# Processos Estocàstics

J. Fàbrega
Departament de Matemàtica Aplicada IV

7 d'octubre de 2015

# Índex

# Capítol 1

# Processos Estocàstics

## 1.1 El concepte de procés estocàstic

L'anàlisi d'un fenomen observable comporta sovint l'estudi d'un senyal que varia de forma aleatòria amb el temps de manera que la magnitud mesurada en un instant determinat es distribueix a l'atzar d'acord amb una determinada llei de probabilitat. La modelització matemàtica d'aquesta situació porta a la definició de *procés estocàstic*:

Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ l'espai de probabilitat corresponent a l'experiment aleatori d'interès. (Recordem que $\Omega$ denota el conjunt de tots els resultats possibles de l'experiment, $\mathcal{F}$ és la $\sigma$-àlgebra dels esdeveniments i P la funció que assigna una probabilitat a cada esdeveniment.) D'altra banda, sigui $R_t \subset \mathbb{R}$ el conjunt on varia un cert paràmetre $t$ que anomenarem *temps* perquè sovint correspon a una variable temporal.

**Definició 1.1** *Un procés estocàstic $X$ definit sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ és una aplicació*

$$\begin{aligned} X : R_t \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\mapsto X(t, \omega) \end{aligned}$$

*tal que $X(t, \omega)$ és una variable aleatòria per a cada $t \in R_t$. És a dir, fixat un valor del temps, el subconjunt de resultats $\{\omega \in \Omega : X(t, \omega) \leq x\}$ és, per a cada $x \in \mathbb{R}$, un esdeveniment de $\mathcal{F}$.*

Un procés estocàstic és, doncs, una família de variables aleatòries

$$\{X(t, \omega) \equiv X_t(\omega),\ t \in R_t\}$$

indexada pel paràmetre $t$. Però, un procés estocàstic es pot interpretar també com una col·lecció de funcions del temps:

$$\{X(t, \omega) \equiv X_\omega(t),\ \omega \in \Omega\},$$

essent $X_\omega(t)$ la *realització* del procés corresponent al resultat $\omega$ de l'experiment aleatori. Normalment s'omet a la notació la dependència amb $\omega$ i es denota el procés simplement per $X(t)$.

Quan el conjunt $R_t$ on varia el paràmetre $t$ és un conjunt discret (finit o infinit numerable), el procés estocàstic s'anomena de *temps discret*. En aquest cas $X(t)$ correspon bé a una variable aleatòria multidimensional $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ si $R_t = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ és un conjunt finit, bé a una successió de variables aleatòries $X[n] = \{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n) \dots\}$ si $R_t = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ és un conjunt infinit numerable. En canvi, quan $R_t$ és un conjunt no numerable (per exemple, $R_t = \mathbb{R}$, $R_t = [0, \infty)$, o $R_t = [a, b]$) es diu que el procés $X(t)$ és de *temps continu*.

Si fem referència als valors que pren $X(t)$ tenim una altra classificació dels processos estocàstics. Diem que $X(t)$ és un procés *discret en estats* si el conjunt imatge de l'aplicació $X$ és discret; en canvi, quan aquest conjunt imatge és no numerable, el procés s'anomena *continu* en estats.

*Exemple 1.2*
Sigui $\Phi$ una variable aleatòria distribuïda uniformement en l'interval $[-\pi, \pi]$, i sigui $f \in \mathbb{R}^+$ una constant. Aleshores,

$$X(t) = \sin(2\pi f t + \Phi), \quad t \in [0, \infty)$$

és un procés estocàstic de temps continu i continu en estats que correspon a una oscil·lació de freqüència $f$ i fase $\Phi$ aleatòria. □

*Exemple 1.3*
Es porta l'estadística de les trucades que arriben a una central telefònica al llarg d'un conjunt de dies $\Omega$. Sigui $X_\omega(t)$ el nombre de trucades que han arribat aleatòriament a la central durant el període d'observació $[0, t]$ del dia $\omega \in \Omega$. Cada funció $X_\omega(t)$ correspon a una realització d'un procés estocàstic de temps continu i discret en estats, ja que que $X(t)$ només pot prendre els valors 0, 1, 2, ... □

*Exemple 1.4*
Sigui

$$X[n] = \{\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots, X_n \dots\}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

una successió (doblement infinita) de variables aleatòries incorrelades, totes amb esperança 0 i igual variància $\sigma^2$. La seqüència aleatòria $X[n]$ constitueix un un procés estocàstic de temps discret que s'anomena *soroll blanc*. □

*Exemple 1.5*
Considereu una successió $B_1, B_2, B_3, \dots$ de variables aleatòries de Bernoulli independents, tal que $\mathrm{P}(B_i = 1) = p$, $\mathrm{P}(B_i = -1) = q$, $i \geq 1$, on $p + q = 1$. Aleshores,

$$X[n] = B_1 + B_2 + \cdots + B_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

és un procés estocàstic de temps discret i discret en estats. (En aquest exemple, $R_t = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ i $X[n]$ pren només valors enters.) Aquest procés s'anomena *passejada aleatòria*, perquè cada realització es pot interpretar com el moviment d'una partícula que es "passeja" en una dimensió, de tal manera que, si en l'instant $i$ la partícula ocupa la posició de coordenada $k$, aleshores a l'instant següent $i + 1$ ocuparà bé la posició de coordenada $k + 1$, amb probabilitat $p$, bé la posició de coordenada $k - 1$, amb probabilitat $q$. □

## 1.2 Funcions de distribució i de densitat de probabilitat

A l'hora de descriure probabilísticament un procés estocàstic convé considerar-lo, tal com s'ha explicat en la secció anterior, com una col·lecció de variables aleatòries indexada pel paràmetre temps. Això permet estudiar-ne les famílies de funcions de distribució i de densitat de probabilitat de conjunts de variables aleatòries extretes del procés.

Comencem fixant un valor de $t$ i determinem la funció de distribució de probabilitat $F_{X(t)}(x)$ de la variable aleatòria $X(t)$ obtinguda del procés en particularitzar-lo en aquest instant $t$. Aquesta funció d'argument $x$ (que depèn també de $t$ quan fem variar aquest paràmetre) s'anomena *funció de distribució de primer ordre* del procés estocàstic. Denotant $F_{X(t)}(x)$ com una funció $F_X(x;t)$ de les variables $x$ i $t$, podem escriure:

$$F_X(x;t) \equiv F_{X(t)}(x) = \mathrm{P}(X(t) \leq x).$$

Observeu que $F_X(x;t)$ ens descriu l'evolució temporal de la funció de distribució de probabilitat de les diverses variables aleatòries sorgides de $X(t)$ en variar el temps.

Si $X(t)$ és un procés continu en estats podem definir la *funció de densitat de primer ordre* del procés, $f_X(x;t)$, com la funció de densitat de probabilitat $f_{X(t)}$ de la variable aleatòria continua $X(t)$. Per tant, per a cada $t$ fixat,

$$f(x;t)\Delta x \approx \mathrm{P}\{x \leq X(t) \leq x + \Delta x\},$$

o bé, de manera més formal:

$$f(x;t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{P}\{x \leq X(t) \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}. \tag{1.1}$$

S'han de complir les relacions conegudes entre funcions de distribució i de densitat de probabilitat. Per exemple, l'equació (1.1) ens diu que

$$f_{X(t)}(x) = \frac{d}{dx} F_{X(t)}(x), \quad \text{és a dir,} \quad f_X(x;t) = \frac{\partial F_X(x;t)}{\partial x}.$$

Anàlogament,

$$F_{X(t)}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X(t)}(u)\, du, \quad \text{és a dir,} \quad F_X(x;t) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u;t)\, du.$$

Si $X(t)$ és un procés discret en estats que pren els valors $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$, ..., es defineix la *funció de probabilitat de primer ordre* del procés, $p_X(x_k;t)$, com la funció de probabilitat de la variable aleatòria discreta $X(t)$. És a dir,

$$p_X(x_k;t) \equiv p_{X(t)}(x_k) = \mathrm{P}(X(t) = x_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ara tenim:

$$F_X(x;t) = \sum_{x_k \le x} p_X(x_k;t).$$

De forma més general:

**Definició 1.6** *La funció de distribució d'ordre $n$ del procés $X(t)$ és la funció de distribució conjunta $F_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de les $n$ variables aleatòries $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_n)$, extretes del procés en particularitzar-lo en els instants de temps $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$. Així,*

$$\begin{aligned} F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) &= F_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= \mathrm{P}(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \ldots, X(t_n) \le x_n). \end{aligned}$$

Per a un procés continu en estats, la *funció de densitat d'ordre $n$* s'obté com:

$$f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\partial x_1 \, \partial x_2 \, \cdots \, \partial x_n},$$

i correspon a la funció de densitat conjunta de les $n$ variables aleatòries $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_n)$. Anàlogament, si el procés és discret en estats podem considerar la *funció de probabilitat d'ordre $n$*:

$$\begin{aligned} &p_X(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}; t_1, t_2, \ldots, t_n) \\ &\qquad = \mathrm{P}(X(t_1) = x_{k_1}, X(t_2) = x_{k_2}, \ldots, X(t_n) = x_{k_n}). \end{aligned}$$

Com ja s'ha esmentat, podem operar amb aquestes funcions de la forma coneguda per a funcions de distribució i densitat de variables aleatòries. Així, per exemple,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x;t)\, dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1 = f_X(x_2; t_2),$$

$$\lim_{x_2 \to \infty} F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_X(x_1; t_1),$$

o

$$p_X(x_{k_1}; t_1) = \sum_{k_2} p_X(x_{k_1}, x_{k_2}; t_1, t_2).$$

Per tenir una descripció probabilística completa d'un procés estocàstic $X(t)$ necessitem, en general, conèixer la seva funció de distribució d'ordre $n$, per a tot $n \ge 1$. Aquesta és una informació de la qual, sovint, no serà possible disposar-ne en la seva totalitat. Ens haurem de limitar al coneixement de les funcions de distribució fins a un cert ordre, o bé, al coneixement de l'evolució temporal de certs moments associats a les variables aleatòries obtingudes del procés. Aquesta qüestió es detalla en les seccions següents.

## 1.3 Funció valor mitjà

Si per a cada temps $t$ calculem l'esperança de la variable aleatòria $X(t)$ obtenim la *funció valor mitjà*.

**Definició 1.7** *La funció valor mitjà del procés estocàstic $X(t)$ és:*

$$m_X(t) = \mathrm{E}(X(t)).$$

Aquesta funció ens dóna, doncs, l'evolució temporal del moment de primer ordre del procés estocàstic. Quan $X(t)$ és un procés continu en estats, la funció valor mitjà es pot calcular formalment mitjançant l'expressió:

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x;t)\,dx,$$

mentre que, en el cas discret en estats, tenim:

$$m_X(t) = \sum_k x_k\, p_X(x;t).$$

Vegem-ne alguns exemples.

*Exemple 1.8*
Considereu l'oscil·lació aleatòria $X(t) = \cos(2\pi f t + B\,\Phi)$, en què $f$ és una constant real, $\Phi$ és una variable aleatòria uniforme en $[-\pi/2, \pi/2]$, i $B$ és una variable aleatòria discreta, independent de $\Phi$, tal que $\mathrm{P}(B = 0) = p$ i $\mathrm{P}(B = 1) = q$.

Fixem $t$ i calculem l'esperança de la variable aleatòria $X(t)$. Tenim:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(\cos(2\pi f t + B\,\Phi)) \\ &= \mathrm{E}(\cos(2\pi f t + B\,\Phi)|B = 0)\mathrm{P}(B = 0) + \mathrm{E}(\cos(2\pi f t + B\,\Phi)|B = 1)\mathrm{P}(B = 1) \\ &= p\,\cos 2\pi f t + q\,\mathrm{E}(\cos(2\pi f t + \Phi)). \end{aligned}$$

Per a cada $t$, $\cos(2\pi f t + \Phi)$ és una variable aleatòria funció de $\Phi$. Pel teorema de l'esperança podem escriure:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\cos(2\pi f t + \Phi)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f t + \phi)\, f_\Phi(\phi)\, d\phi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2\pi f t + \phi)\, d\phi = \frac{2}{\pi}\cos(2\pi f t). \end{aligned}$$

Així, la funció valor mitjà de $X(t)$ és:

$$m_X(t) = \left(p + q\,\frac{2}{\pi}\right)\cos(2\pi f t).$$

□

*Exemple 1.9*
Un transmissor envia polsos rectangulars d'altura i posició aleatoris. Cada pols transmès correspon a una realització del procés estocàstic

$$X(t) = V\,h(t-T), \quad t > 0,$$

en què l'altura $V$ del pols és una variable aleatòria uniforme en $[0, v_0]$, $T$ és una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\mu$, independent de $V$, i la funció determinista $h(t)$ és

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}.$$

Calculem la funció valor mitjà del procés $X(t)$.

Com a l'exemple anterior, fixem $t > 0$ i determinem l'esperança de la variable aleatòria $X(t)$. Noteu que $X(t) = V\,h(t-T)$ és una variable aleatòria funció de $V$ i $T$. Com que $V$ i $T$ són variables aleatòries independents, tenim:

$$m_X(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(V\,h(t-T)) = \mathrm{E}(V)\,\mathrm{E}(h(t-T)) = \frac{v_0}{2}\,\mathrm{E}(h(t-T)).$$

D'altra banda, $h(t-T)$ és, per a cada $t$, una variable aleatòria discreta que pren els valors 0 i 1. Per tant,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(h(t-T)) &= \mathrm{P}(h(t-T) = 1) = P\{t-1 \le T \le t\} \\ &= \int_{t-1}^{t} f_T(\tau)\,d\tau = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \mu e^{-\mu\tau}\,d\tau = 1 - e^{-\mu t}, & 0 < t < 1 \\ \displaystyle\int_{t-1}^{t} \mu e^{-\mu\tau}\,d\tau = e^{-\mu(t-1)} - e^{-\mu t}, & t \ge 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Així doncs:

$$m_X(t) = \begin{cases} \dfrac{v_0}{2}\,(1 - e^{-\mu t}), & 0 < t < 1 \\ \dfrac{v_0}{2}\,(e^{-\mu(t-1)} - e^{-\mu t}), & t \ge 1. \end{cases}$$

La Figura 1.1 mostra la funció valor mitjà del procés quan $v_0 = 2$ y $\mu = 1$.

També podríem haver considerat $h(t-T)$ com una variable aleatòria $g(T)$ funció de $T$ i aplicar el teorema de l'esperança:

$$\mathrm{E}(h(t-T)) = \mathrm{E}(g(T)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f_T(\tau)\,d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau)\mu e^{-\mu\tau}\,d\tau, \tag{1.3}$$

on la funció $g(\tau)$ que relaciona les variables aleatòries $h(t-T)$ i $T$ és:

$$g(\tau) = \begin{cases} 1, & t-1 \le \tau \le t \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} \tag{1.4}$$

Substituint ara (1.4) en l'equació (1.3), obtenim de nou l'expressió (1.2).

