CFIS - Processos Estocàstics

Curs 2015–2016

Col·lecció de problemes

---

1. Siguin X i Y variables aleatòries conjuntament gaussianes, amb valors mitjans $m_X = 1$ i $m_Y = -1$, variàncies $\sigma_X^2 = 1$ i $\sigma_Y^2 = 4$, i coeficient de correlació ρ, $0 < \rho \leq 1$. Calculeu la millor estimació en mitjana quadràtica de $S = X + Y$ donada $T = X - Y$. Calculeu també l'error d'aquesta estimació. Interpreteu el resultat quan $\rho = 1$, i relacioneu-lo, en aquest cas, amb l'estimació de Y donada X.

   Resolució:

   Les variables aleatòries S i T també són conjuntament gaussianes. Per tant, la millor estimació de S donada T és lineal,
   $$\hat{S} = \frac{\mu_{11;ST}}{\sigma_T^2}(T - m_T) + m_S.$$

   Calculant els diferents paràmetres tenim:

   $$m_S = m_X + m_Y = 0,$$
   $$m_T = m_X - m_Y = 2,$$
   $$\mu_{11;ST} = \mathrm{E}(ST) - m_S m_T = \mathrm{E}(X^2 - Y^2) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(Y^2) =$$
   $$\sigma_X^2 + m_X^2 - (\sigma_Y^2 + m_Y^2) = 2 - 5 = -3,$$
   $$\sigma_T^2 = \mathrm{E}(T^2) - m_T^2 = \mathrm{E}(X^2 + Y^2 - 2XY) - 4 = 2 + 5 - 2\mathrm{E}(XY) - 4 =$$
   $$3 - 2(\rho\sigma_X\sigma_Y + m_X m_Y) = 3 - 2(2\rho - 1) = 5 - 4\rho.$$

   Així,
   $$\hat{S} = \frac{-3}{5 - 4\rho}(T - 2).$$

   L'error val

   $$\epsilon = \mathrm{E}(S - \hat{S})^2 = \mathrm{E}((S - \hat{S})S) = \mathrm{E}(S^2) - \mathrm{E}(\hat{S}S) = \mathrm{E}(X^2) + \mathrm{E}(Y^2) + 2\mathrm{E}(XY) - \frac{-3}{5 - 4\rho}\mathrm{E}(ST)$$
   $$= 2 + 5 + 2(2\rho - 1) - \frac{-3}{5 - 4\rho}(-3) = \frac{16(1 - \rho^2)}{5 - 4\rho}.$$

   Si $\rho = 1$, $\epsilon = 0$ i tenim $S = \hat{S} = -3T + 6$ amb probabilitat 1. En efecte, si $\rho = 1$ es compleix, amb probabilitat 1, que
   $$Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - m_X) + m_Y = 2(X - 1) - 1 = 2X - 3.$$
   Per tant, amb probabilitat 1, $S = X + Y = 3X - 3$ i $T = X - Y = -X + 3$. Així, amb probabilitat 1, $S = 3(3 - T) - 3 = -3T + 6$.

---

2. Siguin A i B variables aleatòries independents de valor mitjà 0 i variància σ^2. Donat el procés estocàstic $X(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, calculeu-ne l'esperança i l'autocorrelació. Calculeu també la millor estimació lineal de $X(t_2)$ donat $X(t_1)$ i l'error de l'estimació. Interpreteu els casos en que aquest error és màxim o mínim.

Resolució:

L'esperança i l'autocorrelació del procés valen

$$m_X(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(A)\cos(\omega t) + \mathrm{E}(B)\sin(\omega t) = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) &= \mathrm{E}\left(X(t_1)X(t_2)\right) = \mathrm{E}\left((A\cos(\omega t_1) + B\sin(\omega t_1))(A\cos(\omega t_2) + B\sin(\omega t_2))\right) \\ &= \sigma^2(\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2) + \sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2)) = \sigma^2\cos(\omega\tau), \quad \tau = |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

El procés és estacionari en sentit ampli.

Per a qualsevol t, la variable aleatòria $X(t)$ té esperança 0 i podem prendre $\widehat{X(t_2)} = \alpha X(t_1)$. Aplicant el principi d'ortogonalitat tenim

$$0 = \mathrm{E}\left(\left(X(t_2) - \widehat{X(t_2)}\right)X(t_1)\right) = R_X(t_1,t_2) - \alpha R_X(t_1,t_1),$$

d'on

$$\alpha = \frac{R_X(t_1,t_2)}{R_X(t_1,t_1)} = \cos(\omega\tau).$$

Per tant,

$$\widehat{X(t_2)} = X(t_1)\cos(\omega\tau).$$

L'error val

$$\begin{aligned} \epsilon = \mathrm{E}\left(\left(X(t_2) - \widehat{X(t_2)}\right)^2\right) &= \mathrm{E}\left(\left(X(t_2) - \widehat{X(t_2)}\right)X(t_2)\right) \\ &= R_X(0) - \cos(\omega\tau)R_X(\tau) = \sigma^2\left(1 - \cos^2(\omega\tau)\right). \end{aligned}$$

---

3. Sigui Δ una variable aleatòria uniforme en $(0,a)$. Definim el procés estocàstic (per a $t > 0$):

$$X(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \Delta, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Calculeu les probabilitats $\mathrm{P}(X(t) = 1)$ i $\mathrm{P}(X(t) = 0)$ i determineu la funció valor mitjà de $X(t)$.

