Probabilitat Bàsica

7 d'octubre de 2015

Contingut

Models deterministes i models estocàstics

Les lleis més senzilles de les ciències donen el conjunt de condicions sota les quals un cert esdeveniment d'interés succeeirà:

- Si es compleixen les condicions S, aleshores succeeix l'esdeveniment A. Diem que A és, amb relació a S, un esdeveniment determinista.

En canvi, un esdeveniment A que, sota un conjunt de condicions S, a vegades succeeix i a vegades no, es diu que és (amb relació a S) un esdeveniment aleatori.

- La Teoria de la Probabilitat ens permet formular models matemàtics estocàstics dels fenòmens aleatoris.

Experiments aleatoris

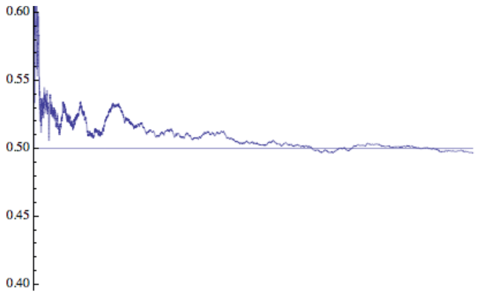
Condicions que ha de complir un experiment aleatori:

- S'ha de poder repetir indefinidament (encara que sigui de manera conceptual) sota les mateixes condicions.
- En cada repetició el resultat és impredictible.
- El conjunt de tots els resultats possibles està ben determinat.
- Quan l'experiment es repeteix, els resultats que s'obtenen defineixen un cert model de regularitat.

  Un dels objectius de la Teoria de la Probabilitat és descriure i precisar aquesta regularitat observada.

Estabilització de les freqüències relativas

Per exemple, en llençar una moneda perfecta moltes vegades, la fracció de cares aparegudes és molt aproximadament $1/2$.



Diem que la freqüència relativa del nombre de cares tendeix a estabilitzar-se cap al valor $1/2$.

El concepte de probabilitat
Definició clàssica. (Laplace, 1795)

La probabilitat $\mathrm{P}(A)$ d'un esdeveniment A es dóna "a priori":

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N_A}{N},$$

on N és el nombre de resultats possibles de l'experiment aleatori i N_A el nombre de resultats favorables a A.

- Les N alternatives possibles han de se igualment versemblants.
- Probabilitat Combinatòria: calcular $\mathrm{P}(A)$ es redueix a comptar.

Definició clàssica

- Sovint, la hipòtesi que les alternatives possibles són igualment versemblants està ben fonamentada per l'experiència, o bé per raonaments de simetria.
- La definició es pot aplicar en moltes situacions, fins i tot si el nombre d'alternatives és infinit.

  Exemple: Una partícula radioactiva s'emet aleatòriament durant l'interval $[0, T]$.
  La probabilitat que la partícula s'hagi emès durant $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ val:

$$p = \frac{t_2 - t_1}{T}$$

Definició freqüencial. (Von Mises, 1936)

L'experiment aleatori es repeteix n vegades,

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n},$$

on n_A és el nombre de vegades que ha succeït A.

- El quocient n_A/n s'anomena freqüència relativa de l'esdeveniment A. La probabilitat s'interpreta com el valor límit de la freqüència relativa.
- Interpretació: Si l'experiment aleatori es repeteix n vegades, amb n gran, el nombre de vegades que succeirà A serà aproximadament $n\,\mathrm{P}(A)$.

Definició axiomàtica. (Kolmogorov, 1933)

$\mathrm{P}(A)$ és un número entre 0 i 1 que verifica els axiomes següents:

(A1) Si Ω és l'esdeveniment segur, llavors

$$\mathrm{P}(\Omega) = 1$$

(A2) Si A i B són esdeveniments que s'exclouen mutuament, i $A \cup B$ denota l'esdeveniment "succeeix A o B", aleshores

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

Espais de probabilitat

Espai de probabilitat: modelització matemàtica d'un experiment aleatori

$$\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$$

- Ω: espai mostral o conjunt de tots els resultats possibles.
- $\mathcal{F}$: σ-àlgebra dels esdeveniments. Cada esdeveniment és un subconjunt de Ω.
- P: funció probabilitat.