□

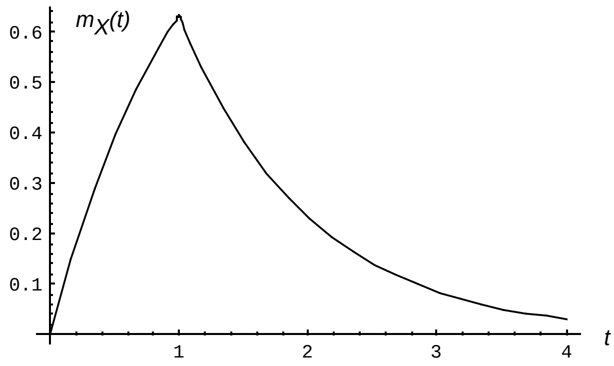


Figura 1.1: $m_X(t)$, $v_0 = 2$, $\mu = 1$

*Exemple 1.10*
Considereu el procés $X(t) = g(t-T)$, en què $T$ és una variable aleatòria uniforme en $[0,\pi]$ i

$$g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t \le \pi \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

En aquest exemple calcularem $\mathrm{E}(X(t))$ condicionant prèviament per $T$:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(X(t) \mid T)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}(X(t) \mid T = \tau) f_T(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{E}(X(t) \mid T = \tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Però, $\mathrm{E}(X(t) \mid T = \tau) = g(t - \tau)$, i, per tant,

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(t-\tau)\, d\tau \\ &= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{t} \sin(t-\tau)\, d\tau = \dfrac{1}{\pi}(1-\cos t), & 0 \le t < \pi \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{t-\pi}^{\pi} \sin(t-\tau)\, d\tau = \dfrac{1}{\pi}(1-\cos t), & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

□

Tal com hem comentat abans, quan tenim un procés estocàstic de temps discret podem identificar-lo, de forma general, amb una seqüència de variables aleatòries

$$X[n] = \{\ldots, X(t_{-1}), X(t_0), X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\ldots\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En aquest cas, la funció valor mitjà del procés correspon a una seqüència de valors reals, i podem escriure:

$$\begin{aligned} m_X[n] &= \mathrm{E}\,(X[n]) \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x;n)\, dx, & \text{si el procés és continu en estats,} \\ \displaystyle\sum_k x_k\, p_X(x_k;n), & \text{si el procés és discret en estats,} \end{cases} \end{aligned}$$

on $f_X(x;n)$ és la funció densitat de probabilitat de la variable aleatòria contínua $X[n]$ (funció densitat de primer ordre del procés continu en estats) i $p_X(x_k;n) = \mathrm{P}(X[n] = x_k)$ és la funció de probabilitat de la variable aleatòria discreta $X[n]$ (funció de probabilitat de primer ordre del procés discret en estats).

## 1.4 Funcions d'autocorrelació i d'autocovariància

La funció valor mitjà ens informa de la variació amb el temps del moment d'ordre u del procés estocàstic. L'evolució temporal dels moments d'ordre dos queda recollida per les anomenades funcions d'autocorrelació i d'autocovariància. Considerem, en primer lloc, el moment $m_{11}$ de dues variables aleatòries, $X(t_1)$ i $X(t_2)$, sorgides del procés $X(t)$ en particularitzar-lo en els instants $t_1$ i $t_2$.

**Definició 1.11** *La funció d'autocorrelació $R_X(t_1,t_2)$ del procés $X(t)$ es defineix com:*

$$R_X(t_1,t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)).$$

Si $X(t)$ és continu en estats podem escriure:

$$R_X(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\, dx_1 dx_2,$$

mentre que si $X(t)$ és discret en estats tenim:

$$R_X(t_1,t_2) = \sum_{k_1}\sum_{k_2} x_{k_1} x_{k_2}\, p_X(x_{k_1},x_{k_2};t_1,t_2).$$

La funció d'autocorrelació és una funció simètrica dels seus arguments, i.e. $R_X(t_1,t_2) = R_X(t_2,t_1)$, i el seu valor quan $t_1 = t_2 = t$ és:

$$R_X(t,t) = \mathrm{E}(X^2(t)).$$

Si $X(t)$ correspon, per exemple, a un senyal elèctric, la magnitud $X^2(t)$ està associada a la potència o l'energia instantània d'aquest senyal. És per això que la funció $\mathrm{E}(X^2(t))$ s'anomena la *potència mitjana* del procés estocàstic.

Si enlloc del moment $m_{11}$ estem interessats en estudiar la covariància (moment central $\mu_{11}$) de les variables aleatòries $X(t_1)$ i $X(t_2)$, obtenim aleshores la funció d'autocovariància del procés estocàstic.

**Definició 1.12** *La funció d'autocovariància del procés $X(t)$ és:*

$$C_X(t_1, t_2) = \mathrm{E}\left((X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))\right).$$

Desenvolupant aquesta expressió s'obté la relació següent entre les funcions $C_X$, $R_X$ i $m_X$,

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2).$$

Noteu també que la funció

$$C_X(t, t) = \mathrm{E}\left((X(t) - m_X(t))^2\right)$$

ens dóna la variació amb el temps de la variància $\sigma^2_{X(t)}$ de la variable aleatòria $X(t)$.

*Exemple 1.13*
Sigui $X(t)$ un procés estocàstic amb funció valor mitjà $m_X(t) = 3$ i funció d'autocorrelació $R_X(t_1, t_2) = 9 + 4e^{-0.2|t_1 - t_2|}$. Calculem l'esperança, variància i covariància de les variables aleatòries $Z = X(5)$ i $T = X(8)$.

Tenim:

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X(5)) = m_X(5) = 3,$$

i, anàlogament,

$$\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(X(8)) = m_X(8) = 3.$$

En efecte, la funció valor mitjà del procés pren el valor constant 3 al llarg del temps, i això vol dir que qualsevol variable aleatòria obtinguda del procés en particularitzar el temps en un determinat instant tindrà la mateixa esperança (igual a 3).

Calculem ara $\mathrm{E}(Z^2)$ i $\mathrm{E}(T^2)$:

$$\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{E}(X(5)X(5)) = R_X(5, 5) = 13,$$
$$\mathrm{E}(T^2) = \mathrm{E}(X(8)X(8)) = R_X(8, 8) = 13.$$

De fet, $\mathrm{E}(X(t)^2) = 13$ per a qualsevol valor de $t$. (El procés $X(t)$ té una potència mitjana constant.) Per tant,

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - (\mathrm{E}(Z))^2 = 4,$$
$$\mathrm{Var}(T) = \mathrm{E}(T^2) - (\mathrm{E}(T))^2 = 4.$$

D'altra banda,

$$\mathrm{E}(ZT) = \mathrm{E}(X(5)X(8)) = R_X(5, 8) = 9 + 4\,e^{-0.6}.$$

Així,

$$\operatorname{Cov}(Z,T) = \mathrm{E}(ZT) - \mathrm{E}(Z)\mathrm{E}(T) = 4\,e^{-0.6}.$$

També podem calcular la covariància de $Z$ i $T$ a partir de la funció d'autocovariància de $X(t)$:

$$\operatorname{Cov}(Z,T) = C_X(5,8) = R_X(5,8) - m_X(5)m_X(8) = 4\,e^{-0.6}.$$

□

*Exemple 1.14*
Calculem la funció d'autocorrelació del procés $X(t) = A\cos(2\pi f t + \Phi)$, on $A$ i $\Phi$ són variables aleatòries independents, essent $\Phi$ uniforme en $[-\pi,\pi]$ i $A$ exponencial de paràmetre $\mu$.

La funció valor mitjà de $X(t)$ és:

$$m_X(t) = \mathrm{E}\,(X(t)) = \mathrm{E}\,(A\cos(2\pi f t + \Phi)) = \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(\cos(2\pi f t + \Phi)) = 0,$$

ja que $A$ i $\Phi$ són independents i

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\cos(2\pi f t + \Phi)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f t + \phi) f_\Phi(\phi)\,d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi f t + \phi)\,d\phi = 0.\end{aligned}$$

Pel que fa a la funció d'autocorrelació,

$$\begin{aligned}R_X(t_1,t_2) &= \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = \mathrm{E}(A^2\cos(2\pi f t_1 + \Phi)\cos(2\pi f t_2 + \Phi)) \\ &= \mathrm{E}(A^2)\,\mathrm{E}\left(\frac{\cos(2\pi f(t_1+t_2) + 2\Phi) + \cos(2\pi f(t_1 - t_2))}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\mu^2}\cos(2\pi f(t_1 - t_2)),\end{aligned}$$

on, com abans,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\cos(2\pi f(t_1+t_2) + 2\Phi)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f(t_1+t_2) + 2\phi) f_\Phi(\phi)\,d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi f(t_1+t_2) + 2\phi)\,d\phi = 0.\end{aligned}$$

Com a l'exemple anterior, la funció valor mitjà es manté constant al llarg del temps i la funció d'autocorrelació varia amb $t_1$ i $t_2$ únicament mitjançant la diferència $\tau = t_1 - t_2$. És a dir, la correlació entre les variables aleatòries $X(t_1)$ i $X(t_2)$ depèn només de la separació temporal entre els instants $t_1$ i $t_2$ i no d'on s'hagi fixat l'origen de temps. Aquesta és una propietat important que examinarem amb més detall en parlar dels processos estacionaris. □

Per a processos de temps discret podem reescriure les expressions de les funcions d'autocorrelació i d'autocovariància de la forma següent:

$$R_X[n,k] = \mathrm{E}(X[n]X[k]),$$
$$C_X[n,k] = \mathrm{E}((X[n]-m_X[n])(X[k]-m_X[k]) = R[n,k]-m_X[n]m_X[k].$$

*Exemple 1.15*
Considereu el soroll blanc introduït a l'Exemple 1.4; és a dir, $X[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, és una seqüència de variables aleatòries incorrelades, totes amb esperança 0 i variància $\sigma^2$. Tenim:

$$m_X[n] = \mathrm{E}(X[n]) = 0,$$
$$R_X[n,k] = \mathrm{E}(X[n]X[k]) = \begin{cases} \mathrm{E}(X[n]^2) = \sigma^2, & n = m \\ \mathrm{E}(X[n])\mathrm{E}(X[m]) = 0, & n \neq m \end{cases}$$

□

Quan es consideren dos processos estocàstics distints, $X(t)$, $Y(t)$, es pot definir la seva *correlació creuada*:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)Y(t_2)),$$

i la seva *covariància creuada*:

$$C_{XY}(t_1,t_2) = \mathrm{E}\left((X(t_1)-m_X(t_1))(Y(t_2)-m_Y(t_2))\right) = R_{XY}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2).$$

## 1.5 Processos estacionaris

Quan les propietats probabilístiques d'un procés estocàstic no depenen de l'origen de temps es diu que el procés és estacionari. Aquesta definició vol contemplar les situacions on es considera un fenomen aleatori en què les causes que l'originen es troben en estat estacionari i, per tant, les propietats estocàstiques del fenomen es mantenen estables amb el temps.

### 1.5.1 Estacionarietat en sentit estricte

**Definició 1.16** *El procés estocàstic $X(t)$ és estacionari en sentit estricte si els processos $X(t)$ i $X(t+c)$ són probabilísticament iguals per a tot $c$ tal que $t, t+c \in R_t$.*

Sigui $X(t)$ un procés estocàstic estacionari en sentit estricte. Si les propietats probabilístiques de $X(t)$ són independents de l'origen de temps, aleshores les variables aleatòries $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_n)$ —obtingudes en particularitzar el procés en els instants $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$— es distribueixen conjuntament de la mateixa forma que ho fan les variables aleatòries $X(t_1 + c)$, $X(t_2 + c)$, ..., $X(t_n + c)$ —obtingudes en particularitzar el procés en els instants $t_1 + c$, $t_2 + c$, ..., $t_n + c$, essent el desplaçament $c$ arbitrari. Tenim doncs la condició següent sobre la funció de distribució d'ordre $n$:

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) \\ = F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1 + c, t_2 + c, \ldots, t_n + c). \quad (1.5)$$

Aquesta condició s'ha de complir per a tot ordre $n \geq 1$, per a tot desplaçament $c$ de l'origen de temps, i per a tota elecció dels instants $t_1$, $t_2$,..., $t_n$.

Quan la condició (1.5) es verifica per a $n = 1, 2, \ldots, k$, (però no necessàriament per a valors més grans de $n$), es diu que el procés és *estacionari d'ordre k*. Observeu que quan $X(t)$ és estacionari d'ordre $k$, llavors ho és també d'ordre $k'$, per a tot $k' \leq k$, i que un procés estacionari en sentit estricte ho és d'ordre $k$ per a tot $k \geq 1$.

Sigui $X(t)$ un procés estocàstic continu en estats i estacionari d'ordre $k \geq 1$. (El cas discret en estats es discuteix de forma similar.) Per a cada $n = 1 \ldots k$, podem formular una condició anàloga a (1.5) per la funció de densitat d'ordre $n$:

$$f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) \\ = f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1 + c, t_2 + c, \ldots, t_n + c). \quad (1.6)$$

Per a $n = 1$ tenim:

$$f_X(x; t) = f_X(x; t + c) \quad \text{per a tot } c.$$

Així, la funció densitat de primer ordre

$$f_X(x; t) \equiv f_X(x) \quad (1.7)$$

no depèn del temps; és a dir, totes les variables aleatòries $X(t)$ obtingudes del procés, tenen la mateixa funció densitat de probabilitat. A més, com a conseqüència de (1.7) tenim:

$$m_X(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x; t)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \equiv m_X. \quad (1.8)$$

**Teorema 1.17** *La funció valor mitjà d'un procés estocàstic estacionari és constant.*

Si $X(t)$ és estacionari d'ordre $k \geq 2$ i considerem ara la condició (1.6) per a $n = 2$, obtenim:

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + c, t_2 + c) \quad \text{per a tot } c,$$

és a dir,

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1),$$

i, per tant,

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) \equiv f_X(x_1, x_2; \tau), \quad \text{on } \tau = t_2 - t_1. \tag{1.9}$$

Això vol dir que la funció densitat conjunta de dues variables aleatòries obtingudes del procés en particularitzar-lo en dos instants de temps, depèn temporalment només de la separació $\tau$ entre aquests instants. Una conseqüència de (1.9) és:

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; \tau)\, dx_1 dx_2 \equiv R_X(\tau). \end{aligned} \tag{1.10}$$

**Teorema 1.18** *La funció d'autocorrelació d'un procés estacionari d'ordre almenys 2 depèn només de la separació $\tau$ entre els instants de temps considerats:*

$$R_X(\tau) = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau)),$$

*essent aquesta esperança independent de $t$. En particular, si considerem $t = 0$, tenim:*

$$R_X(\tau) = \mathrm{E}(X(0)X(\tau)).$$

Enumerem a continuació algunes propietats de la funció d'autocorrelació d'un procés estacionari d'ordre almenys 2:

1. La funció $R_X(\tau)$ té simetria parella, és a dir $R_X(-\tau) = R_X(\tau)$.

   En efecte,

   $$R_X(-\tau) = \mathrm{E}(X(t)X(t-\tau)) = \mathrm{E}(X(t'+\tau)X(t')) = R_X(\tau).$$

   Per tant, el fet de definir $\tau$ com $t_2 - t_1$ o com $t_1 - t_2$ és irrellevant.

2. La potència mitjana no depèn del temps i val

   $$\mathrm{E}(X^2(t)) = R_X(0) \geq 0.$$

3. Es compleix

   $$|R_X(\tau)| \leq R_X(0) \quad \text{per a tot } \tau.$$

   En efecte,

   $$0 \leq \mathrm{E}((X(0) \pm X(\tau))^2) = 2R_X(0) \pm 2R_X(\tau),$$

   d'on es desprèn la propietat.