Resolució:

Fixat t tenim que $\mathrm{P}(X(t) = 1) = \mathrm{P}(\Delta \ge t)$. Com que Δ és uniforme en $(0,a)$, aquesta probabilitat val

$$\mathrm{P}(X(t) = 1) = \mathrm{P}(\Delta \ge t) = \begin{cases} \dfrac{a-t}{a} = 1 - \dfrac{t}{a}, & 0 < t < a \\ 0, & t > a \end{cases}$$

Naturalment,

$$P(X(t) = 0) = 1 - \mathrm{P}(X(t) = 1) = \begin{cases} \dfrac{t}{a}, & 0 < t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$$

L'esperança de $X(t)$ és

$$\mathrm{E}(X(t)) = 1 \cdot \mathrm{P}(X(t) = 1) + 0 \cdot \mathrm{P}(X(t) = 0) = \mathrm{P}(X(t) = 1).$$

4. Calculeu el valor mitjà $m_Y(t)$ i l'autocorrelació $R_Y(t, t+\tau)$ del procés estocàstic $Y(t) = e^{-Xt}$, on X és una variable aleatòria exponencial de paràmetre μ. (Feu els càlculs prenent t i τ positius).

5. Sigui $X(t)$ un procés de Poisson de taxa μ. Calculeu les funcions de distribució i de densitat de probabilitat del temps T transcorregut fins a la tercera transició. (Recordeu que $F_T(t) = \mathrm{P}(T \leq t)$.)

   Resolució:

   Observeu que l'esdeveniment $\{T \leq t\}$ equival a que en $(0, t]$ s'han produït 3 o més transicions del procés de Poisson. Per tant,

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \mathrm{P}(T \leq t) = \mathrm{P}(X(t) \geq 3) = 1 - (\mathrm{P}(X(t) = 0) + \mathrm{P}(X(t) = 1) + \mathrm{P}(X(t) = 2)) \\ &= 1 - e^{-\mu t}\left(1 + \mu t + \frac{(\mu t)^2}{2}\right), \quad t > 0. \end{aligned}$$

   La densitat de probabilitat és la derivada de la funció de distribució:

$$f_T(t) = F_T'(t) = \mu e^{-\mu t}\left(1 + \mu t + \frac{(\mu t)^2}{2}\right) - e^{-\mu t}\left(\mu + \mu^2 t\right) = \mu e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^2}{2}, \quad t > 0.$$

6. Donada la variable aleatòria A uniforme en $(-\pi, \pi)$, definim el procés estocàstic $X(t) = A,\ \ t \in \mathbb{R}$. Digueu, justificant les respostes, si és certa o falsa cadascuna de les proposicions següents:

   (a) El valor mitjà estocàstic (esperança) del procés és una variable aleatòria.

   (b) El valor mitjà temporal en $(-T, T)$ del procés és constant.

   (c) El procés no és ergòdic en valor mitjà.

   Resolució:

   (a) Tenim que $\mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(A) = 0$. La proposició és falsa.

   (b) El valor mitjà temporal en $(-T, T)$ de $X(t)$ és la variable aleatòria

$$\mathcal{M}_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A\,dt = A.$$

   La proposició és falsa.

   (c) La proposició és certa. Si el procés fos ergòdic, la variable aleatòria $\mathcal{M}_T$ hauria de convergir (p.e. en mitjana quadràtica) cap a $m_X = 0$ quan $T \to \infty$. Però això no és cert ja que

$$\mathrm{E}\left((\mathcal{M}_T - m_X)^2\right) = \mathrm{E}(A^2) = \frac{\pi^2}{3} \not\longrightarrow 0.$$

7. Sigui $X(t)$ un procés de Poisson de taxa μ.

   (a) Demostreu que el temps transcorregut fins que es produeix la primera transició és una v.a. exponencial de paràmetre μ.

   (b) Suposeu ara que les transicions del procés es "marquen" amb probabilitat p, independentment unes de les altres. Demostreu que la probabilitat que en $(0, t]$ no hi hagi transicions marcades val $e^{-\mu p t}$. Calculeu l'esperança del temps transcorregut fins que es té la primera transició marcada.

8. Considereu el procés $X(t) = \cos(\omega_0 t + B\,\Phi)$, on ω_0 és una constant real, Φ és una variable aleatòria uniforme en l'interval $[-\pi/2, \pi/2]$ i B és una variable aleatòria discreta, independent de Φ, amb $\mathrm{P}(B = 0) = p$ i $\mathrm{P}(B = 1) = q$. Calculeu la funció valor mitjà $m_X(t)$ i la funció d'autocorrelació $R_X(t_1, t_2)$.

