PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCASTICS

Notes de Classe

J. M. Aroca

Departament de Matemàtica Aplicada IV,
Universitat Politècnica de Catalunya

e-mail:aroca@ma4.upc.edu
http://www-ma4.upc.edu/~aroca

Febrer de 2015

Índex

Notació

♦ Final d'exemple.

DEM: Inici de demostració.

♣ Final de demostració.

$\mathrm{u}(x)$ Funció de Heaviside. (1 si $x \geq 0$ i 0 si $x < 0$.)

$\delta(x)$ Delta de Dirac (veure apèndix sobre distribucions).

$(f * g)(x)$ Producte de convolució.

$f^*(x)$ Conjugació complexa.

Ω Espai mostral. (Possibles resultats d'un experiment aleatori.)

$\mathcal{P}(\Omega)$ Parts de Ω. (Conjunt dels subconjunts de Ω.)

$\mathcal{F}$ Àlgebra d'esdeveniments.

$A, B, C, \ldots$ Esdeveniments. (Subconjunts de Ω.)

$P(A)$ Probabilitat de l'esdeveniment A.

$P(A\,|\,B)$ Probabilitat de A condicionada a B (És a dir, sabent que B s'ha produït.)

$P(A \textbf{ i } B), P(A \cap B), P(A, B)$ Probabilitat que es verifiquin els esdeveniments A i B.

$P(A \textbf{ o } B), P(A \cup B)$ Probabilitat que es verifiqui algun dels esdeveniments A o B.

$X, Y, Z, \ldots$ Variable aleatòries (En majúscules. Els valors numèrics es posen en minúscula. Així, per exemple, $X < x$ és l'esdeveniment: la variable aleatòria X és menor que el nombre x.).

$F_X(x)$ Funció de distribució de la variable aleatòria X.

$f_X(x)$ Funció de densitat de la variable aleatòria contínua X.

$P_X(x)$ Funció de probabilitat de la variable aleatòria discreta X.

$E[X], \overline{X}, m_X$ Esperança de la variable aleatòria X.

$V[X], \sigma_X^2$ Variància de la variable aleatòria X.

σ_X Desviació estàndard de la variable aleatòria X.

$F_{XY}(x, y)$ Funció de distribució conjunta de les variables aleatòries X i Y.

$f_{XY}(x, y)$ Funció de densitat conjunta de les variables aleatòries X i Y.

$f_X(x\,|\,y)$ Funció de densitat de la variable aleatòria X condicionada a $Y = y$. (De manera similar tenim $f_Y(y\,|\,x)$.)

$C[X, Y]$ Covariància de les variables aleatòries X i Y.

ρ Coeficient de correlació.

H Entropia.

$X(t), Y(t), Z(t), \ldots$ Processos estocàstics.

$m(t)$ Funció de valor mitjà d'un procés estocàstic.

$R(t_1, t_2)$ Funció d'autocorrelació d'un procés estocàstic.

$C(t_1, t_2)$ Funció d'autocovariància d'un procés estocàstic.

$\mathrm{Pot}(t)$ Potència d'un procés estocàstic.

m_T Mitjana temporal d'un procés estocàstic.

$S(f)$ Espectre de potència d'un procés estocàstic.

M Matriu de transició d'una cadena de Markov.

Part I

Teoria de la probabilitat i variables aleatòries unidimensionals

Capítol 1

Introducció a la teoria de la probabilitat

1.1 Experiment aleatori

És un experiment $\mathcal{E}$ que es pot repetir tantes vegades com es vulgui sempre en les mateixes condicions. Cada repetició de l'experiment s'anomena prova.

1.2 Espai mostral

És el conjunt Ω dels possibles resultats d'un experiment aleatori $\mathcal{E}$.

Exemple 1.1 $\mathcal{E} =$"Tirar una moneda", $\Omega = \{\circ, +\}$ on $\circ$ vol dir que la moneda treu cara i $+$ que la moneda treu creu. A l'especificar aquest espai mostral estem dient quina informació és part del resultat i quins resultats es poden donar. Així no ens interessa la posició a la taula de la moneda i també estem dient que no pot ser que la moneda quedi "de costat" sense mostrar cara o creu. ♦

Exemple 1.2 $\mathcal{E} =$"Tirar una moneda dues vegades", $\Omega = \{\circ\circ, \circ+, +\circ, ++\}$. ♦

Exemple 1.3 $\mathcal{E} =$"Tirar un dau", $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.♦

Exemple 1.4 L'espai mostral és el que determina clarament la informació que extraiem de l'experiment. Si, per exemple, $\mathcal{E} =$"Tirar dos daus" hem d'especificar si podem distingir els dos daus una vegada tirats amb el que l'espai mostral és $\Omega_1 = \{(a, b) \mid 1 \leq a, b \leq 6\}$ que té $6^2 = 36$ elements o si els daus son indistingibles i tenim $\Omega_2 = \{\{a, b\} \mid 1 \leq a, b \leq 6\}$ que té 21 elements (els 6 amb $a = b$ més $\binom{6}{2} = 15$ amb $a \neq b$). És a dir, en el segon cas no podem distingir, per exemple, les configuracions (1,2) i (2,1).♦

1.3 Esdeveniment aleatori

Donat un experiment $\mathcal{E}$ un esdeveniment aleatori és una proposició lògica S tal que a l'efectuar una prova de $\mathcal{E}$ podem determinar la seva veritat o falsedat. Considerem $\mathcal{S} = \{$conjunt d'esdeveniments $S\}$. Podem identificar un esdeveniment S amb el subconjunt de Ω format pels elements que fan que S sigui cert. D'aquesta manera identifiquem $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Omega)$. Per exemple, $\mathcal{E} =$"Tirar un dau", $S =$"Que surti parell"$= \{2, 4, 6\}$. Com es veu cometrem l'abús de llenguatge de fer servir el mateix nom per la proposició i el subconjunt.

Aquesta identificació ens mou isomòrficament entre l'àlgebra de Boole de les proposicions lògiques (i, o, no) i l'àlgebra de Boole dels conjunts (unió, intersecció, complementari). Les equivalències es resumeixen en la següent taula (veure l'apèndix A):

disjunció	R o S	$R \cup S$	unió
conjunció	R i S	$R \cap S$	intersecció
negació	no R	$\Omega - R$	complementari
implicació	$R \to S$	$R \subset S$	inclusió
equivalència	$R \leftrightarrow S$	$R = S$	igualtat

El complementari $\Omega - A$ el denotarem $\overline{A}$. L'esdeveniment $\emptyset$ és sempre fals. S'anomena **esdeveniment impossible** i es pot pensar com $A \cap \overline{A}$, és a dir "A i no A" (contradicció). L'esdeveniment Ω és sempre cert. S'anomena **esdeveniment segur** i es pot pensar com $A \cup \overline{A}$, és a dir "A o no A" (tautologia).

Exemple 1.5 En l'experiment de l'exemple 1.2 considerem l'esdeveniment $A =$ "surt alguna cara". Llavors $A = \{\circ\circ, \circ+, +\circ\}$. El seu complementari és $\overline{A} =$ "no surt ninguna cara" $= \{++\}$.

Si $B =$ "surt alguna creu", llavors $B = \{++, \circ+, +\circ\}$. "surt alguna cara i alguna creu" és $A \cap B = \{\circ+, +\circ\}$. "surt alguna cara o alguna creu" és $A \cup B = \Omega$, l'esdeveniment segur. ♦

1.4 Àlgebra d'esdeveniments

És una família $\mathcal{F}$ no buida de subconjunts de Ω tancada per la unió i el complementari. És a dir, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ verificant:

(1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$,

(2) si $A \in \mathcal{F}$ llavors $\overline{A} \in \mathcal{F}$,

(3) si $A, B \in \mathcal{F}$ llavors $A \cup B \in \mathcal{F}$.

D'aquí es desprenen les següents propietats:

(4) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$,

(5) si $A, B \in \mathcal{F}$ llavors $A \cap B \in \mathcal{F}$.

DEM:

(4) Per (1) existeix $A \in \mathcal{F}$. Per (2) $\overline{A} \in \mathcal{F}$. Per (3) $\Omega = A \cup \overline{A} \in \mathcal{F}$. Per (2) $\emptyset = \overline{\Omega} \in \mathcal{F}$.

(5) Siguin $A, B \in \mathcal{F}$ i recordem la propietat de les operacions entre conjunts $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Llavors $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{F}$. ♣

Un exemple trivial d'àlgebra d'esdeveniments és considerar tot el conjunt $\mathcal{P}(\Omega)$. A vegades ens interessarà treballar amb conjunts més petits d'esdeveniments, ja sigui perquè només volem considerar uns esdeveniments determinats o perquè no podem assignar probabilitats quan $\mathcal{P}(\Omega)$ és molt complicat (cas continu). El que demanem és que el conjunt considerat sigui tancat sota les operacions lògiques *i*, *o* i *no*. Dit d'una altra manera, a l'igual que $\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{F}$ ha de ser una àlgebra de Boole amb la unió, la intersecció i el complementari.

Exemple 1.6 En l'experiment "Tirar un dau" $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $\mathcal{P}(\Omega)$ té $2^6 = 64$ elements. Es fàcil comprovar que $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$ és una àlgebra d'esdeveniments. Per tant els únics esdeveniments no trivials que considerem són "surt parell" i "surt senar". Així podem, per exemple, simular un experiment amb dos resultats equiprobables com el de tirar una moneda.⧫

La propietat (3) s'estén per inducció a la unió d'un nombre finit qualsevol d'esdeveniments. A vegades convé considerar unions numerables d'esdeveniments. En aquest cas diem que $\mathcal{F}$ és una **σ-àlgebra** si en lloc de (3) es verifica

(3') si $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$ llavors $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

La propietat (5) passa a (5') posant interseccions numerables. Òbviament, tota σ-àlgebra és una àlgebra però no a la inversa.

1.5 Espai de probabilitat

És una terna (Ω, $\mathcal{F}$, P) on Ω és un conjunt, $\mathcal{F}$ una àlgebra (o σ-àlgebra) de Ω i P una **funció probabilitat**. És a dir, $P : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ verificant:

(1) $P(\Omega) = 1$,

(2) $P(A) \geq 0$ per a tot $A \in \mathcal{F}$,

(3) si $A, B \in \mathcal{F}$ i $A \cap B = \emptyset$ llavors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

El parell (Ω, $\mathcal{F}$) s'anomena **espai probabilitzable**. P és una mesura (3) positiva (2) i normalitzada (1). Quan $A \cap B = \emptyset$ diem que A i B són **esdeveniments incompatibles**. En el cas que $\mathcal{F}$ sigui una σ-àlgebra substituïm (3) per

(3') si $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$ per a tot $i \neq j$ llavors $\displaystyle P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

on el sumatori s'entén com una sèrie de nombres reals positius. Les propietats (3) i (3') s'anomenen **additivitat** i **σ-additivitat** respectivament.

Com a conseqüència dels axiomes (1), (2) i (3) deduïm les següents propietats:

(4) $P(\emptyset) = 0$,

(5) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ per a tot $A \in \mathcal{F}$,

(6) $P(A) \leq 1$ per a tot $A \in \mathcal{F}$,

(7) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ per a tot $A, B \in \mathcal{F}$.

(8) Si $A \subset B$ llavors $P(A) \leq P(B)$.

DEM:

(4) Tenim que $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ i $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$. Utilitzant (3) $P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$ d'on surt (4).

(5) Com $A \cap \overline{A} = \emptyset$, $P(A) + P(\overline{A}) = P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$.

(6) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \leq 1$ degut a (2).

(7) Considerem les descomposicions en parts disjuntes $A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$, $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$. D'aquí $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$ i $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$. Restant les dues igualtats trobem $P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(B \cap A)$ que és (7).

(7) Segons l'anterior unió disjunta $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = A \cup (B \cap \overline{A})$. Llavors $P(B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}) \geq P(A)$. ♣

1.6 Espais de probabilitat discrets

Considerem $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ finit. Anomenem esdeveniments elementals als de la forma $\{\omega_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ i denotem $p_i = P(\{\omega_i\})$. Aquests nombres verifiquen $0 \leq p_i \leq 1$. Com $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}$ i els esdeveniments elementals són disjunts, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Les probabilitats elementals p_i determinen la de qualsevol esdeveniment. En efecte, si $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_r}\}$ llavors $P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{r} \{\omega_{i_k}\}\right) = \sum_{k=1}^{r} p_{i_k}$.

Encara que en aquest context és inevitable dir que p_i és la probabilitat del resultat ω_i, s'ha de tenir en compte que les probabilitats són sempre d'esdeveniments (subconjunts de Ω.) No és correcte assignar les probabilitats als elements de Ω i, si es fa, s'ha de tenir ben clar que la probabilitat de l'element ω_i vol dir la de l'esdeveniment $\{\omega_i\}$.

Un cas corrent és quan tots els esdeveniments elementals són equiprobables amb $p_i = \dfrac{1}{n}$ $\forall i$. Llavors, si A és un esdeveniment de r elements $P(A) = \dfrac{r}{n}$. L'expressió $\dfrac{r}{n}$ s'acostuma a llegir "nombre de casos favorables dividit pel nombre de casos possibles". La situació d'esdeveniments elementals equiprobables sol anar associada a alguna simetria de l'experiment com en el cas de tirar una moneda o un dau simètrics. Tenim doncs en aquest cas la **fórmula clàssica de les probabilitats**. En un espai finit on tots els resultats són equiprobables:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{“nombre de casos favorables”}}{\text{“nombre de casos possibles”}}. \tag{1.1}$$

Exemple 1.7 En l'experiment "Tirar dos daus" de l'exemple 1.4 quina és la probabilitat que la suma valgui 6? Utilitzant Ω_1 tots els esdeveniments són equiprobables amb probabilitat $\frac{1}{36}$. Com $A = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$ és $P(A) = \frac{5}{36}$. Amb Ω_2, $A = \{\{1,5\}, \{2,4\}, \{3,3\}\}$. Semblaria que ara $P(A) = \frac{3}{21}$, diferent de l'anterior resultat. Però en Ω_2 els esdeveniments elementals no són equiprobables ja que els parells diferents tenen probabilitat doble que els repetits. En efecte, si identifiquem els daus com D_1, D_2, el resultat $\{a, a\}$ correspon només a $D_1 = a$, $D_2 = a$, fet que té probabilitat $\frac{1}{36}$, mentre que el resultat $\{a, b\}$ amb $a \neq b$ correspon a $D_1 = a$, $D_2 = b$ o $D_1 = b$, $D_2 = a$, fet que té probabilitat $\frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$. Ara hem de fer $P(A) = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$.♦

Exemple 1.8 D'una baralla de 52 cartes (4 pals, 13 números) s'extreuen dues cartes sense reemplaçament. Quina és la probabilitat que surtin amb el mateix número?

El resultat de l'experiment és el parell de cartes obtingut (el considerem sense ordenació). Qualsevol parell té la mateixa probabilitat. El nombre de casos possibles són les maneres no ordenades de treure dues cartes diferents d'un total de 52: $\binom{52}{2}$. El nombre de casos favorables són les maneres no ordenades de treure dues cartes amb el mateix número. Tenim 13 números i per cada número hem de triar dos pals dels quatre existents, cosa que podem fer de $\binom{4}{2}$ maneres. Així els casos favorables són $13\binom{4}{2}$ i

$$P(\text{mateix número}) = \frac{13\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17} = 0{,}06. \blacklozenge$$

Si Ω té un nombre infinit numerable d'elements val el mateix que en el cas finit considerant les sumes com a sèries quan els esdeveniments no siguin finits. Notem que en aquest cas no es pot donar la situació d'esdeveniments elementals equiprobables ja que d'aquests n'hi ha infinits.

Exemple 1.9 Tirem una moneda repetidament fins que surt cara. Quina és la probabilitat que necessitem més de 5 tirades? Tenim que $\Omega = \{\circ, +\circ, ++\circ, +++\circ, \ldots\}$. La probabilitat d'una configuració de cares i creus donada en una sèrie de n tirades és $\frac{1}{2^n}$. Comprovem que les probabilitats elementals sumen 1: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$. La probabilitat que volem calcular és $P(n > 5) = \displaystyle\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^5}.\blacklozenge$

1.7 Espais de probabilitat continus

Considerem Ω amb cardinal infinit no numerable. Per exemple, quan $\Omega = \mathbb{R}$ o de manera més general quan Ω és un subconjunt de $\mathbb{R}^n$. Per poder definir funcions probabilitat cal considerar una σ-àlgebra apropiada. En el cas de $\mathbb{R}$ definim $\mathcal{B}$ com la σ-àlgebra generada per tots els intervals de la forma $[a, b]$ fent complementaris i unions numerables. $\mathcal{B}$ s'anomena **σ-àlgebra de Borel** i els seus elements **borelians**.

$\mathcal{B}$ conté intervals oberts, semirectes tancades i obertes, punts, conjunts numerables de punts, etc. Per exemple $[a, \infty) = \cup_{n\in\mathbb{N}}[a, a+n]$, $(a, b) = \cup_{n\in\mathbb{N}}[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$. Per tant, si seleccionem un nombre real X a l'atzar té sentit plantejar $P(a \leq X \leq b)$, $P(X$ és racional$)$, etc.

El cas de $\mathbb{R}^n$ es tracta de manera similar generant la σ-àlgebra $\mathcal{B}_n$ a partir dels conjunts de la forma $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

El significat precís d'àlgebra generada per una família $\mathcal{C}$ de subconjunts és el següent. És fàcil demostrar que la intersecció de dues àlgebres és una àlgebra. La intersecció de totes les àlgebres que contenen $\mathcal{C}$ ens dóna l'àlgebra més petita $\mathcal{F}$ que conté $\mathcal{C}$. $\mathcal{F}$ s'anomena àlgebra generada per $\mathcal{C}$.

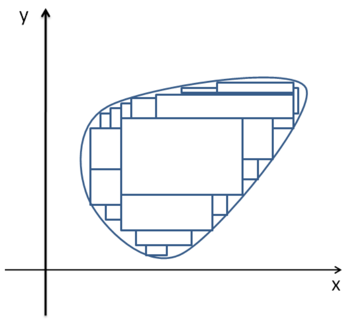


Figura 1.1: Obtenció d'un borelià (figura ovalada) a $\mathbb{R}^2$ com unió numerable de rectangles.

1.8 Esdeveniments independents

Diem que dos esdeveniments A i B són independents si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

En la pràctica, solem saber que els esdeveniments són independents degut a la mecànica que els genera i utilitzem la relació anterior per calcular probabilitats. Per exemple, al tirar dos daus, el resultat d'un d'ells és independent del de l'altre. Així, $P($"primer dau parell i segon dau = 2"$) = P($"primer dau parell"$)P($"segon dau = 2"$) = \frac{1}{12}$.

La definició s'extén de manera recursiva: n esdeveniments $A_1, A_2, \cdots, A_n$, on $n > 2$ són independents si:

(i) $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$,

(ii) Per a tot $2 \leq k < n$, qualsevol elecció de k dels n esdeveniments és independent.

Per exemple, A, B, C són independents si $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ i $P(B \cap C) = P(B)P(C)$. Així, la independència de més de dos esdeveniments correspon a la factorització total i, en general, no equival a la independència d'aquests esdeveniments dos a dos.

1.9 Probabilitat condicionada

El fet de tenir alguna informació sobre el resultat d'un experiment modifica les probabilitats. Al tirar un dau, $P(1) = \frac{1}{6}$. Ara bé, si sabem que el resultat ha estat parell, aquesta probabilitat seria 0 i si sabem que el resultat ha estat senar, aquesta probabilitat seria $\frac{1}{3}$.

Donats dos esdeveniments A i B amb $P(B) \neq 0$, la probabilitat de A condicionada a que s'ha verificat B és

$$P(A \,|\, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1.2}$$

En el cas que A i B siguin independents tenim que $P(A \,|\, B) = P(A)$.

A vegades és més fàcil conèixer la probabilitat condicionada i utilitzar-la per calcular $P(A \cap B) = P(A \,|\, B)P(B)$. És a dir, per que passin A i B ha de passar B i, sabent que ha passat B, ha de passar A.

Les probabilitats condicionades verifiquen les propietats de les probabilitats ordinàries. Per exemple, $P(\overline{A} \,|\, B) = 1 - P(A \,|\, B)$.

El fet de condicionar es pot veure com una *reducció de l'espai mostral.* Al saber que s'ha produït l'esdeveniment B restem en una situació on l'espai mostral passa de ser el conjunt Ω a un de més petit B. Així, qualsevol esdeveniment A queda reduït, en a aquest nou espai, a $A \cap B$. El factor $\frac{1}{P(B)}$ en (1.2) és una constant que normalitza les probabilitats en aquest nou espai (de la mateixa manera que $P(\Omega) = 1$ tenim que $P(B \,|\, B) = 1$).

Quan es compara amb $P(A \,|\, B)$, la probabilitat $P(A)$ s'anomena **probabilitat a priori**, és a dir, abans de saber si B és cert o fals.

Exemple 1.10 La pel·licula "Missió improbable" va ser vista pel 3% dels barcelonins mentre que la segona part "Missió improbable II" ho va ser pel 2%. Sabem que el 60% dels que van veure la segona part havien vist la primera. Quina és la probabilitat que una persona triada a l'atzar hagi vist les dues pel·licules? I si sabem que aquesta persona ha vist la primera part? I si sabem que aquesta persona n'ha vist alguna?

Denotem A_1, A_2 els esdeveniments corresponents a que aquesta persona hagi vist la primera i segona part de la pel·licula. Llavors $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \,|\, A_2)P(A_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}02 = 0{,}012$.

El segon cas és $P(A_2 \,|\, A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{0{,}12}{0{,}03} = 0{,}4$.

El tercer cas és $P(A_1 \cap A_2 \,|\, A_1 \cup A_2) = \frac{P((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cup A_2)}$. Com que $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}012 = 0{,}038$, és $P(A_1 \cap A_2 \,|\, A_1 \cup A_2) = \frac{0{,}012}{0{,}038} = 0{,}3157$.♦

1.10 Fórmula de la probabilitat total

Considerem $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partició de Ω. És a dir, $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, \ldots, n$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i \neq j$.

Llavors, per a tot esdeveniment B:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \,|\, A_k) P(A_k). \tag{1.3}$$

DEM: $B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$. Al ser els esdeveniments $B \cap A_i$ incompatibles $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n) = P(B \,|\, A_1)P(A_1) + P(B \,|\, A_2)P(A_2) + \cdots + P(B \,|\, A_n)P(A_n)$. ♣

Exemple 1.11 Una malaltia afecta l'1% de la població. Disposem d'un test que té una probabilitat 0,05 de donar un fals negatiu i 0,02 de donar un fals positiu. Es tria una persona a l'atzar i se li fa el test. Quina és la probabilitat que el test doni positiu.

Considerem els esdeveniments M = "persona malalta", T_P = "test positiu", $\overline{T_P} = T_N$ = "test negatiu". Tenim: $P(M) = 0{,}01$, $P(\overline{M}) = 0{,}99$, $P(T_N \,|\, M) = 0{,}05$ (fals negatiu), $P(T_P \,|\, \overline{M}) = 0{,}02$ (fals positiu). Llavors, podem considerar la partició donada per M i $\overline{M}$:

$$P(T_P) = P(T_P \,|\, M)P(M) + P(T_P \,|\, \overline{M})P(\overline{M}) = (1 - 0{,}05) \cdot 0{,}01 + 0{,}02 \cdot 0{,}99 = 0{,}0293.♦$$

1.11 Teorema de Bayes

Considerem $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partició de Ω. Llavors val la fórmula de Bayes

$$P(A_i \,|\, B) = \frac{P(B \,|\, A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B \,|\, A_k)P(A_k)}. \tag{1.4}$$

DEM: Com la intersecció és commutativa ($P(A_i \cap B) = P(B \cap A_i)$) tenim que $P(A_i \,|\, B)P(B) = P(B \,|\, A_i)P(A_i)$ d'on trobem $P(A_i \,|\, B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$ que en el cas que coneguem $P(B)$ és pot utilitzar directament. Si no, expressem $P(B)$ a partir de (1.3). ♣

Exemple 1.12 Seguint amb l'exemple 1.11. Una persona triada a l'atzar dóna positiu en el test. Quina és la probabilitat que estigui malalta?

$$P(M \,|\, T_P) = \frac{P(T_P \,|\, M)P(M)}{P(T_P \,|\, M)P(M) + P(T_P \,|\, \overline{M})P(\overline{M})} = \frac{(1 - 0{,}05) \cdot 0{,}01}{0{,}0293} = 0{,}32.$$

És una probabilitat baixa degut a l'efecte dels falsos positius. ♦

Exemple 1.13 Tenim 6 urnes $U_k, k = 1, \cdots, 6$ contenint U_k k boles blanques i $6 - k$ boles negres. Es tira un dau i s'extreu una bola a l'atzar de la urna corresponent al resultat del dau. Si la bola és blanca, quina és la probabilitat que el dau hagués tret 3?

Indiquem per D el resultat del dau i B l'esdeveniment "extreure bola blanca". Llavors

$$P(D=3\,|\,B) = \frac{P(B\,|\,D=3)P(D=3)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{6} P(B\,|\,D=k)P(D=k)} = \frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{6}\cdot\frac{1}{6}}. = \frac{3}{1+2+3+4+5+6} = \frac{1}{7}. \blacklozenge$$

1.12 Espai producte. Proves repetides

Suposem que fem dos experiments independents $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$. Podem dir també que hem fet un experiment $\mathcal{E}$ el resultat del qual consta dels resultats de cada experiment i escrivim $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$. Si els dos experiments tenen associades estructures d'espai de probabilitat amb espais mostrals Ω_1 i Ω_2 i funcions probabilitat P_1 i P_2, l'experiment $\mathcal{E}$ té associat l'espai producte cartesià $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Per esdeveniments de la forma $A = A_1 \times A_2$ tenim $P(A) = P_1(A_1)P_2(A_2)$ ja que els experiments 1 i 2 són independents. Com aquest tipus d'esdeveniments donen tots els possibles fent unions i complementaris, queda determinada la probabilitat P per $\mathcal{E}$ (estem considerant que l'àlgebra d'esdeveniments en Ω està generada a partir dels productes cartesians d'elements de les àlgebres de Ω_1 i Ω_2).

Això ho podem estendre al cas de n experiments. En particular podem considerar que cada experiment consisteix en una prova d'un experiment $\mathcal{E}$. El resultat de les n proves constitueix l'experiment $\mathcal{E}^n = \mathcal{E} \times \cdots \times \mathcal{E}$ (n vegades).

Exemple 1.14 Tirem un dau 10 vegades. Quina és la probabilitat d'obtenir el mateix resultat en tots?

De manera trivial, tenim 6^{10} resultats possibles i 6 resultats favorables, d'on $P = 6/6^{10} = 1/6^9$. A continuació anem a reconstruir aquest resultat fent visible el formalisme d'espai producte.

L'esdeveniment no és producte cartesià d'esdeveniments individuals però si $A =$"mateix resultat en tots" i $A_i =$"tots donen i" $i = 1, \ldots, 6$ tenim que $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{6} A_i$ i que $A_i = \{i\} \times \cdots \times \{i\}$. Així si P_1 és la probabilitat d'un resultat en una prova llavors $P(A_i) = P_1(i)^{10} = \frac{1}{6^{10}}$ i $P(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{6} P(A_i) = 6 \cdot \frac{1}{6^{10}} = \frac{1}{6^9}. \blacklozenge$

Exemple 1.15 En l'anterior experiment, calcular les probabilitats dels esdeveniments $A =$ "No surt cap 1" i $B =$ "Surt algun 1".

En el cas de A l'esdeveniment equival a que en cada tirada del dau surti un resultat diferent de 1. Això té probabilitat $\frac{5}{6}$, així que $P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0{,}1615$.

En el cas de B convé passar al complementari. $P(B) = 1 - P($"No surt cap 1"$) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0{,}8385$.

Aquest és un esquema molt habitual en probabilitat. Si denominem D_i el resultat de l'i-èsima tirada del dau i R_i és l'esdeveniment $D_i = 1$: $A = \cap_i \overline{R_i}$ i $B = \cup_i R_i$. Atès que els R_i són independents, la probabilitat de A surt directament $P(A) = \Pi_i(1 - P(R_i))$. La probabilitat de B feta directament requeriria un ús complicat de la propietat d'aditivitat. És molt més simple tenir en compte que el complementari de la unió és intersecció de complementaris: $\overline{B} = \overline{\cup_i R_i} = \cap_i \overline{R_i}$ d'on $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \Pi_i P(\overline{R_i}) = 1 - \Pi_i(1 - P(R_i))$. $\blacklozenge$

1.13 Significat de la probabilitat

Fins ara hem descrit la probabilitat de forma axiomàtica. Un espai de probabilitat és essencialment una estructura matemàtica que ens assigna una mesura a un conjunt de proposicions lògiques. Per veure el significat que té aquesta mesura en un experiment real cal fer unes consideracions prèvies.

1.13.1 Determinisme i aleatorietat

Distingim dos tipus de processos físics o naturals.

- **Deterministes**. Les condicions del sistema determinen completament el seu comportament. Si repetim l'experiment en les mateixes condicions sempre obtenim el mateix resultat. Per exemple, mesurar amb quina velocitat arriba a terra una pedra deixada caure des de 1m d'alçada.
- **Aleatoris**. Fixades les condicions, el sistema admet més d'un comportament possible. Al repetir l'experiment anem obtenint resultats diferents. Per exemple, tirar un dau.

En l'anterior classificació els fenòmens aleatoris no són simplement aquells que no són deterministes sinó que s'entén que en un experiment aleatori no hi ha una "voluntat externa" controlant quins resultats es van produint, de manera que aquesta "innocència" en els resultats s'acaba traduint en regularitat estadística. Tenim, doncs, dues maneres d'entendre el món (causalitat determinista i regularitat estadística) però no podem excloure'n d'altres (per exemple, en altres èpoques o àmbits culturals, el pensament màgic basat en l'analogia).

En quina categoria cauen els fenòmens reals? De fet no ho sabem. Les descripcions físiques fonamentals són deterministes ja que les mecàniques newtoniana, relativista o quàntica estan regides per equacions diferencials amb el que les condicions inicials determinen unívocament l'evolució del sistema. Per molts científics el determinisme és una propietat que una descripció matemàtica fonamental de la natura hauria de contenir. Per una altra part, les descripcions físiques sempre són aproximades i tenen un caràcter provisional fins que n'aparegui una de millor. Es podria discutir també que vol dir "les mateixes condicions" ja que l'estat de l'univers no és mai el mateix. En general entenem que el resultat d'un experiment és afectat només per l'entorn immediat i podem negligir l'efecte dels objectes llunyans.

L'aleatorietat a nivell fonamental apareix en el problema de la mesura en mecànica quàntica. Les funcions d'ona evolucionen de manera determinista però la interpretació dels valors numèrics d'aquesta funció d'ona donen lloc a les probabilitats d'obtenir diferents resultats als mesurar magnituds físiques. El fet que la mesura no segueixi el patró determinista de la teoria bàsica obre un problema que encara no s'ha tancat (és famosa la oposició que Einstein sempre va tenir a aquesta interpretació si bé aquesta s'ha mantingut fins ara i els resultats experimentals no avalen de moment cap interpretació alternativa).

1.13.2 Complexitat i pseudoaleatorietat

En l'ordre pràctic podem deixar de banda les qüestions filosòfiques ja que al marge de que la mecànica subjacent sigui determinista o no mols fenòmens reals presenten un caràcter clarament aleatori. Un cas en que passa això és quan el sistema és molt complex. En aquests casos serà impossible disposar d'informació completa sobre el sistema i haurem de recórrer a informació de tipus estadístic. Per exemple, pels sistemes macroscòpics formats per molts àtoms o molècules és impossible resoldre o tractar mínimament les equacions del moviment. Si en lloc d'això associem probabilitats als diferents estats del sistema arribem a una descripció satisfactòria (mecànica estadística). Paràmetres com la temperatura o l'entropia es poden interpretar llavors com variables que caracteritzen les funcions de probabilitat del sistema.

Per entendre com un sistema determinista pot aparentar un comportament aleatori pensem el següent experiment. Tenim una taula inclinada en la que posem un objecte en un punt determinat (condició inicial) i el deixem caure. Si la taula és llisa l'objecte baixarà seguint una línia recta. És trivial predir per on caurà si coneixem la seva posició inicial. Això és el que entenem en la pràctica per sistema determinista: aquell en que la condició inicial no només determina el comportament sinó que la relació condició inicial-comportament és prou senzilla.

Suposem ara que la taula no és llisa sinó que està plena de petits obstacles que desvien l'objecte al caure. Ara les trajectòries de caiguda són completament irregulars i és molt difícil predir el punt d'arribada a partir del punt de sortida. Notem que el sistema és encara determinista ja que l'objecte segueix trajectòries regides per les equacions de Newton però la complexitat del seu comportament fa més adequat considerar-lo com aleatori i descriure'l probabilísticament. Els sistemes d'aquesta mena s'anomenen **pseudoaleatoris**. Una tirada d'un dau n'és clarament un exemple ja que qualsevol variació per petita que sigui de les condicions inicials pot canviar el resultat.

Un altre exemple d'experiment pseudoaleatori és anar considerant com a resultats de l'experiment els successius dígits decimals d'un nombre real entre 0 i 1. Si el nombre que els genera és, diguem, $\frac{11}{13}$ no tardarem en endevinar quin és ja que la regla que els va formant és molt simple. Però si ho fem amb el nombre π o e, tot i que existeix una regla generadora (per tant, determinista), la successió tindrà aparença purament aleatòria degut a la complexitat d'aquesta regla. Aquesta és la base de la generació de nombres "aleatoris" per part dels ordinadors que són sistemes absolutament deterministes.

Aquestes consideracions esdevenen més fonamentals en el que s'anomena **teoria del caos**. Un aspecte bàsic n'és la **sensibilitat a les condicions inicials**. Els sistemes es descriuen amb un conjunt de variables de manera que fixant un valor inicial en cert instant per aquestes variables l'equació diferencial del sistema dóna l'evolució temporal per tot instant posterior. Intuïtivament, semblaria que hem de tenir continuïtat respecte aquestes condicions inicials, en el sentit que si passat cert temps s'arriba a cert resultat, existirà un entorn dels valors inicials que correspongui al mateix resultat. Per una àmplia classe de sistemes això no és així, tot entorn per petit que sigui de la condició inicial conté punts on el resultat final difereix. Així és impossible fixar amb prou precisió la condició inicial per assegurar un resultat donat. Aquest és l'*efecte papallona*. El fet que l'atmosfera terrestre sigui un sistema d'aquests vol dir que una petita variació com la produïda pel moviment de les ales d'una papallona en un lloc del planeta pot acabar donant lloc a una catàstrofe atmosfèrica en l'altre extrem del planeta. Això ho veiem més clarament en la dificultat en fer prediccions meteorològiques.

A nivell fonamental resulta que els sistemes amb sensibilitat a les condicions inicials requereixen un tractament probabilistic, no ja com tractament pràctic o aproximat sino perquè matemàticament és la única manera de fer-ho.

1.13.3 Interpretació freqüencial de la probabilitat

Existeixen moltes interpretacions de la probabilitat però hi ha un acord molt general sobre la validesa de l'axiomàtica que hem presentat (axiomàtica de Kolmogoroff, 1933). La interpretació dominant és la que s'anomena freqüentista o freqüencial.

Considerem un experiment (pseudo)aleatori i sigui A un enunciat lògic referit al resultat de l'experiment. Repetim N vegades el procés i A es verifica N_A vegades. Definim la **freqüència relativa** de A com $f_A = \frac{N_A}{N}$. Llavors esperem que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N} = P_A \tag{1.5}$$

on P_A és una constant que correspon a la probabilitat de A. S'ha d'entendre que el límit anterior no té cap sentit matemàtic. L'expressió diu que si fem moltes vegades l'experiment la freqüència

f_A hauria de prendre valors molt propers a P_A que ve fixada per les condicions de l'experiment. Si volem axiomatitzar la probabilitat, li demanarem que tingui les propietats que tenen les freqüències relatives. De manera evident

(1) $0 \leq f_A \leq 1$, ja que $0 \leq N_A \leq N$,

(2) $f_\Omega = 1$, ja que $N_\Omega = N$,

(3) si A, B són incompatibles $f_{A\cup B} = f_A + f_B$, ja que $N_{A\cup B} = N_A + N_B$.

Aquestes propietats són precisament els axiomes que hem exigit a la funció probabilitat. La consistència d'aquest punt de vista és precisament la regularitat estadística que mencionàvem al definir els fenòmens aleatoris.

1.13.4 Probabilitat subjectiva

Finalment, cal tenir en compte les limitacions pràctiques en l'us de probabilitats. No s'ha de confondre el fet que un procés sigui aleatori amb que tinguem incertesa total sobre el seu resultat. Quan tirem una moneda el resultat és incert però *sabem* que cada resultat té probabilitat $\frac{1}{2}$. A vegades el resultat d'un procés és incert i a més a més no tenim cap informació que ens permeti assignar probabilitats als possibles resultats. Seria incorrecte assignar probabilitats $\frac{1}{2}$ a un experiment amb dos resultats possibles pel fet que no sapiguem res sobre les seves circumstàncies. Quan la falta d'informació sobre el sistema es pot suplir amb un tractament probabilístic és per que aquest sistema té propietats que ho fan possible.

La definició d'experiment aleatori exigeix la possibilitat de repetir l'experiment un gran nombre de vegades sense variar les condicions. És perillós assignar probabilitats quan és impossible o molt difícil repetir l'experiment en idèntiques condicions. Per exemple, el resultat d'un partit de futbol o l'èxit o fracàs d'una missió espacial. En aquests casos les estimacions probabilístiques tenen un fort component subjectiu que fa que manquin de sentit.

Les anteriors limitacions es poden superar des d'una interpretació més oberta de la probabilitat. El punt de partida és adonar-se que tota probabilitat és una probabilitat condicionada (en el cas general $P(A) = P(A \mid \Omega)$). Llavors la probabilitat de l'esdeveniment A és $P(A \mid B)$, una funció de la informació que tenim, B. La probabilitat passa a tenir un significat subjectiu i la distinció entre fenòmens deterministes i aleatoris esdevé irrellevant. Ara no cal que l'experiment es pugui repetir i el nombre $P(A|B)$ correspon, no a una freqüència sinó al grau de certesa que tenim en que es verifiqui l'esdeveniment A. L'estadística feta des d'aquesta perspectiva s'anomena **estadística bayesiana**. La fórmula de Bayes s'interpreta com la manera en que es reajusten les probabilitats quan adquirim cert coneixement, passant de les probabilitats *a priori* ($P(A_i)$) a les probabilitats *a posteriori* ($P(A_i|B)$). Notem que en el cas mencionat al principi d'incertesa total la perspectiva bayesiana implica l'equiprobabilitat. La dificultat en l'ús de l'enfoc subjectiu està en avaluar correctament quina informació tenim. Si no, és fàcil caure en un enfoc psicològic que conduiria a resultats incorrectes (en el cas de comprar un número de loteria, des del punt de vista subjectiu la informació que tenim ens fa assignar la mateixa probabilitat a tots els números mentre que des d'un punt de vista psicològic tendim a assignar probabilitats més grans a certs nombres que a d'altres. Per exemple, ens sembla més probable el 25.347 que el 33.333).

Si bé la interpretació més estesa és la freqüentista, l'estadística bayesiana té el seu camp d'aplicació i seguidors en àrees com l'economia, l'avaluació de riscos, la política, etc. A efectes d'aplicació en l'enginyeria insistirem en la interpretació freqüencial ja que incorpora la idea de costrast experimental de les dades a través del mostreig estadístic.

Capítol 2

Variables aleatòries

2.1 Variable aleatòria

Considerem el conjunt $\mathbb{R}$. Ja s'ha descrit la σ-àlgebra $\mathcal{B}$ dels borelians. En lloc de generar-la amb els intervals tancats com s'havia vist, la podem generar de manera equivalent amb les semirectes $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$ a través també d'unions numerables i complementaris.

Donat $(\Omega, \mathcal{F})$ espai probabilitzable, $\mathcal{F}$ σ-àlgebra, diem que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ és **mesurable** si $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ $\forall A \in \mathcal{B}$. És a dir, les antiimatges d'esdeveniments a $\mathbb{R}$ (borelians) són esdeveniments de $\mathcal{F}$.

Una **variable aleatòria** és una aplicació $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable.

Essencialment, una variable aleatòria (VA) consisteix en assignar valors reals als resultats d'un experiment. Com, de manera natural, aquests resultats ja són moltes vegades expressats com a nombres reals es tendeix a confondre Ω amb la seva imatge sota l'aplicació X.

Exemple 2.1 $\mathcal{E} =$"Tirar una moneda", $\Omega = \{\text{cara}, \text{creu}\}$. $X(\text{cara})=1$, $X(\text{creu})=0$.♦

Exemple 2.2 $\mathcal{E} =$"Tirar un dau", $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $X(n) = n$, per a $n = 1, \ldots, 6$.♦

Exemple 2.3 $\mathcal{E} =$"Tirar dos daus", $\Omega = \{(a, b) \mid 1 \leq a, b \leq 6\}$. $X(a, b) = a + b$, és a dir, X val la suma dels valors dels dos daus.♦

Exemple 2.4 $\mathcal{E} =$"Tirar quatre monedes", X és el nombre de cares obtingudes. Aquesta variable pot prendre valors $0, 1, 2, 3, 4$.♦

Exemple 2.5 $\mathcal{E} =$"Triar un instant del dia a l'atzar", $\Omega = [0, 24)$. $X(t) = t$, $\forall t \in \Omega$.♦

Exemple 2.6 Per un experiment donat hi ha infinitat de variables aleatòries. Per exemple, en l'experiment anterior $X(t) = 0$ si $0 \leq t < 12$ i $X(t) = 1$ si $12 \leq t \leq 24$ és una altra variable. Una altra variable és $X(t) = 1$, $\forall t$ (variable aleatòria constant).♦

Les variables aleatòries són els objectes que utilitzem quan fem un tractament probabilístic d'una situació real. En els casos pràctics l'espai mostral Ω pot tenir una enorme complexitat els detalls de la qual desconeixem. Degut a això, les variables aleatòries rarament apareixen en forma funcional explícita $X(\omega)$. Això no serà important perquè podrem respondre a preguntes sobre els valors que pren X a partir de funcions que caracteritzen la variable. És convenient, però, no perdre de vista l'estructura global ($X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$) per evitar confusions i entendre bé els problemes.

Si tenim una probabilitat P definida a Ω, per a cada borelià A definim $P_X(A) = P(X^{-1}(A))$. Així tenim una funció probabilitat P_X sobre el conjunt $\mathbb{R}$. $P_X(A)$ és la probabilitat que en fer l'experiment el valor obtingut de X pertanyi al conjunt A, és a dir, $P(X \in A)$.

Com és suficient conèixer les probabilitats dels generadors de l'àlgebra d'esdeveniments, estarem interessats en $P_X((-\infty,x]) = P(X \in (-\infty,x]) = P(X \leq x)$. En el que segueix ometrem, si no hi ha confusió possible, el subíndex X en P_X.

2.2 Funció de distribució

Donat un espai de probabilitat (Ω , $\mathcal{F}$, P) amb variable aleatòria X definim la **funció de distribució** com

$$F_X(x) = P(X \leq x). \tag{2.1}$$

És, per tant, la probabilitat de l'interval $(-\infty, x]$. Si coneixem la funció F_X, tenim les probabilitats dels generadors de l'àlgebra $\mathcal{B}$ i, per tant, queden determinades totes les probabilitats. En aquest sentit, F_X caracteritza completament la variable aleatòria X.

Immediatament trobem que donats $a < b$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a), \tag{2.2}$$

ja que $F_X(b) = P((-\infty,b]) = P((-\infty,a] \cup (a,b]) = P((-\infty,a]) + P((a,b]) = F_X(a) + P((a,b])$.

A més a més, F_X té les següents propietats:

(1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$,

(2) F_X és una funció creixent,

(3) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$,

(4) F_X és una funció contínua per la dreta.

DEM:

(1) Pel fet de ser una probabilitat.

(2) Considerem $x_2 > x_1$. Llavors $F_X(x_2) = F_X(x_1) + P((x_1, x_2]) \geq F_X(x_1)$.

(3) El resultat és intuïtiu ja que $F_X(-\infty) = P(\emptyset) = 0$ i $F_X(\infty) = P(\mathbb{R}) = 1$. Per provar-ho, notem que $l_- = \lim_{x\to-\infty} F_X(x)$ i $l_+ = \lim_{x\to\infty} F_X(x)$ existeixen pel fet de ser F_X monòtona i fitada, i $0 \leq l_- \leq l_+ \leq 1$. Posem ara $1 = P(\mathbb{R}) = P(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n, n+1]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P((n, n+1]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(F_X(n+1) - F_X(n)) = \lim_{M\to\infty} \sum_{n=-M}^{M-1}(F_X(n+1) - F_X(n)) = \lim_{M\to\infty}(F_X(M) - F_X(-M)) = l_+ - l_-$. Per tant, necessàriament $l_- = 0$ i $l_+ = 1$.

(4) Pel fet de ser F_X monòtona i fitada existeix $l = \lim_{t\to x^+} F_X(t)$. La funció és contínua si $l = F_X(x)$. Per trobar el seu valor considerem una successió decreixent que tendeixi a x per la dreta. (per exemple $x_n = x + \frac{1}{n}$.) És a dir $x_n \to x$ i $x_{n-1} \geq x_n \geq x$ per a tot n. Llavors $l = \lim_{n\to\infty} F_X(x_n)$. Tenim que $F_X(x_1) - F_X(x) = P((x, x_1])) = P(\bigcup_{n=2}^{\infty}(x_n, x_{n-1}]) = \sum_{n=2}^{\infty} P((x_n, x_{n-1}]) = \sum_{n=2}^{\infty}(F_X(x_{n-1}) - F_X(x_n)) = \lim_{M\to\infty} \sum_{n=2}^{M}(F_X(x_{n-1}) - F_X(x_n)) = \lim_{M\to\infty}(F_X(x_1) - F_X(x_M)) = F_X(x_1) - l$ que ens dóna $l = F_X(x)$. ♣

Si F_X també és contínua per l'esquerra en el punt a tenim que

Calculem ara la probabilitat d'un punt aïllat:

$$P(X=a) = P(\{a\}) = \lim_{\epsilon\to0^+} P(a - \epsilon < X \leq a) =$$

$$\lim_{\epsilon\to0^+}(F_X(a) - F_X(a-\epsilon)) = \begin{cases} 0 & \text{si } F_X \text{ és contínua en } a \\ \text{salt de } F_X \text{ en } a & \text{altrament} \end{cases}$$

Així, si F_X és contínua per l'esquerra en el punt a tenim que $P(X = a) = 0$ mentre que les discontinuïtats de F_X indiquen caràcter discret de la variable aleatòria i, com indica la fórmula anterior, la probabilitat d'un punt ve donada pel salt de F_X en aquest punt.