Dos processos $X(t)$ i $Y(t)$ són *conjuntament estacionaris* si, per a tot $c$, la descripció probabilística conjunta de $X(t)$ i $Y(t)$ és la mateixa que la de $X(t+c)$ i $Y(t+c)$. Per aquesta mena de processos, la *funció de correlació creuada*

$$R_{XY}(\tau) = \mathrm{E}(X(t)Y(t+\tau))$$

és també funció únicament de $\tau$, encara que ja no és, en general, una funció parella del seu argument.

### 1.5.2 Estacionarietat en sentit ampli

Per garantir l'estacionarietat en sentit estricte d'un procés estocàstic cal verificar que es compleix la condició (1.5) relativa a la invariància temporal de la funció de distribució d'ordre $n$ qualsevol. En moltes situacions reals, però, a l'hora de modelar un fenomen aleatori mitjançant un procés estocàstic, es té accés a observar únicament una o varies realitzacions temporals del fenomen que s'estudia, i, comprovar la condició (1.5) no és factible. Convé, doncs, disposar d'un concepte d'estacionarietat més feble que pugui ser més fàcil d'usar en les aplicacions. Això ens porta, recollint les propietats expressades en (1.8) i (1.10), a la definició següent:

**Definició 1.19** *Un procés estocàstic $X(t)$ és estacionari en sentit ampli si:*

1. *El seu valor mitjà és una funció constant,*

$$m_X(t) = m_X.$$

2. *La seva funció d'autocorrelació depèn només de la separació temporal entre els instants considerats,*

$$R_X(t, t+\tau) = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau)) = R_X(\tau).$$

*Exemple 1.20*
Demostrem que l'oscil·lació aleatòria $X(t) = A\cos(2\pi ft) + B\sin(2\pi ft)$, on $A$ i $B$ són variables aleatòries i $f \in \mathbb{R}$, és un procés estocàstic estacionari en sentit ampli si i només si $A$ i $B$ són incorrelades, tenen valor mitjà 0 i tenen igual variància.

(a) Estudiem, en primer lloc, la suficiència de la condició. Suposem, doncs:

$$\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0, \quad \mathrm{E}(AB) = 0, \quad \mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(B^2) = \sigma^2. \tag{1.11}$$

Tenim:

$$\begin{aligned} m_X(t) = \mathrm{E}(X(t)) &= \mathrm{E}(A\cos(2\pi ft) + B\sin(2\pi ft)) \\ &= \mathrm{E}(A)\cos(2\pi ft) + \mathrm{E}(B)\sin(2\pi ft) = 0. \end{aligned}$$

Hem comprovat, així, el caràcter constant amb el temps de la funció valor mitjà. Calculem ara la funció d'autocorrelació:

$$\begin{aligned}
R_X(t, t+\tau) &= \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau)) \\
&= \mathrm{E}((A\cos(2\pi f t) + B\sin(2\pi f t))(A\cos(2\pi f(t+\tau)) \\
&+ B\sin(2\pi f(t+\tau)))) = \mathrm{E}\left(\frac{A^2}{2}(\cos 2\pi f\tau) + \cos(2\pi f(2t+\tau))\right. \\
&+ \frac{B^2}{2}(\cos 2\pi f\tau) - \cos(2\pi f(2t+\tau)) \\
&+ \frac{AB}{2}(-\sin 2\pi f\tau) + \sin(2\pi f(2t+\tau)) \\
&\left.+ \frac{AB}{2}(\sin 2\pi f\tau) + \sin(2\pi f(2t+\tau))\right) \\
&= \sigma^2\cos(2\pi f\tau) + \mathrm{E}(AB)\sin(2\pi f(2t+\tau)) = \sigma^2\cos(2\pi f\tau).
\end{aligned}$$

Per tant,

$$R_X(\tau) = \sigma^2\cos(2\pi f\tau),$$

i el procés és estacionari en sentit ampli.

(b) Comprovem ara la necessitat de la condició (1.11) per tal que el procés sigui estacionari en sentit ampli. Suposem, doncs, que $X(t)$ té valor mitjà constant $m_X$ i funció d'autocorrelació $R_X(\tau)$. Com que

$$m_X(t) = \mathrm{E}(A)\cos(2\pi f t) + \mathrm{E}(B)\sin(2\pi f t) = m_X,$$

tenim

$$m_X(0) = \mathrm{E}(A), \quad m_X\left(\frac{1}{4f}\right) = \mathrm{E}(B),$$
$$m_X\left(\frac{1}{2f}\right) = -\mathrm{E}(A), \quad m_X\left(\frac{3}{4f}\right) = -\mathrm{E}(B),$$

d'on es dedueix

$$\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0.$$

La potència mitjana del procés (constant amb el temps) és $\mathrm{E}(X^2(t)) = R_X(0)$, i per tant,

$$\mathrm{E}(X^2(0)) = \mathrm{E}(A^2), \quad \mathrm{E}\left(X^2\left(\frac{1}{4f}\right)\right) = \mathrm{E}(B^2),$$

i, així:

$$\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(B^2) = \sigma^2.$$

Finalment, tenint en compte els càlculs anteriors,

$$\mathrm{E}(X(t)X(t+\tau)) = \sigma^2\cos(2\pi f\tau) + \mathrm{E}(AB)\sin(2\pi f(2t+\tau)),$$

i si aquesta funció ha de dependre només de $\tau$, s'ha de complir $\mathrm{E}(AB) = 0 = \mathrm{E}(A)\mathrm{E}(B)$, d'on es desprén que $A$ i $B$ són variables aleatòries incorrelades.

□

Naturalment, per a processos de temps discret, podem reescriure la Definició 1.19 de la forma següent:

**Definició 1.21** *Una seqüència aleatòria $X[n]$ és estacionària en sentit ampli si:*

1. *El seu valor mitjà és constant, és a dir, $m_X[n] = m_X[0]$, per a tot $n$.*
2. *L'autocorrelació $R_X[n, n+k] \equiv R[k]$ depèn, per a tot $n$, només de $k$.*

Per exemple, el soroll blanc discutit als Exemples 1.4 i 1.15 constitueix una seqüència aleatòria estacionària.

### 1.5.3 Processos cicloestacionaris

**Definició 1.22** *Si les propietats estocàstiques del procés $X(t)$ no varien sota desplaçaments temporals múltiples d'un cert període $T$, és a dir, si els processos*

$$X(t), X(t+T), X(t+2T), \ldots, X(t+nT), \ldots$$

*són probabilísticament iguals, es diu que el procés és cicloestacionari en sentit estricte i període $T$.*

Per les mateixes raons esmentades en parlar d'estacionarietat en sentit estricte, en moltes aplicacions interessa considerar una definició més feble de cicloestacionarietat.

**Definició 1.23** *Direm que el procés $X(t)$ és cicloestacionari en sentit ampli i període $T$ si:*

$$m_X(t) = m_X(t+T), \quad \textit{per a tot } t, \tag{1.12}$$

*i*

$$R_X(t_1+T, t_2+T) = R_X(t_1, t_2), \quad \textit{per a tot } t_1 \textit{ i } t_2. \tag{1.13}$$

Tot procés cicloestacionari en sentit estricte ho és també en sentit ampli.

Si en un procés cicloestacionari fem aleatori l'origen de temps, aleshores obtenim un nou procés que és estacionari en sentit ampli. En efecte, sigui $S$ una variable aleatòria uniforme en $[0, T]$, independent del procés cicloestacionari $X(t)$, i considerem $Y(t) = X(t-S)$. Calculem, en primer lloc, la funció valor mitjà del nou procés $Y(t)$:

$$m_Y(t) = \mathrm{E}(Y(t)) = \mathrm{E}(X(t-S)) = \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X(t-S) \mid S)\right).$$

Però

$$\mathrm{E}(X(t-S) \mid S = s) = \mathrm{E}(X(t-s)) = m_X(t-s),$$

on s'ha usat la independència entre $X(t)$ i $S$. Per tant,

$$\begin{aligned} m_Y(t) = \mathrm{E}(m_X(t-S)) &= \int_{-\infty}^{\infty} m_X(t-s) f_S(s)\, ds = \frac{1}{T}\int_0^T m_X(t-s)\, ds \\ &= \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} m_X(u)\, du = \frac{1}{T}\int_0^T m_X(t)\, dt = m_Y, \end{aligned} \tag{1.14}$$

on hem aplicat la condició (1.12) referent a la periodicitat de la funció $m_X(t)$. Vegem, doncs, que la funció valor mitjà de $Y(t)$ és constant i és igual al valor mitjà temporal, en un període, de la funció $m_X(t)$. D'altra banda, per l'autocorrelació tenim:

$$R_Y(t, t+\tau) = \mathrm{E}(Y(t)Y(t+\tau)) = \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X(t-S)X(t+\tau-S) \mid S)\right).$$

Ara:

$$\mathrm{E}(X(t-S)X(t+\tau-S) \mid S = s) = \mathrm{E}(X(t-s)X(t+\tau-s)) = R_X(t-s, t+\tau-s).$$

Per tant,

$$\begin{aligned} R_Y(t, t+\tau) = \mathrm{E}(R_X(t-s, t+\tau-s)) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t-s, t+\tau-s) f_S(s)\, ds \\ \frac{1}{T}\int_0^T R_X(t-s, t+\tau-s)\, ds &= \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} R_X(u, u+\tau)\, du \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T R_X(t, t+\tau)\, dt = R_Y(\tau). \end{aligned} \tag{1.15}$$

i l'autocorrelació de $Y(t)$ depèn només de $\tau$. Hem demostrat, doncs, el resultat següent:

**Teorema 1.24** *Sigui $X(t)$ un procés cicloestacionari de període $T$. Si $S$ és una variable aleatòria uniforme en $[0, T]$, independent de $X(t)$, aleshores el procés $Y(t) = X(t-S)$ és estacionari en sentit ampli i:*

$$m_Y = \frac{1}{T}\int_0^T m_X(t)\, dt,$$

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T R_X(t, t+\tau)\, dt.$$

## 1.6 Processos complexos

En certes aplicacions a l'enginyeria elèctrica resulta convenient generalitzar la definició de procés estocàstic per tal de permetre valors complexos. En primer lloc, vegem aquesta generalització per a variables aleatòries.

**Definició 1.25** *Una variable aleatòria complexa és una aplicació $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $Z(\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$, essent $X$ i $Y$ són variables aleatòries reals.*

Naturalment, la descripció probabilística de $Z$ equival a la descripció probabilística de la variable aleatòria bidimensional $(X, Y)$.

L'esperança de $Z = X + jY$ es defineix com:

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X) + j\mathrm{E}(Y),$$

mentre que la seva variància és:

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}\left((Z - m_Z)\overline{(Z - m_Z)}\right) = \mathrm{E}(|Z|^2) - |m_Z|^2,$$

on $m_Z = \mathrm{E}(Z)$. La covariància de dues variables aleatòries complexes $Z$ i $T$ es defineix com:

$$\mathrm{Cov}(Z, T) = \mathrm{E}\left((Z - m_Z)\overline{(T - m_T)}\right) = \mathrm{E}\left(Z\overline{T}\right) - m_Z\overline{m_T}.$$

D'altra banda, un *procés estocàstic bidimensional* $(X(t), Y(t))$ està constituït per dos processos $X(t)$ i $Y(t)$ i queda probabilísticament determinat per l'estadística conjunta de les variables aleatòries

$$X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n), Y(t_1'), Y(t_2'), \ldots, Y(t_m'),$$

per a tot $n, m \geq 1$ i per a tot $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ i $(t_1', t_2', \ldots, t_m')$.

Podem donar ara la definició de procés amb valors complexos.

**Definició 1.26** *Un procés estocàstic complex $Z(t)$ és una aplicació*

$$\begin{aligned} Z : R_t \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (t, \omega) &\mapsto Z(t, \omega), \end{aligned}$$

*tal que $X(t) = \mathrm{Re}(Z(t))$ i $Y(t) = \mathrm{Im}(Z(t))$ són processos reals.*

L'estadística del procés complex $Z(t) = X(t) + jY(t)$ és la del procés bidimensional $(X(t), Y(t))$ (o el que és equivalent, l'estadística conjunta dels processos reals corresponents a la part real i imaginària de $Z(t)$).

La funció valor mitjà de $Z(t)$ és:

$$\begin{aligned} m_Z(t) &= \mathrm{E}(Z(t)) \\ &= \mathrm{E}(X(t) + jY(t)) = \mathrm{E}(X(t)) + j\mathrm{E}(Y(t)) = m_X(t) + jm_Y(t), \end{aligned}$$

i la funció d'autocorrelació es defineix ara com:

$$R_Z(t_1, t_2) = \mathrm{E}\left(Z(t_1)\overline{Z(t_2)}\right).$$

La potència mitjana del procés val $R_Z(t,t) = \mathrm{E}\left(|Z(t)|^2\right)$, i la funció d'autocovariància és:

$$\begin{aligned} C_Z(t_1, t_2) = \mathrm{E}&\left((Z(t_1) - m_Z(t_1))\overline{(Z(t_2) - m_Z(t_2))}\right) \\ &= R_Z(t_1, t_2) - m_Z(t_1)\overline{m_Z(t_2)}. \end{aligned}$$

Els conceptes d'estacionarietat en sentit estricte i en sentit ampli es defineixen de la mateixa manera que en el cas real. La funció d'autocorrelació d'un procés complex estacionari té simetria hermitiana. En efecte,

$$\begin{aligned} R_Z(-\tau) &= \mathrm{E}\left(Z(t)\overline{Z(t-\tau)}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(Z(t+\tau)\overline{Z(t)}\right) = \overline{\mathrm{E}\left(Z(t)\overline{Z(t+\tau)}\right)} = \overline{R_Z(\tau)}. \end{aligned}$$

*Exemple 1.27*
Considereu el procés complex $Z(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i\, e^{j2\pi f_i t}$, on $A_1$, $A_2$, …, $A_n$, són variables aleatòries complexes, incorrelades dos a dos, amb valor mitjà 0 i variàncies $\sigma_i^2$, $i = 1, \ldots, n$.