Resolució:

La funció valor mitjà de $X(t)$ val:

$$m_X(t) = E(X(t)) = E(\cos(\omega_0 t + B\,\Phi))$$

$$= E(\cos(\omega_0 t + B\,\Phi)|B = 0)P(B = 0) + E(\cos(\omega_0 t + B\,\Phi)|B = 1)P(B = 1)$$

$$= p\,\cos\omega_0 t + q\,E(\cos(\omega_0 t + \Phi)) = p\,\cos\omega_0 t + q\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(\omega_0 t + \phi)\,d\phi$$

$$= (p + q\frac{2}{\pi})\cos\omega_0 t.$$

La funció d'autocorrelació és:

$$R_X(t_1, t_2) = E\left(\cos(\omega_0 t_1 + B\,\Phi)\cos(\omega_0 t_2 + B\,\Phi)\right)$$

$$= p\,\cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2 + q\,E\left(\cos(\omega_0 t_1 + \Phi)\cos(\omega_0 t_2 + \Phi)\right)$$

$$= p\,\frac{1}{2}\left(\cos\omega_0(t_1 + t_2) + \cos\omega_0(t_1 - t_2)\right) + q\,\frac{1}{2}\left(\cos\omega_0(t_1 - t_2) + \right.$$

$$\left. E(\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\Phi))\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\omega_0(t_1 - t_2) + p\,\cos\omega_0(t_1 + t_2)\right),$$

ja que

$$E(\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\Phi)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\phi)\,d\phi = 0.$$

---

9. $X(t)$ és un procés estocàstic estacionari, amb valor mitjà $m(t) = 0$ i autocorrelació $R(\tau) = \cos\tau$.

   (a) Per a cada t fixat, calculeu la millor estimació lineal no homogènia en mitjana quadràtica de $X(t)$ donats $X(0)$ i $X(\pi/2)$.

   (b) Calculeu l'error quadràtic mitjà de l'anterior estimació i demostreu que $X(t)$ és una oscil·lació aleatòria.

   (c) Enuncieu dos criteris suficients d'ergodicitat en valor mitjà. Determineu si $X(t)$ és un procés ergòdic en valor mitjà per aplicació d'aquests criteris, o calculant la variància de la seva mitjana temporal, en cas que no es verifiquin.

Resolució:

(a) Com que $m(t) = 0$, l'estimador pren la forma $aX(0) + bX(\pi/2)$. Les equacions del principi d'ortogonalitat són

$$\begin{cases} E[(aX(0) + bX(\pi/2))X(0)] = E[X(t)X(0)] \\ E[(aX(0) + bX(\pi/2))X(\pi/2)] = E[X(t)X(\pi/2)] \end{cases}$$

És a dir

$$\begin{cases} aR(0) + bR(\pi/2) = R(t) \\ aR(\pi/2) + bR(0) = R(\pi/2 - t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \cos t \\ b = \sin t \end{cases}$$

Per tant el millor estimador de la variable aleatòria $X(t)$ és $\cos t\,X(0) + \sin t\,X(\pi/2)$.

(b) L'error quadràtic mitjà és

$$\bar{\epsilon} = E[(X(t) - (aX(0) + bX(\pi/2)))^2] = E[X(t)(X(t) - (aX(0) + bX(\pi/2)))]$$
$$= R(0) - aR(t) - bR(\pi/2 - t) = 1 - \cos t \cos t - \sin t \sin t = 0.$$

Com l'error és zero, per a t arbitrari $X(t)$ coincideix exactament amb l'estimador:

$$X(t) = X(0)\cos t + X(\pi/2)\sin t,$$

que és una oscil·lació aleatòria.

(c) $X(t)$ no verifica cap dels dos criteris suficients d'ergodicitat ja que no existeixen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\tau d\tau, \qquad \lim_{|\tau|\to\infty} \cos\tau.$$

Com els criteris només són suficients, amb ells no podem dir res sobre l'ergodicitat de $X(t)$. Per determinar si $X(t)$ és ergòdic s'ha de calcular σ_T^2, la variància de la mitjana temporal

$$m_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt.$$

Una manera de calcular-ho és:

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} C(\tau)\left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) d\tau,$$

on $C(\tau) = R(\tau) - m^2 = \cos\tau$ és la funció d'autocovariància de $X(t)$.

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} \cos\tau\left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) d\tau = \frac{1}{T}\int_{0}^{2T} \cos\tau\left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) d\tau$$
$$= \frac{1}{T}\left(\sin\tau(1 - \frac{\tau}{2T}) - \frac{\cos\tau}{2T}\right)\Bigg|_0^{2T} = \frac{1 - \cos 2T}{2T^2}.$$

Com es veu inmediatament, $\sigma_T^2 \to 0$ per $T \to \infty$. Per tant, $X(t)$ és un procés ergòdic. Un procediment alternatiu és calcular directament

$$m_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(X(0)\cos t + X(\pi/2)\sin t)dt = X(0)\frac{\sin T}{T}$$

d'on

$$\sigma_T^2 = \frac{\sin^2 T}{T^2}\sigma_{X(0)}^2 = \frac{\sin^2 T}{T^2}R(0) = \frac{\sin^2 T}{T^2}.$$

10. Sigui $X(t)$ un procés estocàstic estacionari en sentit ampli amb valor mitjà $m_X = 0$. Sigui $Y_1(t)$ la millor estimació lineal en mitjana quadràtica de $X(t+T)$ donats $X(t)$, $X(t-T)$, $X(t-2T)$; i sigui $Y_2(t)$ la millor estimació lineal en mitjana quadràtica de $X(t+T)$ donat únicament $X(t)$. Demostreu que si la funció d'autocorrelació del procés és $R_X(\tau) = A\, e^{-\alpha|\tau|}$, aleshores $Y_1(t) = Y_2(t)$. Interpreteu aquest resultat en el cas del senyal telegràfic.