2.3 Variables aleatòries discretes

És quan X pren un conjunt finit o numerable de valors. Si aquests valors són, ordenats, $x_1, x_2, \dots, x_n$ amb probabilitats $p_1, p_2, \dots, p_n$, F_X és una funció esglaonada que pren valors $0, p_1, p_1+p_2, \dots, p_1 + \dots + p_{n-1}, 1$. Una expressió compacta per a F_X la trobem mitjançant la funció de Heaviside $\mathrm{u}(x)$.

$$F_X(x) = \sum_k p_k \, \mathrm{u}(x - x_k). \tag{2.3}$$

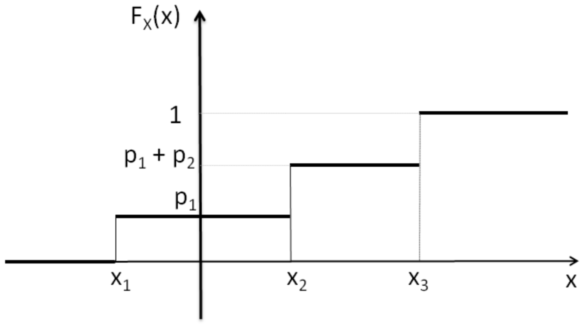


Figura 2.1: Funció de distribució d'una variable discreta.

Posarem $\Omega_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. La funció en aquest conjunt definida per $P_X(x_k) = p_k$ s'anomena **funció de probabilitat** i es relaciona amb la de distribució per

$$P_X(x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}). \tag{2.4}$$

Les següents són les distribucions discretes més importants:

- **Bernoulli**.

  $\Omega_X = \{0, 1\}$. $P_X(1) = p$, $P_X(0) = q = 1 - p$. Correspon per tant a un experiment amb dos resultats. Si A és un esdeveniment associat a un experiment qualsevol, podem construir una variable de Bernoulli assignant 1 a "A es verifica" i 0 a "A no es verifica". Llavors $p = P(A)$.

  Les variables de Bernoulli s'utilitzen per construir-ne d'altres com la binomial o la geomètrica. També constitueixen les variables tipus indicador.

  S'escriu $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ per indicar que X és una variable de Bernoulli amb paràmetre p.

- **Binomial**.

  Repetim n vegades un experiment de Bernoulli amb paràmetre p. X és el nombre de 1's que obtenim. De manera més general, si A és un esdeveniment associat a un experiment i $p = P(A)$, X és el nombre de vegades que es verifica A en n repeticions independents de l'experiment. Així, $\Omega_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ i

  $$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \tag{2.5}$$

  DEM: $P_X(k)$ és la probabilitat que hi hagi k uns i $n-k$ zeros en la seqüència de resultats obtinguts. Per una d'aquestes seqüències la probabilitat és $p^k q^{n-k}$ ja que per independència anem multiplicant la probabilitat de cada resultat individual. Finalment, d'aquestes seqüències n'hi ha $\binom{n}{k}$ (maneres de situar els k uns en la sèrie de n posicions). ♣

  Exemple 2.7 Es tira un dau 10 vegades. Quina és la probabilitat que el 6 surti exactament 4 vegades?

  Sigui X la variable que compta el nombre de vegades que surt el 6. X és binomial amb $n = 10$ i $p = \frac{1}{6}$. Llavors $P(X = 4) = \binom{10}{4}(\frac{1}{6})^4(\frac{5}{6})^6 = 0{,}054$. ♦

S'escriu $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ per indicar que X és una variable binomial amb paràmetres n i p.

- **Geomètrica**.

  X és el nombre de vegades que hem de fer un experiment de Bernoulli amb paràmetre p fins que surt 1. De manera més general, si A és un esdeveniment associat a un experiment i $p = P(A)$, X és el nombre de vegades que hem de realitzar l'experiment fins que es verifica A. Així, $\Omega_X = \{1, 2, \ldots\}$ i

$$P_X(k) = q^{k-1}p. \tag{2.6}$$

DEM: $P_X(k)$ és la probabilitat que surtin $k-1$ zeros seguits d'un u. ♣

Podem calcular la funció de distribució

$$F_X(n) = \sum_{k=1}^{n} P_X(k) = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}p = 1 - q^n. \tag{2.7}$$

Exemple 2.8 Es tira un dau fins que surt un 6. Quina és la probabilitat que calguin 5 o més tirades?

Sigui X la variable que compta el nombre de tirades que fem. X és geomètrica amb $p = \frac{1}{6}$. Llavors $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F_X(4) = q^4 = (\frac{5}{6})^4 = 0{,}482$. ♦

S'escriu $X \sim \text{Geometrica}(p)$ per indicar que X és una variable geomètrica amb paràmetre p.

- **Hipergeomètrica**.

  Tenim una urna amb b boles blanques i $N - b$ boles negres. En traiem n sense reemplaçament. X és el nombre de boles blanques que traiem. $\Omega_X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ i

$$P_X(k) = \frac{\binom{b}{k}\binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}. \tag{2.8}$$

Notem que si féssim les extraccions amb reemplaçament la variable X seria binomial ja que els resultats de les extraccions serien independents. En el cas hipergeomètric no hi ha aquesta independència.

- **Poisson**.

  Cert esdeveniment es va produint en instants aleatoris de forma independent. Per exemple l'arribada de connexions a un servidor d'internet o de trucades telefòniques a una centraleta. Fixem un interval de temps T. X és el nombre de vegades que es produeix un esdeveniment en aquest interval. Per exemple, comptar el nombre de missatges rebuts durant 1h per un servidor de correu electrònic. La variable de Poisson es pot referir també a intervals espacials o d'una altra mena (el nombre de clots en un tram de carretera de 10 Km.)

  $\Omega_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$. La variable és de Poisson si

$$P_X(k) = e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}. \tag{2.9}$$

Podem justificar aquesta expressió i relacionar aquesta distribució amb la binomial. Per això, dividim l'interval T en n subintervals de longitud $\Delta t = \frac{T}{n}$. Considerem n molt gran i, per tant, Δt molt petit. Suposem que en cada subinterval l'esdeveniment pot produir-se com a màxim una vegada amb probabilitat $p = \lambda\Delta t$ (és a dir, podem negligir la probabilitat que hi hagi més d'un esdeveniment). Tenim així n subintervals independents en cadascun dels quals pot haver-hi o no un esdeveniment. Ara el nombre total d'esdeveniments és una variable Binomial(n, p) que reprodueix la nostra variable original en el límit $n \to \infty$:

$$P_X(k) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda T}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda T}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n-k+1}{n} (\lambda T)^k \frac{(1-\frac{\lambda T}{n})^n}{(1-\frac{\lambda T}{n})^k} = \frac{1}{k!} (\lambda T)^k e^{-\lambda T}$$

que és la distribució de Poisson amb $\alpha = \lambda T$. La constant λ depèn només del tipus de fenomen així que podem relacionar els valors de α per intervals de diferent longitud.

Exemple 2.9 La probabilitat que hi hagi una o més connexions a un servidor durant un segon val 0,07. Quina és la probabilitat P que hi hagin cinc o més connexions durant un minut?

Sigui α_s el paràmetre de Poisson per a $T = 1s$ i α_m el paràmetre de Poisson per a $T = 60s$. Llavors $\alpha_m = 60\alpha_s$. Sabem que $0{,}07 = 1 - P_{\alpha_s}(0) = 1 - e^{-\alpha_s}$ d'on $\alpha_s = 0{,}0725$. Llavors $\alpha_m = 4{,}354$ i $P = 1 - P_{\alpha_m}(0) - P_{\alpha_m}(1) - P_{\alpha_m}(2) - P_{\alpha_m}(3) - P_{\alpha_m}(4) = 1 - e^{-\alpha_m}\left(1 + \alpha_m + \frac{\alpha_m^2}{2} + \frac{\alpha_m^3}{3!} + \frac{\alpha_m^4}{4!}\right) = 0{,}44.$♦

Notem que hem demostrat la relació asimptòtica entre les distribucions binomial amb paràmetres n i p i de Poisson amb paràmetre $\alpha = np$ quan n és gran. Això és útil en alguns càlculs.

S'escriu $X \sim$ Poisson(α) per indicar que X és una variable de Poisson amb paràmetre α.

2.4 Variables aleatòries contínues

És quan F_X és contínua a tot $\mathbb{R}$ i derivable a trossos. Llavors existeix la funció (llevat d'alguns punts aïllats)

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}. \tag{2.10}$$

f_X s'anomena **funció de densitat** de la VA X. Recordem que si F_X és contínua $P(\{a\}) = 0$. Per tant, la probabilitat d'un interval no varia incloguem o no els seus extrems.

f_X verifica les propietats:

(1) $f_X \geq 0$,

(2) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$,

(3) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')dx'$,

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.

DEM: (1) Ja que F_X és creixent. (2) $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b F'_X(x)dx = \int_a^b f_X(x)dx$. (3) Fem $a \to -\infty$ en (2). (4) Fem $b \to \infty$ en (3). ♣

Una manera més acurada de definir variable aleatòria contínua és dir que és quan existeix una funció f_X tal que es verifica l'anterior propietat (3). Això implica (2.10) per derivació allí on f_X és contínua.

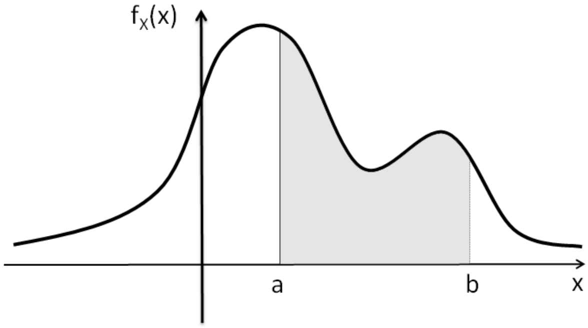


Figura 2.2: Probabilitat com àrea sota f_X. L'àrea sombrejada és igual a $P(a \leq X \leq b)$.

Donada qualsevol funció $\varphi \geq 0$ contínua a trossos tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = K$ finit, la funció $K^{-1}\varphi(x)$ defineix una densitat de probabilitat. A vegades es parteix de la definició de la funció de densitat exigint (1),(2) i (4) per definir després la funció de distribució a través de (3). Notem que el valor numèric $f_X(x)$ *no* és una probabilitat i per tant pot prendre valors arbitràriament elevats. En particular, és possible que f_X valgui ∞ en algun punt. Aquestes divergències són admissibles mentre la funció sigui integrable. Una definició o manera d'expressar la funció de densitat és

$$f_X(x)dx = P(x \leq X \leq x + dx) \tag{2.11}$$

que simbolitza (2) a nivell infinitesimal.

Les variables discretes admeten una funció de densitat en sentit distribucional utilitzant la δ de Dirac (veure l'àpendix E):

$$f_X(x) = \sum_k p_k \delta(x - x_k). \tag{2.12}$$

Aquesta forma s'obté derivant la funció de distribució (2.3) i tenint en compte que $u' = \delta$.

Denotarem Ω_X el recorregut de la VA X. Aquest és el conjunt de $\mathbb{R}$ que no conté cap interval on $f_X(x) = 0$. De fet, no hi ha cap inconvenient en afegir a Ω_X qualsevol regió on f_X s'anul·li. En la pràctica, Ω_X és el conjunt de valors que X pren de manera natural. (Si, per exemple, X representa una distància seria $\Omega_X = [0, \infty)$, etc.)

Exemple 2.10 Sigui X una variable aleatòria contínua amb densitat $f_X(x) = \dfrac{K}{x^3}$ per a $x > 1$ (i $f_X(x) = 0$ per a $x < 1$). Determinar: K, $F_X(x)$, $P(X < 3)$, $P(X > 2)$, $P(2 < X < 3)$.

Per trobar el valor de K imposem la condició de normalització:

$1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{K}{x^3}dx = K\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^{\infty} = \frac{K}{2}$. Per tant, $K = 2$.

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')dx' = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \int_1^x \frac{2}{x'^3}dx' = 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Així, $F_X(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ per a $x \geq 1$.

$P(X < 3) = F_X(3) = \frac{8}{9}$. $P(X > 2) = 1 - P(X \geq 2) = 1 - F_X(2) = \frac{1}{4}$. $P(2 < X < 3) = F_X(3) - F_X(2) = \frac{5}{36}$. ♦

Les principals variables contínues són:

- **Uniforme**.
  $\Omega_X = [a, b]$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \tag{2.13}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 1 & \text{si } x \ge b \end{cases} \tag{2.14}$$

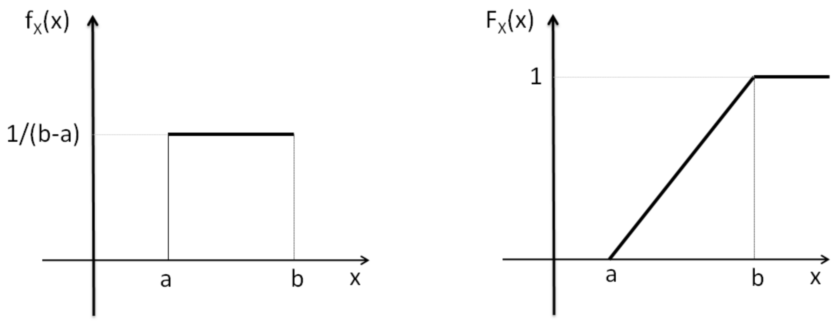


Figura 2.3: Densitat i distribució uniformes.

La variable uniforme és doncs la que té densitat constant. S'escriu $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$ per indicar que X és una variable Uniforme en l'interval $[a, b]$. És fàcil veure que donat $A \subset [a, b]$, $P(X \in A) = \dfrac{\text{longitud}(A)}{b-a}$, que podem interpretar com "longitud favorable dividida per longitud possible" en analogia amb (1.1).

- **Exponencial**.
  $\Omega_X = [0, \infty)$, $\lambda > 0$.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Una possible interpretació d'aquesta variable és que deixem transcórrer el temps des de 0 i X és l'instant en que es produeix per primera vegada un esdeveniment del tipus que consideràvem en la variable de Poisson. Per exemple, l'instant en que rebem una primera trucada telefònica. Sota aquesta interpretació podem relacionar la variable exponencial amb la geomètrica. Dividim l'interval $[0, x]$ en n subintervals de longitud $\Delta t = \frac{x}{n}$. Considerem n molt gran i, per tant, Δt molt petit. Suposem que en cada subinterval l'esdeveniment pot produir-se com a molt una vegada amb probabilitat $p = \lambda \Delta t$. Ara podem considerar que tenim un experiment geomètric i, utilitzant (2.7),

$$1 - F_X(x) = P(X > x) = \lim_{n \to \infty} (1-p)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda x}{n}\right)^n = e^{-\lambda x}$$

el que ens dóna la funció de distribució (2.16).

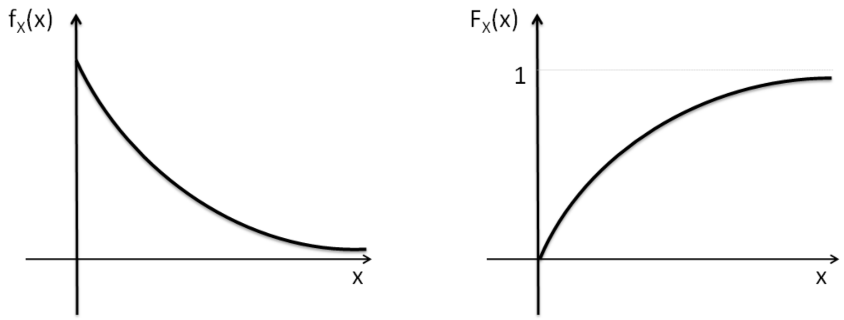


Figura 2.4: Densitat i distribució exponencials.

Si pensem X com el temps que passa entre un esdeveniment i el següent en la distribució de Poisson tenim doncs que aquest és exponencial de paràmetre $\lambda = \frac{\alpha}{T}$.

Una característica de la distribució exponencial és la **propietat de no memòria**:

$$P(X > t + h \,|\, X > t) = P(X > h). \tag{2.17}$$

DEM: Com $P(X > x) = e^{-\lambda x}$, $P(X > t+h) = P(X > t)P(X > h)$. Per una altra part $P(X > t + h \,|\, X > t) = \frac{P(X>t+h)}{P(X>t)}$. ♣

Aquesta propietat vol dir que la probabilitat de produir-se l'esdeveniment en un instant donat és independent del nombre de vegades que s'hagi produït anteriorment.

En ocasions, s'utilitza la variable exponencial per indicar el temps de vida d'un dispositiu, organisme, etc. Tot i que en algun cas això és correcte (desintegració radioactiva, temps de vida d'una partícula inestable) en general és una primera aproximació que pot donar resultats paradoxals. Per exemple, suposem que el temps que viu una persona és una variable exponencial T. Si fem $t = 70, h = 10$ en (2.17) obtenim $P(T > 80 \,|\, T > 70) = P(T > 10)$. Això vol dir que una persona que als 70 anys està viva té la mateixa probabilitat de seguir viva als 80 que la que té una persona acabada de néixer de seguir viva als 10 anys. Això no pot ser correcte i el fet és que les persones són organismes que es van desgastant mentre que la propietat de no memòria descriuria un sistema sense desgast.

S'escriu $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ per indicar que X és una variable exponencial de paràmetre λ.

- **Gaussiana**.

  També s'anomena **normal**. $\Omega_X = (-\infty, \infty)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \tag{2.18}$$

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \text{erf}\left(\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right). \tag{2.19}$$

En (2.19) utilitzem la **funció d'error**, definida:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \tag{2.20}$$

Notem que $\text{erf}(-x) = -\text{erf}(x)$. Al final d'aquestes notes hi ha una taula amb els seus valors.

DEM: En efecte, $F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$. Fent el canvi $z = \frac{t-m}{\sqrt{2}\sigma}$, és

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-z^2} dz + \int_0^{\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-z^2} dz \right)$$

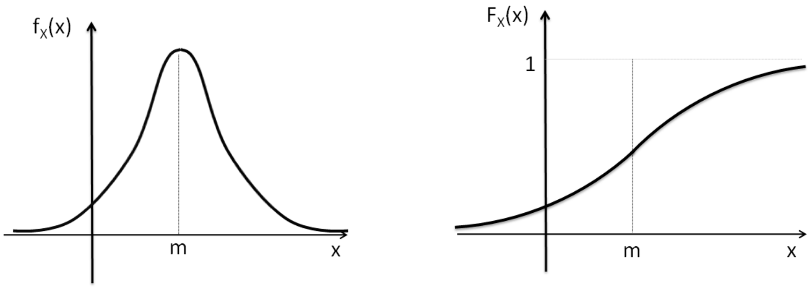


Figura 2.5: Densitat i distribució normals.

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right). \clubsuit$$

Una funció gaussiana és simplement l'exponencial d'un polinomi de segon grau. La densitat gaussiana és la forma general d'una densitat amb aquest comportament. La seva gràfica mostra el típic aspecte de moltes distribucions que es mesuren experimentalment en estadística i s'anomena **campana de Gauss**.

S'escriu $X \sim \mathrm{Normal}(m, \sigma)$ per indicar que X és una variable normal de paràmetres m, σ.

- **Cauchy**.

  $\Omega_X = (-\infty, \infty)$, $\alpha > 0$

$$f_X(x) = \frac{\alpha/\pi}{x^2 + \alpha^2}. \tag{2.21}$$

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{\alpha}. \tag{2.22}$$

Exemple 2.11 Sigui X una variable aleatòria i A l'esdeveniment $X^3 - 2X^2 - X + 2 < 0$. Calcular $P(A)$ pels casos en que X és (a) Uniforme en $[-2, 2]$, (b) Exponencial $\lambda = 3$, (c) Normal $m = 0, \sigma = 1$ i (d) Cauchy $\alpha = 1$.

Primer posem l'esdeveniment en termes d'intervals: $A = J_1 \cup J_2$ on $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (1, 2)$. Així $P(A) = P(J_1) + P(J_2)$.

(a) És fàcil verificar que, per una variable uniforme en I la probabilitat d'un interval J contingut en I val $\frac{\mathrm{longitud}(J)}{\mathrm{longitud}(I)}$. Així $P(J_1) = P(J_2) = \frac{1}{4}$ d'on $P(A) = \frac{1}{2}$.

(b) És $F(x) = 1 - e^{-3x}$. $P(J_1) = 0$ i $P(J_2) = F(2) - F(1) = e^{-3} - e^{-3\cdot 2} = 0{,}047$.

(c) És $F(x) = \frac{1+\mathrm{erf}(x/\sqrt{2})}{2}$. $P(J_1) = F(-1) = \frac{1-\mathrm{erf}(1/\sqrt{2})}{2} = 0{,}1586$, $P(J_2) = F(2) - F(1) = \frac{\mathrm{erf}(2/\sqrt{2})-\mathrm{erf}(1/\sqrt{2})}{2} = 0{,}1359$, $P(A) = 0{,}294$.

(d) És $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x$. $P(J_1) = F(-1) = \frac{1}{4}$, $P(J_2) = F(2) - F(1) = \frac{\arctan 2 - \arctan 1}{\pi} = 0{,}1024$, $P(A) = 0{,}352$.$\blacklozenge$

Algunes variables tenen comportament continu i discret alhora. S'anomenen **variables mixtes**. Es donen quan F_X té discontinuïtats i no és constant a trossos. Com veurem en el següent capítol, poden aparèixer a l'aplicar certes transformacions a variables contínues. S'hi treballa amb la funció de distribució o expressant la densitat amb l'ajut de deltes de Dirac.

Exemple 2.12 Tirem una moneda. Si surt cara X val 2. Si surt creu X es tria uniformement en l'interval [0,1]. X no és contínua ja que el punt aïllat 2 té probabilitat $\frac{1}{2}$. Tampoc és discreta ja que pot prendre qualsevol valor entre 0 i 1.

Llavors podem expressar la seva densitat (veure (2.28)):

$$f_X(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{u}(x) - \mathrm{u}(x-1)) + \frac{1}{2}\delta(x-2). \blacklozenge$$

Quan una VA discreta concentra les seves probabilitats en valors molt elevats sol ser més pràctic tractar-la com si fos contínua. Això passa, per exemple, a l'estudiar la estadística de les poblacions humanes. Alguns resultats estableixen relacions útils entre distribucions discretes i contínues, com ja hem vist al cas exponencial-geomètrica o com el següent resultat.

2.5 Teorema de DeMoivre-Laplace

Aquest teorema estableix una relació entre la distribució binomial i la normal. Diu que si $npq \gg 1$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}. \tag{2.23}$$

Més precisament, el quocient dels dos costats tendeix a 1 quan $npq \to \infty$. El resultat ens diu que per a n molt gran (en la pràctica $n > 10$) la distribució binomial de paràmetres n, p és correspon a la gaussiana de paràmetres $m = np, \sigma^2 = npq$.

DEM: Volem una expressió asimptòtica de $p_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Per això fem el canvi de variable $k = np + \sqrt{npq}x$. Considerarem x finit de manera que el límit $n \to \infty$ implica també $k \to \infty$. El símbol $\simeq$ vol dir que el quocient dels dos costats tendeix a 1.

Notem les relacions

$$\frac{k}{n} = p + \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}x, \qquad 1 - \frac{k}{n} = q - \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}x.$$

Ara tenim que, fent servir Stirling ($N! \simeq \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}$ quan $N \to \infty$)

$$p_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \simeq \frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{\sqrt{2\pi k}(\frac{k}{e})^k \sqrt{2\pi(n-k)}(\frac{n-k}{e})^{n-k}} p^k q^{n-k}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}\sqrt{1-\frac{k}{n}}} \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} p^k q^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}\sqrt{1-\frac{k}{n}}} \frac{1}{(\frac{k}{np})^k(\frac{1-k/n}{q})^{n-k}}$$

La primera part es comporta asimptòticament

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi k}\sqrt{1-\frac{k}{n}}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi np}\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$$

que és el coeficient de l'exponencial en (2.23).

Per la segona part notem primer les següents relacions ($N \to \infty$):

$$\left(1 + \frac{a}{N}\right)^{Nb} \simeq e^{ab}$$

$$\left(1 + \frac{a}{\sqrt{N}}\right)^{Nb} = \exp\left\{Nb \ln\left(1 + \frac{a}{\sqrt{N}}\right)\right\} \simeq \exp\left\{Nb\left(\frac{a}{\sqrt{N}} - \frac{a^2}{2N}\right)\right\} = e^{ab\sqrt{N} - \frac{a^2 b}{2}}$$

on hem fet servir el desenvolupament de Taylor $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Ara és

$$\frac{1}{\left(\frac{k}{np}\right)^k \left(\frac{1-k/n}{q}\right)^{n-k}} = \frac{1}{\left(1 + \sqrt{\frac{p}{q}}\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{np+\sqrt{npq}x} \left(1 - \sqrt{\frac{p}{q}}\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{nq-\sqrt{npq}x}}$$

$$\simeq \frac{1}{e^{\sqrt{pq}x\sqrt{n} - \frac{q}{2}x^2} e^{qx^2} e^{-\sqrt{pq}x\sqrt{n} - \frac{p}{2}x^2} e^{px^2}} = e^{-x^2} = e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}. \clubsuit$$

La correspondència entre la binomial i la normal s'utilitza per calcular probabilitats associades a la binomial. En lloc de fer els sumatoris pels quals no tenim cap fórmula compacta, avaluem les probabilitats utilitzant (2.19). Si X és la variable binomial i $\hat{X}$ la seva aproximació normal, identifiquem $X = k$ amb $k - \frac{1}{2} < \hat{X} \le k + \frac{1}{2}$ de manera que $P(k_1 \le X \le k_2) \simeq P(k_1 - \frac{1}{2} < \hat{X} \le k_2 + \frac{1}{2})$, $P(X \ge k) \simeq P(\hat{X} > k - \frac{1}{2})$ i $P(X \le k) \simeq P(\hat{X} \le k + \frac{1}{2})$.

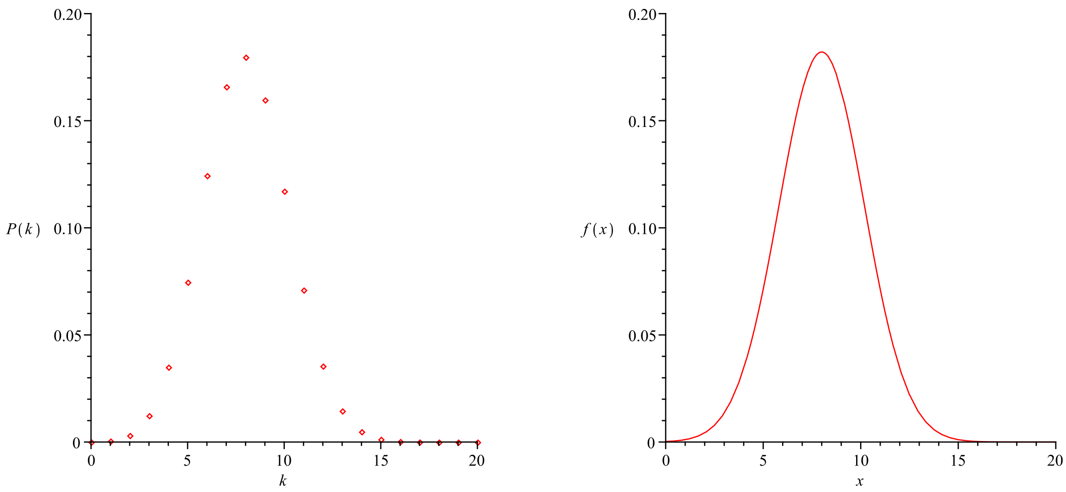


Figura 2.6: Probabilitats binomials amb $n = 20$, $p = 0{,}4$ (esquerra) comparades amb la densitat normal amb $m = 8$, $\sigma = 2{,}19$ (dreta).

Exemple 2.13 Un monitor té 10×15 píxels. Cada píxel s'il·lumina, independentment dels altres, amb probabilitat 0,4. Quina és la probabilitat P que hi hagin més de 80 píxels il·luminats?

El nombre de píxels que s'il·luminen és una variable binomial amb $n = 150$ i $p = 0{,}4$. Com no tenim una expressió compacta per la funció de distribució binomial, seria

$$P = \sum_{k=81}^{150} \binom{150}{k} 0{,}4^k 0{,}6^{150-k}.$$

En lloc de fer la suma utilitzem l'aproximació normal amb $m = 150{\cdot}0{,}4 = 60$ i $\sigma^2 = 150{\cdot}0{,}4{\cdot}0{,}6 = 36$. $P = 1 - F(80{,}5) = \frac{1-\mathrm{erf}(2{,}4159)}{2} = 3{,}17 \cdot 10^{-4}$ (el resultat exacte és $3{,}64 \cdot 10^{-4}$).♦

En aquest exemple veiem l'aplicació de la distribució normal a la descripció del soroll. Si aquest soroll està produït per la suma de petites fluctuacions aleatòries independents, pren forma gaussiana i s'anomena soroll blanc.

2.6 Funcions de densitat i distribució condicionades

Com qualsevol probabilitat, la funció de distribució condicionada a que l'esdeveniment B s'ha produït és

$$F(x\,|\,B) = P(X \le x\,|\,B) = \frac{P(X \le x \text{ i } B)}{P(B)}. \tag{2.24}$$

En el cas de distribucions contínues la funció de densitat condicionada és

$$f(x\,|\,B) = \frac{dF(x\,|\,B)}{dx}. \tag{2.25}$$

Aquestes funcions tenen les mateixes propietats que les funcions sense condicionar. En particular, F va de 0 a 1 i f està normalitzada a 1.

Tenim llavors la **forma contínua del teorema de Bayes**:

$$f(x\,|\,B) = \frac{P(B\,|\,X\!=\!x) f(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} P(B\,|\,X\!=\!x') f(x') dx'}. \tag{2.26}$$

DEM: Per la formula de Bayes habitual

$$P(x \le X \le x + \Delta x\,|\,B) P(B) = P(B\,|\,x \le X \le x + \Delta x) P(x \le X \le x + \Delta x),$$

és a dir,

$$(F(x+\Delta x\,|\,B) - F(x\,|\,B))P(B) = P(B\,|\,x \le X \le x+\Delta x)(F(x+\Delta x) - F(x)).$$

Si dividim els dos costats per Δx i fem el limit $\Delta x \to 0$ trobem

$$f(x\,|\,B)P(B) = P(B\,|\,X=x)f(x).$$

Integrant els dos costats entre $-\infty$ i ∞ obtenim el denominador en (2.26):

$$P(B) = \int_{-\infty}^{\infty} P(B\,|\,X=x)f(x)dx \tag{2.27}$$

que substituït en l'anterior expressió és el que volíem demostrar. ♣

La fórmula (2.27) és la versió contínua de la fórmula de la probabilitat total. Al marge de la fórmula de Bayes, és pot utilitzar per calcular la probabilitat en casos on l'esdeveniment ve condicionat per alguna variable contínua.

Exemple 2.14 Tenim una col·lecció gran de monedes. La probabilitat de treure cara varia segons la moneda, de manera que si en triem una a l'atzar la probabilitat p que tregui cara es pot considerar una variable uniforme en $[0,1]$. Extraiem una moneda i la tirem tres vegades. Quina és la probabilitat que surtin exactament dues cares?

Sigui X la probabilitat de treure cara de la moneda triada i N el nombre de cares que surten. $P(N=k\,|\,X=p) = \binom{3}{k}p^k(1-p)^{3-k}$ i $f_X(p) = 1$ per a $0 \le p \le 1$. Llavors:

$$P(N{=}2) = \int_{-\infty}^{\infty} P(N{=}2\,|\,X{=}p)f_X(p)dp = \int_0^1 \binom{3}{2}p^2(1-p)\cdot 1dp = 3\int_0^1 (p^2-p^3)dp = \frac{1}{4}.\ \blacklozenge$$

Una nova versió de la fórmula de la probabilitat total (en aquest cas, de la densitat total) s'obté considerant una partició de l'espai mostral $\{A_i\}_{i=1,\cdots,n}$. Utilitzant (1.3) tenim que $F(x) = \sum_{i=1}^{n} F(x\,|\,A_i)P(A_i)$ d'on, derivant, obtenim

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x\,|\,A_i)P(A_i). \tag{2.28}$$

Exemple 2.15 Un sistema disposa de dos processadors $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ on el temps que dura un cert servei és una variable exponencial de paràmetre $\lambda = 2$ i $\lambda = 1$ respectivament. Als usuaris se'ls assigna un dels dos processadors aleatòriament, de manera que la probabilitat de triar $\mathcal{P}_1$ val $\frac{1}{3}$. Quina és la densitat del temps de servei?

Si T és el temps de servei, per a $t > 0$:

$$f_T(t) = f_T(t\,|\,\mathcal{P}_1)P(\mathcal{P}_1) + f_T(t\,|\,\mathcal{P}_2)P(\mathcal{P}_2) = 2e^{-2t}\frac{1}{3} + e^{-t}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}(e^{-2t} + e^{-t}).$$

Suposem ara que sabem que en l'instant $t = 1$ encara no ha acabat el servei. Quina és la probabilitat que s'estigui realitzant en $\mathcal{P}_2$?

La informació que tenim és l'esdeveniment $T > 1$. Llavors

$$P(\mathcal{P}_2\,|\,T>1) = \frac{P(T>1\,|\,\mathcal{P}_2)P(\mathcal{P}_2)}{P(T>1\,|\,\mathcal{P}_1)P(\mathcal{P}_1) + P(T>1\,|\,\mathcal{P}_2)P(\mathcal{P}_2)} = \frac{e^{-1}\cdot\frac{2}{3}}{e^{-2}\cdot\frac{1}{3} + e^{-1}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{2e}{1+2e} = 0{,}84\ \blacklozenge$$

La fórmula de Bayes adquireix una forma més definida si l'esdeveniment B és de la forma $X \in A$ on A és un borelià de $\mathbb{R}$. Si X és una variable amb densitat $f(x)$:

$$f(x\,|\,X\in A) = \begin{cases} \frac{1}{P(A)}f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \tag{2.29}$$

ja que $P(X \in A\,|\,X{=}x)$ val 1 si $x \in A$ i 0 en cas contrari.

Capítol 3

Funcions d'una variable aleatòria

Considerem una variable aleatòria X amb funció de densitat f_X. Si tenim $Y = g(X)$ on g és una certa funció, resulta que Y és una nova variable aleatòria. (Recordem que $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Ara tenim $\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ i en termes de composició de funcions $Y = g \circ X$.) Ens plantegem trobar les funcions de distribució i densitat de Y a partir de les de X.

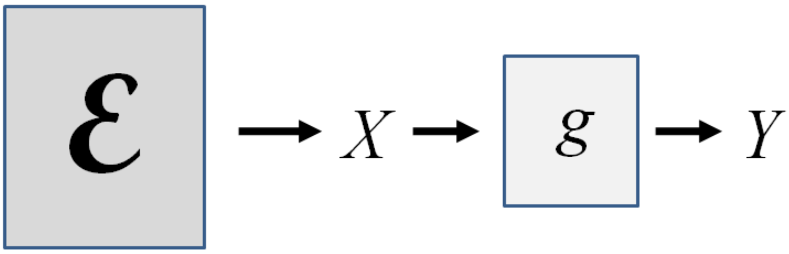


Figura 3.1: Transformació d'una VA .

La funció g es pot considerar sota dos punts de vista. Per un costat podem pensar que el resultat de l'experiment X pateix algun tipus de procés que el transforma en $g(X)$ que és el que nosaltres observem. Per exemple, podem tenir un senyal elèctric aleatori del qual el nostre instrumental només ens permet calcular-ne el signe. Llavors, el senyal X pot prendre qualsevol valor real però nosaltres mesurem $g(X) = \text{signe}(X)$ que només val 1 i -1. També podria ser que detectéssim el senyal després d'algun tipus de processat amb el que $g(X)$ seria una funció més complicada. En aquest exemple es veu que al fer la mesura final es pot perdre informació respecte al resultat inicial X. Això passa quan la funció g no és injectiva sobre el conjunt Ω_X.

Per una altra part, pot ser que disposem directament de X però preferim treballar amb una altra variable $Y = g(X)$. Si considerem que estem fent un canvi de variable, g ha de ser injectiva sobre sobre Ω_X ja que hem de poder invertir la relació entre X i Y.

3.1 Cas discret

X pren els diferents valors x_i. Y pren els valors $g(x_i)$. Podria ser que un valor de Y correspongués a més d'un valor de X. Per tant tenim

$$P_Y(y) = P_X(g^{-1}(y)). \tag{3.1}$$

Exemple 3.1 Un circuit te tres estats de sortida $\Omega_X = \{-1, 0, 1\}$ en els que s'hi troba amb probabilitats $P_X(-1) = P_X(0) = P_X(1) = \frac{1}{3}$. Quina és la funció de probabilitat de $Y = X^2$?

Tenim $\Omega_Y = \{0, 1\}$. $P_Y(0) = P_X(g^{-1}(0)) = P_X(0) = \frac{1}{3}$ i $P_Y(1) = P_X(g^{-1}(1)) = P_X(\{-1, 1\}) = \frac{2}{3}$.♦

3.2 Cas continu

Considerem la VA $Y = g(X)$. Definim els conjunts $\varphi_y = \{x \mid g(x) \leq y\}$. Llavors

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P_X(\varphi_y). \tag{3.2}$$

Per que aquesta probabilitat estigui definida g no pot ser qualsevol funció. Cal que

(1) g estigui definida pels valors que pot prendre X. És a dir, $\Omega_X \subset \mathrm{dom}(g)$.

(2) φ_y sigui un borelià per a tot y. En aquest cas es diu que g és una funció de Baire.

(3) $P(g(X) = \pm\infty) = 0$. El conjunt de singularitats infinites ha de ser de mesura 0 en el sentit de la probabilitat. Això pasa sempre que X és contínua i g val $\pm\infty$ com a molt en un conjunt numerable de punts.

Totes les funcions que utilitzem en la pràctica verifiquen aquestes condicions. Per calcular F_Y de manera efectiva hem d'estudiar en cada cas la forma de g. Una vegada obtinguda F_Y podem calcular f_Y per derivació.

Partirem de la representació gràfica de g. Recorrem l'eix de les y's i per cada valor observem la forma de φ_y. Aquest conjunt tindrà la forma de unió de alguns intervals de les x's el que ens permet escriure la probabilitat combinant la funció F_X en alguns punts. Considerem diferents tipus de comportament:

- g monòtona.

  Si és creixent, $\varphi_y = (-\infty, x]$ i, per tant, $F_Y(y) = F_X(x)$.

  Si és decreixent, $\varphi_y = [x, \infty)$ i, per tant, $F_Y(y) = 1 - F_X(x)$.

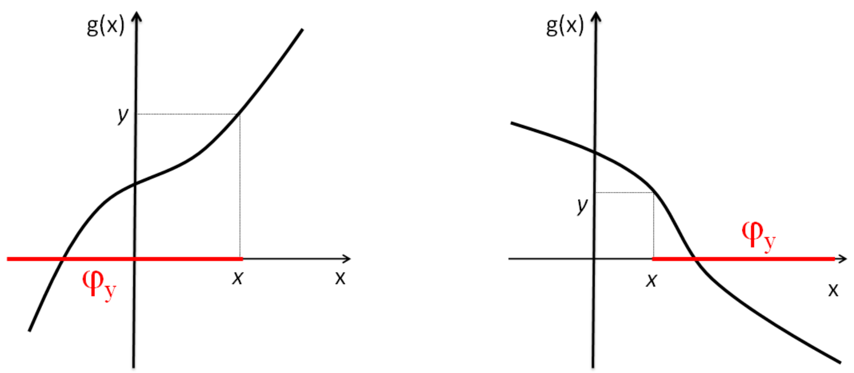


Figura 3.2: g monòtona creixent (esquerra) i monòtona decreixent (dreta).

- g no és monòtona.

  En el primer exemple $\varphi_y = [x_1, x_2]$ i, per tant, $F_Y(y) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$.

  En el segon exemple $\varphi_y = (-\infty, x_1] \cup [x_2, x_3]$ i, per tant, $F_Y(y) = F_X(x_3) - F_X(x_2) + F_X(x_1)$.

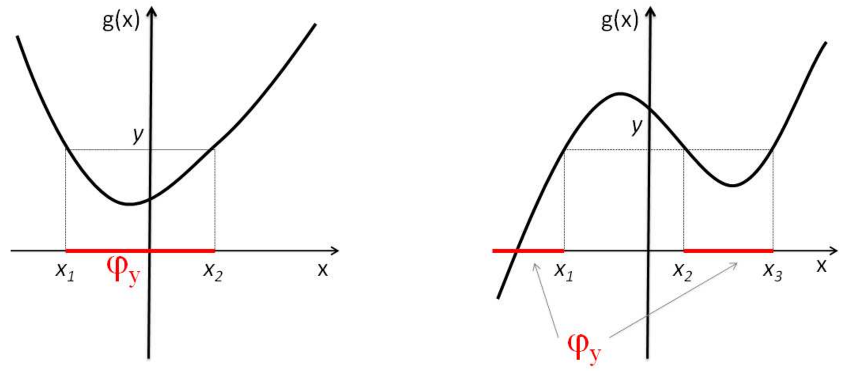


Figura 3.3: Dos exemples de funcions g no monòtones.

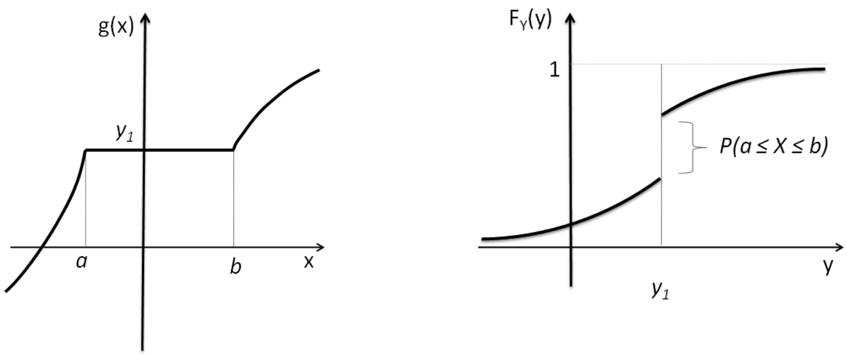
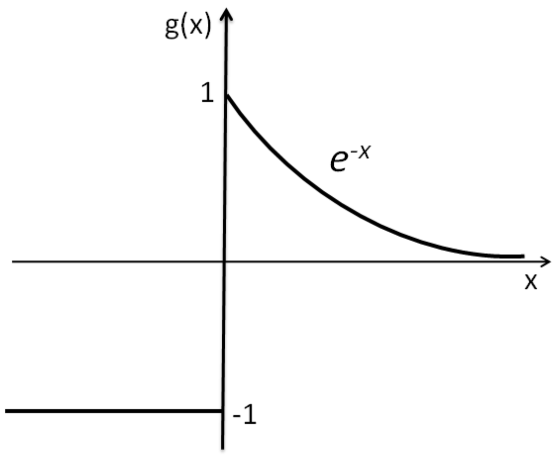


Figura 3.4: g constant sobre un interval.

- g és constant en un tros.

  L'interval $[a, b]$ que té probabilitat finita va a parar a un valor únic. Hi ha llavors un punt y_1 tal que $P(\{y_1\}) \neq 0$. La variable que resulta té comportament mixt.

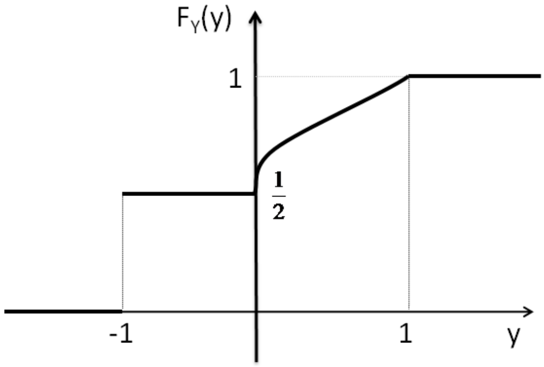
Exemple 3.2 Sigui X una VA de Cauchy amb $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$. Considerem $Y = g(X)$ on g és la funció de la figura.



Tenim el següent:

- $F_Y(y) = 0$ per a $y < -1$.
- En $y = -1$, $F_Y(y)$ salta $P_X(g^{-1}(-1)) = P_X((-\infty, 0]) = F_X(0) = \frac{1}{2}$.

- $F_Y(y)$ es manté constant en $-1 < y < 0$.
- Per a $0 < y < 1$ tenim $x = -\ln y$ i $F_Y(y) = P_X(\varphi_y) = P_X((-\infty, 0] \cup (x, \infty]) = P_X((-\infty, 0]) + 1 - P_X((-\infty, x]) = F_X(0) + 1 - F_X(-\ln y)) = 1 + \frac{1}{\pi}\arctan(\ln y)$.
- Per a $y \geq 1$, $F_Y(y) = 1$.



El resultat és una variable mixta amb funció de densitat

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{2}\delta(y+1) + \frac{1}{\pi y(1 + (\ln y)^2)}(\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-1)). \blacklozenge$$

3.3 Transformació de la funció de densitat

Quan g és derivable a trossos i no és constant en cap tros podem obtenir directament f_Y sense calcular prèviament la funció de distribució.

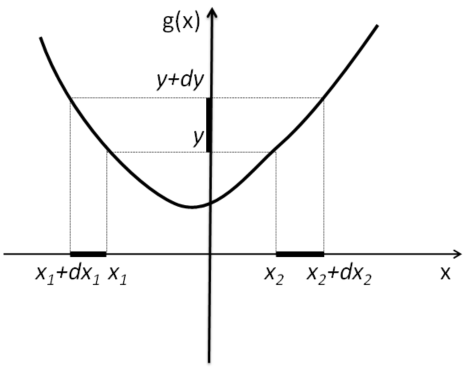
L'equació $y = g(x)$ té cap, una o vàries solucions $x_i(y)$. Llavors

$$f_Y(y) = \sum_i f_X(x_i(y)) \frac{1}{|g'(x_i(y))|}. \tag{3.3}$$

En l'anterior equació posem 0 quan no hi ha solucions.

DEM: Per definició

$$f_Y(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(y \leq Y \leq y + \Delta y)}{\Delta y}.$$



Per tant, considerem $\Delta y > 0$ i prou petit per que tinguem

$$P(y \leq Y \leq y + \Delta y) = \sum_i P(X \text{ entre } x_i \text{ i } x_i + \Delta x_i)$$

on x_i són els valors tals que $g(x_i) = y$. Notem que Δx_i pot ser negatiu.

Ara calculem

$$f_Y(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i \frac{P(X \text{ entre } x_i \text{ i } x_i + \Delta x_i)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i \frac{P(X \text{ entre } x_i \text{ i } x_i + \Delta x_i)}{\mid \Delta x_i \mid} \frac{1}{\frac{\Delta y}{|\Delta x_i|}} = \sum_i f_X(x_i) \frac{1}{\mid \frac{dy}{dx} \mid_{x_i}}. \clubsuit$$

Exemple 3.3 X és gaussiana amb $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. $Y = X^2$.