Tenim:

$$m_Z(t) = \mathrm{E}(Z(t)) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\, e^{j2\pi f_i t}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(A_i)\, e^{j2\pi f_i t} = 0.$$

També,

$$\begin{aligned} R_Z(t, t+\tau) &= \mathrm{E}\left(Z(t)\overline{Z(t+\tau)}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_i\overline{A_j}\, e^{j2\pi f_i t} e^{-j2\pi f_j (t+\tau)}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}(A_i\overline{A_j})\, e^{j2\pi f_i t} e^{-j2\pi f_j (t+\tau)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(|A_i|^2\right)\, e^{-j2\pi f_i \tau} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\, e^{-j2\pi f_i \tau}. \end{aligned}$$

En aquest càlcul hem tingut en compte que $\mathrm{E}\left(A_i\overline{A_j}\right) = 0$, $i \neq j$, per ser $A_i$ i $A_j$ variables aleatòries incorrelades de valor mitjà 0. D'altra banda, $\mathrm{E}(|A_i|^2)$ és la variància $\sigma_i^2$ de la variable aleatòria $A_i$. Observeu que $Z(t)$ és estacionari en sentit ampli i que $R_Z(-\tau) = \overline{R_Z(\tau)}$. □

# Capítol 2

# Alguns Processos Importants a l'Enginyeria

## 2.1 El procés de Poisson

Considereu un sistema que dóna servei a una població de usuaris, els quals hi arriben de manera independent en instants aleatoris de temps d'un cert interval $I$, de tal forma que, per a cada usuari, l'instant d'arribada al sistema és una variable aleatòria uniforme en $I$. Si $s$ és la longitud de $I$, la probabilitat $p$ que un usuari determinat arribi al sistema durant un subinterval $I_t \subset I$, de longitud $t$, val $t/s$. Sigui $n$ el nombre total d'usuaris i $N_t$ el nombre dels que arriben al sistema durant $I_t$. Com que les arribades es produeixen de forma independent, la variable aleatòria $N_t$ és binomial de paràmetres $n$ i $p$:

$$\mathrm{P}(N_t = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{t}{s}\right)^k \left(1 - \frac{t}{s}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Per a valors grans de $n$ i $s$, la funció de probabilitat anterior serà aproximadament de Poisson. En efecte, si $n$ i $s$ tendeixen a infinit de forma que el nombre $n/s$ d'usuaris que arriben per unitat de temps tendeixi a un valor constant $\mu$, podem aplicar el teorema de Poisson ja que

$$n \to \infty, \quad p = \frac{t}{s} \to 0, \quad np = \frac{n}{s}\, t \to \mu t,$$

obtenint:

$$\mathrm{P}(N_t = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{t}{s}\right)^k \left(1 - \frac{t}{s}\right)^{n-k} \to e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

És a dir, en el límit, la variable aleatòria $N_t$ segueix una llei de Poisson de paràmetre $\lambda = \mu t$. En particular, si $I_t = (0, t]$, $N_t \equiv X(t)$ compta el nombre d'usuaris que han arribat al sistema fins a l'instant $t$ (prenent

$X(0) = 0$). El procés estocàstic $X(t)$ obtingut així s'anomena *procés de Poisson* de *taxa* $\mu$. Es tracta d'un procés continu en el temps i discret en estats amb funció de probabilitat de primer ordre donada per:

$$\mathrm{P}(X(t) = k) = e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.1}$$

És a dir, per a cada $t \in (0, \infty)$, $X(t)$ és una variable aleatòria de Poisson de paràmetre $\lambda = \mu t$. La Figura 2.1 mostra una possible realització del procés.

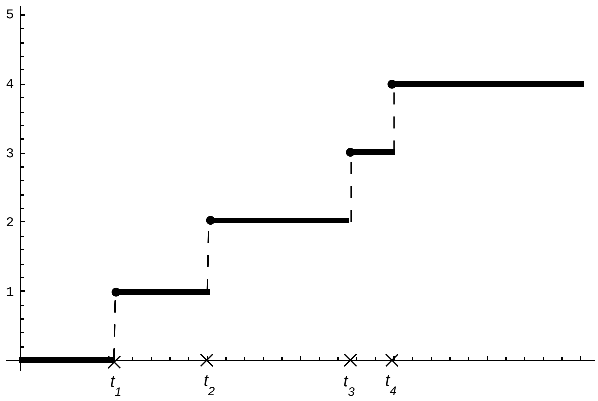


Figura 2.1: Una realització del procés de Poisson

En general, si $t_1 < t_2$, la diferència $X(t_2) - X(t_1)$ ens compta el nombre d'arribades que s'han produït en $(t_1, t_2]$. D'acord amb les consideracions anteriors, $X(t_2) - X(t_1)$ és una variable aleatòria de Poisson de paràmetre $\lambda = \mu(t_2 - t_1)$:

$$\mathrm{P}(X(t_2) - X(t_1) = k) = e^{-\mu(t_2-t_1)}\frac{(\mu(t_2 - t_1))^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

### 2.1.1 Funció de probabilitat de primer ordre

Vegem una deducció alternativa de la funció de probabilitat de primer ordre d'un procés de Poisson que s'obté a partir de tres hipòtesis simples referents a les propietats estocàstiques intrínseques del procés. Com abans, $X(t)$ compta el nombre d'usuaris que han arribat al sistema fins a l'instant $t$, essent $X(0) = 0$. Per $I_{\Delta t}$ denotem un subinterval de temps de longitud $\Delta t$.

Les hipòtesis són les següents:

1. $\mathrm{P}(\text{arribi 1 usuari durant } I_{\Delta t}) = \mu\Delta t + o(\Delta t)$.

   És a dir, la probabilitat que arribi exactament un usuari en un subinterval de longitud $\Delta t$ la suposem essencialment proporcional a $\Delta t$, essent el paràmetre $\mu$ la constant de proporcionalitat.

Noteu que:

$$\mu = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{P}(\text{arribi 1 usuari durant } I_{\Delta t})}{\Delta t}.$$

2. $\mathrm{P}(\text{arribi més de 1 usuari durant } I_{\Delta t}) = o(\Delta t)$.

   La probabilitat que arribin dos o més usuaris durant un mateix subinterval de temps de longitud $\Delta t$ és negligible en front de la probabilitat que n'arribi exactament un.

3. Si $I_A$ i $I_B$ són intervals de temps disjunts, les variables aleatòries $X_A$ i $X_B$ que compten el nombre d'usuaris que arriben durant $X_A$ i $X_B$, respectivament, són independents.

Les hipòtesis 1 i 2 impliquen que les dues úniques probabilitats significatives relatives al nombre d'usuaris que arriben al sistema durant $I_{\Delta t}$ són:

$$\mathrm{P}(\text{arribi 1 usuari durant } I_{\Delta t}) \approx \mu \Delta t,$$

i

$$\mathrm{P}(\text{no arribi cap usuari durant } I_{\Delta t}) \approx 1 - \mu \Delta t.$$

Determinem, en primer lloc, la probabilitat $\mathrm{P}(X(t) = 0)$ que, fins a l'instant $t$, encara no hagi arribat cap usuari al sistema. Tenim:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X(t+\Delta t) = 0) &= \mathrm{P}(X(t) = 0, \text{no arribi cap usuari en } (t, t+\Delta t]) \\ &= \mathrm{P}(X(t) = 0)\ \mathrm{P}(\text{no arribi cap usuari en } (t, t+\Delta t]) \\ &= \mathrm{P}(X(t) = 0)(1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)).\end{aligned} \tag{2.2}$$

En la formulació anterior s'ha usat el fet que els esdeveniments $\{X(t) = 0\}$ i "no arribi cap usuari en $(t, t+\Delta t]$" són independents perquè involucren als intervals disjunts $(0, t]$ i $(t, t+\Delta t]$ (hipòtesi 3). Si denotem $\mathrm{P}(X(t) = 0)$ per $g_0(t)$, l'equació incremental anterior es pot escriure com:

$$g_0(t+\Delta t) = g_0(t)(1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)).$$

Per tant,

$$\frac{g_0(t+\Delta t) - g_0(t)}{\Delta t} = g_0(t)\left(-\mu + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right).$$

Fent $\Delta t \to 0$, i tenint en compte que $\lim_{\Delta t \to 0} o(\Delta t)/\Delta t = 0$, obtenim una equació diferencial ordinària de primer ordre (lineal, de coeficients constants i homogènia) per a la funció $g_0(t)$:

$$g_0'(t) + \mu g_0(t) = 0, \quad t > 0. \tag{2.3}$$

D'altra banda, la condició inicial que hem d'imposar a $g_0(t)$ és:

$$g_0(0) = \mathrm{P}(X(0) = 0) = 1, \tag{2.4}$$

ja que suposem $X(0) = 0$ (en l'instant inicial encara no ha arribat cap usuari). La solució d'aquest problema de valor inicial és la funció

$$g_0(t) = \mathrm{P}(X(t) = 0) = e^{-\mu t}.$$

Així, la probabilitat que fins a l'instant $t$ encara no hagi arribat cap usuari al sistema decreix exponencialment amb el temps.

Per tal de trobar l'expressió de

$$g_k(t) = \mathrm{P}(X(t) = k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

procedim de manera similar.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X(t+\Delta t) = k) = \mathrm{P}(X(t) = k, &\text{no arribi cap usuari en } (t, t+\Delta t]) \\ + P(X(t) = k-1, &\text{arribi 1 usuari en } (t, t+\Delta t]) \\ &+ \sum_{i=2}^{k} P(X(t) = k-i, \text{arribin } i \text{ usuaris en } (t, t+\Delta t]).\end{aligned}$$

Tenint en compte les hipòtesis 1,2 i 3 tenim:

$$g_k(t+\Delta t) = g_k(t)(1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)) + g_{k-1}(t)\mu\Delta t + o(\Delta t).$$

Dividint per $\Delta t$ i fent $\Delta t \to 0$ obtenim un sistema recurrent d'equacions diferencials (de primer ordre, lineals i de coeficients constants):

$$g_k'(t) + \mu g_k(t) = \mu g_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.5}$$

on les condicions inicials que s'han de considerar són ara:

$$g_k(0) = \mathrm{P}(X(0) = k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots\ . \tag{2.6}$$

El mètode de la transformació de Laplace ens permet resoldre fàcilment aquest sistema. Sigui $G_k(s)$ la transformada de Laplace de la funció $g_k(t)$. Transformant (2.5) i tenint en compte les condicions inicials (2.6) tenim:

$$(s+\mu)G_k(s) = \mu G_{k-1}(s),$$

d'on

$$G_k(s) = \frac{\mu}{s+\mu} G_{k-1}(s) = \ldots = \left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)^k G_0(s) = \frac{\mu^k}{(s+\mu)^{k+1}}.$$

Invertint la transformació trobem:

$$g_k(t) = \mathrm{P}(X(t) = k) = e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^k}{k!}.$$

### 2.1.2 Valor mitjà i funció d'autocorrelació

La variable aleatòria $X(t)$ obtinguda d'un procés de Poisson de taxa $\mu$ és, per a cada $t \in (0, \infty)$, una variable aleatòria de Poisson de paràmetre $\mu t$. Per tant,

**Teorema 2.1** *La funció valor mitjà d'un procés de Poisson de taxa μ val:*

$$m_X(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mu t.$$

El nombre mitjà d'usuaris que arriben al sistema fins a l'instant $t$ creix linealment amb $t$, essent $\mu$ el factor de proporcionalitat. Aquest resultat ens proporciona una interpretació alternativa d'aquest paràmetre:

$$\mu = \frac{m_X(t)}{t}.$$

Així, $\mu$ correspon al nombre mitjà d'usuaris que, per unitat de temps, arriben al sistema, és a dir, $\mu$ ens dóna la *taxa* d'arribada d'usuaris. Noteu que el procés de Poisson no és estacionari, ni tant sols en sentit ampli.

Determinem $R_X(t_1, t_2)$. Suposem, en primer lloc, $t_1 < t_2$.

$$\begin{aligned}
R_X(t_1,t_2) &= \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = \mathrm{E}\left(X(t_1)\left(X(t_1) + (X(t_2) - X(t_1))\right)\right) \\
&= \mathrm{E}(X^2(t_1)) + \mathrm{E}\left(X(t_1)(X(t_2) - X(t_1))\right) \\
&= (\mu t_1)^2 + \mu t_1 + \mathrm{E}(X(t_1))\mathrm{E}((X(t_2) - X(t_1))) \\
&= (\mu t_1)^2 + \mu t_1 + \mu t_1\, \mu(t_2 - t_1) = \mu t_1 + \mu^2 t_1 t_2. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

En la deducció anterior s'ha tingut en compte que

$$\mathrm{E}(X^2(t_1)) = m^2_{X(t_1)} + \sigma^2_{X(t_1)} = (\mu t_1)^2 + \mu t_1, \qquad (2.8)$$

i que les variables aleatòries $X(t_1)$ i $X(t_2) - X(t_1)$ són independents perquè involucren als intervals disjunts $(0, t_1]$ i $(t_1, t_2]$. En general, com que $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2, t_1)$ i (2.7) esdevé (2.8) quan $t_1 = t_2$, podem formular el resultat següent:

**Teorema 2.2** *La funció d'autocorrelació d'un procés de Poisson de taxa $\mu$ és:*

$$R_X(t_1, t_2) = \mu \min(t_1, t_2) + \mu^2 t_1 t_2. \qquad (2.9)$$

### 2.1.3 Estadística de les transicions

Quina llei de probabilitat segueix el temps aleatori $T$ transcorregut entre dues transicions consecutives d'un procés de Poisson (i.e., entre dues arribades consecutives al sistema) ? Diem $t^\star$ a l'instant en què s'ha produït la transició a partir de la qual comencem a comptar $T$. Si $t > 0$ tenim:

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= \mathrm{P}(T \le t) = \mathrm{P}(\text{almenys 1 transició en } (t^\star, t^\star + t]) \\
&= 1 - P(\text{cap transició en } (t^\star, t^\star + t]) = 1 - e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^0}{0!} = 1 - e^{-\mu t}.
\end{aligned}$$

(Naturalment, si $t < 0$, $F_T(t) = \mathrm{P}(T \le t) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0$.)

**Teorema 2.3** *El temps aleatori transcorregut entre dues transicions consecutives d'un procés de Poisson de taxa $\mu$ és una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\mu$.*

De forma més general, si $T_n$ és el temps transcorregut des d'una transició determinada fins que es produeix la $n$-èsima transició següent ($n+1$ transicions consecutives), tenim:

$$\begin{aligned} F_{T_n}(t) &= \mathrm{P}(T_n \le t) = \mathrm{P}(\text{almenys } n \text{ transicions en } (t^\star, t^\star + t]) \\ &= 1 - \mathrm{P}(\text{menys de } n \text{ transicions en } (t^\star, t^\star + t]) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Derivant aquesta expressió obtenim la de la funció de densitat de probabilitat de $T_n$.

**Teorema 2.4** *El temps aleatori transcorregut entre $n+1$ transicions consecutives d'un procés de Poisson de taxa $\mu$ és una variable aleatòria amb densitat de probabilitat:*

$$f_{T_n}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \mu e^{-\mu t} \dfrac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t > 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Aquesta funció densitat correspon a una suma de $n$ variables aleatòries exponencials de paràmetre $\mu$, independents, en consonància amb el fet que el temps entre dues transicions consecutives és exponencial.

Recíprocament:

**Teorema 2.5** *Siguin $T_1$, $T_2$, ..., $T_n$, ..., variables aleatòries exponencials de paràmetre $\mu$, independents. Si*

$$\mathcal{I}_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.11}$$

*aleshores l'estadística dels "instants aleatoris" $\mathcal{I}_n$, definits per l'equació anterior, segueix una distribució de Poisson.*

**Demostració.**

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(k \text{ instants aleatoris } \mathcal{I}_n \text{ en } (0, t]) = \mathrm{P}(\mathcal{I}_k \le t, \mathcal{I}_{k+1} > t) \\ &= \mathrm{P}(\mathcal{I}_k \le t, \mathcal{I}_k + T_{k+1} > t) = \mathrm{P}\left((\mathcal{I}_k, T_{k+1}) \in D\right), \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

on $D$ és la regió

$$D = \{(s, \tau) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < s < t, \tau > t - s\}.$$

Tenint en compte la independència de $\mathcal{I}_k$ i $T_{k+1}$ ($\mathcal{I}_k$ depèn només de $T_1$, $T_2$, ..., $T_k$) tenim:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left((\mathcal{T}_k, T_{k+1}) \in D\right) &= \iint_D f_{\mathcal{T}_k}(s) f_{T_{k+1}}(\tau)\, ds d\tau \\
&= \int_0^t \mu e^{-\mu s}\, \frac{(\mu s)^{k-1}}{(k-1)!}\, \left(\int_{t-s}^{\infty} \mu e^{-\mu\tau}\, d\tau\right)\, ds \\
&= \int_0^t \mu e^{-\mu s}\, \frac{(\mu s)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\mu(t-s)}\, ds \\
&= \int_0^t \mu \frac{(\mu s)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\mu t}\, ds = e^{-\mu t}\, \frac{(\mu t)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

D'altra banda,

$$\mathrm{P}(\text{ cap instant aleatori en } (0,t]) = \mathrm{P}(T_1 > t) = e^{-\mu t}.$$

Per tant, el procés $X(t)$ que compta el nombre instants aleatoris en $(0,t]$, definits per les sumes (2.11), és un procés de Poisson de taxa $\mu$. □

Una altre propietat interessant de les transicions en un procés de Poisson és la següent: suposeu que en $(0,t]$ s'ha produït exactament una transició en l'instant $T$. Aleshores, la variable aleatòria $T$ es distribueix uniformement entre 0 i $t$. En efecte, si $\tau \in (0,t]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T \le \tau \mid X(t) = 1) &= \frac{\mathrm{P}(T \le \tau, X(t) = 1)}{\mathrm{P}(X(t) = 1)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(X(\tau) = 1, X(t) - X(\tau) = 0)}{\mathrm{P}(X(t) = 1)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(X(\tau) = 1)\, \mathrm{P}(X(t) - X(\tau) = 0)}{\mathrm{P}(X(t) = 1)} = \frac{\mu\tau e^{-\mu\tau}\, e^{-\mu(t-\tau)}}{\mu t e^{-\mu t}} = \frac{\tau}{t}.
\end{aligned}$$

A l'exemple següent es discuteix la generalització d'aquesta propietat.