11. Sigui Δ una variable aleatòria exponencial de paràmetre λ. Definim el procés estocàstic (per a $t \geq 0$):

$$X(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \Delta, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Es demana:

(a) La funció de distribució $F_X(x;t)$ (que caracteritza l'estadística de primer ordre del procés).
(b) Les funcions de valor mitjà i d'autocorrelació de $X(t)$. És un procés estacionari en sentit ampli?
(c) Trobeu la millor estimació lineal homogènia de $X(t_2)$ donada $X(t_1)$, $t_1 \geq 0$. Comenteu què passa en cadascun dels casos: (1) $t_1 < t_2$, (2) $t_1 = t_2$ i (3) $t_1 > t_2$.
(d) Trobeu l'error quadràtic mitjà de l'anterior estimació (pel cas (1)). Raoneu el seu comportament quan $t_2 \to \infty$.

---

12. Calculeu la funció valor mitjà i la funció d'autocorrelació de l'oscil·lació aleatòria

$$X(t) = \cos(\Omega t + \Phi),$$

on Ω és una variable aleatòria amb funció densitat de probabilitat

$$f_\Omega(\omega) = \begin{cases} e^{-(\omega-\omega_0)}, & \omega \geq \omega_0 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases},$$

i Φ és una variable aleatòria uniforme en $[0, 2\pi]$, essent Ω i Φ independents.

Resolució:
Com que Ω i Φ són variables aleatòries independents, la seva funció de densitat conjunta val:

$$f_{\Omega\Phi}(\omega,\phi) = f_\Omega(\omega) f_\Phi(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-(\omega-\omega_0)}, & \omega \geq \omega_0,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

La funció valor mitjà de $X(t)$ és:

$$m_X(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(\cos(\Omega t + \Phi)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t + \phi) f_{\Omega\Phi}(\omega,\phi)\, d\omega d\phi =$$

$$\int_{\omega_0}^{\infty} e^{-(\omega-\omega_0)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \phi)\, d\phi \right) d\omega = 0,$$

ja que, per a t i ω fixats,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \phi)\, d\phi = 0.$$

Pel que fa a la funció d'autocorrelació tenim:

$$R_X(t, t+\tau) = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau)) = \mathrm{E}\left(\cos(\Omega t + \Phi)\right)\cos(\Omega(t+\tau) + \Phi)) =$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{\cos(\Omega\tau) + \cos(\Omega(2t+\tau) + 2\Phi)}{2} \right) =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{E}(\cos(\Omega\tau)) + \frac{1}{2}\mathrm{E}(\cos(\Omega(2t+\tau) + 2\Phi)) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(\cos(\Omega\tau)),$$

ja que, com el cas del valor mitjà,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega(2t+\tau) + 2\phi)\, d\phi = 0.$$

Notem que R_X depen només de τ. Finalment,

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(\cos(\Omega\tau)) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega\tau) f_\Omega(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\infty} \cos(\omega\tau)\, e^{-(\omega-\omega_0)}\, d\omega =$$

$$\frac{\cos(\omega_0\tau) - \tau\sin(\omega_0\tau)}{2(1+\tau^2)}$$

$X(t)$ és un procés estacionari en sentit ampli.

---

13. Considereu el procés estocàstic

$$X(t) = Ate^{-Bt}$$

on A, B són variables aleatòries independents uniformes en $[1, 3]$ i $[0, 1]$ respectivament.

(a) Calculeu les seves funcions de valor mitjà i d'autocorrelació.

(b) Sigui X_M el valor màxim que pren la funció $X(t)$ per $t > 0$. Calculeu la millor estimació en mitjana quadràtica de $X(t)$ de la forma $\frac{\alpha(t)}{X_M}$ on $\alpha(t)$ és una constant per cada t.