L'equació $y = x^2$ no té solució per a y negativa. Per a y positiva té dues solucions $x_1(y) = -\sqrt{y}$ i $x_2(y) = \sqrt{y}$. Com $g'(x) = 2x$, $|g'(x_1)| = |g'(x_2)| = 2\sqrt{y}$. Llavors $f_Y(y) = 0$ si $y < 0$ i

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi y}}$$

si $y \geq 0$. ♦

Exemple 3.4 X és uniforme en $[0, 2\pi]$. $Y = \sin X$.

$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}$ i es veu immediatament que $\Omega_Y = [-1, 1]$. Per a $-1 < y < 1$, l'equació $y = \sin x$ té dues solucions en les quals $|g'(x_1)| = |g'(x_2)| = \cos x_1 = \sqrt{1 - \sin^2 x_1} = \sqrt{1 - y^2}$. Llavors

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - y^2}}. \blacklozenge$$

Exemple 3.5 Demostrar que si X és Normal(m, σ) la variable $Y = aX + b$ on a, b són constants també és normal.

Si $a \neq 0$, la transformació és bijectiva i ($x = \frac{y-b}{a}$)

$$f_Y(y) = f_X(x) \frac{1}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a} - m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|} e^{-\frac{(y-(am+b))^2}{2(\sigma|a|)^2}}.$$

Això demostra $Y \sim$ Normal$(am + b, \sigma|a|)$.

Pel cas $a = 0$, Y és una constant que es pot considerar com el cas límit d'una gaussiana amb $m = b$ i $\sigma = 0$. ♦

Capítol 4

Paràmetres estadístics

En el que segueix, X designa una variable aleatòria discreta amb funció de probabilitat P_X o contínua amb funció de densitat f_X.

4.1 Esperança

L'esperança d'una VA discreta X és el nombre

$$E[X] = \sum_k x_k P_X(x_k). \tag{4.1}$$

L'esperança d'una VA contínua X és el nombre

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx. \tag{4.2}$$

$E[X]$ és una mitjana dels valors que pot prendre X ponderats amb les seves probabilitats.

$E[X]$ també s'anomena valor esperat, valor mitjà o mitjana de la variable X. Altres notacions emprades són m_X o $\overline{X}$.

Les seves propietats bàsiques són:

(1) Si $Y = g(X)$, $E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$ (**teorema de l'esperança**),

(2) $E[1] = 1$,

(3) $E[\alpha g(X) + \beta h(X)] = \alpha E[g(X)] + \beta E[h(X)]$, per a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(4) Si $g \geq 0$, $E[g(X)] \geq 0$.

DEM:

(1) Considerem una partició de l'eix real amb punts y_i separats per la distància $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. $E[Y]$ s'obté considerant

$$S = \sum_i y_i P(y_i \leq Y \leq y_i + \Delta y_i)$$

i prenent el límit quan les particions són cada vegada més fines. Si designem $x_i^{(k)}$ el conjunt de punts tals que $g(x_i^{(k)}) = y_i$, tenim que

$$S = \sum_i \sum_k g(x_i^{(k)}) P(X \text{ entre } x_i^{(k)} \text{ i } x_i^{(k)} + \Delta x_i^{(k)})$$

i aquests formen una partició del recorregut de la variable X. Podem estendre aquesta partició a tot l'eix afegint parts que tenen probabilitat 0. En el cas de variables contínues, al fer el límit trobem

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

El procediment amb que hem construït aquestes integrals consistent en fer la partició no en els valors de la variable sinó en els de la funció dóna lloc al que s'anomena integral de Lebesgue. Aquesta té propietats que la fan una eina poderosa en l'anàlisi. A efectes pràctics, en les aplicacions resulta suficient la integral de Riemann ja que els dos tipus d'integració coincideixen en les funcions i conjunts d'integració habituals.

Aquesta propietat és simplement la regla de canvi de variable per integrals. Això es veu fàcilment en el cas que g és monòtona creixent amb recorregut (a, b). Llavors f_Y és nul·la fora d'aquest interval i, fent el canvi $y = g(x)$,

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_a^b y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{f_X(x)}{g'(x)} \cdot g'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

(2) Posem $g(X) = 1$ en l'anterior propietat.

(3) La integral és lineal respecte a les combinacions de funcions. Això és, $\int(\alpha g + \beta h) = \alpha \int g + \beta \int h$.

(4) La integral d'una funció positiva és positiva. ♣

Exemple 4.1 D'una baralla francesa (4 pals, 13 números) s'extreuen 3 cartes sense reemplaçament. Considerem la variable X que dóna el nombre de cartes de cors extretes. Quina és la seva esperança?

La funció de probabilitat de X és $P_X(k) = \frac{\binom{13}{k}\binom{39}{3-k}}{\binom{52}{3}}$. És a dir, $P_X(0) = \frac{703}{1700}$, $P_X(1) = \frac{741}{1700}$, $P_X(2) = \frac{117}{850}$, $P_X(3) = \frac{11}{850}$.

Llavors

$$E[X] = \sum_k x_k P_X(x_k) = 0 \cdot \frac{703}{1700} + 1 \cdot \frac{741}{1700} + 2 \cdot \frac{117}{850} + 3 \cdot \frac{11}{850} = \frac{3}{4}. \blacklozenge$$

Exemple 4.2 Una variable aleatòria contínua té densitat $f_X(x) = \frac{3}{x^4}$ per a $x \geq 1$ i $f_X(x) = 0$ per a $x < 1$. Quina és la seva esperança m? És cert que $P(X < m) = P(X > m)$?

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_1^{\infty} x \frac{3}{x^4} dx = 3 \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{3}{2}.$$

Hem vist doncs que $m = \frac{3}{2}$. Ara calculem $P(X < m) = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{3}{x^4} dx = \frac{19}{27}$. $P(X > m) = \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} \frac{3}{x^4} dx = \frac{8}{27}$. Així, m és un punt de centralització però les probabilitats en cada costat poden ser diferents. ♦

Per interpretar el significat del nombre $E[X]$ considerem el cas d'una variable discreta finita amb valors x_i i probabilitats p_i, $i = 1, \cdots, n$. Si fem N vegades l'experiment obtenim els resultats $r^{(a)}$, $a = 1, \cdots, N$ on cada valor correspon a algun dels x_i. Als N resultat, x_i apareixerà un nombre de vegades N_i corresponent a una freqüència relativa que es pot aproximar per la seva probabilitat quan N és gran. Si fem la mitjana aritmètica dels resultats

$$\frac{1}{N} \sum_{a=1}^{N} r^{(a)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x_i N_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{N_i}{N} \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = E[X].$$

Notem també que mentre la funció de densitat sempre és integrable a tot $\mathbb{R}$, l'expressió (4.2) pot no existir. En aquest cas, si la funció integrada en (4.2) és positiva direm que $E[X] = \infty$. Si aquesta funció conté àrees positives i negatives infinites direm que l'esperança no existeix. Si fem repeticions de l'experiment que ens genera X i anem calculant les mitjanes aritmètiques dels resultats obtinguts ens anirem acostant al valor $E[X]$. Quan l'esperança és infinita aquestes mitjanes divergiran cap a infinit. Quan l'esperança no existeix mostraran oscil·lacions irregulars.

4.2 Variància

La variància d'una VA X és el nombre

$$V[X] = E[(X - \overline{X})^2]. \tag{4.3}$$

Les seves propietats bàsiques són:

(1) $V[X] \geq 0$,

(2) $V[X] = E[X^2] - \overline{X}^2$,

(3) $V[\alpha X] = \alpha^2 V[X]$ per a $\alpha \in \mathbb{R}$,

(4) $V[X + \beta] = V[X]$ per a $\beta \in \mathbb{R}$.

DEM:

(1) Per la propietat (4) de l'esperança.

(2) $V[X] = E[X^2 - 2\overline{X}X + \overline{X}^2] = E[X^2] - 2\overline{X}E[X] + \overline{X}^2 E[1] = E[X^2] - \overline{X}^2$.

(3) Per la propietat (3) de l'esperança, $E[\alpha X] = \alpha E[X]$ i $E[(\alpha X)^2] = E[\alpha^2 X^2] = \alpha^2 E[X^2]$. Utilitzant la propietat (2), queda demostrat.

(4) $V[X + \beta] = E[(X + \beta - \overline{(X + \beta)})^2] = E[(X - \overline{X})^2]$. ♣

L'esperança indica generalment al voltant d'on es concentren els valors amb probabilitat alta. La variància mesura l'amplada d'aquesta regió. El quadrat a l'expressió (4.3) es posa per mesurar sempre desviacions positives. El següent paràmetre mesura el mateix però té comportament "lineal".

4.3 Desviació estàndard

$$Std[X] = V[X]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.4}$$

Verifica $Std[\alpha X] = |\alpha| Std[X]$, per a $\alpha \in \mathbb{R}$. $Std[X]$ també es coneix com desviació típica.

En el que segueix denotarem $m = E[X]$, $\sigma^2 = V[X]$ i $\sigma = Std[X]$.

Exemple 4.3 Calcular la desviació estàndard de la variable de l'exemple 4.2.

Ja tenim $E[X]$. Ara necessitem

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_1^{\infty} x^2 \frac{3}{x^4} dx = 3 \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 3.$$

Així, $V[X] = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ i $\sigma_X = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$. ♦

4.4 Variable aleatòria normalitzada

Donada la VA X, fent un desplaçament i un canvi d'escala, definim la variable normalitzada

$$\tilde{X} = \frac{X - m}{\sigma}. \tag{4.5}$$

Aquesta variable verifica $E[\tilde{X}] = 0$, $V[\tilde{X}] = 1$ i $Std[\tilde{X}] = 1$.

La variable normalitzada també s'anomena tipificada o estandarditzada.

Notem que una variable aleatòria pot tenir dimensions físiques com, per exemple, longitud, freqüència o energia. Com les probabilitats són adimensionals, la funció de distribució també ho és. En canvi, si X té dimensió L la funció de densitat te dimensions L^{-1}, l'esperança L, la variància L^2 i la desviació estàndard L. Les variables normalitzades no tenen dimensions.

4.5 Paràmetres de les distribucions usuals

- **Bernoulli**.

  $m = p$, $\sigma^2 = pq$, $\sigma = \sqrt{pq}$.

  DEM:

$$m = E[X] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$
$$\sigma^2 = V[X] = (0-p)^2 \cdot q + (1-p)^2 \cdot p = pq. \clubsuit$$

- **Binomial**.

  $m = np$, $\sigma^2 = npq$, $\sigma = \sqrt{npq}$.

  DEM: En el que segueix considerem p i q variables independents i posem $q = 1-p$ només al final. Una derivació afecta tot el que té a la dreta.

$$m = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = p\frac{d}{dp}(p+q)^n = pn(p+q)^{n-1} = np.$$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = p\frac{d}{dp}p\frac{d}{dp}(p+q)^n$$
$$= pn(p+q)^{n-1} + n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = n^2p^2 + npq.$$

$$\sigma^2 = (n^2p^2 + npq) - (np)^2 = npq. \clubsuit$$

- **Geomètrica**.

  $m = \dfrac{1}{p}$, $\sigma^2 = \dfrac{q}{p^2}$, $\sigma = \dfrac{\sqrt{q}}{p}$.

  DEM:

$$m = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1} p = \frac{d}{dq}\sum_{n=0}^{\infty} q^n p = \frac{d}{dq}\frac{p}{1-q} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

$$E[X^2] = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot q^{n-1} p = \frac{d}{dq}q\frac{d}{dq}\sum_{n=0}^{\infty} q^n p = \frac{1+q}{(1-q)^3}p = \frac{1+q}{p^2}.$$

$$\sigma^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}. \clubsuit$$

- **Hipergeomètrica**.

  $m = \dfrac{nb}{N}$, $\sigma^2 = \dfrac{nb(N-b)(N-n)}{N^2(N-1)}$.

  DEM: Considerem les igualtats

$$\left(\frac{d}{dx}(1+x)^A\right)(1+x)^B = A(1+x)^{A+B-1},$$

$$\left(\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}(1+x)^A\right)(1+x)^B = A(1+x)^{A+B-1} + A(A-1)x(1+x)^{A+B-2}.$$

Si utilitzem el binomi de Newton en totes les potències, trobem les relacions combinatòries

$$\sum_{k+l=n} k\binom{A}{k}\binom{B}{l} = A\binom{A+B-1}{n-1},$$

$$\sum_{k+l=n} k^2\binom{A}{k}\binom{B}{l} = A\binom{A+B-1}{n-1} + A(A-1)\binom{A+B-2}{n-2}.$$

Aplicant aquest resultat trobem

$$E[X] = \sum_k k\frac{\binom{b}{k}\binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}}b\binom{N-1}{n-1} = b\frac{n}{N}.$$

$$E[X^2] = \sum_k k^2\frac{\binom{b}{k}\binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}}\left(b\binom{N-1}{n-1} + b(b-1)\binom{N-2}{n-2}\right) = \frac{bn}{N} + b(b-1)\frac{n(n-1)}{N(N-1)}.$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{bn}{N} + b(b-1)\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\right) - b^2\frac{n^2}{N^2} = \frac{nb(N-b)(N-n)}{N^2(N-1)}. \clubsuit$$

- **Poisson**.

  $m = \alpha,\ \sigma^2 = \alpha,\ \sigma = \sqrt{\alpha}.$

  DEM:

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!} = e^{-\alpha}\alpha\frac{d}{d\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!} = e^{-\alpha}\alpha\frac{d}{d\alpha}e^{\alpha} = \alpha.$$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\cdot e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!} = e^{-\alpha}\alpha\frac{d}{d\alpha}\alpha\frac{d}{d\alpha}e^{\alpha} = e^{-\alpha}\alpha(e^{\alpha}+\alpha e^{\alpha}) = \alpha^2+\alpha.$$

$$\sigma^2 = (\alpha^2+\alpha) - \alpha^2 = \alpha. \clubsuit$$

- **Uniforme**.

  $m = \dfrac{a+b}{2},\ \sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12},\ \sigma = \dfrac{(b-a)}{\sqrt{12}}.$

  DEM:

$$m = \int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}. \qquad E[X^2] = \int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

$$\sigma^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}. \clubsuit$$

- **Exponencial**.

  $m = \dfrac{1}{\lambda},\ \sigma^2 = \dfrac{1}{\lambda^2},\ \sigma = \dfrac{1}{\lambda}.$

  DEM:

$$m = \int_0^{\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} z\cdot e^{-z}dz = \frac{1}{\lambda}.$$

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\infty} z^2\cdot e^{-z}dz = \frac{2}{\lambda^2}.$$

(A les integrals hem fet el canvi $z = \lambda x$.)

$$\sigma^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \clubsuit$$

- **Gaussiana**.

  Els paràmetres m i σ^2 ja apareixen a la funció de densitat normal.

  DEM:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + m) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = m.$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + m)^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^2 z^2 + m^2) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sigma^2 + m^2. \end{aligned}$$

  (A les integrals hem fet el canvi $z = \frac{x-m}{\sigma}$. S'ha fet servir que la integral d'una funció imparella en un interval simètric és 0.)

$$V[X] = (\sigma^2 + m^2) - m^2 = \sigma^2. \clubsuit$$

  Com s'ha vist a l'exemple 3.5, si X és Normal(m, σ), $\tilde{X} = \frac{X-m}{\sigma}$ és Normal$(0, 1)$. Per això, és habitual fer càlculs amb gaussianes passant a la variable normalitzada i fent servir taules de la funció $Q(x) = P(\tilde{X} > x)$.

  Exemple 4.4 Una fàbrica produeix tubs el diàmetre dels quals es pot considerar una variable normal de valor mitjà 30 mm i desviació típica 2 mm. Quina és la probabilitat que un tub agafat a l'atzar tingui diàmetre superior a 33 mm?

  Es tracta de $P(X > 33)$. Considerant $\tilde{X} = \frac{X-30}{2}$, l'anterior probabilitat és $P(\tilde{X} > \frac{3}{2}) = Q(\frac{3}{2}) = 0{,}0668$.

  Naturalment, aquests càlculs es poden realitzar també amb la funció d'error. ♦

- **Cauchy**.

  Els paràmetres m, σ^2 no existeixen ja que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$ no existeix.

4.6 Moments d'una variable aleatòria

El **moment** n-èsim d'una variable aleatòria X és

$$m_n = E[X^n], \tag{4.6}$$

on $n = 0, 1, \ldots$. Si X és discreta es calcula

$$m_n = \sum_k x_k^n P_X(x_k), \tag{4.7}$$

mentre que si X és contínua

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx, \tag{4.8}$$

Notem que $m_0 = 1$, $m_1 = E[X]$ i $V[X] = m_2 - m_1^2$.

Els **moments centrals** són

$$\mu_n = E[(X - \overline{X})^n], \tag{4.9}$$

on $n = 0, 1, \ldots$. Notem que $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$ i $\mu_2 = V[X]$.

En el cas continu, $\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{X})^n f_X(x) dx$, etc.

Exemple 4.5 Calcular els moments d'una variable exponencial.

$$m_n = E[X^n] = \int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_0^\infty z^n e^{-z} dz = \frac{n!}{\lambda^n}. \blacklozenge$$

Exemple 4.6 Calcular els moments centrals d'una variable normal.

$$\mu_n = E[(X-m)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{(\sqrt{2}\sigma)^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^n e^{-z^2} dz$$

(canvi $z = \dfrac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$). Ara veiem que

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ és senar} \\ \sigma^n \frac{n!}{2^{\frac{n}{2}} (\frac{n}{2})!} & \text{si } n \text{ és parell} \end{cases}$$

(veure a l'apèndix les fórmules (D.12) i (D.14).) $\blacklozenge$

4.7 Desigualtat de Txebixev

Per a tota VA X amb esperança i variància finites:

$$\forall a > 0 \qquad P(|X - \overline{X}| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}. \tag{4.10}$$

Si posem $a = k\sigma$ podem expressar-ho de la forma

$$P(| X - \overline{X} | \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}. \tag{4.11}$$

DEM:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{X})^2 f_X(x) dx \geq \int_{|x-\overline{X}|\geq a} (x-\overline{X})^2 f_X(x) dx \\ &\geq a^2 \int_{|x-\overline{X}|\geq a} f_X(x) dx = a^2 P(|X-\overline{X}| \geq a). \clubsuit \end{aligned}$$

L'anterior resultat caracteritza σ com a mesura de la dispersió.

Exemple 4.7 Variable aleatòria constant és la que pren un únic valor amb probabilitat 1. $\Omega_X = \{c\}$, $P_X(c) = 1$. Evidentment, $E[g(X)] = g(c)$. Per tant, $V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = c^2 - c^2 = 0$, la variable constant té desviació $\sigma = 0$. Lògicament, una variable concentrada en un punt no té dispersió.

A la inversa, suposem que per a certa variable X d'esperança m, $\sigma = 0$. Llavors, utilitzant (4.10) resulta $P(|X - m| \geq a) = 0$ $\forall a > 0$, d'on es fàcil deduir que $F_X(x) = 0$ per a $x < m$ i $F_X(x) = 1$ per a $x > m$. Així, X és una variable constant, igual a m. $\blacklozenge$

4.8 Llei dels grans nombres

La següent és la llei dels grans nombres en forma dèbil per a un experiment de Bernoulli.

Repetim n vegades un experiment de Bernoulli amb probabilitat d'èxit p. Considerem la variable aleatòria X donada pel nombre total d'èxits. Llavors,

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \epsilon\right) = 1. \tag{4.12}$$

DEM: X és una variable binomial d'esperança np i variància npq. Utilitzant la desigualtat de Txebixev tenim que

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\leq\epsilon\right)=1-P(\mid X-np\mid>n\epsilon)\geq 1-\frac{npq}{n^2\epsilon^2}=1-\frac{pq}{n\epsilon^2}.$$

Fent el límit $n\to\infty$ trobem (4.12). ♣

La llei dels grans nombres ens diu que en algun sentit hem obtingut (1.5). Només cal considerar que l'experiment de Bernoulli correspon a veure si es verifica l'esdeveniment A. Llavors $X = N_A, n = N$ i $\frac{X}{n}$ és la freqüència relativa.

Diem que $\frac{X}{n}$ tendeix a p *en probabilitat* si passa (4.12). Amb aquesta noció de convergència veiem, doncs, que les freqüències relatives d'un esdeveniment tendeixen a la seva probabilitat.

4.9 Teorema del límit central

Siguin $X_1, X_2, X_3, \cdots$ mesures independents corresponents a una variable aleatòria X d'esperança m i variància σ. La mitjana

$$Y_n=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$$

és tal que $\dfrac{Y_n-m}{\sigma/\sqrt{n}}$ tendeix, per a $n\to\infty$, a una variable normal d'esperança 0 i variància 1.

4.10 Probabilitat, esperança, mesura

Els dos aspectes bàsics en problemes de probabilitat són l'obtenció de la probabilitat d'un esdeveniment i el càlcul de l'esperança d'una VA Els desenvolupaments teòrics afavoreixen la probabilitat com a concepte bàsic i deixen l'esperança com a concepte subsidiari.

En realitat el càlcul de valors esperats és l'element principal en moltes aplicacions. De fet la probabilitat és un cas particular de l'esperança on la variable és la de Bernoulli associada a l'esdeveniment. L'objecte fonamental és la mesura que tinguem. Aquesta mesura ens dóna els valors de les probabilitats i de les esperances segons quina cosa mesurem.

El fet que en moltes aplicacions només importi calcular mitjanes es deu a que en aquests casos es poden negligir les fluctuacions i es pot suposar que les variables prenen valors constants. Aquest és el cas en sistemes grans (poblacions humanes, matèria macroscòpica) on l'elevat nombre de components permet aplicar la llei dels grans nombres.

Part II

Variables aleatòries multidimensionals i teoria de l'estimació

Capítol 5

Variables aleatòries multidimensionals

Anàlogament al cas unidimensional, una variable aleatòria n-dimensional és una aplicació $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mesurable. És a dir, les antiimatges de borelians de $\mathbb{R}^n$ són esdeveniments de la σ-àlgebra que tinguem a Ω. Es comprova que si l'aplicació és $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ llavors X_i, $i = 1, \ldots, n$ són variables aleatòries unidimensionals. De la mateixa manera, donades vàries variables aleatòries unidimensionals, l'aplicació sobre $\mathbb{R}^n$ donada per $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ és una VA n-dimensional. Les variables aleatòries multidimensionals també s'anomenen vectors aleatoris.

Essencialment, una VA multidimensional consisteix en el resultat d'un experiment expressat com una col·lecció de nombres reals. Per exemple, seleccionar una persona a l'atzar i mesurar la seva alçada i pes o mesurar les tres coordenades espacials de la posició d'un electró en un àtom.

En el que segueix, fixarem $n = 2$ per simplicitat. L'extensió a n arbitrari és directa i la resumim al final.

5.1 Variable aleatòria bidimensional

És una aplicació $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que expressarem (X, Y). Com X i Y són VAs direm que tenim una distribució conjunta de probabilitat. L'àlgebra $\mathcal{B}_2$ es pot generar a partir de rectangles $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ o, de manera alternativa i com ara ens interessa, amb regions $(-\infty, a] \times (-\infty, b]$. Les probabilitats d'aquestes regions les determinen totes.

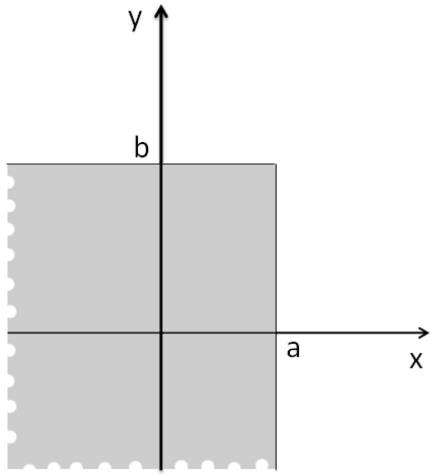


Figura 5.1: Regió $(-\infty, a] \times (-\infty, b]$.

5.2 Funció de distribució conjunta

La funció de distribució conjunta de dues VAs és la funció

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x \text{ i } Y \leq y). \tag{5.1}$$

És, per tant, la probabilitat de la regió $(-\infty, x] \times (-\infty, y]$.

Les seves propietats són:

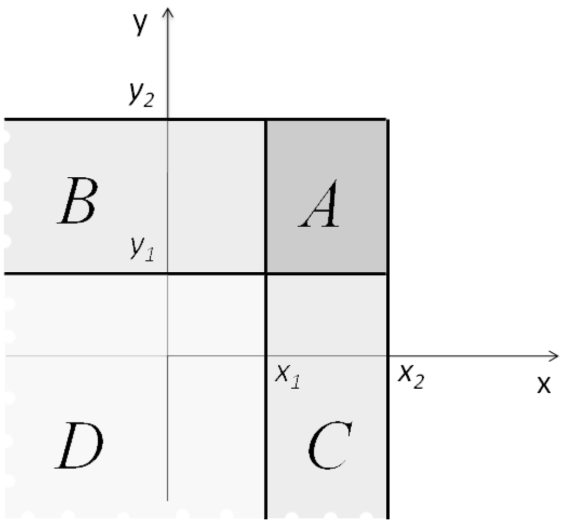
(1) $0 \leq F_{XY}(x, y) \leq 1$,

(2) F_{XY} és una funció creixent en x i y, és a dir, si $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \leq y_2$ llavors $F_{XY}(x_1, y_1) \leq F_{XY}(x_2, y_2)$,

(3) $\lim_{x \to -\infty} F_{XY}(x, y) = 0$, $\lim_{y \to -\infty} F_{XY}(x, y) = 0$, $\lim_{x,y \to \infty} F_{XY}(x, y) = 1$,

(4) F_{XY} és una funció contínua per la dreta segons la x i la y,

(5) $P(x_1 < X \leq x_2 \text{ i } y_1 < Y \leq y_2) = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) - F_{XY}(x_1, y_2) + F_{XY}(x_1, y_1)$ (on $x_1 < x_2$ i $y_1 < y_2$).



DEM:

(1), (2), (3) i (4) es demostren igual que en el cas unidimensional.

(5) Considerem les regions disjuntes $A = (x_1, x_2] \times (y_1, y_2]$, $B = (-\infty, x_1] \times (y_1, y_2]$, $C = (x_1, x_2] \times (-\infty, y_1]$, $D = (-\infty, x_1] \times (-\infty, y_1]$. Llavors $F_{XY}(x_2, y_2) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$, $F_{XY}(x_1, y_2) = P(B) + P(D)$, $F_{XY}(x_2, y_1) = P(C) + P(D)$, $F_{XY}(x_1, y_1) = P(D)$. D'aquí eliminem $P(A)$ i obtenim la propietat. ♣

5.3 Funcions de distribució marginals

Són les funcions

$$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty), \qquad F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y). \tag{5.2}$$

Són les funcions de distribució de les VAs X i Y respectivament.

5.4 Funció de densitat conjunta

Si existeix la derivada

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} \tag{5.3}$$

es diu que X i Y són **conjuntament contínues** i f_{XY} s'anomena **funció de densitat conjunta** de les variables X i Y.

Si expressem la propietat (5) de la funció de distribució per un rectangle infinitesimal trobem l'expressió simbòlica

$$f_{XY}(x,y)dxdy = P(x \le X \le x+dx,\ y \le Y \le y+dy). \tag{5.4}$$

DEM: Fem Taylor fins a segon ordre:

$$\begin{gathered}
P(x \le X \le x+\Delta x,\ y \le Y \le y+\Delta y) = \\
F_{XY}(x+\Delta x, y+\Delta y) - F_{XY}(x+\Delta x, y) - F_{XY}(x, y+\Delta y) + F_{XY}(x,y) \\
\simeq F_{XY}(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}F_{XY}(x,y)\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}F_{XY}(x,y)\Delta y \\
+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{XY}(x,y)\Delta x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{XY}(x,y)\Delta y^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F_{XY}(x,y)\Delta x \Delta y \\
-\left(F_{XY}(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}F_{XY}(x,y)\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{XY}(x,y)\Delta x^2\right) \\
-\left(F_{XY}(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}F_{XY}(x,y)\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{XY}(x,y)\Delta y^2\right) + F_{XY}(x,y) \\
= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F_{XY}(x,y)\Delta x \Delta y. \clubsuit
\end{gathered}$$

f_{XY} verifica les propietats:

(1) $f_{XY} \ge 0$,

(2) $P((X,Y) \in A) = \int\int_A f_{XY}(x,y)dxdy$, per a tot borelià $A \subset \mathbb{R}^2$.

(3) $F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x',y')dx'dy'$,

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$.

DEM: (1) es segueix de la propietat (1) de F_{XY}. (3) i (4) s'obtenen posant en (2) $A = (-\infty, x] \times (-\infty, y]$ i $A = \mathbb{R}^2$ respectivament. Per demostrar (2) podem dividir A en rectangles cada vegada més petits i aplicar (5.4). Això limita el tipus de conjunt A que podem considerar però és suficient en la pràctica i correspon a la integral de Riemann. Per considerar conjunts més generals cal passar a la integral de Lebesgue. $\clubsuit$

5.5 Funcions de densitat marginals

Són les funcions de densitat de les variables unidimensionals X i Y:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}, \qquad f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}, \tag{5.5}$$

o, de manera alternativa

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx. \tag{5.6}$$

DEM: De (5.2) i la propietat (3) de la densitat conjunta obtenim

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x', y) dx' \right) dy.$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x', y) dx' \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy.\clubsuit$$

Exemple 5.1 Una variable bidimensional (X, Y) té densitat conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x & \text{si } x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1, \\ 0 & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Comprovar que esta ben normalitzada, calcular la probabilitat que $X + Y < \frac{1}{2}$ i trobar les densitats marginals.

Comprovem que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} 6x dx dy = 6 \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} dy \right) dx = 6 \int_0^1 (x - x^2) dx = 6 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 1.$$

$$P\left(X + Y < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}-x} 6x dx dy = 6 \int_0^{\frac{1}{2}} x \left(\int_0^{\frac{1}{2}-x} dy \right) dx$$

$$= 6 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{2} - x^2 \right) dx = 6 \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{8}.$$

Calculem ara les densitats marginals:

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 6x dy = 6(x - x^2), \qquad 0 < x < 1.$$

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} 6x dx = 3(1 - y)^2, \qquad 0 < y < 1.\blacklozenge$$

5.6 Cas discret

Partim de X i Y VA discretes que prenen un nombre finit o numerable de valors x_i, y_j. La **funció de probabilitat conjunta** és

$$P_{XY}(x_i, y_j) = P(X = x_i \text{ i } Y = y_j). \tag{5.7}$$

Les **funcions de probabilitat marginals** són

$$P_X(x_i) = \sum_{y_j} P_{XY}(x_i, y_j), \qquad P_Y(y_j) = \sum_{x_i} P_{XY}(x_i, y_j). \tag{5.8}$$

Com es comprova fàcilment, les funcions de densitat marginals i les funcions de probabilitat marginals estan normalitzades a 1 i constitueixen funcions de densitat i probabilitat unidimensionals. En un context bidimensional l'esdeveniment $\{x\}$ vol dir realment $\{x\} \times \mathbb{R}$. En el cas discret l'esdeveniment $\{x_i\}$ vol dir realment $\{x_i\} \times \{y_1, \ldots, y_n\}$. Els subíndex XY, X, etc. en les funcions de distribució i densitat conjuntes i marginals es poden ometre si es sobreentenen les VAs i la notació és prou clara.

Exemple 5.2 Una variable bidimensional (X, Y) és tal que X només pren els valors $1, 2, 3$ i Y els valors $0, 1$. La seva funció de probabilitat conjunta és representa en la taula següent:

$Y\backslash X$	1	2	3
0	0,19	0,25	0,11
1	0,13	0,15	0,17

És a dir, $P_{XY}(1, 0) = 0{,}19$, etc. Les sis probabilitats de la taula sumen 1, el que mostra que P_{XY} està ben normalitzada. Per calcular les marginals hem d'anar sumant els valors en les files i columnes de la taula. Llavors, la funció de probabilitat marginal de X és $P_X(1) = 0{,}32$, $P_X(2) = 0{,}3$ i $P_X(3) = 0{,}28$. Per la Y, $P_Y(0) = 0{,}55$, $P_Y(1) = 0{,}45$. ♦

	$\mathbf{X = 1}$	$\mathbf{X = 2}$	$\mathbf{X = 3}$	
$\mathbf{Y = 0}$	0,19	0,25	0,11	**0,55**
$\mathbf{Y = 1}$	0,13	0,15	0,17	**0,45**
	0,32	**0,3**	**0,28**	

5.7 Principals distribucions multidimensionals

- **Trinomial**

  És una generalització de la binomial. En un experiment considerem tres esdeveniments A_1, A_2 i A_3 que formin una partició de Ω. Les seves probabilitats respectives p_1, p_2 i p_3 verifiquen $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Repetim n vegades l'experiment i considerem les tres VA X_i = nombre de vegades que passa A_i, $i = 1, 2, 3$. Com $X_1 + X_2 + X_3 = n$, en el fons tenim dues VAs discretes. Si indiquem per n_i el valor que pren la variable X_i llavors és:

$$P(n_1, n_2, n_3) = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}. \tag{5.9}$$

  on, implícitament, $n_1 + n_2 + n_3 = n$. També denotarem aquesta expressió per $P(n_1, n_2)$.

  En efecte, el nombre de maneres en que podem situar les n_1, n_2, n_3 ocurrències entre les n és triar n_1 de les n i n_2 de les $n - n_1$ restants. La resta queden fixades i $n_3 = n - n_1 - n_2$.

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}$$

  La probabilitat marginal de X_1 és

$$\begin{aligned} P(n_1) = \sum_{n_2} P(n_1, n_2) &= \binom{n}{n_1} p_1^{n_1} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \binom{n-n_1}{n_2} p_2^{n_2} p_3^{n-n_1-n_2} \\ &= \binom{n}{n_1} p_1^{n_1} (p_2 + p_3)^{n-n_1} = \binom{n}{n_1} p_1^{n_1} (1 - p_1)^{n-n_1}. \end{aligned}$$

  que és de tipus binomial. De manera anàloga es defineix la distribució **multinomial** de la qual les marginals són multinomials d'ordre menor.

  Exemple 5.3 Es tira una parella de daus 4 vegades. Quina és la probabilitat que la suma dels dos daus valgui 7 i 8 exactament una vegada?

  Indiquem X_1, X_2, X_3 el nombre de vegades que la suma val 7, 8 i qualsevol valor diferent de 7 i 8, respectivament. Llavors tenim una VA trinomial amb $n = 4$, $p_1 = \frac{6}{36}, p_2 = \frac{5}{36}, p_3 = \frac{25}{36}$.

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 2) = \frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 2!} \cdot \frac{6}{36} \cdot \frac{5}{36} \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^2 = 0{,}1339. \ ♦$$

- **Uniforme**.

  La distribució uniforme sobre el domini $D \subset \mathbb{R}^2$ ve donada per la funció de densitat:

$$f(x,y) = \begin{cases} K & \text{si } (x,y) \in D, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases} \tag{5.10}$$

  on K és una constant. La condició de normalització ens dóna $1 = K \int\int_D dxdy$, d'on $K = \frac{1}{\text{area}(D)}$.

  Les distribucions marginals d'una distribució uniforme *no* són uniformes en general.

  Exemple 5.4 Considerem una distribució uniforme sobre un cercle de radi a centrat a l'origen de coordenades. En aquest cas $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le a^2\}$. $f(x,y) = \frac{1}{\pi a^2}$ sobre D. La densitat marginal de X és

$$f_X(x) = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\pi a^2} dy = \frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

  en l'interval $[-a, a]$.

  Considerem les variables radi $r = \sqrt{x^2+y^2}$ i angle $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, on θ pren valors sobre un període complet. Podem calcular les funcions de densitat d'aquestes variables de la següent manera. Considerem $0 \le r < r + \Delta r \le a$. Llavors

$$P(r < \sqrt{x^2+y^2} \le r + \Delta r) = \frac{1}{\pi a^2}(\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2) = \frac{2r\Delta r + (\Delta r)^2}{a^2}.$$

  En el límit $\Delta r \to 0$ deduïm la funció de densitat $f_R(r) = 2\frac{r}{a^2}$ per a $0 \le r \le a$. Anàlogament trobem

$$P(\theta < \arctan\frac{y}{x} \le \theta + \Delta\theta) = \frac{1}{\pi a^2}\left(\pi a^2 \frac{\Delta\theta}{2\pi}\right) = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

  que ens dona la densitat angular $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$. ♦

- **Normal bidimensional**.

  La distribució gaussiana es generalitza considerant l'exponencial d'un polinomi de segon grau en les variables x i y.

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-m_1)}{\sigma_1}\frac{(y-m_2)}{\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}} \tag{5.11}$$

  per a $-\infty < x, y < \infty$. Els paràmetres són les esperances $-\infty < m_1, m_2 < \infty$, les desviacions típiques $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ i la correlació $-1 < \rho < 1$.

5.8 Independència de variables aleatòries

Es diu que les VA X i Y són **independents** si per a tot parell A i B de borelians de $\mathbb{R}$

$$P(X \in A \text{ i } Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B). \tag{5.12}$$

Prenent $A = (-\infty, x]$ i $B = (-\infty, y]$ tenim que $F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$. Fent les derivades respecte a x i y trobem que si X i Y són independents

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y). \tag{5.13}$$

Es veu fàcilment a l'integrar aquesta expressió sobre la regió $A \times B$ que si (5.13) es verifica llavors les variables X i Y són independents.

Quan X i Y són independents es diu que l'espai de probabilitat bidimensional és producte dels espais unidimensionals de X i de Y. L'operació (5.13) de multiplicar dues funcions d'una variable per obtenir-ne una de dues variables s'anomena producte tensorial o directe de les funcions f_X i f_Y. Cal tenir en compte que la situació d'independència és particular. En general, el conèixer les distribucions marginals de X i Y *no* determina la seva distribució conjunta.

5.9 Densitat condicionada

La funció de distribució de X condicionada a $Y = y$ és

$$F_X(x\,|\,y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x', y)dx'}{f_Y(y)}. \tag{5.14}$$

Derivant respecte a x s'obté la funció de densitat condicionada

$$f_X(x\,|\,y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}. \tag{5.15}$$

Les anteriors expressions només es defineixen quan $f_Y(y) \neq 0$.

DEM:

$$F_X(x\,|\,y) = \lim_{h\to 0} \frac{P(X \leq x \text{ i } y \leq Y \leq y + h)}{P(y \leq Y \leq y + h)} = \lim_{h\to 0} \frac{F_{XY}(x, y + h) - F_{XY}(x, y)}{F_Y(y + h) - F_Y(y)} = \frac{\frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial y}}{\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}}.$$

La derivada del numerador es calcula amb la propietat (3) de la funció de densitat. ♣

Anàlogament podem definir $f_Y(y\,|\,x)$. Les funcions de densitat condicionades estan normalitzades a 1. Notem que la funció marginal $f_X(x)$ ens dóna les probabilitats d'esdeveniments referits a X quan no sabem res sobre el resultat de la variable Y. La funció condicionada $f_X(x\,|\,y)$ ens dóna aquestes probabilitats quan sabem que el resultat de la variable Y és y.

Si X i Y són independents, substituint (5.13) en (5.15) tenim, com és d'esperar, que $f_X(x\,|\,y) = f_X(x)$.

5.10 Esperança condicionada

L'esperança de X condicionada a que Y val y és

$$E[X\,|\,y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x\,|\,y)dx. \tag{5.16}$$

Aquesta esperança verifica

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X\,|\,y] f_Y(y)dy. \tag{5.17}$$

DEM:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}dx\right) f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x\,|\,y)dx\right) f_Y(y)dy.$$

I el terme del parèntesi és $E[X\,|\,y]$. ♣

(5.17) s'interpreta de la següent manera: per a fer l'esperança de X podem fem primer l'esperança de X condicionada a Y. Això és una VA (funció de Y) i l'esperança de X és l'esperança d'aquesta variable. És a dir,

$$E[X] = E[E[X\,|\,Y]]. \tag{5.18}$$

Exemple 5.5 Per la variable bidimensional de l'exemple 5.1, calculem $E[X\,|\,y]$.

Necessitem primer la densitat condicionada

$$f_X(x\,|\,y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2x}{(1-y)^2}, \qquad 0 < x < 1-y.$$

Ara podem calcular

$$E[X\,|\,y] = \int_0^{1-y} x\frac{2x}{(1-y)^2}dx = \frac{2}{(1-y)^2}\int_0^{1-y} x^2dx = \frac{2}{3}(1-y).\blacklozenge$$

Exemple 5.6 Generem una VA X uniforme a $[3,4]$ i després una variable Y exponencial de paràmetre $\lambda = X$. Calcular la densitat conjunta $f(x,y)$ i les esperances de X i de Y.

Tenim una variable bidimensional (X,Y) de la que coneixem la distribució marginal de X i la distribució de Y condicionada a X. Aquest és sempre el cas quan generem les dues variables fent primer una i després, a partir del resultat d'aquesta, la segona. Així, el que coneixem per l'enunciat és $f(x) = 1$ per a $3 \le x \le 4$ i $f(y\,|\,x) = xe^{-xy}$ per a $y > 0$. La forma de (5.15) que ens interessa és $f(x,y) = f(y\,|\,x)f(x)$. Llavors $f(x,y) = xe^{-xy}$ per a $3 \le x \le 4, y > 0$.

També tenim que $E[X] = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$ i $E[Y] = E[E[Y\,|\,X]] = E[\frac{1}{X}] = \int_3^4 x^{-1}\cdot 1dx = \ln\frac{4}{3}$. $\blacklozenge$

Exemple 5.7 Calculem les **distribucions marginals i condicionades de la variable normal bidimensional** (5.11).

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-m_1)}{\sigma_1}\frac{(y-m_2)}{\sigma_2}\right\}}dy$$

(fent el canvi $y \to z = \frac{(y-m_2)}{\sigma_2} - \rho\frac{(x-m_1)}{\sigma_1}$)

$$= \frac{e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}}}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{z^2-\rho^2\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}\right\}}dz$$

$$= \frac{e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}}}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{\rho^2(x-m_1)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}}\sqrt{2\pi(1-\rho^2)} = \frac{e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}.$$

Per tant, fent un càlcul idèntic per a f_Y veiem que les distribucions marginals d'una normal bidimensional són normals unidimensionals d'esperances m_1 i m_2 i variàncies σ_1^2 i σ_2^2 respectivament. A partir d'això tenim que la densitat condicionada

$$f_X(x\,|\,y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-m_1)}{\sigma_1}\frac{(y-m_2)}{\sigma_2}+\rho^2\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_1)}{\sigma_1}-\rho\frac{(y-m_2)}{\sigma_2}\right)^2}.$$

Novament resulta ser una distribució gaussiana, ara amb variància $\sigma^2 = \sigma_1^2(1-\rho^2)$ i esperança $m = E[X\,|\,y] = m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)$.

Resumint, si (X,Y) és una normal bidimensional:

- X és Normal(m_1,σ_1) i Y és Normal(m_2,σ_2).
- X condicionada a $Y=y$ és Normal $\left(m_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2), \sigma_1\sqrt{1-\rho^2}\right)$.
- Y condicionada a $X=x$ és Normal $\left(m_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1), \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)$.
- $E[X\,|\,y] = m_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)$, $E[Y\,|\,x] = m_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1)$.

Comparant $f(x,y)$ amb $f_X(x)f_Y(y)$ deduïm que X i Y són independents si i només si $\rho = 0$.♦

5.11 Generalització al cas n-dimensional

Considerem $X_1, X_2, \ldots, X_n$ VAs unidimensionals o, de manera equivalent, una aplicació mesurable $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

La funció de distribució conjunta és

$$F_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = P(X_1\le x_1, X_2\le x_2,\ldots,X_n\le x_n). \tag{5.19}$$

És, per tant, la probabilitat de la regió $(-\infty,x_1]\times(-\infty,x_2]\times\cdots\times(-\infty,x_n]$.

Diem que les n variables són conjuntament contínues si existeix la funció de densitat

$$f_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n F_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}. \tag{5.20}$$

En aquest cas

$$F_{X_1\cdots X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1\cdots X_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n. \tag{5.21}$$

Si A és una regió de $\mathbb{R}^n$

$$P((X_1,X_2\ldots,X_n)\in A) = \int\cdots\int_A f_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n. \tag{5.22}$$

Les distribucions marginals s'obtenen integrant a tot $\mathbb{R}$ algunes de les n variables. Per exemple, si $k<n$

$$f_{X_1\cdots X_k}(x_1,\ldots,x_k) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1\cdots X_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_{k+1}\cdots dx_n. \tag{5.23}$$

Les condicionals s'obtenen dividint la funció de densitat conjunta per la funció de densitat marginal de la condició. Per exemple,

$$f_{X_1X_2\cdots X_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k\,|\,x_{k+1},\ldots,x_n) = \frac{f_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{f_{X_{k+1}\cdots X_n}(x_{k+1},\ldots,x_n)}. \tag{5.24}$$

Les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ són independents si

$$f_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n). \tag{5.25}$$

En el cas discret existeixen definicions anàlogues per les funcions de probabilitat.

Capítol 6

Funcions de vàries variables aleatòries

Considerem una variable aleatòria bidimensional contínua (X, Y) amb funció de densitat conjunta f_{XY}. Una funció $Z = g(X, Y)$ defineix una nova variable aleatòria que volem estudiar.

Definim les regions

$$\varphi_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) \leq z\}. \tag{6.1}$$

Llavors, la funció de distribució $F_Z(z) = P(Z \leq z)$ és

$$F_Z(z) = \int\int_{\varphi_z} f_{XY}(x, y)dxdy. \tag{6.2}$$

A partir d'aquí obtenim la funció de densitat $f_Z(z) = \dfrac{dF_Z(z)}{dz}$.

6.1 Suma de variables aleatòries. Teorema de convolució

Partim de X i Y VAs independents i posem $Z = X + Y$. Llavors, si $*$ designa el producte de convolució,

$$f_Z = f_X * f_Y. \tag{6.3}$$

DEM:

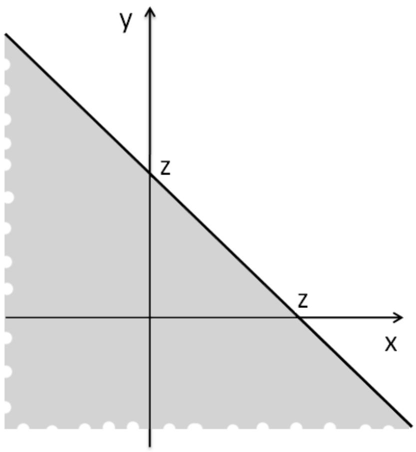


Figura 6.1: Regió $x + y \leq z$.

$$F_Z(z) = \int\int_{x+y\leq z} f_{XY}(x, y)dxdy = \int\int_{x+y\leq z} f_X(x)f_Y(y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)dy \right) dx.$$

Derivant respecte al paràmetre z trobem

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = (f_X * f_Y)(z). \clubsuit$$

Exemple 6.1 Suma de variables exponencials independents. X, Y són variables aleatòries exponencials de paràmetre λ_1, λ_2 respectivament. $Z = X + Y$.

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_0^z \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2(z-x)} dx.$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \int_0^z e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x} dx = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 z} - e^{-\lambda_1 z}).$$

Els límits d'integració $0, z$ apareixen degut a que la densitat exponencial és nul·la per argument negatiu ($x < 0, z - x < 0$). Igualment, la densitat anterior val 0 per a $z < 0$.