*Exemple 2.6*
En un computador, la unitat de procés sol·licita servei a la memòria en instants aleatoris de temps distribuïts segons una estadística de Poisson (i.e. el nombre de sol·licituds $X(t)$ en $(0,t]$ és un procés de Poisson). El nombre mitjà de serveis sol·licitats per unitat de temps es $\mu$. Si en $(0,t]$ s'han sol·licitat $n$ serveis ($n \ge 1$), calculeu la probabilitat que en $(0,\tau]$, $0 < \tau < t$, se n'hagin sol·licitat $k$.

Hem de calcular $\mathrm{P}(X(\tau) = k \mid X(t) = n)$. Si $k > n$, aquesta probabilitat és trivialment igual a zero. Suposem, doncs, $0 \leq k \leq n$.

$$
\begin{aligned}
P(X(\tau) = k \mid X(t) = n) &= \frac{P(X(\tau) = k, X(t) = n)}{P(X(t) = n)} \\
&= \frac{P(X(\tau) = k)\, P(X(t) - X(\tau) = n - k)}{P(X(t) = n)} \\
&= \frac{(e^{-\mu\tau}(\mu\tau)^k/k!)\,(e^{-\mu(t-\tau)}(\mu(t-\tau))^{n-k}/(n-k)!)}{e^{-\mu t}(\mu t)^n/n!} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{\tau}{t}\right)^k\left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

Així, la probabilitat buscada segueix una llei binomial de paràmetres $n$ i $p = \tau/t$. □

## 2.2 Impulsos de Poisson

Sigui $X(t)$ un procés de Poisson de taxa $\mu$. Operant formalment, la seva derivada $Y(t) = X'(t)$ es pot expressar com:

$$
Y(t) = \sum_k \delta(t - t_k),
$$

on els valors $t_k$ corresponen als instants aleatoris en què es produeixen les transicions de $X(t)$. Cada realització de $Y(t)$ és una funció generalitzada tipus "tren de deltes" en què les funcions delta de Dirac es localitzen aleatòriament en el temps d'acord amb una estadística de Poisson. $Y(t)$ s'anomena procés *impulsos de Poisson (de taxa $\mu$)* i és útil a l'hora de modelar un soroll impulsiu.

El valor mitjà del procés impulsos de Poisson val:

$$
\begin{aligned}
m_Y(t) = E(Y(t)) = E(X'(t)) &= E\left(\lim_{h\to 0}\frac{X(t+h) - X(t)}{h}\right) \\
= \lim_{h\to 0} E\left(\frac{X(t+h) - X(t)}{h}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{m_X(t+h) - m_X(t)}{h} = \mu. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Pel que fa referència a la funció d'autocorrelació, tenim:

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1, t_2) &= E(Y(t_1)Y(t_2)) \\
&= \lim_{h\to 0} E\left(\frac{X(t_1+h) - X(t_1)}{h} \cdot \frac{X(t_2+h) - X(t_2)}{h}\right), \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

on, com en el càlcul de l'esperança, hem intercanviat els operadors E i lim. Però,

$$
\begin{aligned}
&E\left(\frac{(X(t_1+h) - X(t_1))(X(t_2+h) - X(t_2))}{h^2}\right) \\
&= \frac{R_X(t_1+h, t_2+h) - R_X(t_1, t_2+h) - R_X(t_1+h, t_2) + R_X(t_1, t_2)}{h^2}. \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

Suposant $t_1 < t_2$ i tenint en compte l'expressió de l'autocorrelació d'un procés de Poisson de taxa $\mu$ obtenim:

$$R_X(t_1+h,t_2+h) = \mu(t_1+h) + \mu^2(t_1+h)(t_2+h),$$
$$R_X(t_1,t_2+h) = \mu t_1 + \mu^2 t_1(t_2+h),$$
$$R_X(t_1+h,t_2) = \begin{cases} \mu(t_1+h) + \mu^2(t_1+h)t_2, & t_1+h \le t_2 \\ \mu t_2 + \mu^2(t_1+h)t_2, & t_1+h > t_2 \end{cases},$$

i

$$R_X(t_1,t_2) = \mu t_1 + \mu^2 t_1 t_2.$$

Substituint aquests resultats a l'equació (2.14):

$$\mathrm{E}\left(\frac{(X(t_1+h)-X(t_1))(X(t_2+h)-X(t_2))}{h^2}\right) = \begin{cases} \mu^2, & t_1+h \le t_2 \\ \mu^2 + \dfrac{\mu}{h} - \mu\,\dfrac{t_2-t_1}{h^2}, & t_1+h > t_2 \end{cases}.$$

En general, per a $t_1$ i $t_2$ arbitraris:

$$\frac{\mathrm{E}\left((X(t_1+h)-X(t_1))(X(t_2+h)-X(t_2))\right)}{h^2} = \mu^2 + \mu g_h(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1,$$

on

$$g_h(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{h} - \dfrac{\tau}{h^2}, & |\tau| < h \\ 0, & |\tau| \ge h \end{cases}.$$

La funció $g_h(\tau)$ és un pols triangular d'amplada $2h$, alçària $1/h$ i àrea unitària. Per tant, formalment:

$$\lim_{h\to 0} g_h(\tau) = \delta(\tau).$$

Finalment, portant aquests resultats a (2.13) obtenim que l'autocorrelació de $Y(t)$ depèn només de $\tau$ i val:

$$R_Y(\tau) = \mu^2 + \mu\delta(\tau). \tag{2.15}$$

Recollint els resultat anteriors:

**Teorema 2.7** *El procés impulsos de Poisson de taxa $\mu$ és estacionari en sentit ampli, i:*

$$m_Y(t) = \mu,$$
$$R_Y(\tau) = \mu^2 + \mu\delta(\tau).$$

## 2.3 El senyal telegràfic

Volem estudiar, a continuació, el model probabilístic d'un senyal binari en què les transicions entre estats es produeixen en instants aleatoris de temps d'acord amb una estadística de Poisson. Aquest model és interessant a l'hora de considerar senyals binaris asíncrons.

Sigui $N(t)$ un procés de Poisson de taxa $\mu$ i $X(t) = (-1)^{N(t)}$, és a dir,

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{si en } (0,t] \text{ s'han produït un nombre parell de transicions,} \\ -1, & \text{si en } (0,t] \text{ s'han produït un nombre senar de transicions.} \end{cases}$$

Per definició, prenem $X(0) = 1$. Aquest procés estocàstic s'anomena *senyal telegràfic pseudoaleatori (amb paràmetre $\mu$).*

Com que $X(t)$ és discret en estats (només tenim els estats 1 i -1), podem calcular fàcilment la seva funció de probabilitat de primer ordre.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X(t) = 1\right) &= \mathrm{P}(\text{nombre parell de transicions en } (0,t]) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}\left(2k \text{ transicions en } (0,t]\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{2k}}{(2k)!} \\ &= e^{-\mu t} \cosh(\mu t) = \frac{1 + e^{-2\mu t}}{2}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Anàlogament,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X(t) = -1\right) &= \mathrm{P}(\text{nombre senar de transicions en } (0,t]) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}\left(2k+1 \text{ transicions en } (0,t]\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= e^{-\mu t} \sinh(\mu t) = \frac{1 - e^{-2\mu t}}{2}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Noteu que $P(X(0) = 1) = 1$ i $P(X(0) = -1) = 0$, d'acord amb el fet que $X(0) = 1$. A més a més,

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\left(X(t) = 1\right) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\left(X(t) = -1\right) = \frac{1}{2}.$$

Aquest resultat té la interpretació que, per a temps gran, el sistema ja no guarda memòria del seu estat inicial i, per tant, cada un dels dos estats possibles té la mateixa probabilitat de ser l'estat observat a l'instant $t$. La funció de probabilitat de primer ordre és, doncs, "asimptòticament" estacionària.

Ara podem calcular la funció valor mitjà:

$$m_X(t) = P(X(t) = 1) - P(X(t) = -1) = e^{-2\mu t}.$$

El valor mitjà de $X(t)$ decreix exponencialment cap a 0, sortint del valor inicial $m_X(0) = \mathrm{E}(X(0)) = 1$. (Recordeu la observació referent a l'evolució temporal de la funció de probabilitat de primer ordre.)

Calculem, a continuació, la funció d'autocorrelació del procés. Suposem $t_1 < t_2$ i sigui $\tau = t_2 - t_1$. Tenim:

$$\begin{aligned} &R_X(t_1, t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) \\ &= \mathrm{E}(X(t_2)|X(t_1) = 1)\mathrm{P}(X(t_1) = 1) - \mathrm{E}(X(t_2)|X(t_1) = -1)\mathrm{P}(X(t_1) = -1). \end{aligned}$$

Però:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X(t_2)|X(t_1) = 1) &= \mathrm{P}(X(t_2) = 1|X(t_1) = 1) - \mathrm{P}(X(t_2) = -1|X(t_1) = 1) \\ &= \frac{1 + e^{-2\mu\tau}}{2} - \frac{1 - e^{-2\mu\tau}}{2} = e^{-2\mu\tau}, \end{aligned}$$

atès que, calculant com a (2.16) i (2.17):

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(X(t_2) = 1|X(t_1) = 1) \\ &\qquad = \mathrm{P}(\text{nombre parell de transicions en } (t_1, t_1 + \tau]) = \frac{1 + e^{-2\mu\tau}}{2}, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(X(t_2) = -1|X(t_1) = 1) \\ &\qquad = \mathrm{P}(\text{nombre senar de transicions en } (t_1, t_1 + \tau]) = \frac{1 - e^{-2\mu\tau}}{2}. \end{aligned}$$

Anàlogament,

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(X(t_2)|X(t_1) = -1) \\ &\qquad = \mathrm{P}(X(t_2) = 1|X(t_1) = -1) - \mathrm{P}(X(t_2) = -1|X(t_1) = -1) \\ &\qquad = \frac{1 - e^{-2\mu\tau}}{2} - \frac{1 + e^{-2\mu\tau}}{2} = -e^{-2\mu\tau}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$R_X(t_1, t_2) = e^{-2\mu\tau} \left(\mathrm{P}(X(t_1) = 1) + \mathrm{P}(X(t_1) = -1)\right) = e^{-2\mu\tau}.$$

En general, per a $t_1$ i $t_2$ arbitraris, tindrem:

$$R_X(t_1, t_2) \equiv R_X(\tau) = e^{-2\mu|\tau|}.$$

Veiem, doncs, que l'autocorrelació $R_X(t_1, t_2)$ del senyal telegràfic pseudoaleatori depèn només de la separació $\tau$ entre els instants $t_1$ i $t_2$ considerats. Tenint en compte el comportament de la funció valor mitjà $m_X(t)$, podríem dir que $X(t)$ és un procés "asimptòticament" estacionari en sentit ampli.

De fet, la no estacionarietat de $X(t)$ es deguda a que, per a $t$ proper a 0, el procés encara "recorda" els seu estat inicial $X(0) = 1$. Si prenguéssim aleatòriament aquest estat inicial, permetent que fos 1 o -1 amb igual probabilitat, és d'esperar que el nou procés obtingut fos estacionari en sentit ampli. Aquestes consideracions ens porten a la definició següent: sigui $X(t)$ un senyal telegràfic pseudoaleatori (de paràmetre $\mu$) i $A$ una variable aleatòria independent del procés $X(t)$ (és a dir, les variables aleatòries $A$ i $X(t)$ són independents per a tot $t$) tal que: $\mathrm{P}(A = 1) = \mathrm{P}(A = -1) = 1/2$. Definim

$$Y(t) = A\,X(t),$$

i anomenem al procés $Y(t)$ obtingut així *senyal telegràfic aleatori (de paràmetre $\mu$*.

Comprovem que, efectivament, $Y(t)$ és estacionari en sentit ampli. Tenim:

$$m_Y(t) = \mathrm{E}(AX(t)) = \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(X(t)) = 0,$$

ja que $A$ és independent de $X(t)$ i $\mathrm{E}(A) = 0$. Pel que fa a l'autocorrelació:

$$R_Y(\tau) = \mathrm{E}(A^2X(t)X(t+\tau)) = \mathrm{E}(A^2)\mathrm{E}(X(t)X(t+\tau)) = R_X(\tau) = e^{-2\mu|\tau|},$$

atès que $\mathrm{E}(A^2) = 1$.

**Teorema 2.8** *El senyal telegràfic aleatori de paràmetre $\mu$ és un procés estacionari en sentit ampli, amb funció valor mitjà*

$$m_Y = 0,$$

*i autocorrelació*

$$R_Y(\tau) = e^{-2\mu|\tau|}.$$

A l'exemple següent es considera una generalització del senyal telegràfic.

*Exemple 2.9*
En un cert instant, un sistema està en un de dos estats possibles, $S_0$ i $S_1$. Quan el sistema entra a l'estat $S_0$, hi continua durant un temps aleatori modelat per una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\mu$; i quan entra a $S_1$, el temps que hi està és també exponencial, però de paràmetre $\lambda$. Sigui $X(t)$ el procés estocàstic binari que ens indica l'estat en que es troba el sistema en l'instant $t$, és a dir, $X(t) = i$ si l'estat és $S_i$, $i = 0, 1$. Volem trobar la funció de probabilitat de primer ordre de $X(t)$.

Deduïm, en primer lloc, una propietat interessant de les variables aleatòries exponencials. Sigui, per exemple, $T$ el temps que el sistema roman en l'estat $S_0$ des de l'instant que hi entra fins que commuta a $S_1$, i calculem la probabilitat de l'esdeveniment $\{T \le t + \Delta t\}$ condicionada per $\{T > t\}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T \le t + \Delta t \mid T > t) &= \frac{\mathrm{P}(t < T \le t + \Delta t)}{\mathrm{P}(T > t)} = \frac{F_T(t+\Delta t) - F_T(t)}{1 - F_T(t)} \\ &= \frac{e^{-\mu t} - e^{-\mu(t+\Delta t)}}{e^{-\mu t}} = 1 - e^{-\mu\Delta t} = \mu\Delta t + o(\Delta t).\end{aligned}$$

És a dir, si a l'instant $t$ el sistema encara es troba a l'estat $S_0$, llavors la probabilitat que la transició a l'altre estat es produeixi durant $(t, t+\Delta t]$ val essencialment $\mu\Delta t$, si l'increment $\Delta t$ és petit. (Compareu aquesta propietat amb la primera de les hipòtesis subjacents al procés de Poisson.)

