a que $\arctan(1/s)$ només val com a transformada de $\sin t/t$ si $s>0$)