El resultat és singular quan $\lambda_1 = \lambda_2$. En aquest cas recalculem i trobem que (per $z > 0$)

$$f_Z(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}. \blacklozenge$$

Exemple 6.2 Suma de variables de Poisson independents. En el cas discret tenim que, si $Z = g(X, Y)$,

$$P_Z(z_i) = \sum_{g(x_k, y_l) = z_i} P_{X,Y}(x_k, y_l). \tag{6.4}$$

Si X i Y són variables de Poisson independents de paràmetres α_1 i α_2 respectivament i $Z = X+Y$, llavors $\Omega_Z = \Omega_X = \Omega_Y = \{0, 1, \ldots\}$ i

$$P_Z(n) = \sum_{k+l=n} e^{-\alpha_1} \frac{\alpha_1^k}{k!} e^{-\alpha_2} \frac{\alpha_2^l}{l!} = e^{-(\alpha_1+\alpha_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \alpha_1^k \alpha_2^{n-k}$$

$$= e^{-(\alpha_1+\alpha_2)} \frac{(\alpha_1+\alpha_2)^n}{n!}.$$

Per tant, la suma de variables de Poisson independents de paràmetres α_1 i α_2 és una variable de Poisson de paràmetre $\alpha_1 + \alpha_2$.

Aquest fet resulta intuïtiu ja que si les variables inicials són el nombre d'esdeveniments en intervals temporals T_1 i T_2, llavors la seva suma representa el nombre d'esdeveniments en un interval $T_1 + T_2$ (recordem $\alpha = \lambda T$ amb λ dependent només del tipus de fenomen). $\blacklozenge$

Exemple 6.3 Suma de variables normals independents. Prenem

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}, \qquad f_Y(y) = \frac{e^{-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}.$$

Llavors, utilitzant (6.3),

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \frac{e^{-\frac{(z-x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)x^2 + \left(\frac{m_1}{\sigma_1^2}+\frac{z-m_2}{\sigma_2^2}\right)x - \left(\frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(z-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)}.$$

Considerant la integral gaussiana general (D.5) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2+bx+c}dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{2a}+c}$ i simplificant les expressions que surten, arribem a

$$f_{X+Y}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}e^{-\frac{(z-(m_1+m_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}.$$

Resulta, per tant, que $X+Y$ és una variable gaussiana d'esperança $m = m_1 + m_2$ i variància $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Donades constants α i β, si X i Y són normals, αX i βY també ho són. Llavors $\alpha X + \beta Y$ és una VA normal amb esperança $\alpha m_1 + \beta m_2$ i variància $\alpha^2\sigma_1^2 + \beta^2\sigma_2^2$. ♦

Exemple 6.4 L'alçada dels homes i de les dones són VAs normals amb esperances 175 cm i 160 cm, i desviacions típiques 10 cm i 9 cm respectivament. Es tria un home i una dona a l'atzar. Quina és la probabilitat que l'home sigui més alt que la dona?

Designem H i D aquestes variables. $Z = H - D$ és una variable normal d'esperança 175-160=15cm i variància $10^2 + 9^2 = 181$. La probabilitat que volem és $P(Z \geq 0) = 1 - F_Z(0) = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \text{erf}\left(-\frac{15}{\sqrt{2}\sqrt{181}}\right)\right) = 0{,}5 + 0{,}5\,\text{erf}(0{,}788) = 0{,}8675$. ♦

6.2 Transformacions a $\mathbb{R}^n$. Canvi de variables

Considerem ara la distribució conjunta de dues variables Z i T construïdes a partir de X i Y.

$$\begin{cases} Z = g(X,Y) \\ T = h(X,Y) \end{cases} \tag{6.5}$$

Quan la transformació és injectiva diem que estem fent un canvi de variable. En aquest cas pensem que tenim la mateixa distribució de probabilitat expressada en variables diferents.

Recordem la definició del determinant jacobià

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}. \tag{6.6}$$

Per calcular aquesta expressió s'ha d'invertir (6.5) prèviament. També es pot calcular considerant que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,t)} = \left(\frac{\partial(z,t)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}. \tag{6.7}$$

En qualsevol cas voldrem expressar-ho en termes de les variables z i t. El seu valor absolut ens dóna el canvi de l'element de mesura.

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,t)}\right| dzdt. \tag{6.8}$$

Quan la transformació és injectiva f_{ZT} és nul·la en els punts que no són de la imatge. Pels punts de la imatge considerem la probabilitat de la regió infinitesimal indicada en la figura.

$$P(\square) = f_{XY}(x,y)dxdy = f_{ZT}(z,t)dzdt.$$

Utilitzant (6.8) trobem

$$f_{ZT}(z,t) = f_{XY}(x(z,t),y(z,t))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,t)}\right|. \tag{6.9}$$

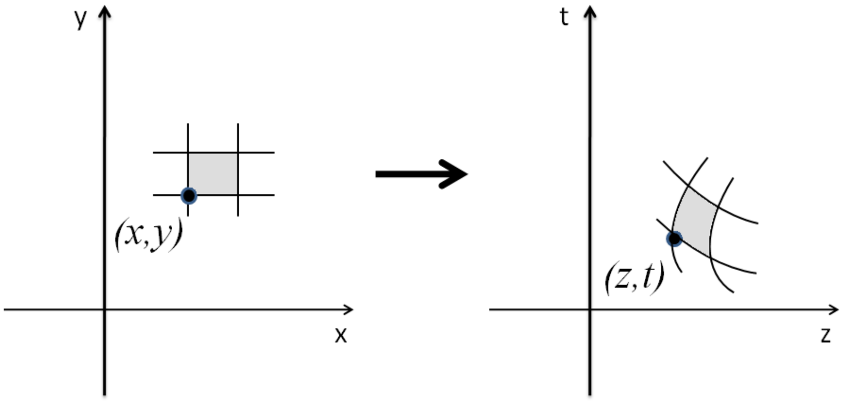


Figura 6.2: Canvi de l'element de mesura.

Si la transformació no fos injectiva en aquesta expressió hauríem de sumar el terme de la dreta sobre tots els punts tals que $(x_i, y_i) \longrightarrow (z, t)$.

A vegades es consideren canvis de variable que són singulars en algun punt. Això no és cap inconvenient ja que trobem probabilitats integrant sobre regions finites i aquest resultat no depèn del que li passi a la densitat en un punt o corba aïllada.

Exemple 6.5

$$\begin{cases} Z = X + Y \\ T = X - Y \end{cases}$$

És una transformació bijectiva de $\mathbb{R}^2$ (lineal, no singular). La inversa és $x = \frac{z+t}{2}, y = \frac{z-t}{2}$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,t)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Per tant,

$$f_{ZT}(z,t) = f_{XY}\left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2}\right)\frac{1}{2}. \blacklozenge$$

Exemple 6.6 Aplicar la transformació de l'anterior exemple a la variable de l'exemple 5.1.

La variable (X, Y) té densitat $f_{XY}(x, y) = 6x$ en el triangle de vèrtexs $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

La variable (Z, T) té densitat $f_{ZT}(z, t) = 6\dfrac{z+t}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}(z + t)$. Com la ransformació és lineal, les rectes es transformen en rectes i la regió on es dóna la densitat f_{ZT} és el triangle de vèrtexs $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$. $\blacklozenge$

Exemple 6.7 Coordenades polars. Són $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ i $\Theta = \arctan \frac{Y}{X}$. Varien $0 \leq r < \infty$ i $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Per tant,

$$f(r,\theta) = f_{XY}(r\cos\theta, r\sin\theta)r. \blacklozenge$$

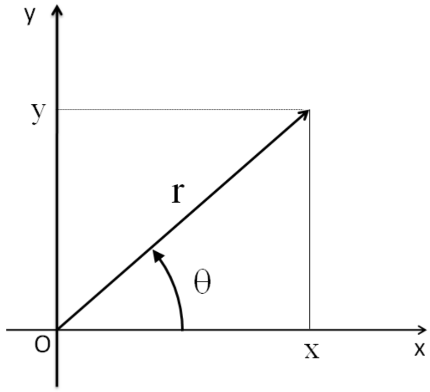


Figura 6.3: Coordenades polars.

Exemple 6.8 Un punt al pla té coordenades (X, Y) on X i Y són variables aleatòries gaussianes amb $m = 0$, $\sigma = 1$, independents. Calcular la probabilitat que la distància d'aquest punt a l'origen es trobi entre 1 i 2.

$$f_{XY}(x, y) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Passant a coordenades polars, $f(r, \theta) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r$. La densitat marginal de r és:

$$f(r) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} r e^{-r^2/2} d\theta = r e^{-r^2/2}, \qquad r > 0.$$

La probabilitat demanada és:

$$P(1 < r < 2) = \int_1^2 r e^{-r^2/2} dr = [-e^{-r^2/2}]_1^2 = e^{-1/2} - e^{-2} = 0{,}4712. \blacklozenge$$

Exemple 6.9 Coordenades esfèriques. Partim d'una variable tridimensional (X, Y, Z) i fem el canvi

$$\left\{ \begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \right. \tag{6.11}$$

$0 \le r < \infty,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin\theta.$$

Per tant, la densitat de la VA (R, Θ, Φ) és

$$f(r, \theta, \varphi) = f_{XYZ}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta.$$

Apliquem això a la distribució uniforme en una esfera de radi a centrada a l'origen. Sobre aquesta esfera $f(x, y, z) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi a^3}$. En coordenades esfèriques tenim

$$f(r, \theta, \varphi) = \frac{r^2 \sin\theta}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

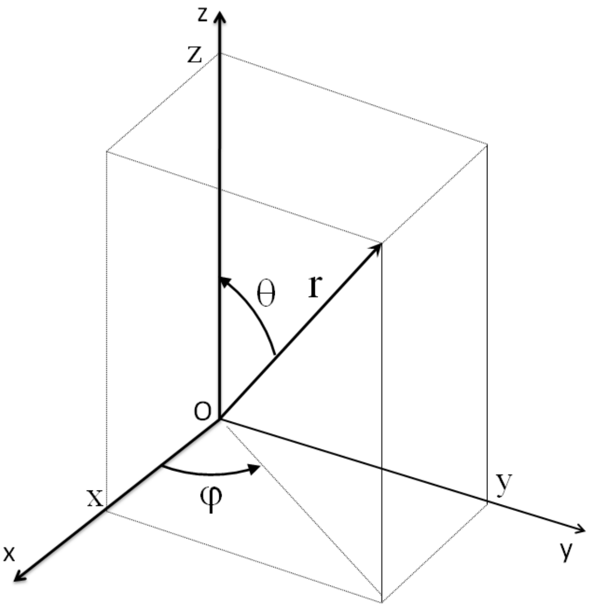


Figura 6.4: Coordenades esfèriques.

per a $0 \le r \le a$. Calculem ara la densitat marginal de R:

$$f(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin\theta}{\frac{4}{3}\pi a^3} d\varphi d\theta = 3\frac{r^2}{a^3}.$$

Aquesta densitat es pot calcular també de la següent manera. La funció de distribució de R és $F(r) = P(R \le r) = \frac{r^3}{a^3}$, quocient entre els volums de l'esfera de radi r i de tota l'esfera. Per tant $f(r) = \frac{dF(r)}{dr} = 3\frac{r^2}{a^3}$. ♦

Els canvis de variable es fan segons les simetries que tingui la distribució que estem utilitzant. Quan es fa un canvi cal vigilar no només com varia la forma funcional de la densitat sinó també com es transformen les possibles regions de frontera que tinguem. El canvi que hem fet en la uniforme sobre una esfera no hagués servit de res en la uniforme sobre un cub ja que la frontera del cub te una expressió complicada en esfèriques. En aquest cas les variables cartesianes són les més naturals.

Algun tipus de funcions pot requerir un tractament una mica particular com es veu en el següent exemple.

Exemple 6.10 Funcions màxim i mínim

Donades dues variables contínues independents X i Y es tracta de trobar les propietats marginals i conjuntes de les variables $U = \min(X,Y)$ i $V = \max(X,Y)$.

Comencem per les marginals.

$$F_U(u) = P(U \le u) = P(\min(X,Y) \le u) = P(X \le u \text{ o } Y \le u) =$$

$$P(X \le u) + P(Y \le u) - P(X \le u \text{ i } Y \le u) = F_X(u) + F_Y(u) - F_X(u)F_Y(u)$$

$$F_V(v) = P(V \le v) = P(\max(X,Y) \le v) = P(X \le v \text{ i } Y \le v)$$

$$= P(X \le v)P(Y \le v) = F_X(v)F_Y(v)$$

Les densitats marginals de U i de V s'obtindrien derivant les anteriors expressions.

La funció de distribució conjunta és

$$F_{UV}(u,v) = P(U \le u, V \le v) = P(\min(X,Y) \le u, \max(X,Y) \le v)$$

que val 0 si $u > v$. Si $u < v$, notem que $\max(X, Y) \leq v$ correspon a la regió $(-\infty, v] \times (-\infty, v]$ i $\min(X, Y) \leq u$ a $\mathbb{R}^2 - (u, \infty) \times (u, \infty)$ de manera que

$$F_{UV}(u, v) = P((-\infty, v] \times (-\infty, v]) - P((u, v] \times (u, v])$$

$$= F_{XY}(v, v) - (F_{XY}(v, v) - F_{XY}(u, v) - F_{XY}(v, u) + F_{XY}(u, u))$$

$$= F_{XY}(u, v) + F_{XY}(v, u) - F_{XY}(u, u).$$

Derivant arribem a

$$f_{UV}(u, v) = \begin{cases} f_{XY}(u, v) + f_{XY}(v, u) & \text{si } u < v \\ 0 & \text{si } u > v \end{cases}$$

El resultat anterior val encara que X, Y no siguin independents. Si ho són, $f_{UV}(u, v) = f_X(u)f_Y(v) + f_X(v)f_Y(u)$ per a $u < v$. ♦

Capítol 7

Paràmetres estadístics de vàries VAs

7.1 Esperança

Generalitzen el teorema de l'esperança unidimensional. Donades dues VAs X i Y amb funció de densitat conjunta $f(x,y)$ considerem la nova VA $Z = g(X,Y)$. Llavors l'esperança de Z verifica

$$E[Z] = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy. \tag{7.1}$$

DEM:

Considerem una partició de $\mathbb{R}$ en segments de longitud Δz_i. Aquesta porta associada una partició de $\mathbb{R}^2$ en regions $\Delta D_{z_i} = \varphi_{z_i+\Delta z_i} - \varphi_{z_i}$ (veure (6.1)) i tenim que

$$P(z_i \leq Z \leq z_i + \Delta z_i) = \int\int_{\Delta D_{z_i}} f(x,y)dxdy.$$

Llavors

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)dz = \lim \sum_{z_i} z_i P(z_i \leq Z \leq z_i + \Delta z_i)$$

$$= \lim \sum_{\Delta D_{z_i}} z_i \int\int_{\Delta D_{z_i}} f(x,y)dxdy = \lim \sum_{\Delta D_{z_i}} \int\int_{\Delta D_{z_i}} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$= \int\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)f(x,y)dxdy. \clubsuit$$

De (7.1) veiem que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$E[\alpha g(X,Y) + \beta h(X,Y)] = \alpha E[g(X,Y)] + \beta E[h(X,Y)]. \tag{7.2}$$

En particular

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]. \tag{7.3}$$

Aquest resultat fonamental facilita el càlcul d'esperances, fins i tot en situacions on és impracticable trobar la funció de probabilitat o de densitat de la variable suma.

Exemple 7.1 Tirem tres daus. Sigui S la variable que dóna la suma dels tres resultats. Què val la seva esperança?

És bastant complicat escriure la funció de probabilitat de S. Però $S = X_1 + X_2 + X_3$ on X_i és el valor obtingut en cada dau. Com $E[X_i] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$ tenim que

$$E[S] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] = \frac{21}{2}. \blacklozenge$$

7.2 Covariància

La covariància de les variables X i Y és el nombre:

$$C[X,Y] = E[(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})]. \tag{7.4}$$

Desenvolupant el producte i utilitzant (7.2) trobem que

$$C[X,Y] = E[XY] - \overline{X}\,\overline{Y}. \tag{7.5}$$

Les següents propietats es demostren fàcilment:

(1) $C[X,Y] = C[Y,X]$,

(2) $V[X] = C[X,X]$,

(3) $C[\alpha X,Y] = \alpha C[X,Y]$ per a $\alpha \in \mathbb{R}$,

(4) $C[X+Y,Z] = C[X,Z] + C[Y,Z]$.

La següent relació involucra la variància i la covariància. Per a tot parell de variables aleatòries X i Y:

$$V[X+Y] = V[X] + V[Y] + 2C[X,Y]. \tag{7.6}$$

DEM:

$$V[X+Y] = E[(X+Y-(\overline{X}+\overline{Y}))^2] = E[((X-\overline{X})+(Y-\overline{Y}))^2] =$$
$$E[(X-\overline{X})^2 + (Y-\overline{Y})^2 + 2(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})] = V[X] + V[Y] + 2C[X,Y]. \clubsuit$$

7.3 Coeficient de correlació

El coeficient de correlació de les variables X i Y és el nombre:

$$\rho = \frac{C[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{7.7}$$

Verifica

$$|\ \rho\ | \leq 1. \tag{7.8}$$

DEM:

Sigui λ un paràmetre real. Llavors

$$E[(\lambda(X-\overline{X}) + (Y-\overline{Y}))^2] = \lambda^2\sigma_X^2 + 2\lambda C[X,Y] + \sigma_Y^2 \geq 0$$

Com el polinomi en λ és sempre positiu, el discriminant $C[X,Y]^2 - \sigma_X^2\sigma_Y^2 \leq 0$. Per tant, $|C[X,Y]| \leq \sigma_X\sigma_Y$ d'on surt (7.8). (Aquesta demostració es la de la desigualtat de Cauchy-Schwartz per productes escalars.) $\clubsuit$

Exemple 7.2 Matriu de covariàncies.

Calcular els paràmetres de d'una variable bidimensional uniforme en la regió $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 2x+y \leq 2\}$.

Com la regió és un triangle d'àrea 1, $f_{XY}(x,y) = 1$ en $\mathcal{R}$. Començarem per calcular les densitats marginals:

$$f_X(x) = \int_0^{2-2x} 1dy = 2(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1, \qquad f_Y(y) = \int_0^{\frac{2-y}{2}} 1dx = \frac{2-y}{2}, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

Ara és fàcil calcular tots els moments de X i de Y

$$m_{X,n} = \int_0^1 x^n \cdot 2(1-x)dx = \frac{2}{(n+1)(n+2)}, \qquad m_{Y,n} = \int_0^2 y^n \cdot \frac{2-y}{2}dy = \frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

D'aquí traiem $m_X = \frac{1}{3}$, $\sigma_X^2 = \frac{1}{6} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{18}$, $m_Y = \frac{2}{3}$, $\sigma_Y^2 = \frac{2}{3} - (\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{9}$. Calculem també

$$E[XY] = \int_0^1 \int_0^{2-2x} xy \cdot 1dydx = 2\int_0^1 x \cdot (1-x)^2 dx = \frac{1}{6}$$

d'on $C[X,Y] = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{18}$, $\rho = -\frac{1}{2}$.

Per qualsevol variable multidimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ els paràmetres de primer i segon grau es poden organitzar en forma matricial amb un *vector d'esperances* $\mathbf{m} = (m_{X_1}, m_{X_2}, \ldots, m_{X_n})$ i una *matriu de covariàncies* $\mathbf{C}$ definida per $C_{i,j} = C[X_i, X_j]$.

En el nostre cas $\mathbf{m} = (m_X, m_Y) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ i

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{-1}{18} \\ \frac{-1}{18} & \frac{4}{18} \end{pmatrix}. \blacklozenge$$

7.4 Moments conjunts

Els **moments conjunts** de les variables X i Y són

$$m_{jk} = E[X^j Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^j y^k f(x,y)dxdy. \tag{7.9}$$

Els primers són $m_{00} = 1$, $m_{10} = \overline{X}$, $m_{01} = \overline{Y}$, etc.

Els **moments centrals** són

$$\mu_{jk} = E[(X - \overline{X})^j (Y - \overline{Y})^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^j (y - m_Y)^k f(x,y)dxdy. \tag{7.10}$$

Els primers són $\mu_{00} = 1$, $\mu_{10} = \mu_{01} = 0$, $\mu_{11} = C[X,Y]$, $\mu_{20} = \sigma_X^2$, $\mu_{02} = \sigma_Y^2$, etc.

7.5 Ortogonalitat

Diem que X i Y són variables aleatòries **ortogonals** si $E[XY] = 0$. En aquest cas escrivim $X \perp Y$.

7.6 Incorrelació

Diem que X i Y són variables aleatòries **incorrelades** si $\rho = 0$. És equivalent a dir $C[X,Y] = 0$ o $E[XY] = \overline{X}\,\overline{Y}$.

Es donen les següents relacions

- X i Y incorrelades $\Leftrightarrow (X - \overline{X}) \perp (Y - \overline{Y})$.
- X i Y incorrelades $\Leftrightarrow V[X+Y] = V[X] + V[Y]$.
- X i Y independents $\Rightarrow$ X i Y incorrelades.

DEM:

La primera és evident a partir de (7.4). La segona prové de la relació (7.6).

Per la tercera, si X i Y són independents $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ i

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = \overline{X}\,\overline{Y}. \clubsuit \end{aligned}$$

Amb una demostració anàloga veiem que en el cas de variables independents $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$. Per variables incorrelades això només es verifica en general per a g i h iguals a la funció identitat. Un cas especial, com s'ha vist en l'exemple 5.7 en són les variables gaussianes:

- Dues variables X i Y conjuntament gaussianes, són incorrelades $\Leftrightarrow$ són independents.

Exemple 7.3 Ja s'han vist alguns resultats sobre variables gaussianes. Completem ara el seu estudi.

Primer, demostrem que, efectivament, la constant ρ que apareix en la densitat és el coeficient de correlació. Per evitar calcular integrals bidimensionals utilitzem els resultats de l'exemple 5.7:

$$E[X\,|\,y] = m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2). \tag{7.11}$$

$$E[XY] = E[E[XY\,|\,Y]] = E[E[X\,|\,Y]Y] = E\left[\left(m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(Y - m_2)\right)Y\right]$$

$$= \left(m_1 - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}m_2\right)E[Y] + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}E[Y^2] = \left(m_1 - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}m_2\right)m_2 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\sigma_2^2 + m_2^2) = m_1m_2 + \rho\sigma_1\sigma_2$$

d'on s'obté immediatament el resultat.

Ara, trobem una parametrització convenient per una variable bidimensional gaussiana arbitrària. Les variables $\frac{X-m_X}{\sigma_X}, \frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}$ són normals amb esperança 0 i variància 1. Considerem les noves variables

$$\begin{cases} Z = \frac{X-m_X}{\sigma_X} + \frac{Y-m_Y}{\sigma_Y} \\ T = \frac{X-m_X}{\sigma_X} - \frac{Y-m_Y}{\sigma_Y} \end{cases}$$

que són normals d'esperança 0 i verifiquen

$$V[Z] = E[Z^2] = E\left[\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X}\right)^2\right] + E\left[\left(\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right] + 2E\left[\frac{(X-m_X)}{\sigma_X}\frac{(Y-m_Y)}{\sigma_Y}\right] = 2(1+\rho),$$

$$V[T] = 2(1-\rho),$$

$$E[ZT] = E\left[\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X}\right)^2\right] - E\left[\left(\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right] = 0,$$

d'on veiem que són incorrelades. Així, unes coordenades especialment útils per treballar amb la variable bidimensional (X,Y) són

$$\begin{cases} U = \frac{1}{\sqrt{2(1+\rho)}}\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X} + \frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right) \\ V = \frac{1}{\sqrt{2(1-\rho)}}\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X} - \frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right) \end{cases}$$

U, V són variables normals estandarditzades independents.

Notem que

$$f_{UV}(u,v) = f_U(u)f_V(v) = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}.$$

A l'efectuar el pas a les variables X, Y es recupera la densitat normal (5.11).$\blacklozenge$

Capítol 8

Estimació de variables aleatòries

8.1 Concepte i criteris d'estimació

Considerem un experiment que té associada una variable aleatòria Y. Si repetim un cert nombre N de vegades aquest experiment obtenim els resultats $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$. Estimar la variable Y vol dir fer una predicció que s'acosti el màxim possible a aquests resultats.

Suposem que la predicció resulta ser $C_1, C_2, \ldots, C_N$. L'error comès vindrà donat per algun tipus de "distància" $d(Y_i, C_i)$. Globalment posarem $\epsilon = \frac{1}{N}\sum_i d(Y_i, C_i)$. Les prediccions s'haurien de triar de manera que ϵ fos el més petit possible.

Es poden considerar diferents tipus d'error com, per exemple, $d(Y_i, C_i) = |Y_i - C_i|$. Quan elegim $d(Y_i, C_i) = (Y_i - C_i)^2$ diem que estem fent l'**estimació en mitjana quadràtica**. Aquesta és la que considerarem en el que segueix.

Donat que les condicions de l'experiment no varien, les variables Y_i són distribuïdes idènticament a la variable Y. Llavors, si els elements C_i són nombres determinats, aquests hauran de ser sempre el mateix, $C_i = c$ per a tot i.

Per una altra part, pot ser que el nostre experiment tingui associades altres variables aleatòries $X_1, X_2, \ldots, X_r$ de les quals Y no és independent. En aquest cas és convenient estimar Y amb una variable aleatòria de la forma $\widehat{Y} = c(X_1, X_2, \ldots, X_r)$. C_i seria el resultat i-èsim d'aquesta variable.

Com l'error ϵ depèn de variables aleatòries, el seu valor no està fixat. La magnitud que finalment ens dóna la bondat de l'estimació és l'**error quadràtic mitjà**:

$$\overline{\epsilon} = E[\epsilon] = \frac{1}{N}\sum_i E[(Y_i - C_i)^2] = E[(Y - \widehat{Y})^2]. \tag{8.1}$$

El procediment a seguir per estimar la VA Y és fixar un tipus d'estimació $\widehat{Y}$ i minimitzar $\overline{\epsilon}$ per determinar del tot $\widehat{Y}$. L'error associat a l'estimació serà finalment $\overline{\epsilon}_{min}$. $\widehat{Y}$ s'anomena **estimador**.

Exemple 8.1 L'experiment consisteix en seleccionar una persona a l'atzar. La variable Y que ens interessa estimar és l'alçada d'aquesta persona. La seqüència de valors Y_i consisteix en mesurar les alçades de vàries persones triades a l'atzar, això és, fer un mostreig estadístic. S'entén que no coneixem la distribució que segueix Y però notem que al fer-ne un mostreig podem avaluar amb prou precisió els seus paràmetres com l'esperança o la desviació típica. Les variables X_i podrien correspondre al sexe, edat, pes, color dels ulls, etc. La idea és avaluar l'alçada de la persona coneixent, per exemple, el seu pes.♦

Darrera l'estimació hi han dos possibles objectius. Un és fer realment una predicció d'un resultat abans que aquest es produeixi. Per exemple, predir cotitzacions a la borsa. En aquest cas les variables X_i serien els indicadors econòmics que si que coneixem. L'altre objectiu, relacionat amb l'anterior, és establir relacions entre magnituds aleatòries. És clar que no hi ha una relació funcional fixa entre el pes i l'alçada de les persones. El màxim que podem aconseguir és tenir una bona estimació d'una magnitud coneguda l'altra. A vegades el problema és trobar variables apropiades per fer l'estimació. Per exemple, en medicina quan es vol establir l'origen o els factors de risc d'una malaltia.

8.2 Estimació per una constant

Estimem Y per $\widehat{Y} = c$ constant. La millor estimació és $c = E[Y]$ i $\overline{\epsilon}_{min} = V[Y]$.

DEM:

$$\begin{aligned}\overline{\epsilon} = E[(Y-c)^2] = c^2 - 2E[Y]c + E[Y^2] &= (c - E[Y])^2 + E[Y^2] - E[Y]^2 \\ &= (c - E[Y])^2 + V[Y],\end{aligned}$$

que es minimitza quan $c - E[Y] = 0$. ♣

8.3 Estimació no lineal

Estimem Y per $\widehat{Y} = c(X)$ funció a determinar de la VA X. La millor estimació és $c(x) = E[Y\,|\,x]$.

DEM:

$$\begin{aligned}\overline{\epsilon} = \int_{\mathbb{R}^2} (y - c(x))^2 f(x,y)dxdy &= \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} (y - c(x))^2 f(y\,|\,x)dy) f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (c(x)^2 - 2E[Y\,|\,x]c(x) + E[Y^2\,|\,x]) f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ((c(x) - E[Y\,|\,x])^2 + V[Y\,|\,x]) f(x)dx.\end{aligned}$$

Com $f(x) \geq 0$ la integral es minimitza si $c(x) - E[Y\,|\,x] = 0$. L'error mínim val $\int_{-\infty}^{\infty} V[Y\,|\,x]f(x)dx$. ♣

La funció $c(x) = E[Y \mid x]$ s'anomena **corba de regressió.** Notem que si intentem mesurar una relació fixada entre dues variables però el que s'obté és una VA bidimensional degut als errors experimentals, la corba de regressió seria el que prendríem com relació entre les dues variables. En aquest cas la corba de regressió fa tornar (regressar) els punts que s'han mesurat al seu lloc correcte.

Hi han dos casos extrems de l'estimació no lineal:

- X i Y són independents. Llavors $E[Y\,|\,x] = E[Y]$ i $c(x) = E[Y]$ que és una constant.
- $Y = g(X)$, és a dir, hi ha la màxima dependència possible. En aquest cas la funció de densitat conjunta es pot expressar $f(x,y) = f(x)\delta(y - g(x))$ i s'obté $E[Y \mid x] = g(x)$. Per tant, $c(x) = g(x)$ i $\overline{\epsilon}_{min} = 0$.

En el primer cas, la informació donada per X és irrellevant per estimar Y. Per exemple, tractar d'estimar l'alçada mitjançant el color dels ulls. En el segon, X determina completament Y. Per exemple, estimar l'edat a partir de l'any de naixement. En la pràctica, ens interessen els casos intermedis on X dóna informació rellevant sobre Y però no la determina.

8.4 Estimació lineal

Estimem Y per $\widehat{Y} = aX + b$ on a i b són constants. La millor estimació ve donada per

$$a = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \quad b = m_Y - \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}m_X, \quad \overline{\epsilon}_{min} = \sigma_Y^2(1 - \rho^2). \tag{8.2}$$

La recta $y = ax + b$ s'anomena recta de regressió.

DEM: $\overline{\epsilon} = E[(Y-(aX+b))^2] = E[((Y-aX)-b)^2]$. Així b ha de ser la millor estimació constant de $Y-aX$. Per tant $b = E[Y-aX] = m_Y - am_X$. Ara tenim

$$\begin{aligned}\overline{\epsilon} &= E[((Y-m_Y)-a(X-m_X))^2] = a^2\sigma_X^2 - 2aC[X,Y] + \sigma_Y^2 \\ &= a^2\sigma_X^2 - 2a\rho\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2 = (a\sigma_X - \rho\sigma_Y)^2 + \sigma_Y^2(1-\rho^2),\end{aligned}$$

que es minimitza quan $a\sigma_X - \rho\sigma_Y = 0$. ♣

Un es pot preguntar per que fer l'estimació lineal si la no lineal dóna un error més petit. Un motiu és que l'estimació no lineal exigeix conèixer la distribució conjunta de X i Y mentre que la lineal fa servir només els paràmetres més bàsics. També cal notar que en el cas de variables normals l'estimació no lineal coincideix amb la lineal (veure (7.11)).

8.5 Principi d'ortogonalitat

Per un experiment fixat, el conjunt de variables aleatòries que podem considerar formen un espai vectorial ja que la suma de VAs i el producte d'una VA per un nombre real són noves variables aleatòries. Donades Z i T VAs podem definir l'operació

$$< Z, T >= E[ZT]. \tag{8.3}$$

Aquesta operació és bilineal, simètrica, definida positiva i no degenerada. Constitueix, per tant, un producte escalar en aquest espai vectorial. De fet, aquesta construcció es incorrecta ja que una variable aleatòria pot no tenir esperança. Ens restringirem, per tant, a variables per les quals les operacions considerades existeixen. Això vol dir treballar en un espai vectorial més petit.

Si tota la informació generada per un experiment queda ben codificada en una variable n-dimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, l'espai de variables aleatòries es pot considerar definit com un espai de funcions $Z = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. La restricció que considerem són les de "quadrat mesurable", és a dir, aquelles per les que existeix $E[Z^2]$.

El producte escalar (8.3) ens defineix una norma $\|Z\| =< Z, Z >^{\frac{1}{2}}$. L'error quadràtic que consideràvem és precisament $\overline{\epsilon} = \|Y - \widehat{Y}\|^2$. Per tant, podem usar tècniques dels espais euclidians quan $\widehat{Y}$ correspon a alguna varietat lineal.

La forma general de l'estimació lineal és

$$\widehat{Y} = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n, \tag{8.4}$$

on a_i són constants i X_i són variables aleatòries. Quan considerem només una VA fonamental a part de Y l'estimació lineal pren la forma:

$$\widehat{Y} = a_1g_1(X) + a_2g_2(X) + \cdots + a_ng_n(X), \tag{8.5}$$

on g_i són funcions fixades. En aquest cas $X_i = g_i(X)$.

També pot donar-se que les variables X_i s'obtinguin a partir de vàries variables. Per exemple, si X, Z, T són variables aleatòries, l'estimador $\widehat{Y} = aXT + bT^2Z$ és lineal amb $X_1 = XT$ i $X_2 = T^2Z$.

Així, (8.4) descriu un hiperplà $\mathcal{H}$, la millor estimació és l'element d'aquest hiperplà més proper a Y i l'error és la distància (al quadrat) entre Y i $\mathcal{H}$.

Com se sap, la millor estimació ve donada per la projecció ortogonal de Y sobre $\mathcal{H}$. Si aquesta projecció és $\widehat{Y}$ tindrem que $Y - \widehat{Y}$ és ortogonal a $\mathcal{H}$. Per tant, $(Y - \widehat{Y}) \perp X_i$, $i = 1, \ldots, n$. Hem arribat així al principi d'ortogonalitat ("l'error és ortogonal a les dades")

$$< Y - \widehat{Y}, X_i >= 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{8.6}$$

Aquest és un sistema d'equacions lineals que podem escriure

$$E[\widehat{Y}X_i] = E[YX_i], \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{8.7}$$

La solució d'aquest sistema ens dona els valors de a_i.

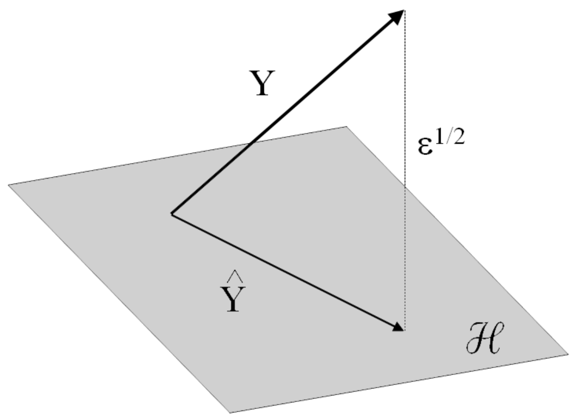


Figura 8.1: Estimació lineal.

Exemple 8.2 Tornem a deduir l'expressió de la recta de regressió. Posem $X_1 = g_1(X) = X$, $X_2 = g_2(X) = 1$. L'estimador és $\widehat{Y} = a_1X + a_2$. El principi d'ortogonalitat produeix les equacions

$$\begin{cases} < a_1X + a_2, X >=< Y, X > \\ < a_1X + a_2, 1 >=< Y, 1 > \end{cases}$$

és a dir,

$$\begin{cases} a_1E[X^2] + a_2E[X] & = E[XY] \\ a_1E[X] + a_2 & = E[Y] \end{cases}$$

De la segona equació traiem $a_2 = E[Y] - a_1E[X]$ i

$$a_1 = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{E[X^2] - E[X]^2} = \frac{C[X,Y]}{\sigma_X^2} = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X},$$

que són els resultats (8.2).

Recordem que la projecció es pot calcular també a partir d'una base ortonormal. En aquest exemple podem prendre $X_1 = \frac{X-m_X}{\sigma_X}$, $X_2 = 1$ (notem que X_1 és la X normalitzada) amb el que la projecció és

$$\widehat{Y} =< X_1, Y > X_1+ < X_2, Y > X_2. \blacklozenge$$

Exemple 8.3 L'estimació de la forma $\widehat{Y} = aX$ s'anomena estimació homogènia. Per determinar a tenim l'equació $< X, aX >=< X, Y >$ d'on

$$a = \frac{E[XY]}{E[X^2]}. \tag{8.8}$$

De manera més general se sol anomenar **estimació no homogènia** a la de tipus $\widehat{Y} = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n + b$ on b és una constant, si bé no és més que un cas de l'estimació lineal. $\blacklozenge$

Finalment cal notar que per calcular l'error mínim

$$\overline{\epsilon}_{min} = E[(Y - \widehat{Y})^2] = E[(Y - \widehat{Y})Y] - E[(Y - \widehat{Y})\widehat{Y}] = E[(Y - \widehat{Y})Y] \tag{8.9}$$

ja que la segona esperança és nul·la (pel mateix principi d'ortogonalitat, $(Y - \widehat{Y}) \perp \widehat{Y}$). Notem també que $\overline{\epsilon}_{min} = E[Y^2] - E[\widehat{Y}^2]$ (Pitàgores).

Capítol 9

Entropia

9.1 Concepte d'entropia

Suposem que hem de transmetre cert tipus de missatges i volem mesurar la quantitat d'informació que contenen. Aquesta quantitat d'informació no és tant una característica dels missatges en si com del conjunt total de possibles missatges. Si hem de transmetre, per exemple, la situació meteorològica en cert lloc, caldrà molta poca informació per dir només si fa bon temps o mal temps mentre que en caldrà molta més per fer un informe detallat amb els valor de diferents paràmetres atmosfèrics, etc. La quantitat d'informació és més gran com més missatges diferents vulguem permetre. Cal més informació per comunicar el resultat de la tirada d'un dau que per fer-ho amb la tirada d'una moneda. Si hi ha N possibles missatges diferents, la quantitat d'informació al rebre'n un és certa funció $H(N)$.

Si enviem parelles de missatges on el primer admet N_1 possibilitats i el segon N_2 possibilitats, podem considerar que enviem un sol missatge amb N_1N_2 possibilitats. La informació d'aquest missatge compost ha de ser la suma d'informacions dels seus dos missatges components. Per tant, esperem que

$$H(N_1N_2) = H(N_1) + H(N_2). \tag{9.1}$$

La única funció que verifica això és el logaritme. Així, ha d'haver una constant k tal que

$$H(N) = k \ln N. \tag{9.2}$$

Notem que si escrivim $k = \dfrac{1}{\ln a}$, llavors $H(N) = \log_a N$.

Des d'una altra perspectiva, representant els missatges amb seqüències binàries de B bits podem distingir 2^B missatges diferents. Així podem imposar $2^B = N$ i identificar $H(N)$ amb $B = \log_2 N$. Quantitat d'informació és correspon així amb quantitat de bits.

9.2 Entropia i probabilitat

Si un espai mostral Ω conté n resultats equiprobables, la informació que guanyem al conèixer el resultat és $B = \log_2 n$.

Dividim ara Ω en dues parts A_1, A_2 de mides n_1, n_2. Anomenem $U = \{A_1, A_2\}$ aquesta partició. Si el resultat es troba en A_i, el nombre de bits per representar-lo és $B_i = \log_2 n_i$, $i = 1, 2$. La quantitat d'informació necessària per representar el resultat una vegada sabem en quina part es troba el resultat és la mitjana ponderada $p_1 \log_2 n_1 + p_2 \log_2 n_2$.

Ara, la informació guanyada en conèixer el resultat és suma de la informació guanyada al saber en quina part (A_1 o A_2) es troba el resultat, $H(U)$, més la informació associada al resultat quan ja sabem en quina part es troba:

$$\log_2 n = H(U) + p_1 \log_2 n_1 + p_2 \log_2 n_2. \tag{9.3}$$

Utilitzant $p_i = \frac{n_i}{n}$:

$$\log_2 n = H(U) + p_1 \log_2 p_1 n + p_2 \log_2 p_2 n = H(U) + p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2 + \log_2 n.$$

d'on

$$H(U) = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2. \tag{9.4}$$

Això ens condueix a definir, per cada partició finita de Ω, $U = \{A_i\}_{i=1,\ldots,n}$, la seva entropia:

$$H(U) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i. \tag{9.5}$$

Es pren el logaritme neperià per comoditat en els càlculs. Per expressar el resultat en bits caldria dividir per $\ln 2$.

L'entropia és un nombre que mesura la informació guanyada en saber en quin esdeveniment de U es troba el resultat de l'experiment aleatori. Alternativament, podem interpretar que també mesura la incertesa que tenim sobre aquest fet abans de conèixer el resultat.

També parlem de l'entropia d'un sistema quan aquest sistema pot trobar-se en diferents estats amb certes probabilitats. En aquest cas s'interpreta també H com una mesura del grau de desordre del sistema, ja que un sistema desordenat requereix més informació per ser descrit.

Històricament el concepte d'entropia apareix a mitjans del segle dinou dins de la termodinàmica (Clausius). Es tracta, aquí, d'una variable d'estat relacionada amb els intercanvis de calor. La posterior formulació de la mecànica estadística (Boltzmann) lliga l'entropia amb la descripció probabilística dels sistemes físics. A mitjans del segle vint, Shannon utilitza l'entropia com a element clau en la teoria de la informació i la codificació.

Exemple 9.1 En l'experiment de tirar un dau considerem les dues particions $U = \{\{i\}\}_{i=1,\ldots,6}$ i $V = \{\text{parell}, \text{imparell}\}$. Llavors:

$$H(V) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \ln 2 = 0{,}69,$$

$$H(U) = -\frac{1}{6}\ln\frac{1}{6}\cdot 6 = \ln 6 = 1{,}79.$$

El resultat en bits seria 1 en el primer cas (un bit per expressar un resultat dels dos possibles) i 2,58 en el segon cas (amb 3 bits tenim 8 possibilitats, i 6 és una mica menor que 8). ♦

Exemple 9.2 Tirem una moneda amb $P(\text{cara}) = p$. La partició és $\{\text{cara}, \text{creu}\}$. L'entropia val

$$H = -p \ln p - (1-p)\ln(1-p).$$

Tenim que $\dfrac{dH}{dp} = \ln\left(\dfrac{1}{p} - 1\right)$ d'on s'obté un màxim en $p = \frac{1}{2}$.

Val la pena notar que per a $p \to 0$ i $p \to 1$ l'entropia tendeix a 0. En els càlculs d'entropia $0 \cdot \ln 0 = 0$, les parts amb probabilitat nul·la no hi contribueixen.

La gràfica mostra la funció $H(p)$.

♦

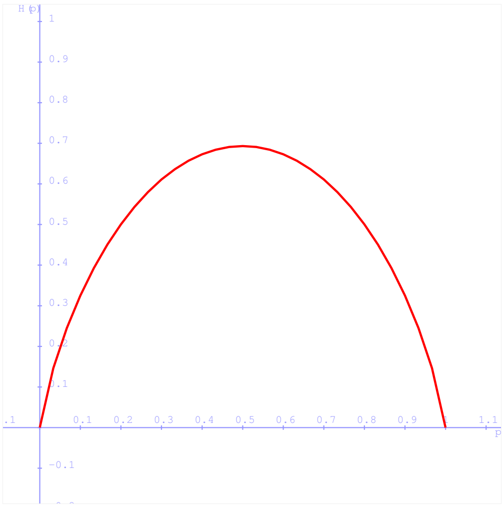


Figura 9.1: Entropia en la tirada d'una moneda.

9.3 Particions

Com s'ha vist, l'entropia depèn no només de l'experiment aleatori sino també de la partició de l'espai mostral que es consideri. En aquest apartat definim alguns conceptes referits a les particions.

Una partició de Ω és una col·lecció d'esdeveniments $U = \{A_i\}_{i\in I}$ disjunts dos a dos, tals que la unió de tots dóna Ω. En particular, anomenem *partició binària* la de la forma $\{A, \overline{A}\}$ i *partició per elements* a $U = \{\{\omega\}\}_{\omega\in\Omega}$.

Donades dues particions $U = \{A_i\}_{i\in I}$ i $V = \{B_j\}_{j\in J}$, direm que V és un *refinament* de U si per a tot $j \in J$ existeix algun $i \in I$ tal que $B_j \subset A_i$. També direm que V és *més fina* que U i escrivim $V \prec U$ (veure figura).

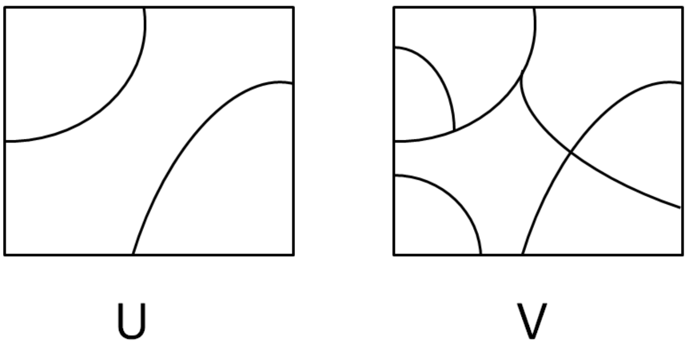


Figura 9.2: Una partició U i un refinament seu V.

El *producte de particions* es defineix

$$U \cdot V = \{A_i \cap B_j\}_{i\in I, j\in J}. \tag{9.6}$$

on no es considereren les interseccions que donen conjunts buits.

Es veu fàcilment que $W = U \cdot V$ verifica $W \prec U$ i $W \prec V$. De fet, és el mínim refinament comú a U i V. De la definició del producte s'obtenen immediatament les següents propietats:

(1) $U \cdot V = V \cdot U$,

(2) $(U \cdot V) \cdot W = U \cdot (V \cdot W)$,

(3) $U \prec V, V \prec W \Rightarrow U \prec W$,

(4) $V \prec U \Rightarrow U \cdot V = V$.

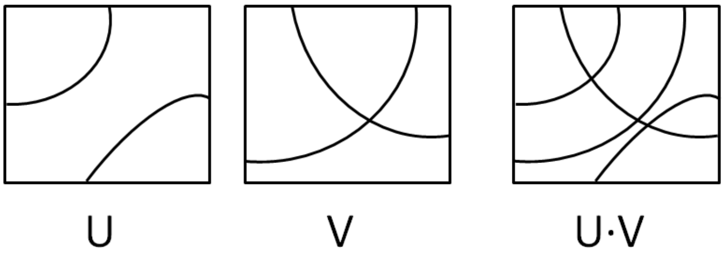


Figura 9.3: Producte de particions.

9.4 Entropia

Considerem particions finites $U = \{A_i\}_{i=1,\ldots,n}$ i, com s'ha vist abans, definim la seva entropia:

$$H(U) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i. \tag{9.7}$$

on $p_i = P(A_i)$.