Calculem ara $\mathrm{P}(X(t) = 0)$. Suposarem que en $t = 0$ el sistema comença amb probabilitat 1 en un dels dos estats possibles, per exemple $S_0$. Tenint en compte la propietat que s'acaba de deduir podem escriure l'equació incremental següent:

$$\mathrm{P}(X(t+\Delta t) = 0) = \mathrm{P}(X(t) = 0)(1-\mu\Delta t+o(\Delta t))+P(X(t) = 1)(\lambda\Delta t+o(\Delta t)).$$

Denotant $p_0(t) = \mathrm{P}(X(t) = 0)$, $p_1(t) = \mathrm{P}(X(t) = 1)$, fent $\Delta t \to 0$, i tenint en compte que $\lim_{t\to 0}(o(\Delta t)/\Delta t) = 0$, obtenim l'equació diferencial:

$$p_0'(t) = -\mu p_0(t) + \lambda p_1(t), \quad t > 0.$$

Com que $p_0(t) + p_1(t) = 1$, tenim:

$$p_0'(t) + (\mu + \lambda)p_0(t) = \lambda, \quad t > 0,$$

amb la condició inicial:

$$p_0(0) = \mathrm{P}(X(0) = 0) = 1.$$

La solució d'aquesta equació diferencial és:

$$p_0(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} + \frac{\mu}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t},$$

i, per tant,

$$p_1(t) = 1 - p_0(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} - \frac{\mu}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}.$$

Vegeu la Figura 2.2.

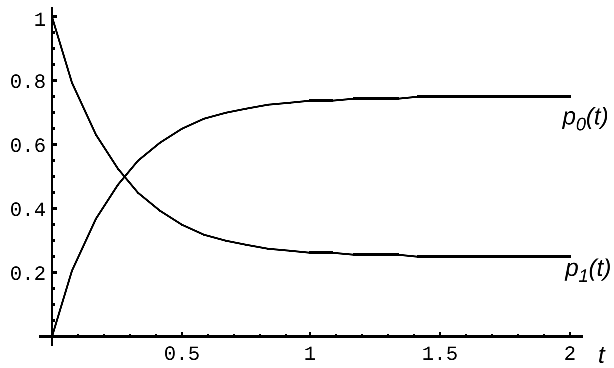


Figura 2.2: Les probabilitats $p_0(t)$ i $p_1(t)$ per $\lambda = 1$ i $\mu = 3$

Observeu com, per a $t$ gran, la funció de probabilitat que hem obtingut esdevé estacionària:

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}, \qquad \lim_{t\to\infty} p_1(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}.$$

Noteu també que el senyal telegràfic pseudoaleatori estudiat en aquesta secció correspon al cas $\mu = \lambda$ de l'exemple. □

## 2.4 El senyal binari aleatori

Considereu ara un senyal binari $X(t)$ en què cada estat és igualment probable i en el qual les transicions entre estats poden tenir lloc només en instants de la forma $t_n = nT$, $n \in \mathbb{Z}$, múltiples d'un període bàsic $T$ fixat. Suposeu també que els estats del procés es prenen de forma independent, és a dir, si $(n-1)T \le t_1 < nT$ i $(m-1)T \le t_2 < mT$, $n \neq m$, aleshores les variables aleatòries $X(t_1)$ i $X(t_2)$ són independents. Fàcilment veiem que la funció de probabilitat de primer ordre de $X(t)$ val:

$$\mathrm{P}(X(t) = 1) = \mathrm{P}(X(t) = -1) = \frac{1}{2},$$

i, per tant,

$$m_X(t) = 0.$$

També fàcilment deduïm:

$$R_X(t_1,t_2) = \mathrm{E}\left(X(t_1)X(t_2)\right) = \begin{cases} 1, & (n-1)T \le t_1, t_2 < nT \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Noteu que $X(t)$ no és estacionari, ni tant sols en sentit ampli. Ara, la no estacionarietat del procés és conseqüència de tenir "marcats" els instants $nT$ on es poden produir les transicions, i això fa que l'autocorrelació depengui de la posició absoluta dels instants $t_1$ i $t_2$. Diem que $X(t)$ és un *senyal binari pseudoaleatori (de període $T$)*.

En canvi, les propietats probabilístiques de $X(t)$ són invariants sota desplaçaments de l'origen de temps múltiples del període bàsic $T$, és a dir, $X(t)$ és un procés cicloestacionari de període $T$. Per tant, si considerem

$$Y(t) = X(t-S),$$

amb $S$ una variable aleatòria uniforme en $[0,T]$ i independent de $X(t)$, obtindrem un procés estacionari en sentit ampli (vegeu la Secció 1.5.3). El procés $Y(t)$ s'anomena *senyal binari aleatori (de període $T$)*.

**Teorema 2.10** *El senyal binari aleatori de període $T$ és un procés estacionari en sentit ampli amb funció valor mitjà*

$$m_Y = 0,$$

*i autocorrelació*

$$R_Y(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{T}, & |\tau| < T \\ 0, & |\tau| > T \end{cases}$$

**Demostració.** Aplicant les fórmules (1.14) i (1.15) tenim:

$$m_Y = \frac{1}{T}\int_0^T m_X(t)\,dt = 0,$$

i

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T R_X(t, t+\tau)\,dt.$$

Per calcular aquesta última integral suposem $\tau > 0$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T R_X(t, t+\tau)\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{T-\tau} dt = 1 - \dfrac{\tau}{T}, & \tau < T \\ 0 & \tau > T \end{cases}$$

Finalment, tenint en compte la paritat de $R_Y(\tau)$:

$$R_Y(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{T}, & |\tau| < T \\ 0, & |\tau| > T \end{cases}$$

La correlació entre les variables aleatòries $X(t_1)$ i $X(t_2)$ decreix linealment amb la separació entre $t_1$ i $t_2$. Quan aquesta separació és més gran que $T$, ja són incorrelades. Vegeu la Figura 2.3.

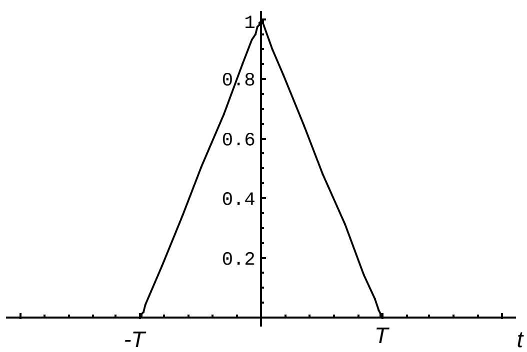


Figura 2.3: $R_Y(\tau)$

□

## 2.5 Passejades aleatòries i moviment brownià

En aquesta secció estudiem el moviment aleatori en el pla $(t, x)$ d'una partícula que sortint (en $t = 0$) de l'origen de coordenades, recorre verticalment cada $\tau$ unitats de temps o bé $s$ unitats de longitud ($s > 0$) amb probabilitat $1/2$, o bé, també amb probabilitat $1/2$, $-s$ unitats de longitud. És a dir, si en $t = n\tau$, la partícula ocupa la posició $(n\tau, ks)$, llavors en $t = (n+1)\tau$ ocuparà o bé la posició $((n+1)\tau, (k+1)s)$ o bé la posició $((n+1)\tau, (k-1)s)$, amb probabilitat $1/2$ cada una d'elles. L'increment o decrement que es produeix en l'instant $n\tau$ el suposem independent dels altres que tenen lloc en els instants $m\tau$, $m \neq n$.

La seqüència d'ordenades $\{X(\tau), X(2\tau), \ldots, X(n\tau), \ldots\}$ corresponent a les posicions successives $(n\tau, X(n\tau))$ que la partícula va ocupant en els instant $n\tau$, és la realització d'un procés estocàstic $X(t)$ discret en el temps i discret en estats. (Vegeu l'Exemple 1.5.) Noteu que per a un valor donat de $n$, $X(n\tau)$ només pot ser

$$X(n\tau) = rs, \quad r = -n, -n+2, \ldots, n-2, n.$$

En efecte, si fins a l'instant $n\tau$ s'han produït $k$ desplaçaments verticals positius (i, per tant, $n-k$ desplaçaments verticals negatius) tindrem:

$$rs = ks - (n-k)s = (2k-n)s, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Observeu que els enters $r$ i $n$ han de tenir la mateixa paritat. Com que el nombre de desplaçaments verticals que s'han produït fins a l'instant $n\tau$ segueix una llei de probabilitat binomial de paràmetres $n$ i $1/2$, tenim:

$$\mathrm{P}\left(X(n\tau) = rs\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{(n+r)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Per exemple, si $n$ és parell, la probabilitat que la partícula estigui, en l'instant $n\tau$, situada sobre l'eix d'abscisses val:

$$\mathrm{P}\left(X(n\tau) = 0\right) = \binom{n}{n/2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n!}{(n/2)!^2}\left(\frac{1}{2}\right)^n. \tag{2.18}$$

Aquesta probabilitat tendeix a 0 quan $n$ creix, tal com es veu usant l'aproximació de Stirling: $m! \sim \sqrt{2\pi m}\,(m/e)^m$. En efecte, substituint aquesta aproximació a (2.18) obtenim

$$\mathrm{P}\left(X(n\tau) = 0\right) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}}. \tag{2.19}$$

L'esperança i la variància de la variable aleatòria $X(n\tau)$ es determinen fàcilment si posem

$$X(n\tau) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

essent les $X_i$ variables aleatòries de Bernoulli, independents, tals que $\mathrm{P}(X_i = -s) = \mathrm{P}(X_i = s) = 1/2$. Per tant,

$$\mathrm{E}(X(n\tau)) = 0, \qquad \mathrm{E}(X^2(n\tau)) = ns^2. \tag{2.20}$$

Noteu que la desviació típica de l'ordenada de la posició de la partícula en l'instant $n\tau$ val $\sqrt{n}s$.

Per a $n$ gran podem fer ús de l'aproximació gaussiana de la llei binomial per tal d'estimar el valor de $\mathrm{P}(X(n\tau) = rs)$. O bé, de forma equivalent, pel Teorema Central de Límit sabem que la funció de distribució de probabilitat de la variable aleatòria

$$\frac{X(n\tau)}{\sqrt{n}s}$$

convergeix, quan $n$ tendeix a infinit, cap a la funció de distribució d'una variable aleatòria $N(0,1)$. Per tant,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X(n\tau) = rs) &= \mathrm{P}((r-2)s < X(n\tau) \leq rs) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{(r-2)}{\sqrt{n}} < \frac{X(n\tau)}{\sqrt{n}s} \leq \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \\
&\approx \int_{(r-2)/\sqrt{n}}^{r/\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} e^{-r^2/(2n)}
\end{aligned}$$

Observeu que, per a $r = 0$, retrobem el valor obtingut prèviament a (2.19).

Fixem ara un valor $t > 0$ i sigui $\tau = t/n$. Volem estudiar el procés límit $W(t)$, obtingut a partir de la passejada aleatòria $X(n\tau) = X(t)$, quan $n \to \infty$ (i, per tant, $\tau \to 0$). Però, observeu que per (2.20),

$$\mathrm{E}(X^2(n\tau)) = \mathrm{E}(X^2(t)) = ns^2 = t\frac{s^2}{\tau},$$

i, per tant, per tal d'obtenir un moment de segon ordre finit convé prendre $s^2$ proporcional a $\tau$. Suposem, doncs, $s^2 = \alpha\tau = \alpha t/n$. El procés límit $W(t)$ obtingut sota aquestes condicions s'anomena *moviment brownià*.

Tenint en compte (2.20) i operant formalment obtenim l'esperança i variància de $W(t)$:

$$m_W(t) = \mathrm{E}(W(t)) = \mathrm{E}\left(\lim_{n\to\infty} X(t)\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X(t)) = 0.$$

$$\mathrm{E}\left(W^2(t)\right) = \mathrm{E}\left(\lim_{n\to\infty} X^2(t)\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(X^2(t)\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{\alpha t}{n} = \alpha t.$$

Pel Teorema Central del Límit, la variable aleatòria $W(t)$ és, per a cada $t$, gaussiana. Per tant, la funció densitat de primer ordre del moviment brownià és:

$$f_W(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}} e^{-x^2/(2\alpha t)}.$$

## 2.6 Processos gaussians

Moltes vegades, les variables aleatòries subjacents a un procés estocàstic són (com s'ha vist en el cas del moviment brownià) gaussianes. Aquest fet ens porta a considerar la definició següent:

**Definició 2.11** *Un procés estocàstic $X(t)$ és gaussià si les variables aleatòries $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_n)$, són conjuntament gaussianes per a tot $n \geq 1$ i per a tot $(t_1, t_2, \ldots t_n) \in R_t^n$.*

Com que l'estadística d'una variable aleatòria gaussiana $n$-dimensional queda totalment determinada pel coneixement dels moments conjunts de primer i segon ordre de les seves components, un procés gaussià quedarà probabilísticament determinat per les funcions $m_X(t)$ i $R_X(t_1, t_2)$, ja que són aquestes funcions les que contenent la informació d'aquests moments. Per exemple, la funció densitat de primer ordre d'un procés gaussià serà de la forma:

$$f_X(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, C_X(t,t)}} e^{-(x-m_X(t))^2/(2\,C_X(t,t))},$$

ja que $\sigma^2_{X(t)} = C_X(t,t)$.

El fet que la funció valor mitjà i la funció d'autocorrelació continguin tota la informació probabilística d'un procés gaussià implica l'important resultat següent:

**Teorema 2.12** *Si $X(t)$ és un procés estocàstic gaussià estacionari en sentit ampli, llavors ho és també en sentit estricte.*

# Capítol 3

# Processos Ergòdics

La informació sobre les propietats probabilístiques de la qual es disposa a l'hora d'estudiar un determinat senyal aleatori s'obté, a vegades, processant adequadament en el temps una o més realitzacions observades del procés estocàstic subjacent. En aquest sentit, quan les propietats estocàstiques d'un procés $X(t)$ es poden obtenir a partir d'una única realització temporal del mateix, es diu que $X(t)$ és un *procés ergòdic*. O de manera més restringida, quan un cert paràmetre de $X(t)$ es pot determinar processant una única realització temporal, diem que el procés és ergòdic en relació a aquest paràmetre. En aquest capítol estudiem l'ergodicitat en relació a les funcions valor mitjà i d'autocorrelació .

Comencem considerant la qüestió de com aplicar les operacions i conceptes usuals del càlcul (continuïtat, derivació, integració) a processos estocàstics.

## 3.1 Continuïtat, derivació i integració de processos

Podria semblar escaient dir que un procés estocàstic continu és aquell en que totes les realitzacions $X(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, són funcions contínues de $t$. En moltes aplicacions, però, aquesta definició estricta de continuïtat és massa restrictiva. Això ens porta a considerar una definició més feble:

**Definició 3.1** *Un procés estocàstic $X(t)$ és continu en mitjana quadràtica, en el punt $t$, si*

$$\mathrm{E}\left((X(t+\epsilon) - X(t))^2\right) \to 0 \quad quan \quad \epsilon \to 0.$$

Una condició suficient perquè $X(t)$ sigui continu en mitjana quadràtica, en el punt $t$, és que la seva funció d'autocorrelació $R_X(t_1, t_2)$ sigui continua (en el sentit habitual per a funcions de dues variables) en $(t, t)$. En efecte, si aquesta condició es compleix, es tindrà, quan $\epsilon \to 0$:

$$\mathrm{E}\left((X(t+\epsilon) - X(t))^2\right) = R_X(t+\epsilon, t+\epsilon) - 2R_X(t, t+\epsilon) + R_X(t,t) \to 0.$$

Recíprocament, es pot demostrar que la continuïtat en mitjana quadràtica de $X(t)$ en un punt $t$ implica la continuïtat de $R_X(t_1, t_2)$ en el punt $(t, t)$.