Resolució:

(a)

$$m(t) = E[X(t)] = E[Ate^{-Bt}] = E[A]tE[e^{-Bt}] =$$
$$= 2t\int_0^1 e^{-bt}db = 2(1 - e^{-t}).$$
$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[At_1e^{-Bt_1}At_2e^{-Bt_2}]$$
$$= E[A^2]t_1t_2E[e^{-B(t_1+t_2)}]$$
$$= \int_1^3 a^2\frac{da}{2}t_1t_2\int_0^1 e^{-b(t_1+t_2)}db = \frac{13}{3}\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}(1 - e^{-(t_1+t_2)}).$$

(b) El valor de X_M és $X(t_M)$ on t_M és la solució de

$$0 = \frac{dX(t)}{dt} = A(1 - Bt)e^{-Bt}.$$

Així $t_M = B^{-1}$ i $X_M = \frac{A}{B}e^{-1}$. L'estimador $\alpha(t)\frac{B}{A}e$ és lineal homogeni. Trobem $\alpha = \alpha(t)$ amb el principi d'ortogonalitat.

$$E[\alpha\frac{B}{A}e \cdot \frac{B}{A}e] = E[Ate^{-Bt} \cdot \frac{B}{A}e] \Longrightarrow \alpha e^2E[B^2]E[\frac{1}{A^2}] = teE[Be^{-Bt}],$$

on

$$E[B^2] = \int_0^1 b^2db = \frac{1}{3}, \quad E[\frac{1}{A^2}] = \int_1^3 \frac{1}{a^2}\frac{da}{2} = \frac{1}{3},$$
$$E[Be^{-Bt}] = \int_0^1 be^{-bt}db = \frac{1}{t^2} - \frac{e^{-t}}{t^2} - \frac{e^{-t}}{t}.$$

Finalment

$$\alpha(t) = \frac{9}{et}(1 - (1+t)e^{-t}).$$

---

14. Un procés estocàstic $X(t)$, estacionari en sentit ampli, té valor mitjà $m_X(t) = 1$ i funció d'autocovariància $C_X(\tau) = 1/(1+\tau^2)$.

(a) Donats $X(t)$ i $X(t+1)$, trobeu la millor estimació lineal no homogènia, en mitjana quadràtica, de $X(t+2)$.

(b) Calculeu l'error de l'estimació anterior.

(c) Fent servir la desigualtat de Chebyshev, trobeu una cota superior per la probabilitat que $X(t) > 10$.

---

15. Considereu el procés estocàstic

$$Z(t) = X\cos t + Y\sin t + N,$$

on (X, Y) és una variable aleatòria bidimensional uniforme en una regió circular de radi a centrada a l'origen i N és una variable aleatòria gaussiana amb valor mitjà 0 i variància σ^2 incorrelada amb X i Y.

(a) Calculeu la funció valor mitjà i la funció d'autocorrelació del procés $Z(t)$. Digueu si el procés és estacionari.

(b) Si $a = 2$ i $\sigma = 1$, determineu la millor estimació lineal homogènia en mitjana quadràtica de $Z(t)$, $0 < t < \pi/2$, donat $Z(0)$ i $Z(\pi/2)$.

---

16. A partir de les variables aleatòries independents A, B, de valor mitjà zero y variàncies $\sigma_A^2 = 1$ i $\sigma_B^2 = 2$, es defineix el procés estocàstic
$$X(t) = At + B.$$
Es demana:

(a) La funció valor mitjà i la funció d'autocorrelació de $X(t)$. És un procés estacionari en sentit ampli?

(b) Trobeu la millor estimació lineal homogènia de $X(t)$ donades $X(t_1)$ i $X(t_2)$, amb t, t_1 i t_2 instants distints. Comenteu els casos $t \to t_1$ i $t \to t_2$.

(c) Suposeu que A i B són variables aleatòries de tipus continu. Expresseu la funció de densitat $f_X(x;t)$ de primer ordre del procés $X(t)$ en termes de les funcions de densitat $f_A(a)$ y $f_B(b)$.

---

17. Sigui A una variable aleatòria uniforme a l'interval $[0, 1]$. Definim el procés estocàstic:
$$X(t) = \begin{cases} At, & t > 0, \\ 0 & \text{altrement.} \end{cases}$$
Es demana:

(a) La funció de densitat $f_X(x;t)$ (que caracteritza l'estadística de primer ordre del procés).

(b) La funció valor mitjà i la funció d'autocorrelació de $X(t)$. ¿És un procés estacionari en sentit ampli?

(c) Suposant $t_1, t_2 > 0$, trobeu la millor estimació lineal de $X(t_2)$ donada $X(t_1)$ i l'error quadràtic mitjà que s'obté. Interpreteu el resultat obtingut.

Resolució:

(a) Per a cada valor de t, la funció de distribució de probabilitat de $X(t)$ és:
$$F_X(x;t) = \mathrm{P}(X(t) \le x) = \mathrm{P}\left(A \le \frac{x}{t}\right) = F_A(x/t) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{x}{t}, & 0 \le x \le t, \\ 1, & x > t. \end{cases}$$
Per tant, la funció de densitat és $f_X(x,t) = \frac{d}{dx} F_X(x,t) = \frac{1}{t}$ per $x \in [0, t]$ i $f_X(x,t) = 0$ altrament (és a dir, es tracta d'una variable aleatòria uniforme a l'interval $[0, t]$).

(b) Com que $\mathrm{E}\{A\} = 1/2$ i $\mathrm{E}\{A^2\} = 1/3$, la funció valor mitjà és:
$$m_X(t) := \mathrm{E}\{X(t)\} = \mathrm{E}\{A\}t = \frac{1}{2}t \quad (t > 0);$$
mentre que la funció d'autocorrelació dóna:
$$R_X(t_1, t_2) := \mathrm{E}\{X(t_1)X(t_2)\} = \mathrm{E}\{A^2\}t_1 t_2 = \frac{1}{3}t_1 t_2 \quad (t_1, t_2 > 0).$$
Per tant, com que $m_X(t)$ no és constant (depèn de t) i $R_X(t_1, t_2)$ no depèn únicament de $\tau := t_1 - t_2$, el procés no és estacionari en sentit ampli.