L'entropia verifica les següents propietats:

(1) L'entropia augmenta al refinar la partició. És a dir, $V \prec U \Rightarrow H(V) \geq H(U)$.

(2) L'entropia augmenta al "igualar" les probabilitats dels elements de la partició.

(3) L'entropia és màxima quan tots els elements de la partició tenen la mateixa probabilitat.

(4) L'entropia d'un sistema compost de dos subsistemes independents és la suma de les entropies d'aquests subsistemes. És a dir, si $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ i U i V són particions de Ω_1 i Ω_2 respectivament, $H(U \times V) = H(U) + H(V)$.

DEM:

(1) Donat $U = \{A_i\}_{i \in I}$, podem escriure un refinament seu en la forma $V = \{B_{ij}\}_{i \in I, j \in J_i}$ on $\{B_{ij}\}_{j \in J_i}$ és una partició de A_i. Definim $p_{ij} = P(B_{ij})$ i tenim $p_i = \sum_j p_{ij} = P(A_i)$. Com el logaritme és una funció creixent: $\ln p_i = \ln \sum_k p_{ik} \geq \ln p_{ij}$ per a tot j. Llavors

$$H(V) = -\sum_i \sum_j p_{ij} \ln p_{ij} \geq -\sum_i \sum_j p_{ij} \ln p_i = -\sum_i p_i \ln p_i = H(U).$$

(2) Considerem dos elements de la partició amb probabilitats $p_1 < p_2$. Es tracta de veure que si canviem aquestes probabilitats per $p_1 + \epsilon \leq p_2 - \epsilon$ l'entropia augmenta. La contribució a l'entropia d'aquests dos termes és $h(\epsilon) = -(p_1 + \epsilon) \ln(p_1 + \epsilon) - (p_2 - \epsilon) \ln(p_2 - \epsilon)$. Ara, és $\dfrac{dh(\epsilon)}{d\epsilon} = \ln \dfrac{p_2 - \epsilon}{p_1 + \epsilon} \geq 0$ ja que l'argument del logaritme és major o igual que 1. Per tant, la funció augmenta amb ϵ.

(3) Aplicant la propietat anterior, si no fossin totes les probabilitats iguals podríem fer créixer l'entropia. Llavors les probabilitats han de ser iguals en el màxim.

Una demostració alternativa la tenim cercant els extrems de $H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_i p_i \ln p_i$ sotmesa al lligam $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Introduint un multiplicador de Lagrange λ es tracta de trobar els extrems de $\Psi(p_1, p_2, \ldots, p_n, \lambda) = -\sum_i p_i \ln p_i + \lambda(\sum_i p_i - 1)$. A l'anular les derivades parcials resulta $-\ln p_i - 1 + \lambda = 0$ per a $i = 1, 2, \cdots, n$ i $\sum_i p_i = 1$. La solució és $p_i = \frac{1}{n}$ per a tot i, corresponent a un màxim.

(4) $U = \{A_i\}_{i\in I}$ amb $\alpha_i = P(A_i)$ i $V = \{B_j\}_{j\in J}$ amb $\beta_j = P(B_j)$. Llavors $U \times V = \{A_i \times B_j\}_{i\in I, j\in J}$ amb $P(A_i \times B_j) = \alpha_i\beta_j$ i

$$H(U\times V) = -\sum_{ij} \alpha_i\beta_j \ln \alpha_i\beta_j = -\sum_{ij}\alpha_i\beta_j \ln\alpha_i - \sum_{ij}\alpha_i\beta_j\ln\beta_j = -\sum_i \alpha_i(\sum_j \beta_j)\ln\alpha_i - \sum_j(\sum_i \alpha_i)\beta_j\ln\beta_j$$

$$= -\sum_i \alpha_i \ln\alpha_i - \sum_j \beta_j\ln\beta_j = H(U) + H(V). \clubsuit$$

9.5 Entropia condicionada

Si B és un esdeveniment amb $P(B) \neq 0$ i $U = \{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ una partició, definim l'entropia de U condicionada a l'esdeveniment B:

$$H(U|B) = -\sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)\ln P(A_i|B). \tag{9.8}$$

Donada una altra partició $V = \{B_j\}_{j=1,\dots,m}$, definim l'entropia de U condicionada a V com la mitjana ponderada de les entropies de U condicionades als esdeveniments de V:

$$H(U|V) = \sum_{j=1}^{m} H(U|B_j)P(B_j). \tag{9.9}$$

Notem que

$$H(U|V) = -\sum_{i,j} P(A_i|B_j)P(B_j)\ln P(A_i|B_j) = -\sum_{i,j} P(A_i\cap B_j)\ln P(A_i|B_j). \tag{9.10}$$

Exemple 9.3 En l'experiment de tirar un dau considerem les dues particions $U = \{\{i\}\}_{i=1,\dots,6}$ i $V = \{\text{parell}, \text{imparell}\}$. Ja hem vist que $H(U) = \ln 6$. Ara:

$$H(U|\text{parell}) = H(U|\text{imparell}) = -\frac{1}{3}\ln\frac{1}{3}\cdot 3 = \ln 3.$$

$$H(U|V) = H(U|\text{parell})P(\text{parell}) + H(U|\text{imparell})P(\text{imparell}) = \ln 3.$$

$H(U|V)$ és l'entropia de U quan sabem a quina part de V pertany el resultat. En aquest cas sabent la paritat del resultat només cal distingir 3 valors. D'aquí el $\ln 3$. ♦

9.6 Entropia del producte de particions

Donades dues particions $U = \{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ i $V = \{B_j\}_{j=1,\dots,m}$ tenim:

$$H(U) = -\sum_i P(A_i)\ln P(A_i) = -\sum_{i,j} P(A_i\cap B_j)\ln P(A_i),$$

$$H(V) = -\sum_{i,j} P(A_i\cap B_j)\ln P(B_j),$$

ja que $\sum_j P(A_i\cap B_j) = P(A_i)$ i $\sum_i P(A_i\cap B_j) = P(B_j)$. Llavors:

$$H(U) + H(V) = -\sum_{i,j} P(A_i\cap B_j)\ln P(A_i)P(B_j). \tag{9.11}$$

Per altra banda, tenim:

$$H(U\cdot V) = -\sum_{i,j} P(A_i\cap B_j)\ln P(A_i\cap B_j). \tag{9.12}$$

Es verifiquen llavors les següents propietats:

(1) $H(U \cdot V) \leq H(U) + H(V)$.

(2) Si U i V són independents, $H(U \cdot V) = H(U) + H(V)$.

(3) $H(U \cdot V) = H(U) + H(V|U) = H(V) + H(U|V)$

(4) $V \prec U \Rightarrow H(U|V) = 0$.

(5) Si U i V són independents, $H(U|V) = H(U)$.

DEM:

(1) La funció $\ln x$ sempre és convexa i per tant va per sota de qualsevol recta tangent, en particular la que passa pel punt $(1,0)$, $y = x - 1$. Llavors, per a tot $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$. Ara:

$$H(U \cdot V) - H(U) - H(V) = \sum_{i,j} P(A_i \cap B_j) \ln \frac{P(A_i)P(B_j)}{P(A_i \cap B_j)}$$

$$\leq \sum_{i,j} P(A_i \cap B_j) \left(\frac{P(A_i)P(B_j)}{P(A_i \cap B_j)} - 1 \right) = \sum_{i,j} (P(A_i)P(B_j) - P(A_i \cap B_j)) = 1 - 1 = 0.$$

(2) Si les particions són independents, per a tot i, j $P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j)$. Llavors (9.11) i (9.12) coincideixen.

(3) Utilitzant (9.10):

$$H(U|V) = -\sum_{i,j} P(A_i \cap B_j) \ln \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)}$$

$$= -\sum_{i,j} P(A_i \cap B_j) \ln P(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} P(A_i \cap B_j) \ln P(B_j)$$

$$= H(U \cdot V) + \sum_j P(B_j) \ln P(B_j) = H(U \cdot V) - H(V).$$

(4) $V \prec U \Rightarrow U \cdot V = V$. Utilitzant la propietat (3), $H(V) = H(V) + H(U|V) \Rightarrow H(U|V) = 0$

(5) Utilitzant la propietat (3) i que al ser independents $H(U \cdot V) = H(U) + H(V)$ tenim $H(U) + H(V) = H(V) + H(U|V)$ d'on $H(U|V) = H(U)$. ♣

9.7 Informació mútua

La informació mútua de dues particions U i V es defineix

$$I(U, V) = H(U) + H(V) - H(U \cdot V). \tag{9.13}$$

A partir de l'apartat anterior es demostren les següents propietats:

(1) $I(U, V) \geq 0$.

(2) Si U i V són independents, $I(U, V) = 0$.

(3) $I(U, V) = H(U) - H(U|V)$.

9.8 Entropia de variables aleatòries

Si X és una variable discreta amb funció de probabilitat P_X definim la seva entropia com l'associada a la partició donada pels possibles valors de X, x_k, on k és un índex numerable:

$$H(X) = -\sum_k P_X(x_k) \ln P_X(x_k). \tag{9.14}$$

Tenint en compte el teorema de l'esperança, resulta $H_X = E[-\ln P_X(X)]$.

Exemple 9.4 Calculem l'entropia d'una variable geomètrica de paràmetre p. La seva funció de probabilitat és $P_X(k) = pq^{k-1}$ per a $k \geq 1$.

$$H_X = E[-\ln(pq^{X-1})] = -E[\ln p+(X-1)\ln q] = -\ln p-\left(\frac{1}{p}-1\right)\ln q = -\frac{p\ln p+(1-p)\ln(1-p)}{p}.$$

Si $p \to 1$, $H_X \to 0$. Efectivament en aquest cas la variable pren un únic valor ($X = 1$) amb probabilitat 1.

Pel contrari, si $p \to 0$, $H_X \to \infty$. En aquest límit les probabilitats de tots els valors possibles tendeixen a igualar-se. Com hi ha infinits valors possibles, l'entropia es fa infinita. ♦

Considerem ara que X és una variable aleatòria contínua amb densitat f_X. Com X pren valors en $\Omega_X \subset \mathbb{R}$ que és un conjunt no numerable, farem una partició U_Π de Ω_X a partir d'una divisió numerable $\Pi = \{x_k\}$. Així $U_\Pi = \{[x_k, x_{k+1}]\}_k$. Les longituds dels subintervals de la partició són $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Volem definir l'entropia de X a partir de l'entropia de U_Π en el límit $\Delta x_k \to 0$. En aquest cas podem aproximar $P(X \in [x_k, x_{k+1}]) \approx f_X(x_k)\Delta x_k$ i tenim

$$H(U_\Pi) \approx -\sum_k f_X(x_k)\Delta x_k \ln(f_X(x_k)\Delta x_k) = -\sum_k f_X(x_k)\ln f_X(x_k)\Delta x_k - \sum_k f_X(x_k)\Delta x_k \ln \Delta x_k.$$

El primer terme tendeix a $-\int_{\Omega_X} f_X(x)\ln f_X(x)dx$. El segon, però, és divergent. Si, per exemple, fem la partició regular, amb $\Delta x_k = \delta$ per a tot k, aquest terme es comporta com $-\int_{\Omega_X} f_X(x)\ln \delta dx = -\ln\delta \to \infty$ per a $\delta \to 0$.

Aquesta divergència reflecteix el fet que per descriure un nombre real arbitrari necessitem infinits bits (seqüència decimal infinita). El que farem és utilitzar el primer terme com definició de l'entropia d'una variable contínua:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ln f_X(x)dx. \tag{9.15}$$

En aquest cas, $H_X = E[-\ln f_X(X)]$.

En el cas de vàries variables conjuntament contínues (suposem-ne dues, X i Y amb densitat conjunta $f(x, y)$) es defineix l'*entropia conjunta*:

$$H(X, Y) = E[-\ln f(X, Y)]. \tag{9.16}$$

L'*entropia condicionada*:

$$H(X|Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)\ln f(x|y)dx\right) f(y)dy. \tag{9.17}$$

La *informació mútua*:

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \tag{9.18}$$

Com passava amb l'entropia de les particions,

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X|Y) \tag{9.19}$$

DEM:

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x,y)}{f(y)}\ln\left(\frac{f(x,y)}{f(y)}\right)f(y)dxdy = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ln\left(\frac{f(x,y)}{f(y)}\right)dxdy \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ln f(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ln f(y)dxdy \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ln f(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\ln f(y)dy = H(X,Y) - H(Y). \clubsuit \end{aligned}$$

Per tant, $I(X, Y) = H(X) - H(X|Y)$.

Exemple 9.5 Calculem l'entropia d'una variable exponencial de paràmetre λ.

Notem que si $f_X(x) = Ke^{-\varphi(x)}$, $H(X) = E[-\ln K + \varphi(X)] = -\ln K + E[\varphi(x)]$.

Com $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $H(X) = -\ln \lambda + E[\lambda X] = 1 - \ln \lambda = \ln \dfrac{e}{\lambda}$.

Per a $\lambda \to 0$, $H_X \to \infty$. En aquest límit la dispersió augmenta i la densitat tendeix a nivellar-se.

Per a $\lambda \to \infty$, $H_X \to -\infty$. En aquest límit la variable tendeix a la constant 0. L'entropia hauria de tendir a 0 però hem sostret un factor infinit al definir l'entropia. Això explica el $-\infty$. ♦

Exemple 9.6 Sigui $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una variable multidimensional uniforme en una regió $D \subset \mathbb{R}^n$. La seva densitat val $\dfrac{1}{\mu(D)}$ on $\mu(D)$ és la mesura del conjunt D (longitud, per a $n = 1$, àrea, per a $n = 2$, etc). Llavors

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = E[-\ln f(X_1, X_2, \ldots, X_n)] = \ln \mu(D). \ \blacklozenge$$

Exemple 9.7 Calculem les entropies individuals i conjuntes de X i Y conjuntament gaussianes.

$$H(X) = E\left[-\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} + \frac{(X - m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] = \ln(\sqrt{2\pi}\sigma_1) + \frac{1}{2}.$$

Similarment, $H(Y) = \ln(\sqrt{2\pi}\sigma_2) + \dfrac{1}{2}$. L'entropia conjunta és

$$H(X,Y) = E\left[-\ln \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(X-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(X-m_1)}{\sigma_1}\frac{(Y-m_2)}{\sigma_2} + \frac{(Y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}\right]$$

$$= \ln(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}) + \frac{1}{2(1-\rho^2)}(1 - 2\rho\cdot\rho + 1) = \ln(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}) + 1.$$

Amb això podem deduir $H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = \dfrac{1}{2} + \ln(\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2})$, $H(Y|X) = \dfrac{1}{2} + \ln(\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})$.

La informació mútua val $I(X,Y) = H(X) - X(X|Y) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$. $I(X,Y)$ és zero quan X i Y són independents ($\rho = 0$) i augmenta quant ρ creix. ♦

Part III

Processos estocàstics

Capítol 10

Introducció als processos estocàstics

10.1 Definició de procés estocàstic

Parlem de variables aleatòries quan el resultat d'un experiment aleatori és un o més nombres reals (VA unidimensional o multidimensional). Un **procés estocàstic** és quan el resultat de l'experiment és una funció.

Anomenem $X(t)$ a aquesta funció. És corrent, donat el tipus d'aplicacions que es consideren, interpretar t com el temps. Si t varia sobre tot un interval real (potser indefinit) diem que el procés és **a temps continu**. Si només considerem un conjunt numerable de valors t_i, la funció constitueix una seqüència $X_i = X(t_i)$ i diem que el procés és **a temps discret**.

Un procés a temps discret apareix quan es quantitza el temps en un procés a temps continu. En aquest cas, el temps entre valors consecutius de t_i acostuma a ser un valor Δt petit que s'anomena interval de mostreig. El valor X_i sol ser la mitjana del senyal continu $X(t)$ al voltant de t_i. En el que segueix, els processos són a temps continu mentre no es digui el contrari.

Fixat un valor t, $X(t)$ és una variable unidimensional ordinària. Com generalitzar el concepte de funció de densitat al cas en que els valors de la variable són funcions és complicat, s'acostuma a pensar un procés estocàstic com una VA que depèn d'un índex continu.

En moltes aplicacions el procés $X(t)$ representa algun tipus de senyal elèctric i, per tant, es representa més còmodament amb un nombre complex. Si $X(t)$ i $Y(t)$ son processos reals, diem que $Z(t) = X(t) + jY(t)$ és un procés estocàstic complex.

Un procés estocàstic (PE) també s'anomena procés aleatori.

Exemple 10.1 Moviment brownià. Al 1828 el botànic escocès Robert Brown, estudiant partícules de pol·len en suspensió en aigua, observà que aquestes feien un moviment molt irregular. Posteriorment es va veure que aquest moviment també el feia qualsevol tipus de partícula inorgànica i, per tant, no era degut al caràcter "viu" de la matèria. L'explicació del fenomen va haver d'esperar al 1905. A. Einstein va donar una explicació satisfactòria amb un model estadístic de les col·lisions amb la partícula de les molècules d'aigua en agitació tèrmica. El valor mitjà de la força realitzada sobre el gra en suspensió val zero però les fluctuacions provoquen un petit impuls instantani que dóna lloc al moviment irregular. La trajectòria de la partícula, $(X(t), Y(t), Z(t))$ és un procés estocàstic (en $\mathbb{R}^3$). ♦

Exemple 10.2 El consum elèctric d'una gran ciutat al llarg d'un dia és un procés $C(t)$, $0 \leq t \leq 24$. El seu caràcter aleatori prové del fet que és la suma de moltes petites contribucions aleatòries (els consums individuals). Des del punt de vista de la central que proveeix aquesta energia apareix un problema natural d'estimació, important per dimensionar correctament la producció: si ens trobem en l'instant t_1, què valdrà $C(t)$ per a $t > t_1$ coneguts els seus valors per a $t < t_1$?♦

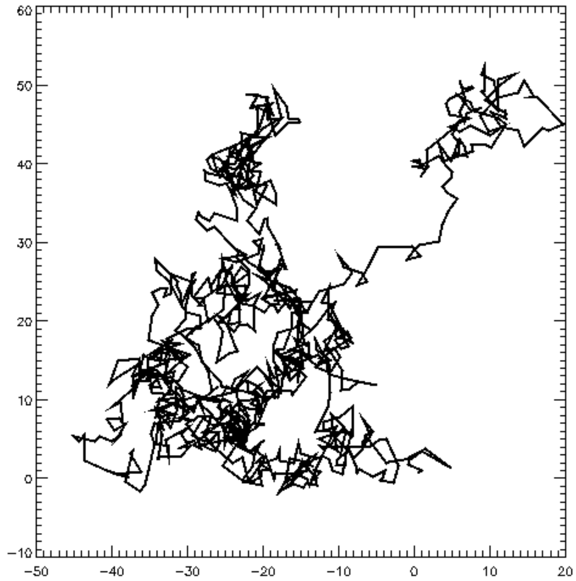


Figura 10.1: Simulació del moviment brownià bidimensional.

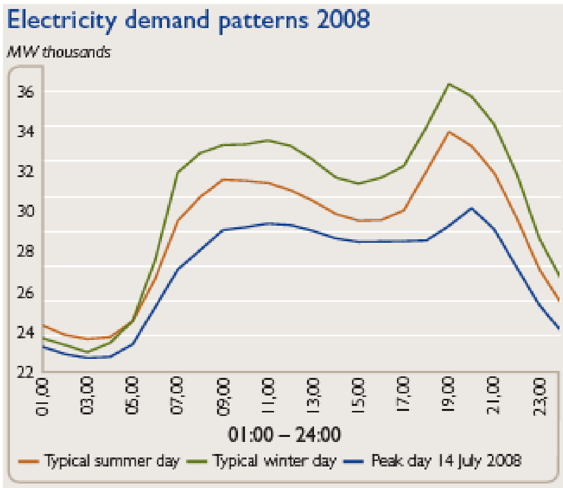


Figura 10.2: Exemples de consum elèctric.

Exemple 10.3 Una manera senzilla d'obtenir un PE és prendre una funció ordinària i introduir-li paràmetres aleatoris. Per exemple, suposem que V i ω són VAs unidimensionals. Llavors $X(t) = V \cos \omega t$ és un PE.♦

Exemple 10.4 X és una VA uniforme en $[0, 1]$. El seu desenvolupament decimal $X = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ és un procés a temps discret b_i.♦

Hem de pensar que, en general, les funcions resultants en un PE són molt irregulars. En aquest sentit l'exemple 10.3 resulta artificial. Encara que per fer càlculs il·lustratius considerarem funcions regulars que contenen paràmetres aleatoris com exemple de PE, les mostres mes genuïnes venen donades pels tipus dels exemples 10.1 i 10.2.

10.2 Realitzacions d'un PE

Considerem el PE $X(t)$. Si com a resultat de l'experiment obtenim la funció $X_1(t)$ diem que $X_1(t)$ és una **realització** del procés. Com veurem més endavant, és important distingir entre les propietats de les realitzacions (que poden mostrar irregularitats espúries, fruit de les fluctuacions estadístiques) i les propietats del procés com a col·lectivitat estadística.

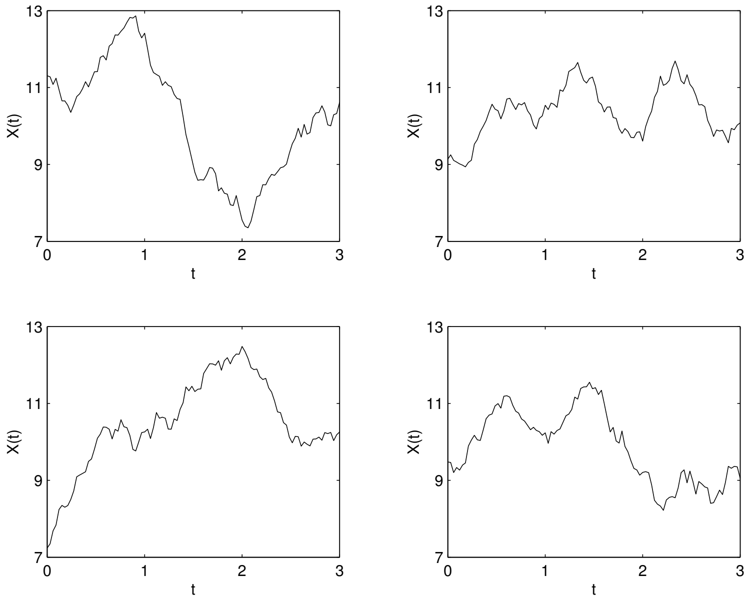


Figura 10.3: Quatre realitzacions d'un procés $X(t)$.

10.3 Funcions de distribució i densitat d'un PE

Considerem un PE $X(t)$. Fixats els valors $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tenim una variable aleatòria n-dimensional $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ que anomenem **mostra** del procés. El procés queda totalment descrit si coneixem la distribució estadística d'aquestes variables per a tots els valors $t_1, t_2, \ldots, t_n$ i per a tot $n \geq 1$. (En rigor, això és cert només pels processos anomenats separables. Els exemples d'utilitat ho són tots.)

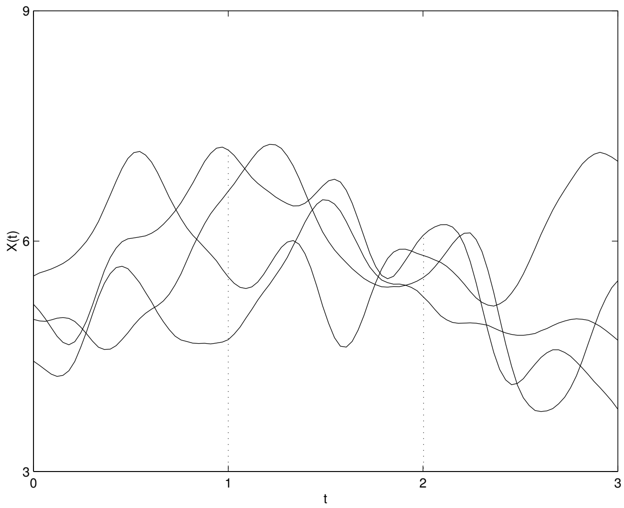


Figura 10.4: Quatre realitzacions i els valors que van prenent $X(1)$ i $X(2)$.

Les mostres d'un PE, i, per tant, tot el procés, queden caracteritzades per les següents funcions.

Les funcions de distribució d'ordre n:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \ldots, X(t_n) \leq x_n). \tag{10.1}$$

Les funcions de densitat d'ordre n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}. \tag{10.2}$$

Són les funcions de distribució i densitat conjuntes de les VAs $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$. Les propietats que involucren les funcions d'ordre màxim n es diu que són d'ordre n.

La jerarquia de funcions (10.2) està lligada per relacions de consistència que estableixen que unes són les marginals d'altres d'ordre superior.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;t)dx = 1,$$

$$f(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_2, \tag{10.3}$$

etc.

Les funcions (10.1) i (10.2) són simètriques sota permutacions dels índexs. Per tant, és suficient conèixer-les per $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

10.4 Valor mitjà, autocorrelació i autocovariància

Són propietats de primer i segon ordre.

Valor mitjà:

$$m(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;t)dx. \tag{10.4}$$

Autocorrelació:

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1 dx_2. \tag{10.5}$$

En el cas complex l'autocorrelació es defineix com $E[Z(t_1)Z^*(t_2)]$.

Autocovariància:

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2). \tag{10.6}$$

Notem que C i R són funcions simètriques sota intercanvi $t_1 \leftrightarrow t_2$ Si $C(t_1, t_2) = 0$, sempre que $t_1 \neq t_2$, es diu que el procés és **incorrelat** o de **soroll blanc**.

La **potència** mitjana és la funció

$$\mathrm{Pot}(t) = R(t,t) = E[X(t)^2]. \tag{10.7}$$

Exemple 10.5 Considerem el procés $X(t) = e^{-At}$, $t \geq 0$, on A és una VA exponencial de paràmetre $\lambda = 1$. Calculem el seu valor mitjà a través de la densitat de primer ordre.

Notem que, fixat t, $X(t)$ pot prendre valors en l'interval $(0,1)$ ja que A varia entre 0 i ∞. La funció de distribució de primer ordre és:

$$F(x;t) = P(X(t) \leq x) = P(e^{-At} \leq x) = P(A \geq -\frac{1}{t} \ln x) = e^{\frac{1}{t} \ln x} = x^{\frac{1}{t}},$$

per a $0 < x < 1$ (s'ha utilitzat $P(A > a) = 1 - F_A(a) = e^{-\lambda a}$). La densitat de primer ordre és

$$f(x;t) = \frac{\partial}{\partial x} F(x;t) = \frac{1}{t} x^{\frac{1}{t}-1}, \qquad 0 < x < 1.$$

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;t) dx = \int_0^1 x \frac{1}{t} x^{\frac{1}{t}-1} dx = \frac{1}{t} \int_0^1 x^{\frac{1}{t}} dx = \frac{1}{t+1}.$$

Però quan els processos estan definits de manera explícita a partir de variables aleatòries sempre és més fàcil fer el càlcul directament amb el teorema de l'esperança:

$$m(t) = E[X(t)] = E[e^{-At}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} f_A(a) da = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-a} da = \int_0^{\infty} e^{-(t+1)a} da = \frac{1}{t+1}. \ \blacklozenge$$

Exemple 10.6 Considerem el procés $X(t) = V \cos(\omega t + \phi)$ on ω està fixat, V és una VA exponencial de paràmetre $\lambda = \frac{1}{V_0}$ i ϕ és una VA uniforme en $[0, 2\pi]$, V i ϕ independents.

El seu valor mitjà és

$$m(t) = E[V \cos(\omega t + \phi)] = E[V] E[\cos(\omega t + \phi)] = V_0 \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \phi) \frac{d\phi}{2\pi} = 0.$$

L'autocorrelació és

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) = E[V \cos(\omega t_1 + \phi) V \cos(\omega t_2 + \phi)] &= E[V^2] E[\cos(\omega t_1 + \phi) \cos(\omega t_2 + \phi)] \\ &= 2V_0^2 \int_0^{2\pi} \cos(\omega t_1 + \phi) \cos(\omega t_2 + \phi) \frac{d\phi}{2\pi} \\ &= 2V_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\phi) + \cos(\omega(t_2 - t_1))] \frac{d\phi}{2\pi} \\ &= V_0^2 \cos(\omega(t_2 - t_1)). \end{aligned}$$

La potència mitjana és $\mathrm{Pot}(t) = R(t,t) = V_0^2$. L'autocovariància coincideix amb $R(t_1, t_2)$. $\blacklozenge$

Capítol 11

Estacionarietat. Processos estocàstics gaussians i oscil·lacions aleatòries

11.1 Processos estacionaris

Es diu que $X(t)$ és un PE **estacionari en sentit estricte** si la seva distribució de probabilitat és invariant sota translacions temporals. Més concretament, les seves funcions de densitat verifiquen

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \ldots, t_n + \tau) \tag{11.1}$$

per a tot n, $t_1, t_2, \ldots, t_n$, τ. O, de manera equivalent, podem dir que els processos $X(t)$ i $X(t+\tau)$ tenen la mateixa distribució de probabilitat per a tot τ.

Això implica que les variables $X(t)$ estan idènticament distribuïdes per a tot t. Posant $n = 1$ i $\tau = -t$ en (11.1) trobem

$$f(x; t) = f(x; 0). \tag{11.2}$$

Amb $n = 2$ i $\tau = -t_1$ trobem

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1). \tag{11.3}$$

En general les funcions de densitat depenen només de les diferències entre els temps t_i.

Un PE es diu que és **estacionari en sentit ampli** si el seu valor mitjà és constant i la seva autocorrelació depèn només de la distància temporal considerada.

$$\begin{aligned} m(t) &= m, \\ R(t_1, t_2) &= R(t_1 - t_2). \end{aligned} \tag{11.4}$$

Una conseqüència és que la potència val $R(0)$ constant. La relació (11.4) es pot determinar escrivint $R(t, t+\tau)$ i veient si el resultat no depèn de t. En aquest cas escrivim $R(t, t+\tau) = R(\tau)$.

Posant (11.2) i (11.3) en (10.4) i (10.5) veiem que tot PE estacionari en sentit estricte ho és en sentit ampli. L'invers no és cert en general.

Una característica de molts PE (estacionaris) és que

$$\lim_{|\tau|\to\infty} C(\tau) = 0. \tag{11.5}$$

De fet, hem vist a l'exemple 10.6 que (11.5) pot no complir-se. Però en l'exemple 10.1 veiem que la condició resulta plausible ja que, al ser el moviment continu, per petits increments de temps les posicions estan molt correlacionades. Per increments temporals grans la partícula "oblida" la posició inicial i tenim (11.5).

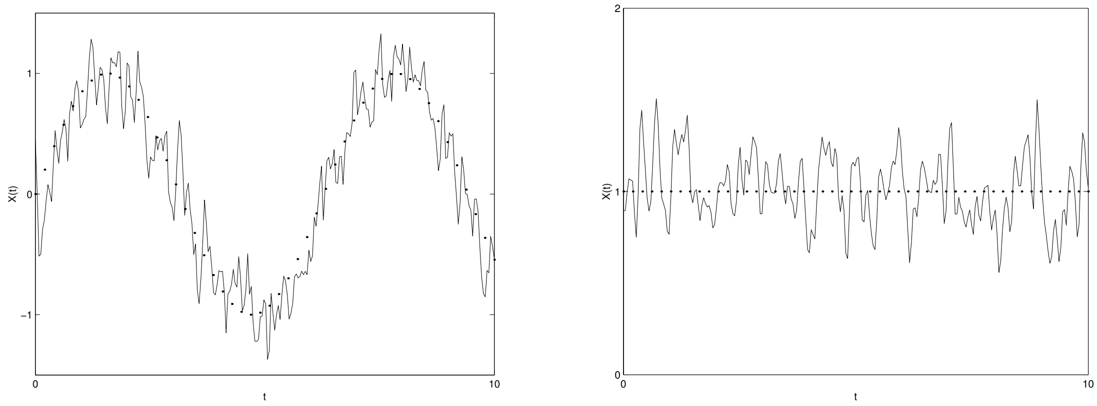


Figura 11.1: A l'esquerra, procés gaussià no estacionari ($m(t) = \sin t$, línia puntejada). A la dreta, procés gaussià estacionari ($m = 1$, línia puntejada).

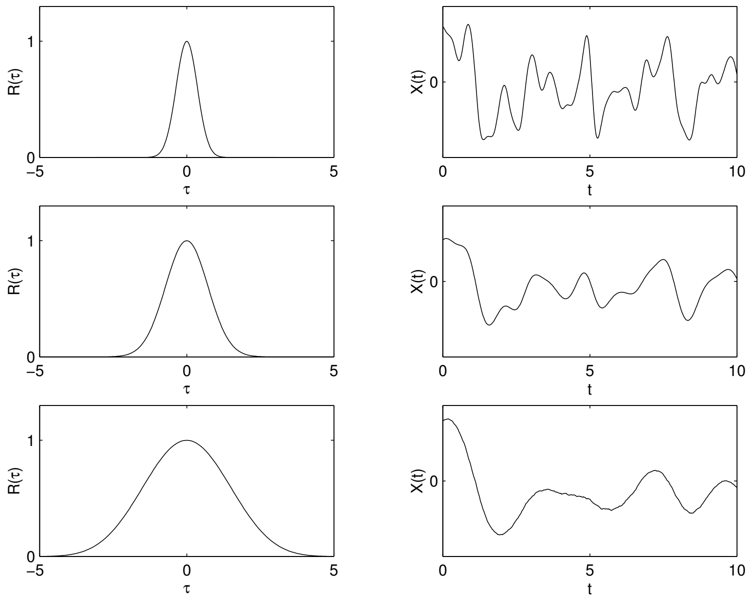


Figura 11.2: A la columna esquerra tenim diferents funcions d'autocorrelació $R(\tau)$. A la columna dreta una realització del procés $X(t)$ per a cadascuna d'elles. Podem observar que com més ràpidament s'anul·la $R(\tau)$ més fluctua localment $X(t)$.

Existeix també una versió estadística de la periodicitat. Es diu que $X(t)$ és un PE **cicloestacionari en sentit estricte** si la seva distribució de probabilitat és periòdica sota translacions temporals. És a dir, existeix $T > 0$ fixat tal que per a tot $k \in \mathbb{Z}$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1 + kT, t_2 + kT, \ldots, t_n + kT) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) \tag{11.6}$$

Un PE es diu que és **cicloestacionari en sentit ampli** si per a tot $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} m(t + kT) &= m(t), \\ R(t_1 + kT, t_2 + kT) &= R(t_1, t_2). \end{aligned} \tag{11.7}$$

Notem que un PE on les variables $X(t_i)$ siguin sempre independents ens dóna una funció absolutament aleatòria que difícilment modelarà un fenomen real. Per una altra part, tampoc les funcions tan regulars com les de l'exemple 10.6 són les que ens interessen. Un PE sol ser massa complicat perquè sigui possible manipular directament les funcions $X(t)$. El que caracteritza realment el procés són les funcions com $m(t)$ i $C(t_1, t_2)$.

11.2 Processos estocàstics normals

11.2.1 Variable gaussiana n-dimensional

Diem que la VA n-dimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ és gaussiana o normal si té la següent funció de densitat:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{|A|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T A(x-m)} \tag{11.8}$$

Notem que és l'exponencial d'un polinomi de segon grau en les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Com notació hem posat $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ i A és una matriu $n \times n$ (de fet representem els vectors com matrius columna de manera que entenem l'exponent com un producte matricial que dona un resultat escalar). $|A|$ és el determinant de la matriu A.

També es diu que les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ són conjuntament normals. m i A són paràmetres de la distribució gaussiana. Determinem a continuació el seu significat. Per això és convenient fer un canvi de variable que simplifiqui l'expressió (11.8).

Existeixen VAs $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ gaussianes independents amb esperança 0 i variància 1, relacionades amb les X_i a través d'una transformació lineal no homogènia.

DEM: Com l'exponent de (11.8) és $-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)$ podem prendre la matriu A simètrica. Perquè la densitat sigui normalitzable A ha de ser definida positiva. Com se sap de la teoria d'operadors en espais euclidians, tota matriu simètrica té tots els seus valors propis reals i diagonalitza en una base ortonormal. Així, existeix una matriu diagonal $A_d = \text{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i una matriu ortogonal de canvi de base P ($P^{-1} = P^T$) tals que

$$A_d = PAP^T.$$

Els valors propis són $a_i > 0$ ja que A és definida positiva. Així, podem considerar la matriu $A_d^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n})$. Definint $B = A_d^{\frac{1}{2}} P$ tenim que

$$A = P^T A_d P = P^T A_d^{\frac{1}{2}} A_d^{\frac{1}{2}} P = (A_d^{\frac{1}{2}} P)^T A_d^{\frac{1}{2}} P = B^T B,$$

i, per tant, $|A| = |B^T B| = |B^T||B| = |B|^2$ d'on $|B| = \pm |A|^{\frac{1}{2}}$.

Fem ara el canvi de variables $x \to y = B(x - m)$. És a dir, $x = m + B^{-1}y$. El seu determinant jacobià és $\frac{\partial(x)}{\partial(y)} = |B^{-1}| = |A|^{-\frac{1}{2}}$. Com $(x - m)^T A(x - m) = (B(x - m))^T B(x - m) = y^T y$, la funció de densitat de les noves variables resulta

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \frac{|A|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}y^T y} |A|^{-\frac{1}{2}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\frac{y_i^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

És a dir, les variables Y_i són normals, independents, totes amb esperança 0 i variància 1.$\clubsuit$

A partir de l'anterior resultat és demostra que m és el vector d'esperances, i donada la matriu de covariàncies $C_{ij} = C[X_i, X_j]$, A és la seva inversa:

$$m_i = E[X_i], \qquad A = C^{-1}. \tag{11.9}$$

DEM: Considerem les anteriors variables Y_i. Tenim que $E[Y_i] = 0$, $E[Y_i Y_j] = \delta_{ij}$ (la delta de Kronecker δ_{ij} val 1 si $i = j$ i val 0 en cas contrari). Veiem que impliquen aquestes relacions per a les variables originals X_i.

$$0 = E[Y] = E[B(X - m)] = B(E[X] - m) \Rightarrow E[X] - m = 0$$

ja que B és invertible. Tenim, per tant, $E[X_i] = m_i$ que ens dóna el significat del vector m. Ara,

$$\delta_{ij} = E[Y_i Y_j] = E[(B(X - m))_i (B(X - m))_j] =$$

$$\sum_{k,l} B_{ik} B_{jl} E[(X - m)_k (X - m)_l] = \sum_{k,l} B_{ik} C[X_k, X_l] B_{lj}^T$$

que, en forma matricial és $I = BCB^T$ ($I = (\delta_{ij})$ és la matriu identitat) d'on $C = B^{-1}(B^T)^{-1} = (B^T B)^{-1} = A^{-1}$.$\clubsuit$

Exemple 11.1 Recuperem els casos coneguts de variable gaussiana unidimensional i bidimensional.

Si $n = 1$ els vectors i les matrius es redueixen a un sol valor. $A = C[X,X]^{-1} = \sigma^{-2}$. Així, $|A|^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sigma}$ i al substituir-ho a (11.8) s'obté (2.18).

Si $n = 2$ posem (X,Y) en lloc de (X_1,X_2) i ara

$$A = \begin{pmatrix} C[X,X] & C[X,Y] \\ C[X,Y] & C[Y,Y] \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}.$$

$|C| = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$, d'on $|A|^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$.

L'exponent a (11.8) és:

$$-\frac{1}{2}(x-m_1, y-m_2)\frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-m_1 \\ y-m_2 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-m_1)}{\sigma_1}\frac{(y-m_2)}{\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}.$$

Així, obtenim la densitat (5.11). ♦

11.2.2 Processos estocàstics gaussians

El PE $X(t)$ s'anomena normal o gaussià si totes les seves mostres són gaussianes. És a dir, per a tot n, per a tot $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les variables $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ són conjuntament normals. Llavors les densitats d'ordre n són:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{|A|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T A(x-m)} \tag{11.10}$$

on m i A ara depenen dels t_i. Concretament, $m_i = m(t_i)$ i A és la inversa de la matriu d'elements $C(t_i,t_j)$. Per tant, *un PE normal queda totalment determinat pel seu valor mitjà i la seva autocorrelació.*

11.2.3 Estacionarietat dels processos gaussians

Un PE normal estacionari en sentit ampli també ho és en sentit estricte.

DEM: Si el procés és estacionari en sentit ampli tenim que $C(t_i,t_j) = R(t_j - t_i) - m^2$ depèn només de les diferències de temps. Com tota l'estadística del procés normal queda determinada en (11.10) per m i $C(t_i,t_j)$ la distribució és invariant sota el canvi (11.1). ♣

11.3 Oscil·lacions aleatòries

Es tracta de funcions oscil·latòries que contenen paràmetres aleatoris. L'exemple 10.3 de l'anterior capítol n'era un cas. Ara estudiem quan és estacionari el procés

$$X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{11.11}$$

on ω està fixada i (A,B) és una VA bidimensional. Tenim que (11.11) és estacionari

- en sentit ampli si i només si $m_A = m_B = 0$, $\sigma_A = \sigma_B$ i $\rho_{AB} = 0$.

- en sentit estricte si i només si la distribució de (A, B) té simetria circular.

DEM:

Si (11.11) és estacionari en sentit ampli

$$m(t) = m_A \cos \omega t + m_B \sin \omega t = m.$$

Com les funcions cos, sin i 1 són linealment independents, ha de ser $m_A = m_B = m = 0$.

La funció $R(t, t+\tau)$ no ha de dependre de t. Posant $\tau = 0$ tenim que $R(t,t)$ és constant i, per tant, $R(0,0) = E[X(0)^2] = E[A^2] = \sigma_A^2$ coincideix amb $R(\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}) = E[X(\frac{\pi}{2\omega})^2] = E[B^2] = \sigma_B^2$. Diem σ al valor comú de σ_A i σ_B. Tenim també $E[AB] = \rho\sigma^2$. Llavors

$$R(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E[(A \cos \omega t + B \sin \omega t)(A \cos \omega(t+\tau) + B \sin \omega(t+\tau))]$$
$$= \sigma^2 \cos \omega\tau + \rho\sigma^2 \sin \omega(2t+\tau).$$

Perquè aquesta funció no depengui de t ha de ser $\rho = 0$.

Per veure quan és estacionari en sentit estricte utilitzem coordenades polars $A = R\cos\Theta$, $B = R\sin\Theta$. Llavors $X(t) = R\cos(\Theta - \omega t)$.

Si el procés és estacionari en sentit estricte la VA bidimensional $(X(t), X(t+\frac{\pi}{2\omega}))$ té la mateixa distribució per a tot t. En $t = 0$ i $t = \frac{\alpha}{\omega}$ tenim les variables $(R\cos\Theta, R\sin\Theta)$ i $(R\cos(\Theta-\alpha), R\sin(\Theta-\alpha))$ respectivament. En polars corresponen a (R,Θ) i $(R, \Theta-\alpha)$. Així, la funció de densitat no pot dependre de θ, és a dir, tenim simetria circular.

Inversament, si tenim simetria circular, el canvi $\Theta \to \Theta + \omega t_1$ deixa totes les distribucions invariants. Per tant la distribució conjunta de la VA $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ és idèntica a la de $(X(0), X(t_2 - t_1), \ldots, X(t_n - t_1))$ que és invariant sota translacions temporals. ♣

Capítol 12

Processos estocàstics de Poisson

12.1 Processos d'estat continu i d'estat discret

Donat un PE, si $X(t)$ és una VA discreta diem que el procés és d'**estat discret**. Anàlogament, si $X(t)$ és una VA contínua diem que els procés és d'**estat continu**. Al tema anterior consideràvem processos d'estat continu com cas més general. Alguns exemples del present tema són d'estat discret, el que vol dir que tenim funcions de probabilitat d'ordre n en lloc de funcions de densitat d'ordre n, etc.

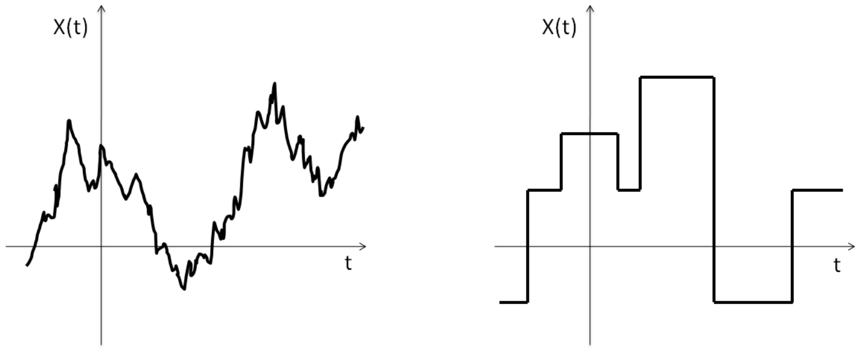


Figura 12.1: Processos d'estat continu (esquerra) i d'estat discret (dreta).

12.2 El procés de Poisson

El procés de Poisson és un dels principals processos d'estat discret, d'especial importància en comunicacions.

Considerem que a mesura que passa el temps es van produint una sèrie d'esdeveniments idèntics de manera aleatòria. Per exemple, rebre trucades en una centraleta telefònica, arribar vehicles a una gasolinera o desintegrar-se partícules radioactives. Suposem que els esdeveniments es produeixen de manera independent. Prendrem sempre temps positius començant a contar en $t = 0$. Indiquem per $N(t)$ el nombre d'esdeveniments que s'han produït en l'interval $[0, t)$. El nombre d'esdeveniments en un interval $[t_a, t_b)$ és $N(t_a, t_b) = N(t_b) - N(t_a)$.

Diem que el procés és de Poisson si

(1) El nombre d'esdeveniments en dos intervals temporals disjunts són variables aleatòries independents.

(2) Si $N = N(t, t + \tau)$, llavors $P(N = 1) = \lambda\tau + o(\tau)$ i $P(N > 1) = o(\tau)$.

Tal com vam justificar al parlar de la variable de Poisson (equació (2.9)) això implica que la VA $N = N(t_a, t_b)$ té la funció de probabilitat

$$P(N = n) = e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}, \tag{12.1}$$

on $\alpha = \lambda(t_b - t_a)$ i $n = 0, 1, \ldots$.