Probabilitat

La funció probabilitat és una aplicació

$$\mathrm{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$$

$$A \mapsto \mathrm{P}(A)$$

que satisfà:

(a) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

(b) $\left.\begin{array}{r} A, B \in \mathcal{F} \\ A \cap B = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

(b') $\left.\begin{array}{r} A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F} \\ A_i \cap A_j = \emptyset, \ i \neq j \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mathrm{P}(A_n)$

Propietats

(a) $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathrm{P}(A), \qquad \mathrm{P}(\emptyset) = 0$

(b) $A \subset B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$

(c) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

(c') Inclusió-exclusió:

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

Espais de probabilitat discrets

- Ω és un conjunt discret (finit o infinit numerable).
- Usualment es pren $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (la família de tots els subconjunts de Ω).
- P queda determinada per les probabilitats assignades als resultats elementals ω_i:

$$p_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\}), \qquad \sum_{\omega_i \in \Omega} p_i = 1$$

Si $A \subset \Omega$, llavors

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

Fórmula clàssica de Laplace

Quan Ω és un conjunt finit, $|\Omega| = n$, i els resultats elementals són igualment probables tenim:

$$p_i = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Per tant, si $A \subset \Omega$, $|A| = k$, aleshores

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \frac{k}{n},$$

on k és el nombre de resultats favorables a A i n és el nombre de resultats possibles.

Espais de probabilitat continus

- Si Ω és un conjunt infinit no numerable és impossible assignar una probabilitat a cada subconjunt de Ω de forma consistent amb els axiomes que defineixen P.
- $\mathcal{F}$ ha de ser una família de subconjunts de Ω estrictament més petita que $\mathcal{P}(\Omega)$.
- Per exemple, quan $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ és normalment la σ-àlgebra més petita que conté als intervals (els seus elements s'anomenen borelians).

Probabilitats condicionades

Donat un esdeveniment B de probabilitat no nul·la podem definir en $\mathcal{E}$ una nova mesura de probabilitat, la probabilitat condicionada per B:

$$\mathrm{P}(\cdot \mid B) : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$$

$$A \mapsto \mathrm{P}(A \mid B) \equiv \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Propietats

Es compleix:

- $0 \leq \mathrm{P}(A \mid B) \leq 1$
- Si $A \cap B = \emptyset$, aleshores $\mathrm{P}(A \mid B) = 0$.
- Si $B \subset A$, aleshores $\mathrm{P}(A \mid B) = 1$
- Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, llavors

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \mid B) = \mathrm{P}(A_1 \mid B) + \mathrm{P}(A_2 \mid B)$$

Esdeveniments independents

- Dos esdeveniments A i B es diuen independents si

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

- Si A i B són independents, aleshores $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$.
- En general, diem que els esdeveniments A_1, A_2, ..., A_n són conjuntament independents si, per a cada $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, es compleix:

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathrm{P}(A_i)$$

Teorema de la Probabilitat Total

Una partició de Ω és una col·lecció d'esdeveniments $\{A_1, A_2, \dots, A_i \dots\}$, finita o infinita numerable, tal que:

(a) $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$

(b) $\bigcup_i A_i = \Omega$

Teorema

Sigui $\{A_1, A_2, \dots, A_i \dots\}$ una partició de Ω tal que $\mathrm{P}(A_i) \neq 0$ per a tot i. Sigui $A \in \mathcal{F}$. Aleshores,

$$P(A) = \sum_{i \geq 1} \mathrm{P}(A \mid A_i)\, \mathrm{P}(A_i)$$

Fórmula de Bayes

La Fórmula de Bayes permet calcular probabilitats "a posteriori".

Teorema

Sigui $\{A_1, A_2, \dots, A_i \dots\}$ una partició de Ω tal que $\mathrm{P}(A_i) \neq 0$ per a tot i. Sigui $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{P}(A) \neq 0$. Aleshores,

$$P(A_k \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid A_k)\, \mathrm{P}(A_k)}{\sum_{i \geq 1} \mathrm{P}(A \mid A_i)\, \mathrm{P}(A_i)}, \quad k = 1, 2, \dots$$