(c) La millor estimació lineal de $X(t_2)$ donada $X(t_1)$, $t_1, t_2 > 0$, és $\widehat{X(t_2)} = \alpha X(t_1) + \beta$, a on α i β són constants que es determinen imposant la condició que l' "error" $X(t_2) - \widehat{X(t_2)}$ és ortogonal a les "dades" $X(t_1)$ i 1:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{[X(t_2) - \alpha X(t_1) - \beta] \cdot X(t_1)\} = 0 \quad &\Rightarrow \quad R_X(t_1, t_2) = \alpha R_X(t_1, t_1) + \beta m_X(t_1) \\ \mathrm{E}\{[X(t_2) - \alpha X(t_1) - \beta] \cdot 1\} = 0 \quad &\Rightarrow \quad m_X(t_2) = \alpha m_X(t_1) + \beta \end{aligned}$$

D'on s'obté:

$$\alpha = \frac{R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1) m_X(t_2)}{R_X(t_1, t_1) - m_X(t_1)^2} = \frac{C_X(t_1, t_2}{C_X(t_1, t_1)}, \qquad \beta = m_X(t_2) - \alpha m_X(t_1)$$

A on, en el nostre cas, la covariància val $C_X(t_1, t_2) = \frac{1}{3} t_1 t_2 - \frac{1}{4} t_1 t_2 = \frac{1}{12} t_1 t_2$. Aleshores, obtenim els valors $\alpha = \frac{t_2}{t_1}$, $\beta = 0$, d'on la millor estimació és:

$$\widehat{X(t_2)} = \frac{t_2}{t_1} X(t_1).$$

(Noteu que, com era d'esperar, $\widehat{X(t_2)} \to X(t_1)$ quan $t_2 \to t_1$).

D'altra banda, l'error quadràtic mitjà és:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \mathrm{E}\{[X(t_2) - \widehat{X(t_2)}]^2\} = \mathrm{E}\{X(t_2)^2\} - \mathrm{E}\{\widehat{X(t_2)}^2\} \\ &= R_X(t_2, t_2) - \frac{t_2^2}{t_1^2} R_X(t_1, t_1) = 0; \end{aligned}$$

a on s'ha utilitzat el "teorema de Pitàgores" (degut a l'ortogonalitat entre $X(t_2) - \widehat{X(t_2)}$ i $\widehat{X(t_2)}$).

Com que l'error és nul, l'estimació és exacta. En efecte, noteu que, si es coneix el valor $X(t_1) = At_1$, coneixem també el valor de la variable aleatòria $A = \frac{1}{t_1} X(t_1)$. Per tant, el valor de $X(t_2)$ ha de ser $X(t_2) = At_2 = \frac{t_2}{t_1} X(t_1)$, que és el que ens dona l'estimació.

---

18. Un servei de reclamacions atén correctament un 60% de les reclamacions que se li adrecen. El nombre de reclamacions que arriben segueix un procés de Poisson d'intensitat $\lambda = 5$ reclamacions cada hora.
    (a) Quin és el valor mitjà de reclamacions mal ateses durant una jornada de vuit hores.
    (b) Quina és la probabilitat que en una jornada de vuit hores s'hagin atès correctament 24 reclamacions.

---

19. (a) Si X i Y són variables aleatòries independents i $Z = \min(X, Y)$, demostreu que

    $$F_Z(z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$$

    (b) Siguin $X_1(t)$ i $X_2(t)$ processos de Poisson independents de taxes μ_1 i μ_2, respectivament, i sigui

    $$X(t) = X_1(t) + X_2(t).$$

    Calculeu la funció densitat de probabilitat i l'esperança del temps T transcorregut fins que es produeix la primera transició de $X(t)$.

    (c) Calculeu la funció de probabilitat de primer ordre del procés $X(t)$. Sabrıeu relacionar aquest resultat amb l'obtingut a l'apartat anterior?

Resolució:

(a) Per la definició de funció de distribució de probabilitat tenim:

$$F_Z(z) = \mathrm{P}(Z \leq z) = \mathrm{P}\left(\min(X,Y) \leq z\right) = 1 - \mathrm{P}(\min(X,Y) > z) =$$

$$1 - \mathrm{P}(X > z, Y > z) = 1 - \mathrm{P}(X > z)\mathrm{P}(Y > z) = 1 - (1 - F_X(z))\,(1 - F_Y(z))\,,$$

on hem aplicat $\mathrm{P}(X > z, Y > z) = \mathrm{P}(X > z)\mathrm{P}(Y > z)$ per ser X i Y independents.

(b) Si T_i és el temps fins que arriba la primera transició de $X_i(t)$, $i = 1, 2$, i T és el temps fins que es produeix la primera transició de $X(t)$, aleshores $T = \min(T_1, T_2)$, amb T_1 i T_2 variables aleatòries exponencials, independents, de paràmetres μ_1 i μ_2, respectivament.