Fem ara una demostració més acurada:

DEM: Considerem les funcions $\varphi_n(\tau) = P(N(t_a, t_a + \tau) = n)$, $n \geq 0$. Tenim que

$$\varphi_n(\tau + \delta\tau) = P(N(t_a, t_a + \tau + \delta\tau) = n) = \sum_{k=0}^{n} P(N(t_a, t_a + \tau) = n - k)P(N(t_a + \tau, t_a + \tau + \delta\tau) = k),$$

on hem utilitzat la primera hipòtesi al fer el producte de probabilitats sobre els intervals $[t_a, t_a+\tau)$ i $[t_a+\tau, t_a+\tau+\delta\tau)$. Per la segona hipotèsi del procés de Poisson, $P(N(t_a+\tau, t_a+\tau+\delta\tau) = 0) = 1-\lambda\delta\tau+o(\delta\tau)$, $P(N(t_a+\tau, t_a+\tau+\delta\tau) = 1) = \lambda\delta\tau + o(\delta\tau)$ i $P(N(t_a + \tau, t_a + \tau + \delta\tau) = k) = o(\delta\tau)$, per a $k \geq 2$. Per tant,

$$\varphi_0(\tau + \delta\tau) = \varphi_0(\tau)(1 - \lambda\delta\tau) + o(\delta\tau),$$

$$\varphi_n(\tau + \delta\tau) = \varphi_n(\tau)(1 - \lambda\delta\tau) + \varphi_{n-1}(\tau)\lambda\delta\tau + o(\delta\tau), \quad n \geq 1.$$

d'on

$$\frac{\varphi_0(\tau + \delta\tau) - \varphi_0(\tau)}{\delta\tau} = -\lambda\varphi_0(\tau) + \frac{o(\delta\tau)}{\delta\tau}, \qquad \frac{\varphi_n(\tau + \delta\tau) - \varphi_n(\tau)}{\delta\tau} = -\lambda(\varphi_n(\tau) - \varphi_{n-1}(\tau)) + \frac{o(\delta\tau)}{\delta\tau}, \quad n \geq 1.$$

Prenent el límit $\delta\tau \to 0$ arribem al sistema d'equacions diferencials lineals

$$\frac{d\varphi_0(\tau)}{d\tau} = -\lambda\varphi_0(\tau), \qquad \frac{d\varphi_n(\tau)}{d\tau} = -\lambda(\varphi_n(\tau) - \varphi_{n-1}(\tau)), \quad n \geq 1.$$

on la condició inicial és $\varphi_0(0) = 1$, $\varphi_n(0) = 0$ per a $n \geq 1$. La primera equació té solució

$$\varphi_0(\tau) = e^{-\lambda\tau},$$

Per les altres podem fer el canvi $\varphi_n(\tau) = \varphi_0(\tau)\eta_n(\tau)$. Substituint, queda el sistema

$$\frac{d\eta_n(\tau)}{d\tau} = \lambda\eta_{n-1}(\tau), \quad n \geq 1.$$

amb $\eta_0 \equiv 1$ i $\eta_n(0) = 0$ per a $n \geq 1$. No és difícil veure que la solució és

$$\eta_n(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!}.$$

Així hem arribat a

$$\varphi_n(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!}e^{-\lambda\tau}, \quad n \geq 0.$$

Tenint en compte que $\varphi_n(\tau) = P(N(t_a, t_a + \tau) = n)$ i prenent $\tau = t_b - t_a$ queda demostrada 12.1.

Notem, de passada, que si en lloc de ser λ constant fos $\lambda(\tau)$, arribariem a la mateixa solució canviant $\lambda\tau$ per $\int_{t_a}^{t_a+\tau} \lambda(\tau')d\tau'$. ♣

El PE de Poisson consisteix en prendre com a funció el nombre total d'esdeveniments produïts en l'interval $[0, t)$:

$$X(t) = N(t).$$

Fixat t, $X(t)$ és una VA de Poisson amb funció de probabilitat

$$P(X(t) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}. \tag{12.2}$$

Es diu que el procés de Poisson és **no homogeni** quan λ depèn de t. El seu tractament és mostra en l'anterior demostració. En el que segueix només considerarem el cas **homogeni** on λ és constant.

Recordem que la variable (12.2) verifica $E[X(t)] = V[X(t)] = \lambda t$. Llavors, pel procés de Poisson

$$m(t) = \lambda t, \tag{12.3}$$

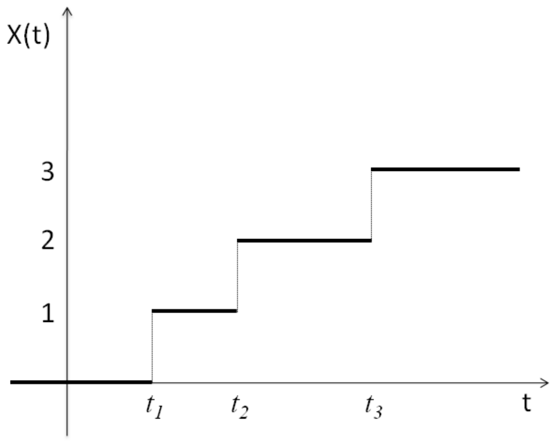


Figura 12.2: Procés de Poisson.

$$R(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & \text{si } t_1 \le t_2 \\ \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & \text{si } t_1 \ge t_2 \end{cases} \tag{12.4}$$

DEM: El valor mitjà és $m(t) = E[X(t)] = \lambda t$.

Ara considerem $t_1 \le t_2$. Les variables aleatòries $X(t_1)$ i $X(t_2) - X(t_1)$ són variables de Poisson $N(0, t_1)$ i $N(t_1, t_2)$ independents ja que els intervals són disjunts. Llavors l'autocorrelació és

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] &= E[X(t_1)(X(t_2) - X(t_1))] + E[X(t_1)^2] \\ &= E[X(t_1)]E[(X(t_2) - X(t_1))] + E[X(t_1)^2] \\ = E[X(t_1)]E[X(t_2)] + E[X(t_1)^2] - E[X(t_1)]^2 &= E[X(t_1)]E[X(t_2)] + V[X(t_1)] \\ &= \lambda t_1 \lambda t_2 + \lambda t_1. \end{aligned}$$

El cas $t_1 \ge t_2$ s'obté intercanviant t_1 i t_2 ja que R és simètrica. ♣

Podem posar $R(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2) + \lambda^2 t_1 t_2$. La funció d'autocovariància és $C(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2)$. La potència és $\mathrm{Pot}(t) = \lambda t + \lambda^2 t^2$.

Segons (12.3) el paràmetre λ és el nombre mitjà d'esdeveniments per unitat de temps.

12.3 Senyal telegràfic aleatori

Considerem la variable de Poisson $N(t)$. El senyal telegràfic **semialeatori** és el procés $X(t) = (-1)^{N(t)}$. És a dir:

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } N(t) \text{ és parell} \\ -1 & \text{si } N(t) \text{ és senar} \end{cases} \tag{12.5}$$

Així, $X(0) = 1$ i canvia de signe cada vegada que es produeix un esdeveniment. La seva funció de probabilitat és

$$P(X(t)=1) = P(N(t)=0) + P(N(t)=2) + \cdots = e^{-\lambda t}\left(1 + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \cdots\right) = e^{-\lambda t}\cosh \lambda t.$$

$$P(X(t)=-1) = P(N(t)=1) + P(N(t)=3) + \cdots = e^{-\lambda t}\left(\lambda t + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \cdots\right) = e^{-\lambda t}\sinh \lambda t.$$

El valor mitjà és

$$m(t) = E[X(t)] = 1 \cdot e^{-\lambda t}\cosh \lambda t + (-1) \cdot e^{-\lambda t}\sinh \lambda t = e^{-2\lambda t}.$$

L'autocorrelació és

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[(-1)^{N(t_1)}(-1)^{N(t_2)}] = E[(-1)^{N(t_2)-N(t_1)}] =$$

$$E[(-1)^{N(t_1,t_2))}] = e^{-2\lambda|t_2-t_1|}.$$

ja que $(-1)^N = (-1)^{-N}$ i $N(t_1, t_2)$ és una VA de Poisson de paràmetre $\lambda|t_2 - t_1|$.

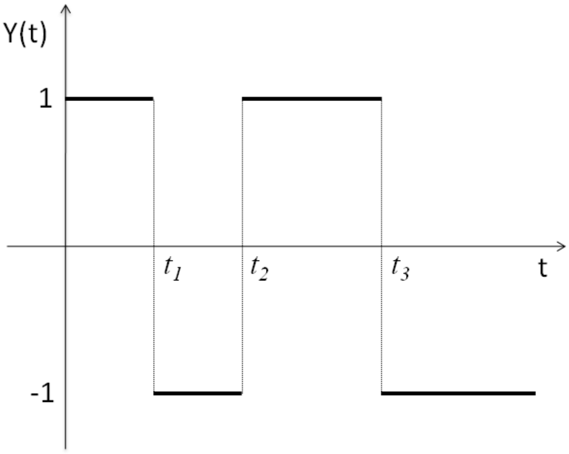


Figura 12.3: Senyal telegràfic aleatori.

Aquest PE s'anomena semialeatori perquè hem fixat $X(0)$. El PE de **senyal telegràfic aleatori** és

$$Y(t) = SX(t) \tag{12.6}$$

on S és una VA de Bernoulli amb valors 1 i -1 equiprobables, independent de $X(t)$. Ara

$$m(t) = 0, \qquad R(t_1, t_2) = e^{-2\lambda|t_2-t_1|}. \tag{12.7}$$

DEM: $E[Y(t)] = E[S]E[X(t)] = 0$, $E[Y(t_1)Y(t_2)] = E[S^2X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)X(t_2)] = e^{-2\lambda|t_2-t_1|}$. ♣

12.4 Tren d'impulsos de Poisson

Sigui $X(t)$ un PE de Poisson. El tren d'impulsos associat a ell és el procés

$$Z(t) = \frac{d}{dt}X(t). \tag{12.8}$$

Si els esdeveniments es produeixen en els instants $t_1, t_2, \ldots$, podem representar X i Z com

$$X(t) = \sum_i u(t - t_i), \tag{12.9}$$

$$Z(t) = \sum_i \delta(t - t_i), \tag{12.10}$$

on u i δ són les funcions de Heaviside i Dirac.

(12.10) representa un tipus de soroll de naturalesa impulsiva (**shot noise**). Els seus valor mitjà, autocorrelació i autocovariància són:

$$m(t) = \lambda, \tag{12.11}$$

$$R(t_1, t_2) = \lambda^2 + \lambda\delta(t_2 - t_1), \qquad C(t_1, t_2) = \lambda\delta(t_2 - t_1). \tag{12.12}$$

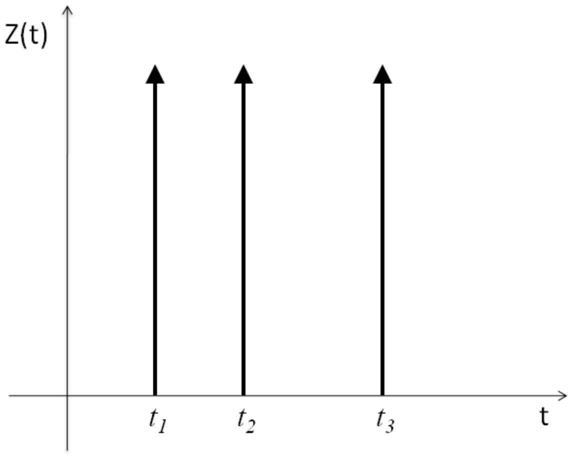


Figura 12.4: Impulsos de Poisson.

DEM:

$$m(t) = E[Z(t)] = E\left[\frac{d}{dt}X(t)\right] = \frac{d}{dt}E[X(t)] = \frac{d}{dt}(\lambda t) = \lambda.$$

$$R(t_1, t_2) = E[Z(t_1)Z(t_2)] = E\left[\frac{d}{dt_1}X(t_1)\frac{d}{dt_2}X(t_2)\right] = \frac{d^2}{dt_1 dt_2}E[X(t_1)X(t_2)]$$
$$= \frac{d^2}{dt_1 dt_2}(\lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1, t_2)) = \lambda^2 + \lambda\delta(t_1 - t_2),$$

ja que

$$\min(t_1, t_2) = t_1 u(t_2 - t_1) + t_2 u(t_1 - t_2),$$

$$\frac{d}{dt_2}\min(t_1, t_2) = t_1\delta(t_2 - t_1) + u(t_1 - t_2) - t_2\delta(t_1 - t_2) = u(t_1 - t_2) - (t_2 - t_1)\delta(t_2 - t_1) = u(t_1 - t_2),$$

$$\frac{d^2}{dt_1 dt_2}\min(t_1, t_2) = \delta(t_1 - t_2). \clubsuit$$

Notem que els processos de senyal telegràfic aleatori i el tren d'impulsos de Poisson són estacionaris en sentit ampli (veure (12.7), (12.11), (12.12)) mentre que el propi procés de Poisson òbviament no és estacionari. El fet és que l'arribada de fenòmens tipus Poisson és estrictament estacionària (l'origen de temps és arbitrari) i això és el que es manifesta en alguns processos derivats d'aquesta situació.

12.5 Distribució dels temps en el procés de Poisson

En un procés de Poisson $X(t)$ els esdeveniments es produeixen en els instants $t_1, t_2, t_3, \ldots$. Considerem les VAs $T_1, T_2, T_3, \ldots$ associades a aquests instants. La densitat de cadascuna d'elles és, per a $t \geq 0$:

$$f_{T_n}(t) = \lambda\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}. \tag{12.13}$$

DEM:

$$F_{T_n}(t) = P(T_n \leq t) = P(X(t) \geq n) = 1 - P(X(t) < n) = 1 - e^{-\lambda t}\left(1 + \lambda t + \cdots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right),$$

$$f_{T_n}(t) = -\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}\left(1 + \lambda t + \cdots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right)$$

(posem $\alpha = \lambda t$)

$$= -\lambda \frac{d}{d\alpha}\left(e^{-\alpha}\left(1+\alpha+\cdots+\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right)$$

$$= -\lambda\left[-e^{-\alpha}\left(1+\alpha+\cdots+\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\right)+e^{-\alpha}\left(1+\alpha+\cdots+\frac{\alpha^{n-2}}{(n-2)!}\right)\right]$$

$$= \lambda e^{-\alpha}\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}. \clubsuit$$

En particular, notem que $f_{T_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. És a dir, T_1 és exponencial de paràmetre λ.

La distribució conjunta de $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ ve donada per la densitat:

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n}, \tag{12.14}$$

per a $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$.

DEM:

Les funcions que considerarem seran 0 quan no es verifiqui $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$. Calculem primer la distribució condicionada

$$F(t_k \,|\, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}) = P(T_k \leq t_k \,|\, T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_k = t_{k-1})$$

$$= P(N(t_{k-1}, t_k) \geq 1) = 1 - e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})}.$$

Derivant respecte a t_k trobem

$$f(t_k \,|\, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}) = \lambda e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})},$$

per a $t_k \geq t_{k-1}$.

Ara factoritzem la densitat conjunta a partir de les marginals i les condicionades:

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(t_n \,|\, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) = \cdots$$

$$= f(t_n \,|\, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) f(t_{n-1} \,|\, t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}) \cdots f(t_3 \,|\, t_1, t_2) f(t_2 \,|\, t_1) f(t_1)$$

$$= \lambda e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} \lambda e^{-\lambda(t_{n-1} - t_{n-2})} \cdots \lambda e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \lambda e^{-\lambda t_1} = \lambda^n e^{-\lambda t_n}. \clubsuit$$

Considerem ara les variables que ens donen el temps entre esdeveniments consecutius:

$$\Delta_1 = T_1, \quad \Delta_2 = T_2 - T_1, \ldots, \quad \Delta_n = T_n - T_{n-1}, \tag{12.15}$$

La densitat conjunta de la variable n-dimensional $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$ és:

$$f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = \lambda^n e^{-\lambda(\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n)}, \tag{12.16}$$

per a $\delta_i \geq 0$, $i = 1, \ldots n$.

DEM: La regió $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ correspon a $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \geq 0$. La transformació (12.15) és bijectiva entre aquestes regions i el seu determinant jacobià val 1. Així la densitat s'obté substituint (12.15) en (12.14) que ens dóna (12.16). $\clubsuit$

En (12.16) veiem que els temps entre esdeveniments successius $\Delta_i = T_i - T_{i-1}$ són variables exponencials independents. Així $T_n = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n$ és la suma de n VAs exponencials independents.

12.6 Senyals binaris

Un senyal binari és un PE d'estat discret que només pren valors 0 i 1.

Considerem un senyal binari a temps discret B_n. tal que, per a tot n, B_n pren valors 0 i 1 amb igual probabilitat. Si fixem T hi ha un procés a temps continu equivalent definit:

$$B(t) = B_n \quad \text{si } nT \leq t < (n+1)T \tag{12.17}$$

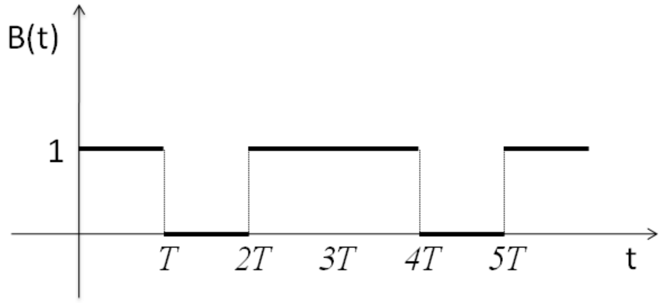


Figura 12.5: Procés binari. Es transmet la seqüència 101101 . . ..

Un procés d'aquest tipus pot representar la informació que conté un arxiu informàtic. Per transportar aquesta informació mitjançant un medi electromagnètic (per exemple, una línia telefònica) resulta més útil transformar el procés (12.17) en

$$X(t) = \cos(\omega t + \theta(t)), \tag{12.18}$$

on $\omega = 2\pi f_P$ és la freqüència portadora i

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } B(t) = 1 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } B(t) = 0 \end{cases} \tag{12.19}$$

La transformació (12.18) s'anomena modulació de freqüència o PSK (*phase shift keying*) i es pot aplicar a diferents tipus de senyal.

Capítol 13

Càlcul estocàstic. Ergodicitat. Espectre de potència. Sistemes lineals

Considerem el PE $X(t)$. Si com a resultat de l'experiment obtenim la realització $X_1(t)$, no sabem a priori quines propietats té la funció $X_1(t)$. Si volem aplicar operacions al procés $X(t)$ com la derivació o la integració, pot ser massa restrictiu voler-ho fer sobre $X_1(t)$. Així, relaxem les definicions exigint només que la propietat es verifiqui en mitjana. Això requereix un nou concepte de límit.

13.1 Límit en mitjana quadràtica

Si X_s és una variable aleatòria depenent d'un paràmetre continu s diem que $\lim_{s\to a} X_s = l$ en *mitjana quadràtica* (MQ) si

$$\lim_{s\to a} E[(X_s - l)^2] = 0. \tag{13.1}$$

Si només ens interessa l'existència del límit i no el seu valor podem utilitzar el criteri de Cauchy que diu que X_s convergeix en MQ si

$$\lim_{s_1,s_2\to a} E[(X_{s_1} - X_{s_2})^2] = 0. \tag{13.2}$$

Notem que el resultat del límit l és en general una VA Llavors es verifica que l'esperança del límit és el límit de l'esperança

$$E[l] = \lim_{s\to a} E[X_s]. \tag{13.3}$$

DEM: $(E[l]-E[X_s])^2 = E[l-X_s]^2 \leq E[(l-X_s)^2] \to 0$. (S'ha utilitzat que per qualsevol variable Y, $E[Y^2] \geq E[Y]^2$ degut a que la variància és no negativa.) ♣

13.2 Continuïtat estocàstica

Diem que un PE $X(t)$ és continu en MQ si

$$\lim_{\epsilon\to 0} E[(X(t+\epsilon) - X(t))^2] = 0. \tag{13.4}$$

Això vol dir que fixat t quasi totes les realitzacions del procés són contínues en t. Però donada una realització aquesta pot tenir diferents punts de discontinuïtat. La propietat (13.4) equival a

$$\lim_{\epsilon\to 0}\{R(t+\epsilon, t+\epsilon) - 2R(t+\epsilon, t) + R(t,t)\} = 0, \tag{13.5}$$

que es verifica, en particular, si la funció d'autocorrelació $R(t_1, t_2)$ és contínua. Això passa, per exemple, en el procés de Poisson on $R(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2) + \lambda^2 t_1 t_2$. En canvi, tota realització d'un PE de Poisson te un conjunt numerable de discontinuïtats.

Existeixen expressions equivalents a (13.4) i (13.5) per a la derivada d'un PE.

13.3 Integrals estocàstiques

Concentrem-nos ara en la integració. La integral (de Riemann) d'una funció sobre un interval $[a, b]$ consisteix en el límit de les seves sumes de Riemann quan les particions de l'interval són cada vegada més fines. Direm que la integral d'un PE sobre l'interval $[a, b]$ val I si

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} E\left[\left(\sum_i X(t_i)\Delta t_i - I\right)^2\right] = 0, \tag{13.6}$$

on els t_i formen una partició de $[a, b]$. Si (13.6) es verifica escriurem $I = \int_a^b X(t)dt$.

Si existeix la integral

$$\int_a^b \int_a^b R(t_1, t_2)dt_1 dt_2, \tag{13.7}$$

llavors el procés és integrable en $[a, b]$.

DEM:

Suposem que (13.7) existeix i utilitzem el criteri de Cauchy. Considerem dues particions, la primera indexada amb i o i' i la segona amb j o j'

$$\lim_{\Delta t_i, \Delta t_j \to 0} E\left[\left(\sum_i X(t_i)\Delta t_i - \sum_i X(t_j)\Delta t_j\right)^2\right]$$

$$= \lim \left\{\sum_{i,i'} R(t_i, t_{i'})\Delta t_i \Delta t_{i'} - 2\sum_{i,j} R(t_i, t_j)\Delta t_i \Delta t_j + \sum_{j,j'} R(t_j, t_{j'})\Delta t_j \Delta t_{j'}\right\} = 0,$$

ja que cada sumatori tendeix a (13.7). ♣

$\int_a^b X(t)dt$ és una variable aleatòria. De la linealitat de l'esperança i de (13.3) es pot concloure la propietat

$$E\left[\int_a^b X(t)dt\right] = \int_a^b E[X(t)]dt, \tag{13.8}$$

que serà àmpliament utilitzada en el que segueix.

Deixem de banda la consideració dels aspectes analítics fins de les anteriors definicions i ressaltem tan sols que les propietats d'un PE solen determinar-se a partir del comportament de les funcions de valor mitjà i d'autocorrelació.

Exemple 13.1 El següent cas presenta una aparent paradoxa. Sigui el procés $X(t) = te^{-Yt}$ on Y és una variable aleatòria uniforme en $[0, 1]$. Resulta que totes les seves realitzacions verifiquen

$$\lim_{t \to \infty} X_i(t) = 0$$

mentre que el seu valor mitjà $m(t) = E[X(t)] = \int_0^1 te^{-yt} \cdot 1dy = 1 - e^{-t}$ tendeix a 1 en l'infinit.

La discrepància es deu a que el procés no tendeix a zero en MQ. En efecte,

$$\lim_{t \to \infty} E[(X(t) - 0)^2] = \lim_{t \to \infty} E[t^2 e^{-2Yt}] = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{2}(1 - e^{-2t}) = \infty.$$

Així, si fem la mitjana de moltes realitzacions del procés, s'obtenen valors més alts per a t's més elevats. El missatge és que no s'han d'elevar les propietats de les realitzacions a propietats estadístiques sense verificar-ho. ♦

13.4 Ergodicitat

Sigui $X(t)$ un PE estacionari amb valor mitjà $m(t) = m$ i funció d'autocorrelació $R(t, t+\tau) = R(\tau)$. Per calcular m podríem fer moltes realitzacions del procés i avaluar la mitjana estadística

$$m = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(t). \tag{13.9}$$

En el que segueix estarem interessats en avaluar els paràmetres del procés no a través de mitjanes sobre moltes realitzacions sinó fent mitjanes temporals d'una sola realització. La **mitjana temporal** del procés és

$$m_T =< X(t) >_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)dt. \tag{13.10}$$

m_T és una VA ordinària. La seva esperança val m.

DEM:

$$E[m_T] = E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt\right] = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E[X(t)]dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} mdt = m. \clubsuit$$

Un procés ergòdic és aquell en que les mitjanes temporals igualen les mitjanes sobre realitzacions (és a dir, mitjana temporal = mitjana estadística). Més concretament definim:

- **Ergodicitat en valor mitjà**.

  $X(t)$ és ergòdic en valor mitjà si m_T tendeix a m en MQ. És a dir,

  $$\lim_{T\to\infty} E[(m_T - m)^2] = 0. \tag{13.11}$$

  Aquesta condició és que $\sigma_T^2 \to 0$ quan $T \to \infty$, on σ_T és la desviació de la variable m_T:

  $$\sigma_T^2 = E[(m_T - m)^2]. \tag{13.12}$$

- **Ergodicitat en autocorrelació**.

  $X(t)$ és ergòdic en autocorrelació si el PE $Z_\lambda(t) = X(t + \lambda)X(t)$ és ergòdic en valor mitjà. En aquest cas les mitjanes temporals de $Z_\lambda(t)$ ens donen l'autocorrelació de $X(t)$.

Notem que

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} C(t_1, t_2)dt_1dt_2. \tag{13.13}$$

DEM:

$$\sigma_T^2 = E[(m_T - m)^2] = E\left[\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(X(t) - m)dt\right)^2\right] = \frac{1}{(2T)^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} E[(X(t_1) - m)(X(t_2) - m)]dt_1dt_2,$$

i la funció integrada és $C(t_1, t_2)$. $\clubsuit$

Exemple 13.2 Pel tren d'impulsos de Poisson $C(t_1, t_2) = \lambda\delta(t_1 - t_2)$.

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \lambda\delta(t_1 - t_2)dt_1dt_2 = \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T} \lambda dt_1 = \frac{\lambda}{2T}.$$

Com $\frac{\lambda}{2T} \to 0$ quan $T \to \infty$, el procés és ergòdic en valor mitjà. $\blacklozenge$

Degut a que considerem processos estacionaris, l'expressió (13.13) es pot posar com

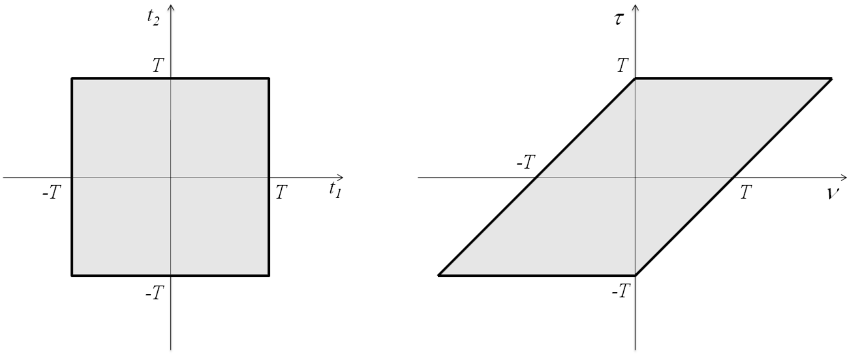
$$\sigma_T^2 = \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} C(\tau)\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)d\tau. \tag{13.14}$$

DEM:

Fem el canvi de variable

$$\begin{cases} \tau = t_1 - t_2 \\ \nu = t_1 \end{cases}$$

que té jacobià 1 i transforma la regió d'integració segons el dibuix:



$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} C(t_1,t_2)dt_1dt_2 = \int_{-2T}^{0}(\int_{-T}^{T+\tau} C(\tau)d\nu)d\tau + \int_{0}^{2T}(\int_{-T+\tau}^{T} C(\tau)d\nu)d\tau$$
$$= \int_{-2T}^{0} C(\tau)(2T+\tau)d\tau + \int_{0}^{2T} C(\tau)(2T-\tau)d\tau = \int_{-2T}^{2T} C(\tau)(2T-|\tau|)d\tau. \clubsuit$$

13.5 Condicions suficients d'ergodicitat

- Si $\int_{-\infty}^{\infty} C(\tau)d\tau < \infty$ el procés és ergòdic en valor mitjà.

  DEM:

  $$\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} C(\tau)\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)d\tau \le \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} C(\tau)d\tau \to 0$$

  quan $T\to\infty$. $\clubsuit$

  Recordem la propietat $|C[X,Y]| \le \sigma_X\sigma_Y$. En el cas d'un procés estacionari, fent $X = X(t)$ i $Y = X(t+\tau)$ trobem que

  $$|C(\tau)| \le C(0).$$

- Si $C(0) < \infty$ i $C(\tau) \to 0$ quan $|\tau| \to \infty$, el procés és ergòdic en valor mitjà.

  DEM:

  Per a tot $\epsilon > 0$ existeix a tal que $|C(\tau)| < \epsilon$ si $|\tau| > a$. Llavors

  $$2T\sigma_T^2 = \int_{-2T}^{2T} C(\tau)\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)d\tau \le \int_{-2T}^{2T} |C(\tau)|d\tau$$
  $$\le \int_{-a}^{a} |C(\tau)|d\tau + \int_{a<|\tau|<2T} |C(\tau)|d\tau < 2aC(0) + 4T\epsilon.$$

  Així

  $$\sigma_T^2 < \frac{a}{T}C(0) + 2\epsilon \to 2\epsilon$$

  quan $T\to\infty$. Com això val per a tot ϵ, ha de ser $\sigma_T^2 \to 0$ quan $T\to\infty$. $\clubsuit$

Exemple 13.3 Estudiar l'ergodicitat del senyal telegràfic aleatori i del shot noise amb els anteriors criteris.

Pel senyal telegràfic $C(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$ que té integral finita ($= \frac{1}{\lambda}$). Segons el primer criteri, és ergòdic en valor mitjà. El mateix es conclou amb el segon criteri ja que $C(0) = 1$, finit, i $C(t)$ s'anul·la en l'infinit.

Pel shot noise $C(\tau) = \lambda\delta(\tau)$ que té integral finita ($= \lambda$). Segons el primer criteri, és ergòdic en valor mitjà. El segon criteri no es pot aplicar ja que $C(0) = \infty$. ♦

13.6 Espectre de potència d'un procés estacionari

La densitat espectral o espectre de potència d'un PE estacionari és la transformada de Fourier de la funció d'autocorrelació.

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau. \tag{13.15}$$

Invertint (13.15) trobem

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi f\tau}df. \tag{13.16}$$

Com, per processos reals, $R(-\tau) = R(\tau)$, si fem el canvi de variable $\tau' = -\tau$ en (13.15) trobem que $S(f)$ és real.

DEM: $S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau')e^{j2\pi f\tau'}d\tau' = S^*(f)$. ♣

Com $S(-f) = S^*(f) = S(f)$, $S(f)$ és una funció parella. Recordem que la potència mitjana era

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)df, \tag{13.17}$$

$S(f)$ és, en efecte, la densitat de potència distribuïda segons el contingut en freqüències.

Exemple 13.4 Shot noise.

Notem que al ser la transformada de Fourier de $\delta(\tau)$ igual a 1 la inversió ens dóna la representació integral de la δ de Dirac:

$$\delta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f\tau}df. \tag{13.18}$$

En el cas dels impulsos de Poisson era $R(\tau) = \lambda^2 + \lambda\delta(\tau)$ d'on

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda^2 + \lambda\delta(\tau))e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \lambda^2\delta(f) + \lambda. \ ♦$$

Exemple 13.5 Senyal telegràfic. És $R(\tau) = \exp\{-2\lambda|\tau|\}$ i

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\lambda|\tau|}e^{-j2\pi f\tau}d\tau = 2\int_{0}^{\infty} e^{-2\lambda\tau}\cos(2\pi f\tau)d\tau = \frac{\lambda}{\pi^2 f^2 + \lambda^2}. \ ♦$$

13.7 Sistemes lineals

Considerem un PE $X(t)$. Igual que una variable aleatòria X dóna lloc a noves variables fent transformacions del tipus $Y = g(X)$, podem transformar el procés $X(t)$ per obtenir el nou PE $Y(t)$. Diem L a aquesta transformació que anomenarem sistema i escrivim $Y(t) = L[X(t)]$. Gràficament ho pensem com un objecte que rep una entrada $X(t)$ i torna una sortida $Y(t)$.

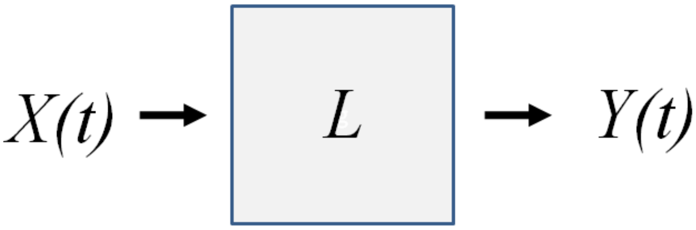


Figura 13.1: Sistema lineal.

Un sistema és **determinista** si fixada la realització de $X(t)$ que entra, la sortida queda ja determinada. Si, pel contrari, una mateixa entrada pot donar lloc a sortides diferents diem que el sistema és **estocàstic**. En el que segueix només considerem sistemes deterministes.

Un sistema és **sense memòria** si el valor de $Y(t)$ per cada t depèn exclusivament del valor de $X(t)$ pel mateix t.

Un sistema és **lineal** si

$$L[\lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t)] = \lambda_1 L[X_1(t)] + \lambda_2 L[X_2(t)], \tag{13.19}$$

on λ_1, λ_2 poden ser variables aleatòries però no dependre de t.

Un tipus particular de transformació és la translació temporal definida

$$T_a[X(t)] = X(t-a). \tag{13.20}$$

Un sistema és **invariant en el temps** si $LT_a = T_a L$ per a tot a. Això es pot expressar de manera equivalent dient que si $X(t)$ dóna la sortida $Y(t)$ llavors $X(t-a)$ dóna la sortida $Y(t-a)$. Si pensem L com un dispositiu físic que transforma un senyal, la invariància en el temps vol dir que la constitució d'aquest dispositiu és idèntica en tot t. A partir d'ara considerem només sistemes lineals invariants en el temps.

Definim la **funció de resposta impulsiva** h d'un sistema lineal com

$$h(t) = L[\delta(t)]. \tag{13.21}$$

Coneixent h tenim que una resposta arbitrària es pot determinar fent una convolució:

$$L[X(t)] = (h * X)(t). \tag{13.22}$$

DEM:

$$\begin{aligned} L[X(t)] &= L\left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) X(\tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} L[\delta(t-\tau)] X(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) X(\tau) d\tau = (h * X)(t). \clubsuit \end{aligned}$$

13.8 Valor mitjà, autocorrelació i espectre de potència d'un PE transformat linealment

Un procés estocàstic $X(t)$ es caracteritza principalment per les funcions valor mitjà $m(t)$ i autocorrelació $R(t_1, t_2)$. Si tenim altres processos definim en general la funció de correlació de $X(t)$ i $Y(t)$

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)]. \tag{13.23}$$

La funció d'autocorrelació de $X(t)$ s'escriu ara $R_{XX}(t_1, t_2)$. També indicarem el seu valor mitjà $m_X(t)$. L'operació L es fa sempre sobre funcions d'una variable. Quan el seu argument té dues variables posem L_1 o L_2 per indicar que considerem la funció de la variable t_1 o t_2 deixant l'altra com a paràmetre.

El següent resultat indica com obtenir els paràmetres de $Y(t) = L[X(t)]$ a partir dels de $X(t)$.

$$m_Y(t) = L[m_X(t)], \tag{13.24}$$

$$R_{XY}(t_1, t_2) = L_2[R_{XX}(t_1, t_2)], \tag{13.25}$$

$$R_{YY}(t_1, t_2) = L_1[R_{XY}(t_1, t_2)]. \tag{13.26}$$

DEM:

$$m_Y(t) = E[L[X(t)]] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)X(\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)E[X(\tau)]d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)m_X(\tau)d\tau = (h * m_X)(t) = L[m_X(t)].$$

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = E\left[X(t_1)\int_{-\infty}^{\infty} h(t_2-\tau)X(\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2-\tau)E[X(t_1)X(\tau)]d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2-\tau)R_{XX}(t_1, \tau)d\tau = L_2[R_{XX}(t_1, t_2)].$$

$$R_{YY}(t_1, t_2) = E[Y(t_1)Y(t_2)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-\tau)X(\tau)d\tau Y(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-\tau)E[X(\tau)Y(t_2)]d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-\tau)R_{XY}(\tau, t_2)d\tau = L_1[R_{XY}(t_1, t_2)]. \clubsuit$$

Finalment trobem l'espectre de potència de $Y(t)$, $S_Y(f)$ a partir de $S_X(f)$. $X(t)$ és ara un PE estacionari amb funció d'autocorrelació $R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_2 - t_1)$. Definim la funció de transferència del sistema $H(f)$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau. \tag{13.27}$$

Llavors tenim el següent resultat:

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f). \tag{13.28}$$

Abans de demostrar-ho recordem el teorema de convolució. Si les funcions $f(t)$ i $g(t)$ tenen les transformades de Fourier $F(f)$ i $G(f)$ llavors el seu producte de convolució $(f*g)(t)$ té transformada de Fourier $F(f)G(f)$. També tenim que $f(-t)$ es transforma en $F^*(f)$.

DEM:

L'espectre de potència de $Y(t)$ s'obté fent la transformada de Fourier de $R_{YY}(t)$.

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2-\tau)R_{XX}(t_1, \tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - \tau) R_{XX}(\tau - t_1) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - t_1 - \tau) R_{XX}(\tau) d\tau,$$

on hem fet servir que R_{XX} depèn només de la diferència de temps i hem fet el canvi de variable $\tau \longrightarrow \tau + t_1$. Així veiem que $R_{XY}(t_1, t_2)$ depèn només de $t_2 - t_1$. Ara obtenim

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - \tau) R_{XY}(\tau, t_2) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - \tau) R_{XY}(t_2 - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - t_2 - \tau) R_{XY}(-\tau) d\tau.$$

Així veiem que R_{YY} s'obté de la convolució entre $h(t)$ i $R_{XY}(-t)$ i $R_{XY}(t)$ s'obté de la convolució entre $h(t)$ i $R_{XX}(t)$. Passant a transformades de Fourier

$$R_{XY}(-t) \longrightarrow [H(f) S_X(f)]^* = H^*(f) S_X(f)$$

$$R_{YY}(t) \longrightarrow S_Y(f) = H(f) \cdot H^*(f) S_X(f) = |H(f)|^2 S_X(f). \clubsuit$$

Exemple 13.6 Circuit L-R.

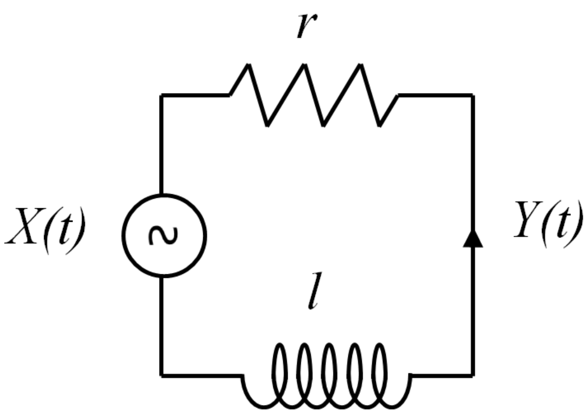


Figura 13.2: Circuit L-R.

Considerem el sistema format per una resistència r i una bobina d'inductància l. L'entrada al sistema és el voltatge aplicat al circuit donat pel procés $X(t)$. La sortida és la intensitat de corrent que hi circula $Y(t)$. Calculem la transformació $Y(t) = L[X(t)]$ i trobem com varia l'espectre de potència.

Donat $X(t)$ calculem $Y(t)$ resolent l'equació diferencial del circuit

$$l \frac{dY}{dt}(t) + rY(t) = X(t). \tag{13.29}$$

La solució de l'equació homogènia és $Y(t) = Ce^{-\frac{r}{l}t}$ on C és una constant. Ara trobem una solució particular de l'equació completa per variació de constants $Y_p(t) = C(t)e^{-\frac{r}{l}t}$ que implica al substituir en (13.29)

$$C(t) = \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{r}{l}\tau} X(\tau) d\tau.$$

Llavors la solució general de (13.29) és

$$Y(t) = Ce^{-\frac{r}{l}t} + \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{r}{l}(t-\tau)} X(\tau) d\tau. \tag{13.30}$$

En (13.30) el primer terme és un transitori que desapareix passat un cert temps. Considerem com a sortida la corrent quan s'ha arribat a la situació estacionària i, per tant, fem $C = 0$ en

(13.30). Comparant amb l'expressió general

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)X(\tau)d\tau \tag{13.31}$$

trobem

$$h(t) = \frac{1}{l}e^{-\frac{r}{l}t}u(t).$$

Ara tenim

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{l}e^{-\frac{r}{l}t}u(t)e^{-j2\pi ft}dt = \frac{1}{l}\int_{0}^{\infty} e^{-(\frac{r}{l}+j2\pi f)t}dt$$
$$= \frac{1}{r + jl2\pi f}.$$

Llavors (13.28) ens dóna

$$S_Y(f) = \frac{S_X(f)}{r^2 + 4\pi^2 l^2 f^2} \blacklozenge$$

Capítol 14

Cadenes de Markov

14.1 Processos i cadenes de Markov

Un **procés estocàstic** $X(t)$, és una variable aleatòria que depèn d'un índex t que pot ser continu o discret.

$X(t)$ és un **procés de Markov** si, donat el present, el futur és independent del passat. És a dir, donada qualsevol col·lecció ordenada d'instants $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}$, la variable $X(t_{n+1})$ condicionada a les variables $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ coincideix amb $X(t_{n+1})$ condicionada a $X(t_n)$.

Diem que $X(t)$ és una **cadena de Markov** si és un procés de Markov d'**estat discret**. És a dir, per a cada t la variable $X(t)$ és discreta. Una cadena de Markov pot ser a **temps continu**, si t varia de manera contínua, o a **temps discret** si t pren només una seqüència discreta de valors $t_0, t_1, t_2, \ldots$.

En el que segueix tractarem només cadenes de Markov a temps discret.

14.2 Cadenes de Markov a temps discret

Considerem un sistema que es pot trobar en cada instant $t = 0, 1, 2, \ldots$ en un i només un dels estats $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$. Anomenem X_t a l'estat en que es troba el sistema en l'instant t (escrivim $X_t = s_i$ si en l'instant t el sistema es troba en l'estat s_i). La variable X_t es descriu amb el **vector de probabilitats** $P(t) = (P_1(t), P_2(t), \ldots, P_\nu(t))$ de manera que $P_i(t) = P(X_t = s_i)$. Aquestes probabilitats s'anomenen **probabilitats d'ocupació dels estats.**

El ser una cadena de Markov equival al fet que les probabilitats de trobar-se en els diferents estats en l'instant $t+1$ depenen de l'estat en que es trobava en l'instant t però no dels estats en instants anteriors. Així, l'objecte principal són les probabilitats condicionades $P(X_{t+1} = s_j \mid X_t = s_i)$ per $t \geq 0$, $1 \leq i, j \leq \nu$. Diem que la cadena de Markov és **homogènia** si les anteriors probabilitats no depenen de t. En el que segueix només considerem aquest cas.

Definim les **probabilitats de transició**:

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = s_j \,|\, X_t = s_i). \tag{14.1}$$

p_{ij} és doncs la probabilitat de passar de l'estat i a l'estat j passada una unitat de temps. Aquestes probabilitats defineixen una matriu quadrada que s'anomena **matriu de transició**:

$$M = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1\nu} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{\nu 1} & p_{\nu 2} & \cdots & p_{\nu\nu} \end{pmatrix}. \tag{14.2}$$

Notem que la matriu M està formada per components no negatives i la suma dels elements de cada fila val 1. En efecte:

$$\sum_{j=1}^{\nu} p_{ij} = \sum_{j=1}^{\nu} P(X_{t+1} = s_j \,|\, X_t = s_i) = 1 \tag{14.3}$$

ja que el conjunt d'esdeveniments $X_{t+1} = s_j, 1 \leq j \leq \nu$ formen una partició de l'espai mostral. En general, tota matriu amb elements no negatius que sumin 1 en cada fila s'anomena **matriu estocàstica**.

Utilitzant el mateix tipus de partició veiem que les probabilitats de transició després de n passos són:

$$P(X_{t+n} = s_j \,|\, X_t = s_i) = (M^n)_{ij}. \tag{14.4}$$

DEM: Per inducció. Si $n = 1$ és cert (fórmula 14.1). Suposem que és cert per a $n-1$. Llavors

$$P(X_{t+n} = s_j \,|\, X_t = s_i) = \sum_{k=1}^{\nu} P(X_{t+n} = s_j \,|\, X_{t+n-1} = s_k) P(X_{t+n-1} = s_k \,|\, X_t = s_i)$$

$$\sum_{k=1}^{\nu} p_{kj} (M^{n-1})_{ik} = (M^n)_{ij}. \clubsuit$$

Exemple 14.1 Cada dia pot ploure o no amb certes probabilitats. Si un dia plou, la probabilitat que plogui el següent val 0,3. Si un dia no plou, la probabilitat que no plogui el següent val 0,9. Si el dilluns plou, calculem la probabilitat que plogui cadascun dels restants dies de la setmana.

Es tracta d'una cadena de Markov amb dos estats $s_1 =$ "No plou" i $s_2 =$ "Plou". Les probabilitats de transició són: 0,9 per a $1 \to 1$, 0,1 per a $1 \to 2$, 0,7 per a $2 \to 1$, 0,3 per a $2 \to 2$. La matriu de transicions és

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Així la probabilitat que plogui el dimarts si ha plogut el dilluns és l'element $p_{22} = 0{,}3$. Per la resta de dies necessitem les potències de la matriu M.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}88 & 0{,}12 \\ 0{,}84 & 0{,}16 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}876 & 0{,}124 \\ 0{,}868 & 0{,}132 \end{pmatrix}, \quad M^4 = \begin{pmatrix} 0{,}8752 & 0{,}1248 \\ 0{,}8736 & 0{,}1264 \end{pmatrix}.$$

$$M^5 = \begin{pmatrix} 0{,}87504 & 0{,}12496 \\ 0{,}87472 & 0{,}12528 \end{pmatrix}, \quad M^6 = \begin{pmatrix} 0{,}875008 & 0{,}124992 \\ 0{,}874944 & 0{,}125056 \end{pmatrix}.$$

Per tant, si ha plogut el dilluns, la probabilitat que plogui el dimecres val 0,16, el dijous val 0,132, el divendres val 0,1264, el dissabte val 0,12528 i el diumenge val 0,125056. ♦

Exemple 14.2 Una partícula es mou segons els punts d'un reticle unidimensional representats per coordenades enteres. A cada pas la partícula pot quedar-se al seu lloc o desplaçar-se a un dels dos vèrtexs adjacents.

Considerem el cas on tenim 4 vèrtexs. En els dos interiors (estats 2 i 3) la partícula passa a qualsevol dels dos adjacents amb igual probabilitat $\frac{1}{2}$. En els exteriors (estats 1 i 4) passa a l'adjacent amb probabilitat 1 (parets reflectants).

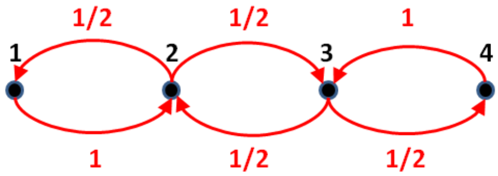
La matriu de transicio és

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \blacklozenge$$

14.3 Graf de transicions

Una manera de representar les probabilitats de transició és a través d'un graf dirigit, on els vèrtexs representen els estats i, si la probabilitat $p_{ij} > 0$, tracem una aresta dirigida del vèrtex s_i al s_j etiquetant-la amb el valor p_{ij}. Aquesta representació és útil quan la matriu de transició té molts zeros.