**Teorema 3.2** *Un procés estocàstic $X(t)$ és continu en mitjana quadràtica, en el punt $t$, si i només si la seva funció autocorrelació $R_X(t_1 t_2)$ és contínua en el punt $(t, t)$.*

Si l'autocorrelació del procés depèn només de $\tau = t_2 - t_1$, obtenim la interessant conclusió següent:

**Corol·lari 3.3** *Un procés estocàstic $X(t)$, estacionari en sentit ampli, és continu en mitjana quadràtica per a tot $t$, si i només si $R_X(\tau)$ és una funció continua en el punt $\tau = 0$.*

*Exemple 3.4*
L'oscil·lació aleatòria $X(t) = A\cos(2\pi f t) + B\sin(2\pi f t)$, on $A$ i $B$ són variables aleatòries incorrelades amb valor mitjà 0 i igual variància (vegeu l'Exemple 1.20), és un procés continu en mitjana quadràtica. En efecte, es tracta d'un procés estacionari en sentit ampli i la seva autocorrelació $R_X(\tau) = \sigma^2 \cos(2\pi f \tau)$ és una funció continua en $\tau = 0$. De fet, $X(t)$ és un procés continu en el sentit estricte que cada realització sigui una funció continua del temps. □

*Exemple 3.5*
Sigui $X(t)$ un procés de Poisson de taxa $\mu$. Encara que cada realització de $X(t)$ és una funció amb discontinuïtats de salt (en els instants aleatoris $t_i$ on es produeixen les transicions), el procés $X(t)$ és continu en mitjana quadràtica. En efecte, $R_X(t_1, t_2) = \mu \min(t_1, t_2) + \mu^2 t_1 t_2$, i tenim

$$\begin{aligned}
&|R_X(t+\epsilon_1, t+\epsilon_2) - R_X(t,t)| \\
&\qquad \le \mu|\min(t+\epsilon_1, t+\epsilon_2) - t| + \mu^2|(t+\epsilon_1)(t+\epsilon_2) - t^2| \\
&\le \mu\max(|\epsilon_1|, |\epsilon_2|) + \mu^2|t(\epsilon_1+\epsilon_2) + \epsilon_1\epsilon_2| \to 0, \quad \text{quan } |\epsilon_1|, |\epsilon_2| \to 0.
\end{aligned}$$

Així, la funció $R_X(t_1, t_2)$ és, per a tot $t$, continua en el punt $(t, t)$, d'on es desprèn la continuïtat en mitjana quadràtica. □

Per a les operacions de derivació i integració valen consideracions anàlogues. És a dir, més que imposar que cada realització del procés sigui una funció derivable o integrable, sol ser més útil definir aquests conceptes en el sentit de la mitjana quadràtica. Així,

**Definició 3.6** *El procés $X'(t)$ és la derivada en mitjana quadràtica del procés $X(t)$ si:*

$$\mathrm{E}\left(\left(\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-X'(t)\right)^2\right)\to 0 \ \ \textit{quan}\ h\to 0.$$

Per la derivació també es pot formular una condició necessària i suficient expressada a partir de la funció d'autocorrelació:

**Teorema 3.7** *$X(t)$ és un procés derivable en mitjana quadràtica en el punt $t$ si i només si $\partial^2 R_X(t_1,t_2)/\partial t_1 \partial t_2$ existeix en $(t,t)$.*

Pel que fa a la integració del procés $X(t)$ en un interval $[a,b]$ donat, sigui $a=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_n=b$ una partició d'aquest interval, i consideris la variable aleatòria $I_n$ obtinguda a partir de la suma de Riemann

$$I_n=\sum_{i=1}^{n} X(\tau_i)\,\Delta\tau_i,$$

on $\Delta\tau_i=\tau_i-\tau_{i-1}$.

**Definició 3.8** *Si $I$ és una variable aleatòria tal que*

$$\mathrm{E}\left((I_n-I)^2\right)\to 0 \ \ \textit{quan}\ n\to\infty,\ \max\Delta\tau_i\to 0, \tag{3.1}$$

*direm que $I$ és la integral en mitjana quadràtica de $X(t)$ en l'interval $[a,b]$, i escriurem*

$$I=\int_a^b X(t)\,dt.$$

Si $X$, $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$, ... són variables aleatòries que tenen moments de segon ordre finits, ($\mathrm{E}(X^2)<\infty$, $\mathrm{E}(X_n^2)<\infty$, $n\geq 1$), es diu que la successió $\{X_n\}$ *convergeix en mitjana quadràtica* cap a la variable aleatòria $X$ si $\mathrm{E}\left((X_n-X)^2\right)\to 0$ quan $n\to\infty$. Noteu, doncs, que la condició (3.1) equival a la convergència en mitjana quadràtica cap a $I$ de la successió $\{I_n\}$ de sumes de Riemann. Com en el cas de successions de nombres reals, es verifica per a successions de variables aleatòries el *criteri de convergència de Cauchy*: la successió $\{X_n\}$ convergeix en mitjana quadràtica si i només si $\mathrm{E}\left((X_n-X_m)^2\right)\to 0$ quan $n,m\to\infty$. Aquest criteri ens permet demostrar el resultat següent:

**Teorema 3.9** *Si la funció d'autocorrelació $R_X(t_1,t_2)$ del procés $X(t)$ és integrable en el rectangle $\{(t_1,t_2): a<t_1<b, a<t_2<b\}$, aleshores la integral en mitjana quadràtica de $X(t)$ en l'interval $[a,b]$ existeix.*

**Demostració.** Tenim $\mathrm{E}\left((I_n-I_m)^2\right) = \mathrm{E}(I_n^2) - 2\mathrm{E}(I_nI_m) +$

$\mathrm{E}(I_m^2)$. Però,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(I_n^2) &= \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X(\tau_i)\Delta\tau_i \cdot \sum_{j=1}^{n} X(\tau_j)\Delta\tau_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left(X(\tau_i)X(\tau_j)\right)\ \Delta\tau_i\Delta\tau_j\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_X(\tau_i,\tau_j)\ \Delta\tau_i\Delta\tau_j \to \int_a^b\int_a^b R_X(t_1,t_2)\ dt_1dt_2,\end{aligned}$$

quan $n \to \infty,\ \max\Delta t_i \to 0$. Anàlogament,

$$\mathrm{E}(I_m^2) \to \int_a^b\int_a^b R_X(t_1,t_2)\ dt_1dt_2,$$

i,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(I_nI_m) &= \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X(\tau_i)\Delta\tau_i \cdot \sum_{j=1}^{m} X(\tau_j)\Delta\tau_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_X(\tau_i,\tau_j)\ \Delta\tau_i\Delta\tau_j \to \int_a^b\int_a^b R_X(t_1,t_2)\ dt_1dt_2,\end{aligned}$$

quan $n,m \to \infty,\ \max(\Delta t_i,\Delta t_j) \to 0$. Per tant, $\mathrm{E}\left((I_n - I_m)^2\right) \to 0$ quan $n,n \to \infty$. □

L'esperança de la variable aleatòria $I = \int_a^b X(t)\ dt$ es pot calcular directament fent servir el fet que l'operador E actua linealment:

$$\mathrm{E}(I) = \mathrm{E}\left(\int_a^b X(t)\ dt\right) = \int_a^b \mathrm{E}(X(t))\ dt = \int_a^b m_X(t)\ dt.$$

També,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(I^2) &= \mathrm{E}\left(\int_a^b X(t_1)\ dt_1 \cdot \int_a^b X(t_2)\ dt_2\right)\\ &= \int_a^b\int_a^b \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2))\ dt_1dt_2 = \int_a^b\int_a^b R_X(t_1,t_2)\ dt_1dt_2,\end{aligned}$$

i

$$\mathrm{E}(I)^2 = \int_a^b m_X(t_1)\ dt_1 \cdot \int_a^b m_X(t_2)\ dt_2 = \int_a^b\int_a^b m_X(t_1)m_X(t_2)\ dt_1dt_2,$$

d'on deduïm l'expressió de la variància de $I$:

$$\sigma_I^2 = \mathrm{E}(I^2) - \mathrm{E}(I)^2 = \int_a^b\int_a^b C_X(t_1,t_2)\ dt_1dt_2. \qquad (3.2)$$

## 3.2 Ergodicitat en valor mitjà

Donat un procés estocàstic $X(t)$ —que suposarem definit per a $-\infty < t < \infty$ i estacionari almenys en sentit ampli— considerem la variable aleatòria

$$\mathcal{M}_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\,dt, \tag{3.3}$$

que correspon al *valor mitjà temporal*, calculat en l'interval $(-T,T)$, de $X(t)$. Quina és la informació que aquest valor mitjà temporal ens pot donar sobre les propietats probabilístiques del procés?

Per tal de respondre aquesta qüestió observem, en primer lloc, que l'esperança de $\mathcal{M}_T$ coincideix amb l'esperança $\mathrm{E}(X(t)) = m_X$ del procés (que és constant per ser $X(t)$ estacionari). En efecte,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathcal{M}_T) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\,dt\right)& \\ = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathrm{E}(X(t))\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} m_X\,dt = m_X.&\end{aligned}$$

Suposem ara que el procés estocàstic $X(t)$ és tal que la variància $\sigma_T^2$ de $\mathcal{M}_T$ tendeix a zero quan l'interval d'observació $(-T,T)$ es fa arbitràriament llarg. En aquesta situació tenim:

$$\lim_{T\to\infty}\mathrm{E}\left((\mathcal{M}_T - m_X)^2\right) = \lim_{T\to\infty}\mathrm{E}\left((\mathcal{M}_T - \mathrm{E}(\mathcal{M}_T))^2\right) = \lim_{T\to\infty}\sigma_T^2 = 0, \tag{3.4}$$

i, per tant, $\mathcal{M}_T$ és una variable aleatòria que convergeix en mitjana quadràtica (quan $T\to\infty$) cap al valor mitjà probabilístic $m_X$ del procés. Quan es dóna aquesta convergència del valor mitjà temporal $\mathcal{M}_T$ cap al valor mitjà probabilístic $m_X$, expressada a l'equació (3.4), es diu que $X(t)$ és ergòdic en valor mitjà.

**Definició 3.10** *El procés estocàstic $X(t)$ és ergòdic en valor mitjà (en el sentit de la mitjana quadràtica) si*

$$\lim_{T\to\infty}\mathrm{E}\left((\mathcal{M}_T - m_X)^2\right) = 0.$$

L'ergodicitat en valor mitjà és una propietat interessant a les aplicacions, doncs significa que a partir de l'observació d'una única realització temporal de $X(t)$ podem estimar el paràmetre probabilístic $m_X = \mathrm{E}(X(t))$ (que depèn de tot el conjunt de realitzacions possibles del procés) mitjançant el valor mitjà temporal $\mathcal{M}_T = 1/(2T)\int_{-T}^{T} X(t)\,dt$. L'estimació de $m_X$ per $\mathcal{M}_T$ serà tant "millor" com més llarg sigui l'interval $(-T,T)$ durant el qual s'observa la realització de $X(t)$. Insistint en aquest punt, noteu que, per la desigualtat de Chebyshev, tenim:

$$\mathrm{P}\left(|\mathcal{M}_T - m_X| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma_T^2}{\epsilon^2} \to 0 \qquad \text{quan } T\to\infty,$$

on $\epsilon > 0$ és arbitrari. Per tant, si $X(t)$ és ergòdic en valor mitjà, $\mathcal{M}_T$ també convergeix en probabilitat cap a $m_X$.

Estudiem, doncs, sota quines condicions la variància de $\mathcal{M}_T$ tendeix a zero. D'acord amb (3.2), $\sigma_T^2$ ve donada per:

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} C_X(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2.$$

Tenint en compte que $C_X(t_1, t_2) = C_X(t_2, t_1)$, la integral doble anterior resulta ser equivalent a:

$$\frac{1}{2T^2} \iint_D C_X(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2,$$

on $D = \{(t_1, t_2) : -T \le t_1 \le T,\ t_1 \le t_2 \le T\}$. Fent el canvi de variable

$$\tau = t_2 - t_1, \quad \rho = t_2,$$

obtenim:

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{2T^2} \iint_{D^\star} C_X(\tau)\, d\tau d\rho,$$

on $D^\star = \{(\tau, \rho) : 0 \le \tau \le 2T,\ \tau - T \le \rho \le T\}$. (Noteu que, per l'estacionarietat de $X(t)$, la funció d'autocovariància depèn només de la variable $\tau$.) Per tant,

$$\begin{aligned}
\sigma_T^2 &= \frac{1}{2T^2} \int_0^{2T} C_X(\tau) \left( \int_{\tau - T}^{T} d\rho \right) d\tau \\
&= \frac{1}{T} \int_0^{2T} C_X(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) d\tau = \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} C_X(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) d\tau,
\end{aligned}$$

on en l'última igualtat s'ha tingut en compte que $C_X(-\tau) = C_X(\tau)$.

Els càlculs anteriors ens permeten formular el teorema següent (canviant $2T$ per $T$ en l'integrant i en els límits d'integració):

**Teorema 3.11** *El procés $X(t)$ és ergòdic en valor mitjà si i només si:*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} C_X(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) d\tau = 0 \tag{3.5}$$

En la integral anterior, el factor $(1 - |\tau|/T)$ correspon a una finestra temporal triangular centrada a $t = 0$ i d'amplada $2T$.

*Exemple 3.12*
Demostrem que l'oscil·lació aleatòria $X(t) = A \cos(2\pi f t) + B \sin(2\pi f t)$, on $A$ i $B$ són variables aleatòries incorrelades de valor mitjà 0 i igual variància $\sigma^2$, és un procés ergòdic en valor mitjà.