Per tant, pel resultat de l'apartat anterior:

$$f_T(t) = F'_T(t) = f_{T_1}(t)(1 - F_{T_2}(t)) + f_{T_2}(t)(1 - F_{T_1}(t)) =$$

$$\begin{cases} 0, & t < 0 \\ (\mu_1 + \mu_2)e^{-(\mu_1+\mu_2)t}, & t > 0 \end{cases}$$

És a dir, T és exponencial de paràmetre $\mu_1 + \mu_2$ i, per tant,

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2}$$

(c) Sigui $n \geq 0$ un enter fixat.

$$P(X(t) = n) = \mathrm{P}\left(X_1(t) + X_2(t) = n\right) = \sum_{k+r=n} \mathrm{P}(X_1(t) = k, X_2(t) = r) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_1(t) = n-k)\;\mathrm{P}(X_2(t) = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\mu_1 t}\frac{(\mu_1 t)^{n-k}}{(n-k)!}\;e^{-\mu_2 t}\frac{(\mu_2 t)^k}{k!} =$$

$$= \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)t}}{n!}\sum_{n=0}^{k}\binom{n}{k}(\mu_1 t)^{n-k}(\mu_2 t)^k = e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\,\frac{\left((\mu_1+\mu_2)t\right)^n}{n!},$$

on $\mathrm{P}(X_1(t) = k, X_2(t) = r) = \mathrm{P}(X_1(t) = n-k)\mathrm{P}(X_2(t) = k)$ ja que $X_1(t)$ i $X_2(t)$ són processos estocàstics independents.

Noteu que $X(t)$ és, per a cada t, una variable aleatòria de Poisson de paràmetre $(\mu_1+\mu_2)t$. Així, el nombre mitjà de transicions per unitat de temps de $X(t)$ val $\mu_1 + \mu_2$, amb conseqüència amb el fet que el temps fins a la primera transició de $X(t)$ és exponencial de paràmetre $\mu_1 + \mu_2$ i, per tant, $\mathrm{E}(T) = 1/(\mu_1 + \mu_2)$.

---

20. A partir de les variables aleatòries A i B conjuntament gaussianes d'esperança zero, variàncies σ_A^2 i σ_B^2, respectivament, i coeficient de correlació ρ, es defineix el procés estocàstic

$$X(t) = At + B$$

(a) Calculeu el valor mitjà i la funció d'autocorrelació de $X(t)$. És un procés estacionari en sentit ampli?

(b) Doneu la funció de densitat de primer ordre del procés.

(c) Si A i B són incorrelades, trobeu la millor estimació lineal en mitjana quadràtica de $X(t)$ donades $X(t_1)$ i $X(t_2)$, amb t, t_1, t_2 instants distints. Comenteu els casos $t \to t_1$ i $t \to t_2$.

(d) Calculeu l'error quadràtic mitjà comés amb l'estimador calculat a l'apartat anterior. Interpreteu el resultat que s'obté.

21. Siguin $X(t)$, $Y(t)$ dos processos de Poisson independents, els dos de paràmetre (taxa) λ.

(a) Donat el procés $Z(t) = \alpha X(t) + \beta$, amb $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, es demana trobar la seva estadística de primer ordre (funció de densitat o de probabilitat), la funció valor mitjà i la funció d'autocorrelació.

(b) Comproveu que el procés $S(t) = X(t) + Y(t)$ també és de Poisson i calculeu el seu paràmetre (taxa) λ'.

(c) Calculeu la millor estimació lineal homogènia en mitjana quadràtica de $X(2)$, donats $X(1)$ i $X(3)$. Interpreteu el resultat. Calculeu l'error quadràtic mitjà de l'estimació.

---

22. Sigui $X(t)$ el procés estocàstic

$$X(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le Y, \\ 0, & \text{altrament}, \end{cases}$$

on Y és una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\lambda = 1$.

(a) Quins són els valors presos per cadascuna de les variables aleatòries $X\left(\frac{1}{2}\right)$, $X(2)$ i $X(4)$. Determineu les seves funcions de probabilitat. Raoneu: es tracta d'un procés d'estat continu o d'estat discret?

(b) Calculeu la funció de probabilitat de primer ordre del procés $X(t)$. Utilitzeu-la per obtenir-ne la funció de valor mitjà $m(t)$, així com la poència del procés. Compareu la forma de les realitzacions amb la del valor mitjà. Quines similituds i diferències hi ha?

(c) Calculeu la funció d'autocorrelació de $X(t)$, $R(t_1, t_2)$. Verifiqueu a partir d'ella que la potència calculada a l'anterior apartat és correcta. *(Indicació: distingiu els casos $t_2 > t_1$ i $t_1 > t_2$.)*

(d) Determineu la millor estimació lineal no homogènia de $X(t_2)$ donat $X(t_1)$, $(0 < t_1 < t_2)$, i l'error quadràtic mínim d'aquesta estimació.