Exemple 14.3 Dibuixem el graf corresponent a l'exemple 14.2:



14.4 Evolució de les probabilitats d'ocupació

Partim d'una situació inicial, $t = 0$, on coneixem les probabilitats d'ocupació dels diferents estats: $P_i(0)$, $1 \leq i \leq \nu$. La matriu de transició permet trobar aquestes probabilitats en un instant donat si coneixem les de l'instant anterior:

$$P_i(t+1) = P(X_{t+1} = s_i) = \sum_{j=1}^{\nu} P(X_{t+1} = s_i \,|\, X_t = s_j) P(X_t = s_j) = \sum_{j=1}^{\nu} P_j(t) p_{ji} = (P(t)M)_i. \tag{14.5}$$

Així, el vector de probabilitats en $t+1$, $P(t+1)$, és el vector fila $P(t)$ multiplicat per la dreta per la matriu M. Iterant aquest procediment arribem a

$$P(n) = P(0)M^n. \tag{14.6}$$

Transposant l'anterior relació podem fer el càlcul equivalent a partir del vector columna de probabilitats:

$$P(n)^\top = (M^n)^\top P(0)^\top = (M^\top)^n P(0)^\top. \tag{14.7}$$

Notem que la matriu M^n també és una matriu estocàstica, així que les seves files sumen 1.

Exemple 14.4 La partícula de l'exemple 14.2, en $t = 0$, té probabilitats $\frac{1}{2}$ de trobar-se en els vèrtexs 2 i 3. Trobem les probabilitats d'ocupació després d'una i de dos transicions.

Després de la primera transició:

$$P(1) = P(0)M = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Després de la segona transició:

$$P(2) = P(1)M = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right).$$

Alternativament, haguéssim pogut calcular la matriu de transició per dos passos:

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

i obtenir

$$P(2) = P(0)M^2 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right). \blacklozenge$$

14.5 Classificació dels estats

Diem que es pot passar de l'estat s_i a l'estat s_j si existeix algun $n \geq 1$ tal que $(M^n)_{ij} > 0$.

Diem que els estats s_i i s_j estan **comunicats** si es pot passar de s_i a s_j i de s_j a s_i. La relació "estar comunicats" és d'equivalència, de manera que el conjunt d'estats queda dividit en classes disjuntes. Dins de cada classe els estats estan comunicats entre ells.

Si el sistema es troba dins d'una classe i l'abandona, ja no hi pot tornar (si no, tindríem dues classes comunicades i, per tant, serien la mateixa classe). Així, l'evolució temporal condueix el sistema a classes que no es possible abandonar. Els estats d'aquestes classes s'anomenen **essencials** o **recurrents**. La resta d'estats s'anomenen **secundaris** o **transitoris**. Notem que un estat s_i és transitori si existeix un estat s_j tal que es pot anar de s_i a s_j ($(M^n)_{ij} > 0$) però no es pot anar de s_j a s_i ($(M^m)_{ij} = 0$ per a tot m).

Diem que el sistema és **completament ergòdic** si, sigui quin sigui l'estat de que partim, hi ha una probabilitat no nul·la d'arribar en cert nombre de passos a qualsevol altre estat essencial, i les probabilitats d'ocupació dels estats s'acaben estabilitzant. Aquest és el significat del terme "ergòdic": el sistema recorre tots els estats essencials al llarg de l'evolució temporal. Això implica que només existeix una classe essencial, tots els estats essencials estan comunicats, i no hi ha rotacions cícliques dins d'aquesta classe.

14.6 Caracterització de l'ergodicitat per probabilitats límit

Una cadena de Markov és completament ergòdica si es verifiquen les següents condicions:

(1) Existeixen els límits $p_i = \lim_{n\to\infty} P_i(n)$.

(2) Els anteriors límits no depenen de les probabilitats inicials $P_j(0)$.

Això vol dir que sigui quina sigui la distribució inicial de probabilitats, al llarg del temps el sistema evoluciona a un vector fix de probabilitats $P(\infty) = (p_1, p_2, \ldots, p_\nu)$. Atès que

$$P(n+1) = P(n)M, \tag{14.8}$$

prenent el límit $n \to \infty$, i tenint en compte que $\lim P(n+1) = \lim P(n)$:

$$P(\infty) = P(\infty)M. \tag{14.9}$$

Transposant, veiem que el vector columna de probabilitats límit és un vector propi de la matriu $M^\top$ amb valor propi 1 (un punt fix de la transformació, per tant):

$$P(\infty)^\top = M^\top P(\infty)^\top. \tag{14.10}$$

Recordem que els valors propis de M i $M^\top$ són els mateixos, però no els vectors propis. El procediment per trobar el vector $P(\infty)$ és cercar un vector del nucli $\mathrm{Ker}(M^\top - I)$ i normalitzar-lo de manera que les seves components sumin 1.

Com l'equació (14.6) era

$$P_i(n) = \sum_j P_j(0)(M^n)_{ji}.$$

la condició d'ergodicitat és

$$p_i = \sum_j P_j(0) \left(\lim_{n\to\infty} M^n \right)_{ji}$$

i, al ser el límit independent del vector $P(0)$ (prenent $P(0)$ amb un 1 en la posició j i la resta zeros)

$$p_i = \left(\lim_{n\to\infty} M^n \right)_{ji}.$$

És a dir, $\lim\limits_{n\to\infty} M^n$ té totes les files iguals al vector $(p_1, p_2, \dots, p_\nu)$.

Exemple 14.5 Un sistema amb dos estats té probabilitats $\frac{2}{3}$ de passar de s_1 a s_2 i $\frac{3}{4}$ de passar de s_2 a s_1. Calcular la matriu M^n i determinar si el sistema és completament ergòdic.

Més endavant veurem criteris per concloure si un sistema és completament ergòdic. Ara anem a fer el càlcul complet per deduir-ho explícitament.

La matriu de transicio és

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Per calcular la seva n-èsima potència anem a diagonalitzar-la. El seu polinomi característic és

$$c_M(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{7}{12}\lambda - \frac{5}{12}.$$

Les seves arrels són els valors propis: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{5}{12}$. Els vectors propis són $v_1 \in \mathrm{Ker}(M - I)$ i $v_2 \in \mathrm{Ker}(M + \frac{5}{12}I)$.

$$M - I = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}, \qquad M + \frac{5}{12}I = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Triem $v_1 = (1, 1)$ i $v_2 = (8, -9)$. Llavors és $M = CM_dC^{-1}$ on la forma diagonal és

$$M_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

i la matriu de canvi de base

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ara tenim $M^n = CM_d^nC^{-1}$:

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{5}{12})^n \end{pmatrix} \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 9 + 8\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 8 - 8\left(-\frac{5}{12}\right)^n \\ 9 - 9\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 8 + 9\left(-\frac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Ara podem calcular

$$\lim_{n\to\infty} M^n = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Veiem doncs que el límit existeix i que les dues files tenen el mateix límit. Així el sistema és completament ergòdic i el vector de probabilitats límit és $\left(\frac{9}{17}, \frac{8}{17}\right)$. Per tant, sigui quina sigui la distribució de probabilitats en l'instant inicial, el sistema acaba trobant-se en s_1 amb probabilitat $\frac{9}{17}$ i en s_2 amb probabilitat $\frac{8}{17}$. ♦

A continuació donem dos resultats sobre caracterització de l'ergodicitat, sense demostració.

14.7 Teorema (ergodicitat per M^n sense zeros)

Si existeix algun $n \geq 1$ tal que totes les components de M^n són estrictament positives, el sistema és completament ergòdic.

Exemple 14.6 Estudiar si el sistema amb probabilitats de transició

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

és completament ergòdic i determinar les probabilitats límit en cas que ho sigui.

Calculem

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{4}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{4}{8} & \frac{2}{8} \end{pmatrix}.$$

Com les components de M^3 són estrictament positives, el sistema és completament ergòdic. les probabilitats límit s'obtenen cercant un vector de

$$\mathrm{Ker}(M^\top - I) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Trobem, per exemple, el vector $(2, 4, 1)$ amb el que les probabilitats límit valen $\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right)$. ♦

14.8 Teorema (ergodicitat per valors propis)

Els valors propis d'una matriu estocàstica sempre verifiquen $|\lambda| \leq 1$. A més, el sistema és completament ergòdic si i només si el valor propi $\lambda = 1$ és simple (subespai propi de dimensió 1) i els altres valors propis tenen mòdul $|\lambda| < 1$.

Notem que el valor propi 1 sempre està present ja que les files de M són de suma 1. Si es dóna el valor propi -1, el sistema no és ergòdic.

Exemple 14.7 Apliquem aquest teorema a l'exemple anterior.

$$c_M(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{4}.$$

Els valors propis són $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}j, \lambda_3 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}j$. Com $|\lambda_2| = |\lambda_3| = \frac{1}{2} < 1$, el sistema és completament ergòdic. ♦

Exemple 14.8 Considerem dues matrius estocàstiques molt simples:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En el cas de M_1 els valors propis són 0 i 1, per tant el sistema és completament ergòdic. Hi ha un estat s_2 absorbent (l'estat essencial) i un altre estat (transitori) s_1 que transiciona de forma determinista a s_2. Sigui quin sigui el vector de probabilitats inicials, en qualsevol instant posterior $(t > 0)$ ja trobem $P_1(t) = 0$, $P_2(t) = 1$.

M_2 té valors propis 1 i -1 i, per tant, no és completament ergòdic. Cada un dels estats s_1, s_2 transiciona de forma determinista a l'altre. Així, tot i haver una sola classe essencial (els dos estats estan comunicats), el sistema es mou cíclicament entre els dos estats i les probabilitats d'ocupació mai s'estabilitzen. ♦

Part IV

Apèndixs

Apèndix A

Lògica i conjunts

Els objectes elementals en la lògica són els predicats o **proposicions lògiques**. Aquestes proposicions poden tenir dos valors, 0 o 1, assignats. Si la proposició p és certa li assignem el valor 1 i si és falsa el valor 0. A partir de proposicions elementals en construïm d'altres a través d'operacions lògiques. Llavors la qüestió és conèixer el valor d'una proposició complexa a partir del valor de les proposicions elementals que la formen.

Si p i q són proposicions lògiques definim la conjunció $p \wedge q$ (p i q), la disjunció $p \vee q$ (p o q) i la negació $\neg p$ (no p) amb les **taules de veritat**:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

p	$\neg p$
0	1
1	0

Amb aquestes taules es poden demostrar algunes equivalències veient que els valors dels dos costats coincideixen per a totes les eleccions de valors de les proposicions elementals. Algunes d'aquestes propietats són:

$$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p, \qquad p \vee q \leftrightarrow q \vee p, \tag{A.1}$$

$$p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \qquad p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r, \tag{A.2}$$

$$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \qquad p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r), \tag{A.3}$$

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q), \qquad \neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q). \tag{A.4}$$

Algunes proposicions fan referència a un argument i tenen la forma $p(x)$. El seu valor de veritat depèn llavors del valor de l'argument. Aquestes proposicions ens connecten la lògica amb la teoria de conjunts de la següent manera. Donat el conjunt A li associem la proposició $p(x)$ que és certa si i només si $x \in A$. Inversament, donada una proposició $p(x)$ definim el conjunt $A = \{x \mid p(x)\}$, és a dir, el conjunt dels x tals que $p(x)$ és certa.

Les operacions de conjunts $\cap$ (intersecció), $\cup$ (unió) i complementari tradueixen llavors les operacions lògiques a aquest nou llenguatge. Si A i B són conjunts:

$$A = B \leftrightarrow (x \in A \leftrightarrow x \in B), \tag{A.5}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\}, \tag{A.6}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}, \tag{A.7}$$

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}. \tag{A.8}$$

Les propietats de les operacions lògiques passen ara trivialment a les operacions entre conjunts:

$$A \cap B = B \cap A, \qquad A \cup B = B \cup A, \tag{A.9}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \tag{A.10}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \tag{A.11}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}. \tag{A.12}$$

Les propietats s'anomenen (A.1) i (A.9) commutatives, (A.2) i (A.10) associatives i (A.3) i (A.11) distributives.

Quan la proposició $p(x)$ es falsa per a tot valor de l'argument x li associem el conjunt buit $\emptyset$. Aquest conjunt no conté cap element i verifica per a tot A

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cup \emptyset = A. \tag{A.13}$$

Quan la proposició $p(x)$ es certa per a tot valor de l'argument x li associem el conjunt total Ω. Aquest conjunt conté qualsevol element al que es pugui fer referència i és necessari en teoria de conjunts per evitar algunes paradoxes. Ω verifica per a tot A

$$A \cap \Omega = A, \qquad A \cup \Omega = \Omega. \tag{A.14}$$

El conjunt $\mathcal{P}(\Omega)$ de tots els subconjunts de Ω amb les operacions descrites anteriorment adquireix un estructura que s'anomena **àlgebra de Boole**. Una característica important és la propietat de **dualitat**: si en una propietat certa es fa el canvi $\cup \leftrightarrow \cap$ i $\emptyset \leftrightarrow \Omega$, s'obté una altra propietat certa.

Apèndix B

Combinatòria

Per a tot enter no negatiu n definim el seu factorial $n!$ de la següent manera:

$$0! = 1, \tag{B.1}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n. \tag{B.2}$$

La funció factorial és de creixement molt ràpid. Una forma asimptòtica la dóna la fórmula de Stirling

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{B.3}$$

quan $n \to \infty$. De fet per a $n = 10$ l'error és ja només de l'1% . La fórmula de Stirling és útil també per trobar formes asimptòtiques de resultats en combinatòria.

Considerem ara que tenim n objectes distingibles. Els podem pensar com n boles numerades de 1 a n. D'aquests objectes en seleccionem k, diferents. Això ho podem fer de dues maneres:

- Ordenats. Quan considerem que, per exemple, triant dos objectes, 1,2 i 2,1 són dues eleccions diferents.
- No ordenats. Quan considerem que, per exemple, triant dos objectes, 1,2 i 2,1 són la mateixa elecció.

Per exemple, suposem que tenim deu ampolles amb diferents licors. Si volem seleccionar tres ampolles per fer un còctel les triarem no ordenades ja que l'ordre en que les posem és irrellevant. Si volem triar tres ampolles per donar el primer, segon i tercer premis d'un concurs les triarem ordenades ja que de les tres ampolles triades hem de decidir quina és la primera, quina la segona i quina la tercera, és a dir, ordenar-les.

Així per a $0 \leq k \leq n$ definim els nombres:

- **Variacions** V_n^k: Nombre de maneres de triar k objectes diferents ordenats d'un total de n.
- **Combinacions** C_n^k: Nombre de maneres de triar k objectes diferents no ordenats d'un total de n.
- **Permutacions** P_n: Nombre de maneres d'ordenar n objectes diferents.

Llavors resulten evidents les relacions

$$P_n = V_n^n, \tag{B.4}$$

$$V_n^k = C_n^k P_k. \tag{B.5}$$

Per tant és suficient trobar les variacions per tenir-ho tot. Per calcular V_n^k veiem que podem triar el primer objecte de n maneres, el segon de $n-1$ maneres, etc (es pot visualitzar fent un arbre de possibles tries). Llavors

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdots (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{B.6}$$

Ara trobem, al fer $k=n$, $P_n = n!$. Igualment veiem

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{B.7}$$

Generalment s'escriu $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. La següent propietat és immediata

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{B.8}$$

Una altra propietat fàcil de demostrar per càlcul directe és

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{B.9}$$

A vegades és útil considerar $\binom{n}{k} = 0$ per a $k > n$. Amb aquest criteri no cal recordar els límits de sumació en moltes fórmules. Això és consistent amb l'extensió del factorial a través de la funció gamma (D.10) $x! = \Gamma(x+1)$ que dóna infinit pel factorial dels enters negatius.

En les variacions i combinacions triem elements diferents. En aquest cas diem que fem la tria *sense repetició*. Si al fer la tria els elements es poden repetir, es parla de *variacions amb repetició* (VR_n^k) i de *combinacions amb repetició* (CR_n^k), segons fem la tria ordenada o no. Si fem l'elecció amb ordre podem repetir el raonament de les variacions, només que ara, en cada pas podem triar qualsevol dels n elements, de manera que:

$$VR_n^k = n \cdot n \cdots n = n^k. \tag{B.10}$$

El cas de les combinacions amb repetició és una mica més complicat i es tracta en la secció de problemes. S'ha de tenir en compte que no apareix amb tanta freqüència, i dóna lloc a errors quan es tracten els problemes en termes de la fórmula bàsica de la probabilitat (Laplace). Quan hi ha repetició, els càlculs s'han de fer amb configuracions ordenades, encara que l'ordre no sigui rellevant en allò que calculem.

Exemple B.1 Binomi de Newton

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k. \tag{B.11}$$

En efecte,

$$(1+x)^n = \overbrace{(1+x)\cdot(1+x)\dots(1+x)}^{n} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

El producte dels n $1+x$ dóna 2^n termes. a_k és el nombre d'aquests termes iguals a x^k. Aquest es genera quan dels n termes, en k agafem x i en $n-k$ agafem 1. La multiplicitat apareix perquè poden triar les k x de diferents maneres, exactament C_n^k.

Exemple B.2 Sigui A un conjunt finit de n elements. Diem llavors que el seu cardinal és n i posem $|A| = n$. El conjunt dels subconjunts de A el designem $\mathcal{P}(A)$ (parts de A). Que val $|\mathcal{P}(A)|$?

És a dir, quants subconjunts té un conjunt de n elements?

Contem primer quants subconjunts de k elements té A i després sumem per a $k = 0, \dots, n$. La llibertat que tenim per triar subconjunts de k elements és quins són aquests elements. Com un conjunt no implica cap ordenació dels seus elements hi han C_n^k subconjunts de k elements. Ara, en total tenim

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

subconjuns. Així

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}. \tag{B.12}$$

Una manera alternativa de trobar aquest resultat és la següent. Podem representar cada subconjunt de A amb una paraula binaria de n lletres. Cada posició en la paraula representa un element de A. Per un subconjunt donat cada lletra val 1 o 0 segons l'element hi pertanyi o no. Per exemple, al subconjunt $\{2,3,5\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$ li correspon la paraula 011010. És evident que hi ha una correspondència biunívoca entre aquestes paraules i els subconjunts. També es immediat el fet que podem formar 2^n paraules.

Exemple B.3 Funcions generadores

Hi han nombroses propietats dels nombres combinatoris i aquestes poden resultar difícils de demostrar directament. Una manera d'obtenir moltes relacions és utilitzar funcions generadores. Per exemple, tots els combinatoris de n elements apareixen en (B.11). Així les propietats d'aquests nombres estan codificades en les propietats de la funció $(1+x)^n$. Es pot, llavors, anar traduint d'un costat a l'altre per diferents propietats i funcions generadores.

Per exemple, sabem trivialment que $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$. Llavors

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s = \sum_{r,s=0}^{n} \binom{n}{r}\binom{n}{s} x^{r+s} = \sum_{k=0}^{2n} \left\{ \sum_{r+s=k} \binom{n}{r}\binom{n}{s} \right\} x^k.$$

Comparant els polinomis dels dos extrems deduïm

$$\binom{2n}{k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r}\binom{n}{k-r}. \tag{B.13}$$

Apèndix C

Sèries

Les variables aleatòries discretes amb espai mostral infinit numerable porten a la suma de sèries per resoldre alguns problemes. Donat el context en que apareixen i el fet que aquestes sèries solen ser de termes positius, la qüestió de la convergència és generalment bastant simple. Les sèries més corrents són les geomètriques, associades a les variables del mateix nom. Si definim

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k, \tag{C.1}$$

es veu immediatament que $rS_n = S_n + r^{n+1} - 1$ d'on traiem

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}. \tag{C.2}$$

Aquest resultat val per a tot $r \neq 1$. Si $|r| < 1$ podem fer el límit $n \to \infty$ i concloure

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1 - r}. \tag{C.3}$$

Notem que la sèrie següent és un cas de la sèrie geomètrica. Per a $\alpha > 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}. \tag{C.4}$$

A vegades els sumatoris anteriors comencen en $k = 1$. Si restem el terme de la sèrie per a $k = 0$ trobem

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r - r^{n+1}}{1 - r}, \tag{C.5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r}{1 - r}. \tag{C.6}$$

Moltes de les sèries que se solen utilitzar s'obtenen com a sèrie de Taylor d'alguna funció

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k. \tag{C.7}$$

En (C.7) $f^{(k)}$ indica la derivada k-èsima. La sèrie es considera al voltant de 0 per ser el cas més utilitzat. La igualtat en (C.7) només és certa per a x pertanyent a una regió anomenada interval de convergència. En molts casos l'interval de convergència és tot $\mathbb{R}$. En particular les sèries geomètriques (C.3) i (C.6) es poden considerar sèries de Taylor de les funcions de la dreta convergint en l'interval $(-1, 1)$. Altres exemples importants són

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{C.8}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \tag{C.9}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{C.10}$$

Les sèries (C.8), (C.9) i (C.10) convergeixen per a tot x.

Apèndix D

Integrals

Algunes integrals impròpies apareixen sovint en l'estudi de variables aleatòries contínues, especialment en les exponencials i les gaussianes.

Un resultat fàcil de demostrar per inducció és

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!. \tag{D.1}$$

DEM: Si $I(n)$ és l'anterior integral, $I(0) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$. Si $n \geq 1$, integrem per parts:

$$I(n) = x^n e^{-x}|_0^\infty + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = nI(n-1).\clubsuit$$

Amb el canvi de variable $\lambda x = t$ trobem que

$$\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x} dx = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}. \tag{D.2}$$

Les integrals gaussianes són les del tipus polinomi per exponencial d'un polinomi de segon grau. El resultat bàsic és

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{D.3}$$

DEM: Si I és l'anterior integral

$$I^2 = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$
$$= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = \pi \int_0^\infty e^{-t} dt = \pi$$

on s'ha fet la integral doble passant a polars i després s'ha fet el canvi $r^2 = t$. $\clubsuit$

Degut a la simetria de e^{-x^2}

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{D.4}$$

Un resultat més general és

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2+bx+c} dx = e^{\frac{b^2}{4a}+c} \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{D.5}$$

La integral és convergent per a $a > 0$.

DEM: Posem l'exponent $-ax^2 + bx + c = -a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a} + c$ i fem el canvi $\sqrt{a}\left(x - \frac{b}{2a}\right) = t$. Llavors la integral és

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2+\frac{b^2}{4a}+c} \frac{dt}{\sqrt{a}} = e^{\frac{b^2}{4a}+c} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.\clubsuit$$

El següent resultat és directe pel fet que la funció integrada és imparella ($f(-x) = -f(x)$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = 0. \tag{D.6}$$

El mateix és cert si posen x^n amb n *senar* en lloc de x davant l'exponencial. També és trivial veure, fent el canvi $x^2 = t$

$$\int_{0}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}. \tag{D.7}$$

El mateix canvi i l'us de (D.1) ens dóna que, per a n senar,

$$\int_{0}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)!. \tag{D.8}$$

El cas de potències parelles es pot deduir derivant amb respecte a el resultat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \tag{D.9}$$

o també integrant per parts. Per exemple

$$\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = -\left.\frac{x}{2} e^{-x^2}\right|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Molts dels resultats anteriors es sistematitzen amb l'us de la **funció gamma d'Euler**. Motivada per (D.1) definim per a $z > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx. \tag{D.10}$$

Per integració per parts es demostra

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{D.11}$$

Definim el factorial d'un nombre real com $z! = \Gamma(z+1)$. Per a $z = 0, 1, 2, \cdots$ coincideix amb el factorial ordinari. Per valors generals de z s'ha de recórrer a taules o calculadores però per a z semienter es pot calcular. Si fem el canvi $x = t^2$:

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty t^{2z-1} e^{-t^2} dt. \tag{D.12}$$

Ara és immediat veure que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{D.13}$$

i per a $n = 1, 2, 3, \ldots$, utilitzant (D.11),

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}. \tag{D.14}$$

De (D.12) també deduïm una generalització de (D.8):

$$\int_0^\infty t^\nu e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right). \tag{D.15}$$

Apèndix E

Distribucions

Considerem un espai $\mathcal{F}$ els elements del qual són funcions reals d'una variable real $f(t)$. Suposem que aquestes funcions són contínues i prou regulars perquè les operacions que considerarem tinguin sentit. Una **distribució** és una aplicació lineal que assigna un nombre real a cada element d'aquest espai. Si anomenem T a una d'aquestes distribucions llavors indiquem amb $< T, f >$ la imatge de $f(t)$ sota T. Donada una funció $\varphi(t)$ podem associar-li una distribució T_φ definida

$$< T_\varphi, f >= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f(t) dt. \tag{E.1}$$

(Suposem que l'espai $\mathcal{F}$ conté només funcions que asseguren la convergència de l'anterior integral.) També està clar que existeixen distribucions que no poden obtenir-se a partir de cap funció pel procediment anterior. La distribució **delta de Dirac** es defineix

$$< \delta_a, f >= f(a). \tag{E.2}$$

Així el concepte de distribució es més ampli que el de funció i per això a vegades s'anomena funcions generalitzades a les distribucions.

Tot i que la delta de Dirac no correspon a cap funció, sempre es representa de manera simbòlica com si vingués donada per una funció $\delta(t)$. Llavors representem (E.2) quan $a = 0$ com un cas de (E.1) i posem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0). \tag{E.3}$$

En general (E.2) es posa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t) dt = f(a), \tag{E.4}$$

que es pot obtenir fent el canvi de variable $t \to t + a$ en la integral i aplicant (E.3).

Encara que cap funció verifiqui la propietat (E.4) si que podem obtenir-la com a límit d'una successió de distribucions donades per funcions. Així posant per exemple

$$\phi_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} e^{-\frac{t^2}{2\epsilon^2}}$$

tenim que

$$f(a) =< \delta_a, f >= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\epsilon(t-a) f(t) dt.$$

Si bé no té sentit rigurós podem visualitzar la "funció" delta com $\delta(t-a) = \lim_{\epsilon \to 0} \phi_\epsilon(t-a)$ que ens dóna

$$\delta(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq a \\ \infty & \text{si } t = a \end{cases} \tag{E.5}$$

Això ens dóna una imatge intuitiva de la delta però el que la defineix realment és (E.4).

Les distribucions es poden sotmetre a operacions definides en principi només per funcions. Per exemple, veiem quina és la distribució associada a la derivada d'una funció.

$$< T_{\alpha'}, f >= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha'(t)f(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t)f'(t)dt = - < T_\alpha, f' >$$

on s'ha fet una integració per parts i considerat que les funcions tendeixen prou ràpidament cap a 0 en els extrems. Ara podem definir la derivada de qualsevol distribució T com una nova distribució T' que actua

$$< T', f >= - < T, f' > \tag{E.6}$$

Això implica que, per exemple,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-a)f(t)dt = -f'(a). \tag{E.7}$$

Igualment considerem la **funció de Heaviside** $\mathrm{u}_a(t) = \mathrm{u}(t-a)$ definida

$$\mathrm{u}(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases} \tag{E.8}$$

La seva distribució associada la designem amb el mateix nom i posem

$$< \mathrm{u}_a, f >= \int_a^{\infty} f(t)dt. \tag{E.9}$$

Ara és fàcil demostrar que $\mathrm{u}'(t-a) = \delta(t-a)$.

$$< \mathrm{u}'_a, f >= -\int_a^{\infty} f'(t)dt = - \left. f(t)\right|_a^{\infty} = f(a) =< \delta_a, f > .$$

Una altra propietat de la delta és que per a tota funció g

$$g(t)\delta(t-a) = g(a)\delta(t-a), \tag{E.10}$$

que es demostra multiplicant els dos costats per una funció arbitrària i integrant. Una conseqüència de (E.10) és:

$$t\delta(t) = 0. \tag{E.11}$$

Apèndix F

Simulació numèrica de variables i processos aleatoris

Els llenguatges i entorns de programació solen oferir algun generador de nombres aleatoris. Aquest generador es presenta sota la forma d'una funció (mètode, procediment, subrutina) com `random()` que dóna com a sortida un valor real (`float` o `double`) uniforme en $[0, 1]$. El mètode d'obtenció d'aquests nombres pseudo-aleatoris consisteix en realitzar operacions modulars amb enters grans i utilitzar part dels seus dígits per construir-los. El generador sol incorporar un procediment d'inicialització que utilitza, per exemple, la data (en mil·lisegons) proveïda pel sistema operatiu.

Aquest generador bàsic ve donat pel sistema i no podem manipular-lo directament però hi han tècniques per, a partir dels seus valors obtenir-ne d'altres amb millors propietats. Els requisits dependran de la quantitat de nombres que necessitem. En simulacions molt extenses, el fet que el generador bàsic és necessàriament periòdic podria falsejar els resultats. Aquestes qüestions es poden estudiar en els llibres tipus *numerical recipes*. En el que segueix, suposem que tenim un generador amb bones propietats.

Denotem G la variable uniforme en $[0, 1]$ donada pel generador. Si volem obtenir una variable contínua X amb funció de distribució $F_X(x)$ ho podem fer com $X = F_X^{-1}(G)$ ja que la variable $F_X(X)$ pren valors en $[0, 1]$ i té densitat

$$f_X(x) \cdot \frac{1}{F'_X(x)} = 1.$$

Per exemple si volem obtenir una variable exponencial de paràmetre λ, $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ i serà $X = -\lambda^{-1} \ln(1 - G)$.

Aquest mètode es pot aplicar si F_X és estrictament creixent sobre Ω_X. També cal poder invertir explícitament F_X. Això no es pot fer en el cas de les variables gaussianes. Per generar una variable normal amb $m = 0, \sigma = 1$, considerem una normal bidimensional amb paràmetres $m_1 = m_2 = \rho = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, és a dir, dues normals independents amb paràmetres normalitzats. La seva densitat és

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$$

i, en polars ($x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$):

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}}$$

on veiem que θ és uniforme en $[0, 2\pi]$, r té densitat $f(r) = re^{-\frac{r^2}{2}}$ i les dues són independents. A partir de dos valors G_1, G_2 del generador obtenim $\theta = 2\pi G_2$, $r = \sqrt{-2\ln(1 - G_1)}$. Així s'obtenen variables normals per parelles:

$$X_1 = \sqrt{-2\ln(1 - G_1)}\cos(2\pi G_2),$$

$$X_2 = \sqrt{-2\ln(1-G_1)}\sin(2\pi G_2).$$

(En les anteriors expressions es pot canviar $1-G_1$ per a G_1 ja que són el mateix tipus de variable.)

Per simular processos, es generen seqüències de valors corresponents a instants temporals equiespaiats. Per un procés normal estacionari incorrelat amb $m(t)=0$ simplement cal una llista de valors normals independents. Per exemple, la rutina que segueix torna el procés en forma d'array de reals

```
float PI=3.1425927;
float x[1000]; //proces amb 1000 mostres

x=proces_normal_incorrelat(1000);


float x[] proces_normal_incorrelat(int n){
  for(int k=0;k<(n/2);k++){
    r=sqrt(-2*ln(random()));
    teta=2*PI*random()
    x[2*k]=r*cos(teta);
    x[2*k+1]=r*sin(teta);
  }
}
```

Veiem ara com es pot simular un procés normal estacionari $X(t)$ amb $m_X(t)=0$ i espectre de potència $S_X(\omega)$. Sigui $\hat{Y}(\omega)$ un procés normal incorrelat, és a dir

$$E[\hat{Y}(\omega)] = 0, \qquad E[\hat{Y}(\omega_1)\hat{Y}^*(\omega_2)] = \delta(\omega_1-\omega_2).$$

Pensem en aquest procés com la transformada de Fourier d'un cert procés temporal. Per una funció fixada $A(\omega)$ considerem el procés $\hat{X}(\omega)=A(\omega)\hat{Y}(\omega)$ i sigui $X(t)$ el procés donat per la seva transformada inversa

$$X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{X}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega.$$

És immediat veure que $m_X(t)=0$. La seva funció d'autocorrelació val

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X^*(t_2)] = E\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)\hat{Y}(\omega)e^{j\omega t_1}d\omega\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A^*(\omega')\hat{Y}^*(\omega')e^{-j\omega' t_2}d\omega'\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)A^*(\omega')e^{j\omega t_1}e^{-j\omega' t_2}E[\hat{Y}(\omega)\hat{Y}^*(\omega')]d\omega d\omega'$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)A^*(\omega')e^{j\omega t_1}e^{-j\omega' t_2}\delta(\omega-\omega')d\omega d\omega' = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}|A(\omega)|^2e^{j\omega(t_1-t_2)}d\omega$$

d'on veiem que $S_X(\omega)=\frac{|A(\omega)|^2}{2\pi}$. Així només cal triar $A(\omega)=\sqrt{2\pi S_X(\omega)}$. El procés es genera fent $\hat{Y}(\omega)$ procés normal incorrelat, escalant les seves components amb $A(\omega)$ i fent una FFT inversa.

Un altre procediment és partir d'un procés temporal de valor mitjà 0, incorrelat, $Y(t)$ i convolucionar-lo amb una funció fixada $K(t)$ de suport compacte (caiguda ràpida). El procés $X(t)=(K*Y)(t)$ ja té una certa correlació que depèn de K:

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty}K(t_1-\tau_1)Y(\tau_1)d\tau_1\int_{-\infty}^{\infty}K(t_2-\tau_2)Y(\tau_2)d\tau_2\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(t_1-\tau_1)K(t_2-\tau_2)E[Y(\tau_1)Y(\tau_2)]d\tau_1 d\tau_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(t_1-\tau_1)K(t_2-\tau_2)\delta(\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K(t_1-\tau_1)K(t_2-\tau_1)d\tau_1 = \int_{-\infty}^{\infty} K(-\tau_1)K(t_2-t_1-\tau_1)d\tau_1$$

que, si K és parell, resulta ser $K * K$. Si K té forma gaussiana, R_X també la té. Si, per exemple, K és un pols quadrat, R_X és un pols triangular, etc.

Per obtenir processos de Poisson o relacionats amb ell es suficient tenir la llista d'instants en que es produeixen els esdeveniments, i això s'obté sumant exponencials independents:

```
float t[1000]; //proces amb 1000 esdeveniments

t=instants_poisson(1000, 2.5); // lambda=2,5


float t[] instants_poisson(int n, float lambda){
  float lambda_inv = 1/lambda;
  float temp = 0;
  for(int k=0;k<n;k++){
    temp += -2*lambda_inv*ln(random());
    t[k]=temp;
  }
}
```

Part V

Taules

Funció d'error

La primera columna son valors de x. La segona columna son valors de

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

La funció de distribució d'una variable normal (gaussiana) amb paràmetres m i σ és

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - m}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right).$$

La taula conté valors $0 \leq x < 3$. La funció erf és imparella així que, per exemple, $\operatorname{erf}(-1.5) = -\operatorname{erf}(1.5)$. Per a $x > 3$ es pot utilitzar l'aproximació

$$\operatorname{erf}(x) \simeq 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{(\pi - 1)x + \sqrt{x^2 + \pi}} e^{-x^2}.$$

La funció d'error esta predefinida en molts paquets de software matemàtic i és accessible fent directament, per exemple,

> erf(0.34);

x	erf(x)	x	erf(x)	x	erf(x)	x	erf(x)	x	erf(x)	x	erf(x)
.00	.000000	.50	.520499	1.00	.842700	1.50	.966105	2.00	.995322	2.50	.999593
.01	.011283	.51	.529243	1.01	.846810	1.51	.967276	2.01	.995524	2.51	.999614
.02	.022564	.52	.537898	1.02	.850838	1.52	.968413	2.02	.995719	2.52	.999634
.03	.033841	.53	.546464	1.03	.854784	1.53	.969516	2.03	.995906	2.53	.999653
.04	.045111	.54	.554939	1.04	.858649	1.54	.970585	2.04	.996085	2.54	.999671
.05	.056371	.55	.563323	1.05	.862436	1.55	.971622	2.05	.996258	2.55	.999689
.06	.067621	.56	.571615	1.06	.866143	1.56	.972628	2.06	.996423	2.56	.999705
.07	.078857	.57	.579815	1.07	.869773	1.57	.973602	2.07	.996582	2.57	.999721
.08	.090078	.58	.587922	1.08	.873326	1.58	.974547	2.08	.996734	2.58	.999736
.09	.101280	.59	.595936	1.09	.876803	1.59	.975462	2.09	.996880	2.59	.999750
.10	.112462	.60	.603856	1.10	.880205	1.60	.976348	2.10	.997020	2.60	.999763
.11	.123622	.61	.611681	1.11	.883533	1.61	.977206	2.11	.997154	2.61	.999776
.12	.134758	.62	.619411	1.12	.886787	1.62	.978038	2.12	.997283	2.62	.999788
.13	.145867	.63	.627046	1.13	.889970	1.63	.978842	2.13	.997407	2.63	.999800
.14	.156947	.64	.634585	1.14	.893082	1.64	.979621	2.14	.997525	2.64	.999811
.15	.167995	.65	.642029	1.15	.896123	1.65	.980375	2.15	.997638	2.65	.999821
.16	.179011	.66	.649376	1.16	.899096	1.66	.981104	2.16	.997747	2.66	.999831
.17	.189992	.67	.656627	1.17	.902000	1.67	.981810	2.17	.997851	2.67	.999840
.18	.200935	.68	.663782	1.18	.904837	1.68	.982492	2.18	.997950	2.68	.999849
.19	.211839	.69	.670840	1.19	.907608	1.69	.983152	2.19	.998045	2.69	.999857
.20	.222702	.70	.677801	1.20	.910313	1.70	.983790	2.20	.998137	2.70	.999865
.21	.233521	.71	.684665	1.21	.912955	1.71	.984407	2.21	.998224	2.71	.999873
.22	.244295	.72	.691433	1.22	.915533	1.72	.985002	2.22	.998307	2.72	.999880
.23	.255022	.73	.698103	1.23	.918050	1.73	.985578	2.23	.998387	2.73	.999886
.24	.265700	.74	.704678	1.24	.920505	1.74	.986134	2.24	.998464	2.74	.999893
.25	.276326	.75	.711155	1.25	.922900	1.75	.986671	2.25	.998537	2.75	.999899
.26	.286899	.76	.717536	1.26	.925235	1.76	.987190	2.26	.998607	2.76	.999905
.27	.297418	.77	.723821	1.27	.927513	1.77	.987690	2.27	.998673	2.77	.999910
.28	.307880	.78	.730010	1.28	.929734	1.78	.988174	2.28	.998737	2.78	.999915
.29	.318283	.79	.736103	1.29	.931898	1.79	.988640	2.29	.998798	2.79	.999920
.30	.328626	.80	.742100	1.30	.934007	1.80	.989090	2.30	.998856	2.80	.999924
.31	.338908	.81	.748003	1.31	.936063	1.81	.989524	2.31	.998912	2.81	.999929
.32	.349125	.82	.753810	1.32	.938065	1.82	.989943	2.32	.998965	2.82	.999933
.33	.359278	.83	.759523	1.33	.940015	1.83	.990346	2.33	.999016	2.83	.999937
.34	.369364	.84	.765142	1.34	.941913	1.84	.990735	2.34	.999064	2.84	.999940
.35	.379382	.85	.770668	1.35	.943762	1.85	.991111	2.35	.999110	2.85	.999944
.36	.389329	.86	.776100	1.36	.945561	1.86	.991472	2.36	.999154	2.86	.999947
.37	.399205	.87	.781439	1.37	.947312	1.87	.991820	2.37	.999196	2.87	.999950
.38	.409009	.88	.786687	1.38	.949016	1.88	.992156	2.38	.999236	2.88	.999953
.39	.418738	.89	.791843	1.39	.950673	1.89	.992479	2.39	.999275	2.89	.999956
.40	.428392	.90	.796908	1.40	.952285	1.90	.992790	2.40	.999311	2.90	.999958
.41	.437969	.91	.801882	1.41	.953852	1.91	.993089	2.41	.999346	2.91	.999961
.42	.447467	.92	.806767	1.42	.955376	1.92	.993378	2.42	.999379	2.92	.999963
.43	.456886	.93	.811563	1.43	.956857	1.93	.993655	2.43	.999410	2.93	.999965
.44	.466225	.94	.816271	1.44	.958296	1.94	.993922	2.44	.999440	2.94	.999967
.45	.475481	.95	.820890	1.45	.959695	1.95	.994179	2.45	.999469	2.95	.999969
.46	.484655	.96	.825423	1.46	.961053	1.96	.994426	2.46	.999496	2.96	.999971
.47	.493745	.97	.829870	1.47	.962372	1.97	.994663	2.47	.999522	2.97	.999973
.48	.502749	.98	.834231	1.48	.963654	1.98	.994892	2.48	.999547	2.98	.999974
.49	.511668	.99	.838508	1.49	.964897	1.99	.995111	2.49	.999570	2.99	.999976

Taula de variables aleatòries

X	Funció de probabilitat	E[X]	V[X]
Bernouilli (p)	$P(X=1)=p,\ \ P(X=0)=q$	p	pq
Binomial (n,p)	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,n$	np	npq
Geomètrica (p)	$P(X=k)=q^{k-1}p,\ k=1,2,3,\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Poisson (α)	$P(X=k)=\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha},\ k=0,1,2,\cdots$	α	α

X	Funció de densitat	Funció de distribució	E[X]	V[X]
Uniforme (a,b)	$f(x)=\frac{1}{b-a},\ \ x\in(a,b)$	$F(x)=\frac{x-a}{b-a},\ \ x\in[a,b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponencial (λ)	$f(x)=\lambda\, e^{-\lambda x},\ \ x\geq 0$	$F(x)=1-e^{-\lambda x},\ \ x\geq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normal (m,σ)	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ \forall x\in\mathbb{R}$	$F(x)=\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{erf}\left(\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)$	m	σ^2

En les anteriors taules: $0<p<1$ (els casos $p=0$ i $p=1$ poden considerar-se com situacions límit), $q=1-p$. Les funcions de densitat valen 0 fora dels intervals indicats. La desviació σ es calcula en cada cas com $\sigma=\sqrt{V[X]}$.

Fórmules trigonomètriques

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1, \qquad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}.$$

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A, \qquad \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A.$$

A	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan A$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B.$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B.$$

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B.$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B.$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B)).$$

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)).$$

$$\cos A\sin B = \frac{1}{2}(\sin(A+B) - \sin(A-B)).$$

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B)).$$

Part VI

Problemes

PROBLEMES

1. Es genera un nombre de n xifres a l'atzar. Calculeu la probabilitat que surti cap-i-cua.

2. Es tira un dau sis vegades. Quina és la probabilitat que surtin els sis resultats diferents?

3. Què és més probable: Treure alguna vegada un as tirant un dau quatre vegades o treure alguna vegada dos asos tirant dos daus 24 vegades?

4. En una loteria de tipus **6/49** tenim un requadre amb 49 nombres dels quals hem de marcar-ne 6. El resultat del sorteig són els 6 nombres premiats més un altre anomenat complementari. El premi depèn de quants encerts tenim. En el cas de 5 encerts, el premi és diferent si el restant nombre que tenim és el complementari o no. Calculeu les probabilitats del diferents nombres d'encerts $(P(0), P(1), P(2), P(3), P(4), P(5-c), P(5+c), P(6))$.

   Per cadascun dels quatre resultats menys probables calculeu la probabilitat d'obtenir-los alguna vegada si juguem cada dia durant 30 anys.

5. Una baralla francesa sense comodins té 52 cartes (4 pals, 13 nombres). Calculeu la probabilitat de les següents jugades en una ma de pòquer (5 cartes): parella, doble parella, trio, escala, full, color, pòquer, escala de color, escala real.

6. Es permuten a l'atzar les 8 lletres AAAACRTT. Quina és la probabilitat que surti CATARATA?

7. Quant d'un total de n objectes distingibles em volem triar k de manera ordenada i amb la possibilitat de repetició, es parla de **variacions amb repetició**. El nombre de configuracions és evident que val
$$\mathrm{VR}\,_n^k = n^k.$$
   El cas en que tenim repetició però no fem la tria ordenada s'anomena **combinacions amb repetició** i és menys immediat de calcular. (Per exemple, si $n = 3$ i $k = 2$ hi han 6 eleccions: 11, 22, 33, 12, 23, 13.) Demostreu que
$$\mathrm{CR}\,_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$
   (Indicació: Pot ajudar pensar el problema així. Tenim n caselles i hem de posar k boles idèntiques en les caselles de manera que cada casella pot tenir cap, una o vàries boles.)

8. De quantes maneres es poden posar k boles idèntiques en n caselles ($k \geq n$) si cap casella pot quedar buida?

9. ¿De quantes maneres podem posar dues torres blanques en un tauler d'escacs sense que s'amenacin? ¿De quantes maneres podem posar n torres blanques en un tauler de mida $N \times N$ sense que s'amenacin?

10. Extraiem $2k$ boles d'una urna que conté n boles blanques i n boles negres. Calculeu la probabilitat d'extraure el mateix nombre de boles de cada color si fem l'extracció

    (a) sense reemplaçament.

    (b) amb reemplaçament.

    Calculeu el límit d'aquestes probabilitats quan $n \to \infty$. (Indicació: Per a fer el límit, demostreu primer que per a k fixada i n gran $\binom{n}{k} \simeq \frac{n^k}{k!}$.)

11. Una urna conté 3 boles blanques, 5 boles vermelles i 8 boles negres. S'hi extreuen dues boles (sense reemplaçament) a l'atzar.

    (a) Quina és la probabilitat que siguin de color diferent?

    (b) Si les boles extretes són del mateix color, quina és la probabilitat que siguin negres?

    (c) Són els esdeveniments $A =$"Surt alguna bola blanca" i $B =$"Surt alguna bola negra" independents?

12. Algunes qüestions sobre independència:

    (a) Demostreu que A i B independents implica A i $\overline{B}$ independents. Demostreu que també implica $\overline{A}$ i $\overline{B}$ independents.

    (b) Demostreu que, per a tot esdeveniment A, Ω i A són independents i $\emptyset$ i A són independents.

    (c) Poden dos esdeveniments no trivials ser incompatibles i independents a la vegada?

13. En l'experiment de tirar un dau, trobeu dos esdeveniments no trivials que siguin independents.

14. La urna A conté 2 boles blanques i 3 boles negres mentre que la urna B conté 4 boles blanques i 3 boles negres. Es passen dues boles a l'atzar de la urna A a la B i després s'extreuen dues boles de B.

    (a) Si aquestes boles són blanques, quina és la probabilitat que haguem passat alguna bola negra de A a B?

    (b) El fet que les boles finals siguin blanques afavoreix que les boles que hagin passat de A a B siguin blanques. Però la probabilitat anterior és bastant gran. Calculeu la probabilitat anterior, ara sense condicionar, per veure que el resultat és consistent.

15. Dos jugadors tiren alternativament un dau. Guanya el joc el primer que treu un 6. Quina és la probabilitat que guanyi el que comença a jugar?

16. Tres jugadors tiren alternativament una moneda amb probabilitat de cara p. Guanya el primer que treu cara. Calculeu la probabilitat que té cada jugador de guanyar.

17. Dos jugadors A i B tiren simultàniament un dau cadascun. El joc es repeteix fins que algú treu un 6 i guanya, llevat que treguin un 6 els dos jugadors declarant-se un empat. Calculeu les probabilitats $P(\text{empat})$, $P(\text{guanya } A)$, $P(\text{guanya } B)$.

18. Una xarxa de comunicacions consisteix de nodes units per línies. La xarxa transmet paquets de manera que si un paquet es troba en un node intern x (node intern és el que està connectat a més d'un node) tria aleatòriament el node de sortida. La probabilitat de sortir pel node y connectat a x val p_{xy} de manera que $\sum_y p_{xy} = 1$. Quan un paquet arriba a un node extern X ja s'hi queda. Denotem p_X a la probabilitat d'anar-hi quan estem al node connectat a ell.

    Ens plantegem calcular la probabilitat $P(xX)$ que el paquet, trobant-se al node intern x, acabi al node extern X.

    (a) Resoleu el problema per una xarxa amb un node extern A connectat a un node intern a connectat a un node intern b connectat a un node extern B. (Noteu que els únics paràmetres lliures són p_A i p_B.

    (b) Resoleu el problema per una xarxa triangular amb nodes a, b, c connectats respectivament a nodes externs A, B, C.

    (Indicació: L'arbre d'esdeveniments en el segon cas és complicat. Resoleu el problema plantejant equacions lineals que han de verificar les diferents probabilitats $P(xY)$.)

19. Sis jugadors s'assignen els nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6$ i fan el següent joc. Un d'ells tira un dau. Si li surt el seu nombre, guanya. Si no, passa el dau al jugador corresponent al nombre que ha sortit. Aquest jugador repeteix el joc, etc. Calculeu la probabilitat que té de guanyar cadascun del sis jugadors. (Indicació: Formuleu el problema en els termes del problema anterior.)

20. A partir del resultat conegut $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ deduïu una fórmula anàloga per a $P(A \cup B \cup C)$.

    Generalitzeu el resultat per a $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$. Això es coneix com fórmula o **principi d'inclusió-exclusió**. Els tres problemes següents es resolen aplicant aquesta fórmula.

21. Una secretària ha d'enviar n cartes. Com té pressa per acabar, col·loca les cartes en els sobres de manera aleatòria. Quina és la probabilitat que ninguna carta arribi al seu destinatari?

    Calculeu el límit d'aquesta probabilitat per a $n \to \infty$. Compareu-la per a $n = 10$ i $n = 100.000$.

22. Tirant un dau 10 vegades, quina és la probabilitat que apareguin els sis resultats possibles?

    Generalitzeu a n tirades. Comproveu que $n = 6$ dóna el mateix que el segon problema.

23. El detergent HOMO dóna una lletra del conjunt $\{H, O, M\}$ en cada paquet i fa un regal als que completen la paraula HOMO. Si les tres lletres apareixen amb la mateixa probabilitat, quina es la probabilitat de formar la paraula comprant 10 paquets?

24. Us esteu enfrontant a un pistoler en un descampat i tant a vosaltres com a ell us queden dues bales. Com us trobeu a certa distància, la probabilitat de liquidar a l'adversari amb un tret val $p = 0{,}3$.

    (a) Teniu que decidir si convé fer els dos trets abans que el vostre adversari, o si és preferible esperar a que aquest dispari primer (si un esgota les seves bales sense fer "diana" l'altre es pot acostar i disparar amb certesa). Discutiu també com depèn l'estratègia del valor de p.

    (b) Si no podem evitar que l'altre dispari primer, que és millor a priori (sense saber l'efecte d'aquest tret): esperar a que faci el seu segon tret, disparar dues vegades nosaltres o disparar una vegada i esperar?

25. Donat un grup de 30 persones, quina és la probabilitat que totes celebrin l'aniversari en dies diferents?

26. Un canal transmet missatges consistents en seqüències de 0's i 1's. La probabilitat que un símbol arribi canviat val ϵ. Comproveu si els següents procediments redueixen la probabilitat que un símbol es detecti erròniament:

    (a) Cada símbol s'envia tres vegades i es tria el resultat més abundant.

    (b) Cada símbol es va enviant fins que algun valor ha aparegut dues vegades. Es tria aquest valor.

27. Es repeteix un joc amb probabilitat de guanyar p fins que hem guanyat n vegades. Determineu la funció de probabilitat del nombre necessari de jugades X. (Noteu que $n = 1$ és la variable geomètrica.)

28. Una variable aleatòria X discreta pren valors $0, 1, 2, \ldots$ amb probabilitat $P(n) = Aa^n$. Digueu quins valors pot prendre a i calculeu A. Calculeu les probabilitats que

    (a) $X > 4$.

    (b) X sigui parell.

(c) X sigui divisible per 3 sabent que X és parell.

29. Si X és una variable aleatòria de Cauchy, demostreu que $Y = \dfrac{1}{X}$ també ho és. Com es relacionen els seus paràmetres?

30. X és una variable uniforme en $[0, 2\pi]$.

    (a) Calculeu les funcions de densitat i de distribució de la variable $Y = \cos X$.

    (b) Calculeu la funció de distribució de la variable

    $$Z = \begin{cases} \sin X & 0 \leq X \leq \pi \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

    (c) Utilitzeu el teorema de l'esperança per calcular les esperances de Y i Z. Calculeu també $E[Y]$ amb $f_Y(y)$.

31. Calculeu l'esperança de les variables X dels problemes 27 i 28. (En el primer cas sabeu que les probabilitats elementals sumen 1 d'on deduïu

    $$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} q^{k-n} = \frac{1}{(1-q)^n}$$

    i després es pot utilitzar derivació respecte a q.)

32. En un examen la nota mitja val 6 i la desviació 1,8. Quin és el tant per cent d'aprovats?

33. Una variable aleatòria té densitat $f(x) = Kx^2 e^{-\lambda x}, x > 0$. Calculeu K, $E[X]$, $V[X]$, m_n.

34. Donada una variable X exponencial d'esperança $\frac{1}{3}$,

    (a) Calculeu $P(\sin X > \frac{1}{2})$.

    (b) Determineu la funció de probabilitat i l'esperança de la variable $Y = [X]$ (part entera de X).

    (c) Calculeu $E\left[X \,|\, X > \frac{1}{3}\right]$.

35. La *variable aleatòria de Laplace* és la que té densitat:

    $$f(x) = Ke^{-\lambda|x-m|}$$

    per a $-\infty < x < \infty$. Calculeu $K, E[X], V[X]$. Pel cas $m = 0$, que val la probabilitat que $-\sigma < X < 2\sigma$, on σ és la desviació típica de X?

36. La temperatura màxima que assoleix un dispositiu electrònic al llarg d'un dia és una variable aleatòria X amb funció de densitat:

    $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{10-|x-40|}{100} & \text{si } |x-40| < 10 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

    El valor de X en qualsevol dia és independent dels altres. Anomenem T el nombre de dies que han de passar fins que $X > 45$. Anomenem N el nombre de dies amb $X < 38$ en un període de 30 dies.

    (a) Dibuixeu $f_X(x)$. Calculeu la funció de distribució de X i la probabilitat que $38 < X < 45$.

    (b) Calculeu l'esperança i la desviació de X.

(c) Quins tipus de variable són T i N? Què valen els seus valors mitjans?

(d) Calculeu $P(T \geq 10)$ i $P(N = 7)$.

37. Donada una variable X normal amb paràmetres m, σ:

   (a) Calculeu $P(|X - m| < k\sigma)$. Avalueu-ho en tant per cent per a $k = 1$, $k = 2$ i $k = 3$.

   (b) Calculeu $E[|X - m|]$.

   (c) La variable aleatòria *log-normal* és la que té la forma $Y = e^X$. Calculeu els seus moments i, a partir d'ells, la seva esperança i la seva variància.

38. El temps de vida d'una partícula radioactiva és una variable exponencial de paràmetre $\lambda = \frac{1}{\tau_m}$ on τ_m és la vida mitjana de la partícula. En l'instant $t = 0$ tenim una mostra de N_0 partícules. Quin és el nombre mitjà de partícules en l'instant t? Es correcte formular una llei física que digui que el nombre de partícules en l'instant t val aquesta quantitat?

39. De les taules de mortalitat es dedueix que moren $\alpha(t)$ persones d'edat t per unitat de temps. És a dir, si T és la variable aleatòria que dóna el temps de vida d'una persona,

$$f_T(t \,|\, T \geq t) = \alpha(t).$$

   Una hipòtesi realista és la fórmula de Makeham: $\alpha(t) = \alpha + \beta e^{\gamma t}$.

   Deduïu amb aquestes dades la funció de distribució $F_T(t)$. Compareu amb el que passaria si T fos exponencial.

40. Una variable aleatòria bidimensional té densitat conjunta $f_{XY}(x, y) = Ke^{-2x+y}$ sobre la regió $\mathcal{R}$. Calculeu les densitats marginals i determineu si són independents en els casos

   (a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \infty, 0 < y < 1\}$.

   (b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \infty, 0 < y < x\}$.

41. Una variable aleatòria tridimensional té densitat conjunta $f_{XYZ}(x, y, z) = 2(x+y+z) - 4(xy + xz + yz) + 8xyz$ sobre la regió $0 < x, y, z < 1$. Calculeu les densitats marginals $f_{XY}(x, y)$, $f_{XZ}(x, z)$, $f_{YZ}(y, z)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_Z(z)$. Són les variables independents dos a dos? Són les tres variables independents?

42. Una moneda de diàmetre 2 cm cau a un terra de rajoles quadrades de costat 25 cm. Quina és la probabilitat que la moneda no trepitgi més d'una rajola?

   Calculeu el mateix amb rajoles hexagonals i amb rajoles en forma de triangle equilàter.

43. Es tiren tres monedes. Les que treuen cara es tornen a tirar. Considereu les variables X = "nombre de cares en la primera tirada", Y = "nombre de cares en la segona tirada". Feu la taula de probabilitats conjuntes, i calculeu a partir d'ella les funcions de probabilitat marginals. Comprobeu que les marginals de X i de Y corresponen a variables binomials i determineu-ne els paràmetres.

44. Un material presenta impureses aleatòries de forma el·líptica. Els semieixos d'aquestes el·lipses són variables independents X, Y uniformes en $[0, L_1]$, $[0, L_2]$ respectivament. Calculeu la funció de densitat i l'esperança de l'àrea d'aquestes impureses.

45. Tirem un dau 10 vegades.

   (a) Calculeu la probabilitat de treure exactament dos uns, dos dosos i dos tresos.

   (b) Calculeu la probabilitat de treure algun u i algun dos.

46. $Y = X_1 + X_2$ on X_1 i X_2 són variables aleatòries independents uniformes en $[0, 1]$. Calculeu la densitat de Y (*variable aleatòria de Simpson*).

47. Si A és un esdeveniment aleatori, podem considerar una variable aleatòria Δ_A que val 1 si A es verifica i 0 en cas contrari. Que val $E[\Delta_A]$?

    Si tenim dos esdeveniments A, B. Expresseu $\Delta_{A\cap B}$, $\Delta_{A\cup B}$ i $\Delta_{\overline{A}}$ en funció de Δ_A i Δ_B. Comproveu que al prendre esperances en aquestes relacions s'obté la fórmula bàsica de la probabilitat. (Aquestes variables s'anomenen indicadors.)

48. Un centre de comunicacions disposa de 20 ordinadors connectats a un node. Quan arriba una petició de servei en aquest node s'assigna a l'atzar un dels 20 ordinadors (cada ordinador pot atendre més d'un usuari). Si tenim 15 usuaris:

    (a) Per a $0 \leq k \leq 15$, calculeu el nombre mitjà d'ordinadors que atenen exactament a k usuaris.

    (b) En particular, quin és el nombre mitjà d'ordinadors desocupats?

    (c) Que val la suma per a $k = 0, \ldots, 15$ dels anteriors resultats? Raoneu el resultat.

    (Indicació: utilitzeu indicadors, noteu la dificultat en tractar la variable que conta els ordinadors amb k usuaris.)

49. Calculeu la covariància en el cas (b) del problema 40. Què podríeu dir de la independència sabent només això?

50. n corredors fan una carrera. El temps que triga el corredor i és una variable exponencial X_i de paràmetre λ_i $(i = 1, \ldots n)$. Sigui T la variable aleatòria que dóna el temps d'arribada del guanyador. Calculeu la seva densitat i la seva esperança. Quina és la probabilitat que té el corredor i de guanyar la carrera?

51. Dues persones queden per trobar-se en un lloc entre les 11h i les 12h. El primer que arribi només s'esperarà 15 minuts.

    (a) Quina és la probabilitat que es trobin?

    (b) Considereu ara que el primer s'espera fins que arriba el segon. Calculeu la densitat i l'esperança del temps d'espera.

    (c) Calculeu la densitat i l'esperança de l'instant en que arriba la primera persona.

52. L'empresa de pizzes a domicili *PizzaPlus* cobra 6 euros per una pizza. El temps T d'entrega és una variable aleatòria exponencial d'esperança m. L'empresa considera que una pizza està entregada a temps si $T < 2m$. Si el temps d'entrega és superior a $2m$ es dóna la pizza gratuïtament. Si a més T és superior a $3m$ *PizzaPlus* regala al client un postre de 2 euros.

    (a) Quin és l'ingrés mitjà per pizza repartida?

    (b) De 70 pizzes repartides quin és el nombre mitjà de pizzes entregades a temps? Quina és la probabilitat que se n'entreguin més d'un 20% fora de temps?

    (c) Dos repartidors de pizza independents han entregat les seves pizzes a temps. Quina és la probabilitat que la suma dels seus temps sigui inferior a $3m$?

53. El temps que passa fins que un sistema que funciona té una avaria és una variable exponencial de paràmetre λ. Suposeu que les avaries es produeixen amb independència una de l'altra i que es reparen de manera immediata. Si $T_i, i = 1, \ldots, n$ són els instants en que es produeixen les n primeres avaries calculeu la densitat conjunta $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. (Indicació: trobeu primer la densitat dels intervals entre avaries i feu el canvi de variable pertinent.)

54. Al fer una mesura física apareix un error experimental. Degut a això podem considerar que el resultat obtingut a la mesura és una variable aleatòria amb esperança m,el valor exacte de la magnitud que mesurem, i desviació σ, error característic de la mesura. Si s'obté el resultat X_1 llavors expressem la nostra mesura de m com a $X_1 \pm \sigma$.

    Una manera de reduir l'error és fer vàries mesures $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i donar com a resultat la seva mitjana $Y = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$. Calculeu la desviació de Y (suposant que les mesures són incorrelades) i comproveu que és inferior a σ.

55. Si X i Y són variables exponencials de paràmetre λ independents, determineu el tipus de variable que és $Z = \dfrac{X}{X+Y}$.

56. Donada la variable bidimensional gaussiana (X,Y) tal que $m_1 = m_2 = 0$, calculeu la densitat conjunta de les variables $Z = \dfrac{Y}{X}$, $T = XY$. Demostreu que Z és de Cauchy, desplaçada al punt $\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$, amb $\alpha = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\sqrt{1-\rho^2}$. (Indicació: tingueu en compte que la transformació no és injectiva).

57. Una urna conté n boles numerades de 1 a n. N'extraiem k sense reemplaçament.

    (a) Calculeu l'esperança de la suma dels seus valors. Que passa si fem l'extracció amb reemplaçament?

    (b) Calculeu la probabilitat que el màxim valor extret sigui m.

58. Donada la variable aleatòria bidimensional (X,Y) uniforme en la regió $x > 0, y > 0, x^2+y^2 < 1$, calculeu

    (a) Les millors estimacions de X donada Y i de Y donada X.

    (b) Els seus paràmetres utilitzant coordenades polars.

    (c) Les millors estimacions lineals de X donada Y i de Y donada X.

59. En certa població podem considerar que el pes X (en Kg) i l'alçada al quadrat Y (en m^2) són conjuntament normals amb $m_X = 70$, $\sigma_X = 9$, $m_Y = 3$, $\sigma_Y = 0{,}4$, $\rho = 0{,}7$. Calculeu la millor estimació possible del pes d'una persona d'alçada 1,80m. Quin és l'error quadràtic mitjà en aquesta estimació?

60. Un canal de comunicació li suma al senyal transmès X un soroll Z incorrelat amb X. Volem corregir l'efecte multiplicant la sortida per una constant λ. Trobeu el millor valor de λ si $m_X = m_Z = 0$, $\sigma_X = 10$ i $\sigma_Z = 5$. Compareu l'error quadràtic mitjà d'aquesta estimació amb el que s'obtindria fent l'estimació per una constant.

    Calculeu-ho ara en el cas que el soroll sigui independent de X i multiplicatiu en lloc d'additiu. Quin problema hi ha en aquest cas?

61. Un sistema de tractament de dades consta de quatre seccions i dues àrees de memòria. Per cada usuari les probabilitats de trobar-se en la secció s ($s = 1,2,3,4$) i en l'àrea de memòria m ($m = 1,2$) venen donades en la següent taula:

$m\backslash s$	1	2	3	4
1	0,10	0,15	0,05	0,20
2	0,15	0,10	0,20	0,05

    Calculeu les entropies de les tres particions corresponents a la secció (U), a l'àrea de memòria (V) i a ambdós elements ($U \cdot V$). Calculeu la informació mútua entre U i V. Doneu els resultats en bits.

62. Donades les variables X, uniforme en $[0, a]$ i Y, amb densitat $f_Y(y) = \dfrac{2y}{a^2}, 0 < y < a$, calculeu les seves entropies i mostreu que l'entropia de X és superior. Interpreteu aquest fet a partir de les gràfiques de les densitats.

63. Calculeu el valor mitjà del procés estocàstic

$$X(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{Y} & 0 \leq t \leq Y \\ \dfrac{t-Y}{1-Y} & Y \leq t \leq 1 \end{cases}$$

on Y és una variable aleatòria uniforme en $[0, 1]$.

64. Donat el procés estocàstic

$$X(t) = \begin{cases} t^2 & 0 \leq t \leq A \\ \dfrac{A^3}{t} & t > A \end{cases}$$

on A és una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\lambda = 1$,

(a) Representeu gràficament el procés: primer per a A fixat com a funció de t (realització); després per a t fixat com a funció de A.

(b) Calculeu la seva funció de valor mitjà $m(t)$.

(c) Calculeu la seva funció de distribució de primer ordre $F(x;t)$. Representeu-la gràficament.

(d) Calculeu la seva funció de densitat de primer ordre $f(x;t)$ i utilitzeu-la per tornar a calcular $m(t)$.

(e) Calculeu l'esperança de la variable aleatòria $J = \int_0^\infty X(t)^2 dt$.

65. Un procés estocàstic estacionari té funció d'autocorrelació $R(\tau) = Ke^{-a|\tau|}$. Calculeu la millor estimació lineal en mitjana quadràtica de $X(t)$ a partir de $X(t-T)$ i $X(t-2T)$. Calculeu l'error quadràtic mitjà.

66. Donat un procés $X(t)$ amb valor mitjà $m(t)$ i autocovariància $C(t_1, t_2)$, i una constant $T > 0$:

(a) Calculeu la millor estimació de $X(t)$ a partir de l'estimador $C = \alpha X(t-T) + \beta$, on α i β són constants.

(b) Particularitzeu el resultat anterior al cas que $X(t)$ sigui estacionari amb valor mitjà m i autocovariància $C(\tau)$.

(c) Particularitzeu el resultat del primer apartat al cas que $X(t)$ sigui un procés de Poisson de paràmetre λ.

67. En un procés de Poisson de paràmetre λ, T_i, $i = 1, 2, 3$, són els instants en que es produeixen els tres primers esdeveniments. Quin tipus de variable és T_2 si sabem que $T_1 = t_1$ i $T_3 = t_3$? (Indicació: calculeu $f_{T_2}(t_2 \,|\, T_1 = t_1, T_3 = t_3)$ utilitzant 12.14.)

68. (X, Y) és una variable aleatòria bidimensional uniforme en el triangle delimitat per les rectes $x = 1, y = 0, x = y$.

(a) Calculeu els moments conjunts $m_{r,s}$ de (X, Y).

(b) Quina és la millor estimació de X donada Y?

(c) Calculeu la funció de valor mitjà i l'autocorrelació del procés estocàstic:

$$Z(t) = Xt(t - Y).$$

(d) Quina és la millor estimació lineal homogènia de $\int_0^Y Z(t)dt$ donat $Z(\frac{Y}{2})$?

69. Donat el procés estocàstic $X(t) = e^{-At}$ on A és una variable aleatòria uniforme en $[0, 1]$

 (a) Calculeu la seva funció de valor mitjà i la seva autocorrelació.

 (b) Si $X_1(t)$ és una realització d'aquest procés: que val $\lim_{t\to\infty} X_1(t)$?

 (c) Que podem dir de $\lim_{t\to\infty} X(t)$?

70. Donat el procés $X(t) = V \cos(\omega t + \phi)$ on ω està fixat, V és una VA exponencial de paràmetre $\frac{1}{V_0}$ i ϕ és una VA uniforme en $[0, 2\pi]$, V i ϕ independents

 (a) Que se'n dedueix amb els criteris d'ergodicitat?

 (b) Determineu si és un procés ergòdic.

71. (a) Demostreu la següent propietat de la probabilitat condicionada:
 Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ és una partició de Ω,

$$P(B\,|\,C) = \sum_{i=1}^{n} P(B\,|\,C \cap A_i)P(A_i\,|\,C).$$

 (b) A partir de l'anterior resultat demostreu que en una cadena de markov, donats $t_1 < t_2 < t_3$

$$P(X_{t_3} = s_j\,|\,X_{t_1} = s_i) = \sum_{k=1}^{n} P(X_{t_3} = s_j\,|\,X_{t_2} = s_k)P(X_{t_2} = s_k\,|\,X_{t_1} = s_i).$$

72. Tenim quatre boles, dues blanques i dues negres. D'aquestes boles n'hi ha dues a l'urna A i dues a l'urna B. Representem l'estat d'aquest sistema dient quantes boles blanques hi ha a l'urna A. El sistema es sotmet repetidament a la següent transformació: es treu a l'atzar una bola de A i s'introdueix en B; després es treu una bola a l'atzar de B i s'introdueix en A.

 (a) Trobeu la matriu de transicions de la corresponent cadena de Markov.

 (b) Demostreu que el sistema és completament ergòdic i trobeu les probabilitats límit.

 (c) Si de les anteriors quatre boles en triem dues a l'atzar, calculeu les probabilitats de treure cap, una o dues boles blanques. Expliqueu a partir d'aquest resultat el que s'ha obtingut en l'anterior apartat.

73. En una seqüència de text tenim la seguretat que després d'un espai ve una lletra. La probabilitat que després d'una lletra vingui un espai és α $(0 < \alpha < 1)$.

 (a) Demostreu que el sistema és completament ergòdic i trobeu la freqüència d'espais.

 (b) Calculeu la longitud mitjana de les paraules i relacioneu-lo amb l'anterior resultat.

74. Considerem que $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ numera els dies successius. El dia 0 tenim 5 bombetes de recanvi. La probabilitat que en un dia es fongui la bombeta val $p > 0$. L'estat del sistema en un dia donat és el nombre de bombetes de recanvi de que disposem.

 (a) Demostreu que es tracta d'una cadena de Markov completament ergòdica i trobeu les probabilitats límit. Interpreteu el resultat.

 (b) Per què el sistema no és completament ergòdic si $p = 0$?

75. Estudieu l'ergodicitat del sistema de l'exemple 14.2. Vegeu que passa si es canvien les parets reflectants per parets absorbents ($p_{11} = 1$ i $p_{44} = 1$).

76. Estudieu l'ergodicitat i probabilitats límit del sistema amb matriu de transició

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

77. Donada la matriu quadrada d'ordre n M amb components:

$$M_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = j \\ \beta & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

(a) Demostreu que $\det M = (\alpha - \beta)^{n-1}(\alpha + (n-1)\beta)$. Quins són els valors propis de M i les seves multiplicitats?

(b) Quina relació hi ha d'haver entre α i β per a que M sigui una matriu estocàstica?

(c) Demostreu que en el cas anterior (exceptuant si $\alpha = 1$ o si $n = 2, \alpha = 0$) el sistema és completament ergòdic. Trobeu les probabilitats límit (noteu que M és simètrica).

(d) Com és l'evolució del sistema en les excepcions de l'apartat anterior?

EL COSTAT FOSC

F1. El 28 de gener de 1986 el transbordador espacial *Challenger* amb set tripulants a dins va explotar poc després d'enlairar-se. Aquest desastre, vist per TV per tots els americans va suposar un fort cop a la carrera espacial i va deixar una marca inesborrable al subconscient ianqui. A la comissió investigadora s'hi va voler posar un element independent de prestigi i es va triar al premi Nobel de Física Richard P. Feynman que en el seu llibre de memòries *"What do you care what other people think?"* explica profusament l'experiència.

Un dels elements que més ressalten, i que més són criticats per Feynman, és l'us de la probabilitat en qüestions d'enginyeria espacial. Un dels errors comesos per la NASA és utilitzar l'experiència històrica per determinar la fiabilitat d'una missió. Per justificar una probabilitat d'accident molt poc realista (1/100.000) els oficials de la NASA diuen (en documentació oficial prèvia a l'accident):

> since the shuttle is a manned vehicle, the probability of mission success is necessarily very close to 1.0.
>
> Historically, this extremely high degree of mission success has given rise to a difference in philosophy between manned space flight programs and unmanned programs; i.e., numerical probability usage versus engineering judgement.

Una mostra del poc sentit que poden tenir les estimacions probabilístiques la tenim en la disparitat de valors que donaven com a probabilitat P d'accident fatal diferents grups:

Enginyers de Rocketdyne (els fabricants): $P = 1/10.000$.

Enginyers del Marshall Space Center (els disenyadors): $P = 1/300$.

El *management* de la NASA: $P = 1/100.000$.

Un enginyer independent consultat per la NASA: P entre 1/100 i 2/100.

Finalment Feynman, en les seves conclusions recomana

> For a successful technology, reality must take precedence over public relations, for Nature cannot be fooled.

F2. Paradoxa dels dos sobres. Algú prepara dos sobres, una amb una quantitat de diners i l'altre amb el doble. Nosaltres, que desconeixem aquestes quantitats, triem un sobre a l'atzar. Anomenem X la quantitat que conté i suposem que ens ofereixen la possibilitat de canviar de sobre. Aparentment, com hem fet l'elecció a l'atzar, el fet de canviar de sobre no varia el nostre guany en mitjana. Però l'altre sobre pot contenir $\frac{X}{2}$ o $2X$ així que si canviem de sobre, en mitjana guanyem $\frac{X}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2X \cdot \frac{1}{2} = \frac{5X}{4}$ que és major que X. Per tant, convé canviar de sobre. És això realment així?

F3. En el concurs televisiu del 123, al final el presentador ens ofereix triar entre tres sobres un dels quals conté un apartament a la costa. Després que n'hem seleccionat un, el presentador agafa un dels sobres de la taula i, somrient, mostra que no conté res. Ara ens ofereix la possibilitat de canviar el sobre que tenim pel que queda a la taula. Què hem de fer?

F4. Apostant a la ruleta a vermell i negre, una estratègia és començar apostant una unitat. Si guanyen tornem a començar, si perdem apostem el doble que la passada vegada. D'aquesta manera sempre que guanyem recuperem tot el que hem perdut abans més una unitat. Discutiu la validesa d'aquesta estratègia. (En els casinos està prohibit utilitzar-la.)

F5. Tenim el següent desenvolupament de Taylor ($|x| < 1$):

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{CR}_n^k x^k.$$

Demostreu-lo des del punt de vista combinatori. Després calculeu els coeficients de la sèrie i haureu demostrat novament quin valor pren $\mathrm{CR}\,_n^k$.

F6. L'esdeveniment impossible $\emptyset$ té probabilitat 0. Si un esdeveniment A té probabilitat 0, es impossible que es produeixi?

F7. Donada una variable aleatòria X contínua sempre es verifica $P(X = a) = 0$ (la probabilitat d'un punt es zero). Vol dir això que la variable no pren cap valor? No és una paradoxa?

F8. Donada una variable aleatòria contínua X considerem les noves variables $Y = |X|$ i $S = \mathrm{sg}(X)$. Com ha de ser la funció de densitat de X per que Y i S siguin independents?

F9. El conjunt de Cantor $\mathcal{K}$ és l'exemple més simple de fractal. Es parteix de l'interval $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ i se li resta el terç del mig. Després es resta el terç del mig dels dos intervals que queden. Després es resta el terç del mig dels 4 intervals que queden, ... El conjunt $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ és el que queda després d'aplicar aquest procediment indefinidament.

(a) Demostreu que $\mathcal{K}$ és un borelià.

(b) Si X és una variable aleatòria uniforme en $[0, 1]$, que val $P(X \in \mathcal{K})$?

(c) Considereu ara una variable Y uniforme en $\mathcal{K}$. Demostreu que Y no és ni discreta, ni contínua, ni mixta! La seva funció de distribució es diu *escala del diable*. Quin aspecte té?

F10. La "qualitat" d'un joc d'apostes es pot mesurar amb l'esperança del guany (per euro apostat, per exemple). Si apostem a la tirada d'una moneda i, en cas d'encertar, ens paguen el doble del que hem apostat, el guany esperat (apostant 1 euro) val $E[G] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. En aquest cas diem que el joc és just. Apostant a vermell o negre a la ruleta (18 nombres vermells, 18 nombres negres i el zero), $E[G] = 0 \cdot \frac{19}{37} + 2 \cdot \frac{18}{37} = 0{,}973$. El joc és quasi just, amb un petit avantatge per a la banca.

Calculeu el guany esperat pel sorteig de la Loteria de Nadal a partir de les següents dades (Nadal 2008).

El sorteo consta de 195 series de 85.000 billetes cada una. Al precio de 200 euros el billete, dividido en décimos de 20 euros. El total de la emisión asciende a 3.315.000.000 euros. El total destinado a premios asciende a poco más de 2.000 millones de euros.

PREMIOS POR SERIE	TOTAL PREMIOS	PROPORCIÓN AL PREMIO
EL GORDO (Primer Premio)	1	15.000 Euros por Euro jugado
Segundo Premio	1	5.000 Euros por Euro jugado
Tercer Premio	1	2.500 Euros por Euro jugado
Cuartos Premios	2	1.000 Euros por Euro jugado
Quintos Premios	8	250 Euros por Euro jugado
Pedreas de 5 Cifras	1.774	5 Euros por Euro jugado
Aproximación Primer premio	2	100 Euros por Euro jugado
Aproximación Segundo premio	2	62,5 Euros por Euro jugado
Aproximación Tercer premio	2	48 Euros por Euro jugado
Centenas del Primer premio	99	5 Euros por Euro jugado
Centenas del Segundo premio	99	5 Euros por Euro jugado
Centenas del Tercer premio	99	5 Euros por Euro jugado
Centenas de dos Cuartos Prem	198	5 Euros por Euro jugado
Dos últimas del Primer premio	849	6 Euros por Euro jugado
Dos últimas del Segundo prem.	849	5 Euros por Euro jugado
Dos últimas del Tercer premio	849	5 Euros por Euro jugado
Reintegros (última cifra Gordo)	8.499	1 Euro por Euro jugado

F11. De les consideracions mètriques fetes hem arribat a definir la distància entre dues variables aleatòries X, Y com

$$d(X, Y) = E[(X - Y)^2].$$

Sembla també que si aquesta distancia mesura la diferència entre les dues variables, la podríem definir

$$d(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_X(t) - f_Y(t))^2 dt$$

on f_X, f_Y són les respectives funcions de densitat.

Quina diferència hi ha entre les dues definicions?

SOLUCIONS DELS PROBLEMES

1. $\dfrac{1}{10^{n/2}}$ si n és parell i $\dfrac{1}{10^{(n-1)/2}}$ si n és senar.

2. 0,0154.

3. Algun as en 4 tirades: 0,5177. Algun doble as en 24 tirades: 0,4914.

4.

k	0	1	2	3	4	5-c	5+c	6
$P(k)$	0,4359	0,4130	0,1323	0,01765	0,0009686	$1{,}802 \cdot 10^{-5}$	$4{,}290 \cdot 10^{-7}$	$7{,}15 \cdot 10^{-8}$

En 10.950 apostes:

k	4	5-c	5+c	6
	0,999975	0,1790	0,00468	0,000782

5.

Parella	Doble parella	Trio
0,422	0,04753	0,0211
Escala	Color	Full
0,00392	0,0019	0,00144
Poker	Escala de color	Escala real
0,00024	0,0000138	$1{,}5 \cdot 10^{-6}$

6. 0,00119.

7.

8. $\binom{k-1}{k-n}$.

9. 1568. $\frac{N!^2}{(N-n)!^2 n!}$.

10. (a) $\frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{2k}}$. (b) $\binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}$. El primer tendeix al resultat (b) que és independent de n.

11. (a) 0,6583. (b) 0,683. (c) No són independents.

12. (c) Algun ha de tenir probabilitat nul·la.

13. Només poden tenir cardinal 2 i 3 amb un element comú o 3 i 4 amb dos elements comuns. Per exemple, $\{1,2\}$ i $\{1,3,4\}$ o $\{1,2,3\}$ i $\{1,2,4,5\}$.

14. (a) $\frac{26}{31} = 0{,}838$. (b) 0,9. Efectivament, la condició ha disminuït la probabilitat de passar boles negres.

15. $\frac{6}{11}$.

16. Primer: $1/(1+q+q^2)$. Segon: $q/(1+q+q^2)$. Tercer: $q^2/(1+q+q^2)$. $(q = 1-p)$

17. Empat: $\frac{1}{11}$. A: $\frac{5}{11}$. B: $\frac{5}{11}$.

18. (a) $p_{aA} = \frac{p_A}{p_A + p_B - p_A p_B}$. (b) $p_{aA} = \frac{p_A(1-p_{bc}p_{cb})}{1 - p_{ab}p_{bc}p_{ca} - p_{ac}p_{cb}p_{ba} - p_{ab}p_{ba} - p_{ac}p_{ca} - p_{cb}p_{bc}}$.

19. El primer $\frac{2}{7}$, els altres $\frac{1}{7}$.

20. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

21. $P = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$. El límit val $e^{-1} = 0{,}367879441\ldots$. Per a $n = 10$ val 0,36787946, per $n = 100.000$ val 0,36787944.

22. 0,2718. En general $P = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{6}{k} \left(1 - \frac{k}{6}\right)^n$.

23. 0,861657.

24.

25. 0,2937.

26. Els dos casos són equivalents: $P(\text{error}) = 3\epsilon^2 - 2\epsilon^3$. Si ϵ és petit, $P(\text{error}) < \epsilon$.

27. $\Omega_X = \{n, n+1, \ldots\}$ i $P(k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$, $k = n, n+1, \ldots$.

28. Ha de ser $0 < a < 1$. $A = 1 - a$. (a) a^5. (b) $\frac{1}{1+a}$. (c) $\frac{1}{1+a^2+a^4}$.

29. Si X té paràmetre α, $\frac{1}{X}$ té paràmetre α^{-1}.

30. (a) $\Omega_Y = [-1, 1]$. $f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, -1 < y < 1$. $F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin y, -1 \leq y \leq 1$.

    (b) $\Omega_Z = [0, 1]$, $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1/2 & z = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin z & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases}$

    (c) $E[Y] = 0$, $E[Z] = \frac{1}{\pi}$.

31. Primer cas: $E[X] = \frac{n}{p}$. Segon cas: $E[X] = \frac{a}{1-a}$.

32. 71% (fent la suposició raonable que la variable és gaussiana).

33. $K = \frac{\lambda^3}{2}, m_n = \frac{(n+2)!}{2\lambda^n}, E[X] = \frac{3}{\lambda}, V[X] = \frac{3}{\lambda^2}$.

34. (a) $\frac{e^{-\pi/2} - e^{-5\pi/2}}{1-e^{-6\pi}} = 0{,}2075$. (b) $\Omega_Y = \{0, 1, 2, \cdots\}$, $P_Y(n) = (1 - e^{-3})e^{-3n}$, $E[Y] = \frac{1}{e^3-1} = 0{,}052$. (c) $\frac{2}{3}$.

35. $K = \frac{\lambda}{2}, E[X] = m, V[X] = \frac{2}{\lambda^2}, P = 0{,}8488$.

36. (a) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 30 \\ \frac{(x-30)^2}{200} & \text{si } 30 \leq x < 40 \\ 1 - \frac{(50-x)^2}{200} & \text{si } 40 \leq x < 50 \\ 1 & \text{si } x \geq 50 \end{cases}$ $P = 0{,}555$ (b) $m_X = 40$, $\sigma_X = 4{,}082$. (c) T és geomètrica amb $p = \frac{1}{8}$. N és binomial amb $n = 30$, $p = \frac{8}{25}$. $E[T] = 8$, $E[N] = 9{,}6$. (d) 0,3006, 0,09828.

37. (a) $\text{erf}(\frac{k}{\sqrt{2}})$, 68,3%, 95,4%, 99,7%. (b) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$. (c) $m_n = e^{n^2\frac{\sigma^2}{2}+nm}$, $E[Y] = e^{\frac{\sigma^2}{2}+m}$, $V[Y] = e^{2m}(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2})$.

38. $\overline{N(t)} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau_m}}$. Per mostres macroscòpiques: $\sigma/\overline{N} < \overline{N}^{-1/2}$ que és negligible (per exemple, en un gram d'urani hi ha 10^{21} partícules).

39. $F_T(t) = 1 - \exp\left(-\alpha t - \frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma t} - 1)\right)$. El cas exponencial és $\beta = 0$.

40. (a) $K = 2/(e-1)$, X és exponencial amb $\lambda = 2$ i $f_Y(y) = (e-1)^{-1}e^y, 0 < y < 1$. Són independents. (b) $K = 2$, $f_X(x) = 2(e^{-x} - e^{-2x}), x > 0$ i Y és exponencial amb $\lambda = 1$. No són independents.

41. Les marginals són sempre uniformes (en el quadrat $[0,1]\times[0,1]$ per a cada parell de variables; en l'interval $[0,1]$ per a cada variable). Dos a dos són independents, però les tres no són independents.

42. Quadrat: $P = 0{,}8464$. Hexàgon: $P = 0{,}9097$. Triangle: $P = 0{,}7420$.

43.

	$\mathbf{X=0}$	$\mathbf{X=1}$	$\mathbf{X=2}$	$\mathbf{X=3}$	
$\mathbf{Y=0}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\mathbf{\frac{27}{64}}$
$\mathbf{Y=1}$	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{64}$	$\mathbf{\frac{27}{64}}$
$\mathbf{Y=2}$	0	0	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{64}$	$\mathbf{\frac{9}{64}}$
$\mathbf{Y=3}$	0	0	0	$\frac{1}{64}$	$\mathbf{\frac{1}{64}}$
	$\mathbf{\frac{1}{8}}$	$\mathbf{\frac{3}{8}}$	$\mathbf{\frac{3}{8}}$	$\mathbf{\frac{1}{8}}$	

X és binomial amb $n = 3$ i $p = \frac{1}{2}$. Y és binomial amb $n = 3$ i $p = \frac{1}{4}$.

44. Si Z és l'àrea: $E[Z] = \frac{\pi}{4}L_1L_2$, $f_Z(z) = -(\pi L_1 L_2)^{-1}\ln(\frac{z}{\pi L_1 L_2}), 0 < z < \pi L_1 L_2$.

45. (a) 0,02531. (b) 0,6943.

46. $\Omega_Y = [0,2]$ i $f_Y(y) = \begin{cases} y & 0 \le y \le 1 \\ 2-y & 1 \le y \le 2 \end{cases}$

47. $E[\Delta_A] = P(A)$, $\Delta_{A\cap B} = \Delta_A\Delta_B$, $\Delta_{A\cup B} = \Delta_A + \Delta_B - \Delta_A\Delta_B$, $\Delta_{\overline{A}} = 1 - \Delta_A$.

48. (a) Si N_k és la variable que dóna el nombre d'ordinadors amb k usuaris, tenim que $E[N_k] = 20\binom{15}{k}\frac{19^{15-k}}{20^{15}}$. (b) En particular $E[N_0] = 9{,}2$. (c) La suma d'aquestes esperances dóna el nombre total d'ordinadors, 20.

49. $C[X,Y] = 1$. Això implica que no són independents.

50. T és exponencial amb $\lambda = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. $E[T] = 1/\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. $P(\text{guanya } i) = \lambda_i/\sum_{j=1}^{n}\lambda_j$.

51. (a) 0,4375. (b) $f(z) = (60-z)/1800, 0 < z < 60$. $E[Z] = 20$ min. (c) $f(u) = (60-u)/1800, 0 < u < 60$. $E[U] = 20$ min.

52. (a) 5,1 euros. (b) 60,5, si X és el nombre de pizzes entregades a temps, $P(X \le 55{,}5) = 0{,}0395$. (c) 0,9755.

53. $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n}, 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$.

54. $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

55. Uniforme en $[0,1]$.

56. $f(z,t) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}|z|}e^{-\frac{t}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{1}{\sigma_1^2 z} - \frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{z}{\sigma_2^2}\right\}}$, $(z,t) \in (-\infty,0]\times(-\infty,0] \cup [0,\infty)\times[0,\infty)$.

57. (a) En els dos casos $\frac{k(n+1)}{2}$. (b) $\frac{m^k - (m-1)^k}{n^k}$.

58. (a) $\widehat{Y} = \frac{1}{2}\sqrt{1-X^2}$, $\widehat{X} = \frac{1}{2}\sqrt{1-Y^2}$. (b) $m_X = m_Y = \frac{4}{3\pi}$, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}$ ($\sigma_X = \sigma_Y = 0{,}264$.), $C[X,Y] = \frac{1}{2\pi} - \frac{16}{9\pi^2}$ ($\rho = -0{,}3$). (c) $y = \rho x + m_X(1-\rho)$, $x = \rho y + m_X(1-\rho)$.

59. 73,8 Kg. $\overline{\epsilon}_{min} = 41{,}3$ (és a dir, l'error mitjà val 6,4 Kg).

60. Additiu: $\lambda = \frac{4}{5}$. Per aquesta estimació $\overline{\epsilon}_{min} = 20$ mentre que estimant per una constant $\overline{\epsilon}_{min} = 100$. Multiplicatiu: $\lambda = 0$ (l'estimació no té cap utilitat degut a la total incertesa introduïda pel soroll sobre el signe).

61. $H(U) = 2$, $H(V) = 1$, $H(U \cdot V) = 2{,}84$, $I(U, V) = 0{,}15$.

62. $H_X = \ln a$, $H_Y = \ln a + \frac{1}{2} - \ln 2$. $H_X > H_Y$ ja que $\frac{1}{2} - \ln 2 = -0{,}19$.

63. $m(t) = 1 + t \ln t + (1 - t) \ln(1 - t)$.

64. (b) $m(t) = 6\frac{1-e^{-t}}{t} - (3t + 6)e^{-t}$. (e) 144.

65. $\widehat{X(t)} = \alpha X(t - T) + \beta X(t - 2T)$, $\alpha = e^{-aT}, \beta = 0$. $\bar{\epsilon} = K(1 - e^{-2aT})$.

66. (a) $\alpha = \frac{C(t-T,t)}{C(t-T,t-T)}, \beta = m(t) - m(t-T)\alpha$. (b) $\alpha = \frac{C(T)}{C(0)}, \beta = m(1 - \frac{C(T)}{C(0)})\alpha$. (c) $\alpha = 1, \beta = \lambda T$.

67. Uniforme en $[t_1, t_2]$.

68. (a) $m_{r,s} = \frac{2}{(r+s+2)(s+1)}$. (b) $x = \frac{1+y}{2}$. (c) $m(t) = \frac{2t^2}{3} - \frac{t}{4}$. $R(t_1, t_2) = t_1 t_2(\frac{t_1 t_2}{2} - \frac{(t_1+t_2)}{5} + \frac{1}{9})$. (d) $\lambda = \frac{40}{81}$.

69. (a) $m(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$, $R(t_1, t_2) = \frac{1-e^{-(t_1+t_2)}}{t_1+t_2}$. (b) 0. (c) 0 en MQ.

70. (a) Els criteris no decideixen res. (b) És ergòdic ja que $\sigma_T^2 = V_0^2 \dfrac{1 - \cos 2\omega T}{2\omega^2 T^2}$ tendeix a zero per $T \to \infty$.

71.

72. (a) $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. (b) Completament ergòdic ja que M^2 no conté cap zero. $P(\infty) = (\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6})$.
(c) Si N és el nombre de boles blanques extretes $P(N=0) = \frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$, $P(N=1) = \frac{2 \cdot 2}{\binom{4}{2}} = \frac{4}{6}$, $P(N = 2) = \frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$. Coincideixen amb les probabilitats límit ja que després de moltes transicions l'efecte és de barrejar les boles completament a l'atzar.

73. (a) Si s_1 = espai i s_2 = lletra, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 1 - \alpha \end{pmatrix}$. Completament ergòdic ja que els valors propis són $1, -\alpha$, o bé notant que $M^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \alpha(1 - \alpha) & (1 - \alpha)^2 \end{pmatrix}$ no conté zeros. $P(\infty) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{1}{1+\alpha}\right)$ d'on la probabilitat de trobar un espai en una posició donada val $\frac{\alpha}{1+\alpha}$.
(b) La longitud d'una paraula es pot considerar una variable geomètrica amb paràmetre $p = \alpha$. El seu valor mitjà és $\frac{1}{\alpha}$. Cada paraula va seguida d'un espai amb el que la freqüència d'espais és $1/(\frac{1}{\alpha} + 1) = \frac{\alpha}{1+\alpha}$.

74. (a) Hi ha 6 estats: $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Per a $n \geq 1$, de l'estat n passem $n-1$ amb probabilitat p i ens quedem en n amb probabilitat $q = 1 - p$. Si estem en l'estat 0 ens hi quedem.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & q \end{pmatrix}.$$

Completament ergòdic ja que té el valor propi 1 simple i el valor propi q ($|q| < 1$). $P(\infty) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Lògicament, a la llarga acabem a l'estat 0, sense cap bombeta.

(b) Si $p = 0$, $M = I$ i el sistema persisteix en l'estat inicial. Així, no es verifica la condició d'independència de la condició inicial.

75. Ninguna és ergòdica. Paret reflectant, hi ha el valor propi -1. Paret absorbent, el valor propi 1 no és simple.

76. Completament ergòdic ja que $M^4 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ no té cap zero. $P(\infty) = \left(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$.

77. (a) $\lambda_1 = \alpha - \beta$ amb multiplicitat $n-1$ i $\lambda_2 = \alpha + (n-1)\beta$ amb multiplicitat 1. (b) Ha de ser $0 \leq \alpha \leq 1$ i $\beta = \frac{1-\alpha}{n}$. (c) Completament ergòdig ja que tenim $\lambda_2 = 1$ simple i $\lambda_1 = (1+\frac{1}{n})a - \frac{1}{n}$ verifica $-1 < -\frac{1}{n} \leq \lambda_1 < 1$. $P(\infty) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$. (d) Per a $\alpha = 1$, $M = I$ i persisteix l'estat inicial (valor propi 1 múltiple). Per a $n = 2, \alpha = 0$, és $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Partint d'un estat ens anem movent cíclicament entre aquest estat i l'altre (notem que hi ha el valor propi -1).