Resolució:

(a) La variable aleatòria $X\left(\frac{1}{2}\right)$ pren el valors 0 i 1 amb probabilitats

$$\mathrm{P}\left(X\left(\frac{1}{2}\right) = 1\right) = \mathrm{P}\left(Y \ge \frac{1}{2}\right) = 1 - F_Y\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-1/2},$$

$$\mathrm{P}\left(X\left(\frac{1}{2}\right) = 0\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X\left(\frac{1}{2}\right) = 1\right) = 1 - e^{-1/2}.$$

Anàlogament, la variable aleatòria $X(2)$ pren els valors 0 i 4, mentre que $X(4)$ pren els valors 0 i 8. Les probabilitats respectives valen:

$$\mathrm{P}\left(X\left(2\right) = 4\right) = \mathrm{P}\left(Y \ge 2\right) = 1 - F_Y\left(2\right) = e^{-2},$$

$$\mathrm{P}\left(X\left(2\right) = 0\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X\left(2\right) = 4\right) = 1 - e^{-2},$$

$$\mathrm{P}\left(X\left(4\right) = 8\right) = \mathrm{P}\left(Y \ge 4\right) = 1 - F_Y\left(4\right) = e^{-4},$$

$$\mathrm{P}\left(X\left(4\right) = 0\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X\left(4\right) = 8\right) = 1 - e^{-4}.$$

En general, $X(t)$ és una variable aleatòria discreta que pren el valor $2t$ si $Y \ge t$ i el valor 0 altrament. $X(t)$ és, doncs, un procés d'estat discret.

(b) Noteu que per a $t < 0$ el procés $X(t)$ pren el valor 0 amb probabilitat 1. Per tant, si $t < 0$, $m_X(t)$ i la potència $P(t)$ valen trivialment 0.

Si $t > 0$, d'acord amb l'apartat anterior tenim:

$$\mathrm{P}(X(t) = 2t) = \mathrm{P}(Y \geq t) = 1 - F_Y(t) = e^{-t},$$

$$\mathrm{P}(X(t) = 0) = 1 - \mathrm{P}(X(t) = 2t) = 1 - e^{-t}.$$

Per tant, si $t > 0$,

$$m_X(t) = \mathrm{E}(X(t)) = 2t\,\mathrm{P}(X(t) = 2t) = 2t\,e^{-t}.$$

$$P(t) = \mathrm{E}(X^2(t)) = 4t^2\,\mathrm{P}(X(t) = 2t) = 4t^2\,e^{-t}.$$

(c) Pel que fa a la funció d'autocorrelació tenim (prenent $t_1, t_2 > 0$):

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = 4t_1t_2\,\mathrm{P}(Y \geq t_1, Y \geq t_2) \\ &= 4t_1t_2\,\mathrm{P}\left(Y \geq \max(t_1, t_2)\right) = 4t_1t_2\,e^{-\max(t_1,t_2)}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$P(t) = R_X(t, t) = 4t^2\,e^{-t},$$

reobtenint així el resultat de l'apartat anterior.
La covariància val

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) = 4t_1t_2\,\left(e^{-\max(t_1,t_2)} - e^{-(t_1+t_2)}\right).$$

(d) Sigui

$$\widehat{X(t_2)} = \alpha X(t_1) + \beta.$$

Plantejant les equacions ortogonals:

$$0 = \mathrm{E}(X(t_2) - \alpha X(t_1) - \beta) = m_X(t_2) - \alpha m_X(t_1) - \beta,$$

$$0 = \mathrm{E}\left((X(t_2) - \alpha X(t_1) - \beta)X(t_1)\right) = R_X(t_1, t_2) - \alpha R_X(t_1, t_1) - \beta m_X(t_1),$$

obtenim

$$\alpha = \frac{C_X(t_1, t_2)}{C_X(t_1, t_1)} = \frac{4t_1t_2\,\left(e^{-t_2} - e^{-(t_1+t_2)}\right)}{4t_1^2\,\left(e^{-t_1} - e^{-2t_1}\right)} = \frac{t_2}{t_1}\,e^{-(t_2-t_1)}.$$

$$\beta = m_X(t_2) - \alpha m_X(t_1) = 2t_2\,e^{-t_2} - \frac{t_2}{t_1}\,e^{-(t_2-t_1)}2t_1e^{-t_1} = 0$$

Per tant,

$$\widehat{X(t_2)} = \frac{t_2}{t_1}\,e^{-(t_2-t_1)}X(t_1).$$

Pel que fa a l'error tenim

$$\begin{aligned} \epsilon = \mathrm{E}\left(\left(X(t_2) - \widehat{X(t_2)}\right)X(t_2)\right) &= \mathrm{E}\left(\left(X(t_2) - \alpha X(t_1) - \beta\right)X(t_2)\right) \\ &= R_X(t_2, t_2) - \alpha R_X(t_1, t_2) - \beta m_X(t_2) \\ &= 4t_2^2\,e^{-t_2} - \frac{t_2}{t_1}\,e^{-(t_2-t_1)}4t_1t_2\,e^{-t_2} = 4t_2^2\,e^{-t_2}\left(1 - e^{-(t_2-t_1)}\right). \end{aligned}$$