En efecte, tal com s'ha vist a l'Exemple 1.20, tenim $m_X(t) = 0$ i $R_X(\tau) = \sigma^2 \cos(2\pi f\tau)$. Per tant,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} C_X(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) d\tau$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \sigma^2 \cos(2\pi f\tau) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = \lim_{T\to\infty} \frac{\sigma^2(1 - \cos(2\pi fT))}{(2\pi fT)^2} = 0,$$

i $X(t)$ és ergòdic en valor mitjà. □

No és difícil comprovar el resultat següent:

**Teorema 3.13** *Si* $\lim_{\tau\to\infty} C_X(\tau)$ *existeix, aleshores per tal que* $X(t)$ *sigui ergòdic en valor mitjà s'ha de complir:*

$$\lim_{\tau\to\infty} C_X(\tau) = 0.$$

Noteu que aquesta condició significa que les variables aleatòries $X(t)$ i $X(t+\tau)$ han de ser "asimptòticament" incorrelades per a $\tau$ gran. En efecte, si $C_X(\tau) \approx 0$, tenim

$$\mathrm{E}(X(t)X(t+\tau)) \approx m_X^2 = \mathrm{E}(X(t))\mathrm{E}(X(t+\tau)).$$

És una mica més difícil demostrar que, de fet, $\lim_{T\to\infty} \sigma_T^2 = 0$ si i només si $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} C_X(\tau) d\tau = 0$. Per tant, una versió equivalent de la condició necessària i suficient d'ergodicitat en valor mitjà la dóna el resultat següent:

**Teorema 3.14** *El procés* $X(t)$ *és ergòdic en valor mitjà si i només si*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} C_X(\tau) d\tau = 0 \tag{3.6}$$

A vegades convé interpretar la propietat d'ergodicitat en el sentit més fort de convergència amb probabilitat 1. Per tal de precisar aquesta qüestió, suposem que existeix un esdeveniment $N$, de probabilitat nulla, i una variable aleatòria $\mathcal{M}_X$ tals que, per a cada resultat $\omega \in \Omega \setminus N$, la realització $X(t;\omega)$ és integrable en $(-T,T)$ i $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t;\omega)\, dt = \mathcal{M}_X(\omega)$. En aquesta situació diem:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)\, dt = \mathcal{M}_X \quad \text{amb probabilitat 1.}$$

Noteu que la variable aleatòria $\mathcal{M}_X$ (que correspon al valor mitjà temporal de $X(t)$ observat en $(-\infty,\infty)$) és, amb probabilitat 1, el límit de $\mathcal{M}_T$ quan $T \to \infty$. Ara, però, $\mathcal{M}_T$ s'ha d'entendre com la variable aleatòria obtinguda calculant el valor mitjà temporal en $(-T,T)$ de cada realització $X(t,\omega)$, $\omega \in \Omega \setminus N$. L'esperança i la variància de $\mathcal{M}_X$ són, respectivament:

$$\mathrm{E}(\mathcal{M}_X) = \mathrm{E}\left(\lim_{T\to\infty} \mathcal{M}_T\right) = \lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\left(\mathcal{M}_T\right) = m_X,$$

$$\sigma^2_{\mathcal{M}_X} = \lim_{T\to\infty} \sigma^2_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} C_X(\tau)\left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) d\tau.$$

Així, la condició (3.5) del Teorema 3.11 resulta ser també una condició necessària i suficient per tal que el valor mitjà temporal $\mathcal{M}_X$ coincideixi (amb probabilitat 1) amb el valor mitjà probabilístic $m_X$, és a dir, per tal que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\, dt = m_X \quad \text{amb probabilitat 1.} \tag{3.7}$$

En efecte, si $\sigma^2_{\mathcal{M}_X} = 0$, llavors la dispersió de la variable aleatòria $\mathcal{M}_X$ al voltant del seu valor esperat $m_X$ és nul·la, és a dir $\mathrm{P}(\mathcal{M}_X = m_X) = 1$. I recíprocament, si $\mathrm{P}(\mathcal{M}_X = m_X) = 1$, aleshores $\sigma^2_{\mathcal{M}_X} = 0$. En conclusió, si $X(t)$ és ergòdic en valor mitjà a (amb probabilitat 1), l'expressió (3.7) ens permet obtenir de forma "quasi segura" el paràmetre $m_X$ a partir d'una única realització de $X(t)$.

El resultats següents formulen altres condicions suficients per tal que $X(t)$ sigui ergòdic en valor mitjà.

**Teorema 3.15** *Si*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C_X(\tau)|\, d\tau < \infty, \tag{3.8}$$

*aleshores* $X(t)$ *és ergòdic en valor mitjà.*

**Demostració.** Si (3.8) es compleix tenim:

$$\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} C_X(\tau)\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) d\tau\right| \le \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |C_X(\tau)| d\tau \to 0.$$

□

*Exemple 3.16*
El senyal telegràfic aleatori, discutit a la Secció 2.3, és ergòdic en valor mitjà ja que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C_X(\tau)|\, d\tau = 2\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-2\mu\tau}\, d\tau = \frac{1}{\mu} < \infty.$$

□

**Teorema 3.17** *Si*

$$C_X(0) < \infty \quad i \quad \lim_{\tau\to\infty} C_X(\tau) = 0,$$

*aleshores* $X(t)$ *és ergòdic en valor mitjà.*

**Demostració.** En efecte, donat $\epsilon$ existeix $a > 0$ tal que $|C_X(\tau)| < \epsilon$ si $\tau > a$. Per tant,

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} C_X(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) d\tau \right| \le \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |C_X(\tau)|\, d\tau$$
$$= \frac{1}{T} \int_{0}^{T} |C_X(\tau)|\, d\tau = \frac{1}{T} \int_{0}^{a} |C_X(\tau)|\, d\tau + \frac{1}{T} \int_{a}^{T} |C_X(\tau)|\, d\tau$$
$$\le C_X(0)\frac{a}{T} + \epsilon \to \epsilon \quad \text{si } T \to \infty.$$

Aleshores,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} C_X(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) d\tau = 0.$$

□

*Exemple 3.18*
El senyal binari aleatori de període $T$, discutit a la Secció 2.4, també és ergòdic en valor mitjà ja que $C_X(0) = 1$ i $C_X(\tau) = 0$ si $|\tau| > T$. □

### 3.2.1 Ergodicitat i la llei dèbil dels grans nombres

Quan $X[n]$ és un procés de temps discret o bé quan només tenim disponibles mostres $X[n] \equiv X(nT_s)$ d'un procés de temps continu $X(t)$, podem fer servir la mitjana aritmètica de les variables aleatòries $X[0]$, $X[1], \ldots, X[n-1]$,

$$\mathcal{M}_N = \frac{X[0] + X[1] + \cdots + X[N-1]}{N}, \tag{3.9}$$

per tal d'estimar el valor mitjà $m_X$ del procés. Observeu que (3.9) és la versió discreta del valor mitjà temporal $\mathcal{M}_T$ definit a (3.3) per a processos de temps continu. De fet, $\mathcal{M}_N$ és un estimador no esbiaixat de $m_X$ ja que:

$$\mathrm{E}(\mathcal{M}_N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{E}(X[n]) = \frac{1}{N} \cdot N m_X = m_X.$$

Com en el cas de temps continu, si la variància de la variable aleatòria $\mathcal{M}_N$ tendeix a zero quan $N \to \infty$, direm que el procés de temps discret $X[n]$ és *ergòdic en valor mitjà* (en el sentit de la mitjana quadràtica). Si aquest és el cas, $\mathcal{M}_N$ convergeix en mitjana quadràtica cap a

$m_X$, i, per tant, constituirà un bon estimador del paràmetre $m_X$. Tenim:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathcal{M}_N) &= \mathrm{E}((\mathcal{M}_N - m_X)^2) \\
&= \mathrm{E}\left(\left(\frac{X[0]-m_X}{N} + \cdots + \frac{X[N-1]-m_X}{N}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{E}\left((X[i]-m_X)\,(X[j]-m_X)\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} C_X[i-j] \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} (N-|n|)\,C_X[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)C_X[n].
\end{aligned}$$

Hem demostrat, doncs, la versió per a temps discret del Teorema 3.11

**Teorema 3.19** *El procés de temps discret $X[n]$ és ergòdic en valor mitjà si i només si:*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N-1}\sum_{n=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)C_X[n] = 0 \tag{3.10}$$

Quan la condició (3.10) es verifica, la desigualtat de Chebyshev implica:

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}\left(|\mathcal{M}_N - m_X| \geq \epsilon\right) = 0, \quad \text{per a tot } \epsilon > 0, \tag{3.11}$$

és a dir, la variable aleatòria $\mathcal{M}_N$ convergeix també en probabilitat cap a $m_X$. En aquest sentit, el Teorema 3.19 generalitza la llei dèbil dels gran nombres, la qual garanteix el resultat (3.11) quan les variables aleatòries $X[0]$, $X[1]$, ..., $X[n]$, ... són independents.

## 3.3 Ergodicitat en autocorrelació

De forma anàloga a com s'ha introduït el valor mitjà temporal, podem definir l'*autocorrelació temporal*, calculada en l'interval $(-T, T)$, d'un procés estacionari $X(t)$:

$$\mathcal{R}_X(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\,X(t+\tau)\,dt.$$

Per a cada valor fixat del desplaçament temporal $\tau$, l'esperança de la variable aleatòria $\mathcal{R}_X(\tau)$ coincideix amb l'autocorrelació estocàstica $R_X(\tau) = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau))$ (que és independent de $t$ per l'estacionarietat de $X(t)$). En efecte,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\mathcal{R}_X(\tau)\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\,X(t+\tau)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathrm{E}\left(X(t)\,X(t+\tau)\right)\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} R_X(\tau)\,dt = R_X(\tau).
\end{aligned}$$

Si la variància de $\mathcal{R}_X(\tau)$ tendeix a zero quan $T \to \infty$, llavors l'autocorrelació temporal convergeix, en mitjana quadràtica, cap a la funció d'autocorrelació estocàstica $R_X(\tau)$. Diem, en aquesta situació, que $X(t)$ és *ergòdic en autocorrelació*. Podem considerar $\mathcal{R}_X(\tau)$ com un estimador de $R_X(\tau)$ i, processant en el temps una única realització temporal de $X(t)$, es pot deduir la funció d'autocorrelació estocàstica $R_X(\tau)$, la qual depèn de tot el conjunt de resultats possibles de l'experiment aleatori, ja que es calcula com una esperança.

No formularem la condició necessària i suficient —anàloga a l'expressada en el Teorema 3.11 per al valor mitjà— per tal que $X(t)$ sigui ergòdic en autocorrelació. Observem, però, que si per a cada valor fixat de $\tau$, definim un nou procés

$$\Phi_\tau(t) = X(t)\, X(t+\tau),$$

aleshores l'esperança de $\Phi_\tau(t)$ és l'autocorrelació estocàstica de $X(t)$, mentre que el valor mitjà temporal de $\Phi_\tau(t)$ és l'autocorrelació temporal de $X(t)$. Per tant, la condició necessària i suficient per a que $X(t)$ sigui ergòdic en autocorrelació s'obté formulant la condició (3.5) per al procés $\Phi_\tau(t)$. Per formular aquesta condició necessitem, però, que $X(t)$ tingui un ordre d'estacionarietat almenys quatre.

Observeu, finalment, que si $X(t)$ és ergòdic en autocorrelació, la seva potència mitjana (constant en $t$) es pot calcular mitjançant el següent valor mitjà temporal:

$$\mathrm{E}(X^2(t)) = R_X(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X^2(t)\, dt.$$

# Capítol 4

# Densitat Espectral de Potència

## 4.1 Anàlisi espectral de processos estocàstics

Les propietats espectrals d'un senyal determinista $x(t)$ s'obtenen a partir de la seva transformada de Fourier $\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$. En particular, si $x(t)$ és un senyal d'energia finita (la funció $x(t)$ és de quadrat integrable, i.e. $x \in L^2(-\infty, \infty)$), el teorema de Parseval ens permet calcular l'energia $E_x$ associada al senyal $x(t)$ a partir del seu espectre $\hat{x}(f)$:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(f)|^2\, df.$$

Quan $x(t)$ no és d'energia finita però, en canvi, $x \in L^2(-T, T)$ per a cada $T > 0$, podem calcular la potència transportada pel senyal en cada interval de temps $(-T, T)$:

$$P_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t).$$

Per tal d'analitzar espectralment aquesta potència, considerem el senyal $x(t)$ restringit a l'interval $(-T, T)$. Sigui:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & -T < t < T \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

i $\widehat{x_T}(f)$ la seva transformada de Fourier. Com que

$$\int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{x_T}(f)|^2\, df,$$

tenim:

$$P_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{x_T}(f)|^2}{2T}\, df.$$

Així, la funció

$$G_T(f) = \frac{|\widehat{x_T}(f)|^2}{2T}$$

es pot interpretar com la densitat espectral de la potència del senyal truncat $x_T(t)$, ja que

$$P_T = \int_{-\infty}^{\infty} G_T(f)\, df.$$

A més, si $\lim_{T\to\infty} P_T$ existeix, direm que $x(t)$ és un *senyal de potència finita* i definirem el valor d'aquest límit com la potència $P_x$ associada al senyal, és a dir:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t).$$

Operant formalment, obtenim:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} P_T = \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_T(f)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} G_T(f)\, df.$$

Per tant, la funció

$$G_x(f) = \lim_{T\to\infty} G_T(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|\widehat{x_T}(f)|^2}{2T}$$

és la densitat espectral de la potència $P_x$ associada al senyal $x(t)$.

Per a un procés estocàstic $X(t)$ en què cada realització sigui un senyal de potència finita podem procedir de forma anàloga a com s'ha explicat per a senyals deterministes. Cada realització de $X(t)$, restringida a $(-T, T)$, té una densitat espectral $G_T(f) = |\widehat{X_T}(f)|^2/(2T)$. Ara, però, $G_T(f)$ és, per a cada freqüència $f$, una variable aleatòria, per la qual cosa sembla natural definir la densitat espectral de potència del procés $X(t)$ restringit a $(-T, T)$ com:

$$S_T(f) = \mathrm{E}(G_T(f)) = \frac{\mathrm{E}(|\widehat{X_T}(f)|^2)}{2T}.$$

Finalment, es defineix la *densitat espectral de potència* del procés estocàstic $X(t)$ com:

$$S_X(f) = \lim_{T\to\infty} S_T(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}(|\widehat{X_T}(f)|^2)}{2T}. \qquad (4.1)$$

Per exemple, si $X(t)$ és un procés estacionari amb potència mitjana $R_X(0)$, tenim:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, df &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}(|\widehat{X_T}(f)|^2)}{2T}\, df \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\, \mathrm{E}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{X_T}(f)|^2\, df\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\, \mathrm{E}\left(\int_{-T}^{T} X^2(t)\, dt\right) \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathrm{E}(X^2(t))\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} R_X(0)\, dt = R_X(0).\end{aligned}$$

Una conseqüència de la definició de $S_X(f)$ (vegeu (4.1)) és:

**Teorema 4.1** *$S_X(f)$ és una funció no negativa de la freqüència $f$.*

## 4.2 El teorema de Wiener-Khintchine

La densitat espectral de potència d'un procés estocàstic estacionari resulta ser la transformada de Fourier de la seva funció d'autocorrelació. Aquest resultat notable constitueix el teorema de Wiener-Khintchine.

**Teorema 4.2** *Sigui $X(t)$ un procés estacionari (en sentit ampli) amb funció d'autocorrelació $R_X(\tau)$ absolutament integrable. Per a tot $f$, el límit en (4.1) existeix, i es té:*

$$S_X(f) = \widehat{R_X}(\tau).$$

**Demostració.** Tenim

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(|\widehat{X_T}(f)|^2) &= \mathrm{E}\left(\left|\int_{-T}^{T} X(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt\right|^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\int_{-T}^{T} X(t_1)\, e^{-j2\pi f t_1}\, dt_1 \cdot \overline{\int_{-T}^{T} X(t_2)\, e^{-j2\pi f t_2}\, dt_2}\right) \\
&= \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2))\, e^{-j2\pi f(t_1-t_2)}\, dt_1 dt_2 \\
&= \iint_D R_X(t_1,t_2)\, e^{-j2\pi f(t_1-t_2)}\, dt_1 dt_2, \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

on $D = \{(t_1,t_2) : -T \le t_1 \le T, -T \le t_2 \le T\}$. Si a (4.2) fem el canvi $s = t_1$, $\tau = t_1 - t_2$ obtenim

$$\mathrm{E}(|\widehat{X_T}(f)|^2) = \iint_{D^\star} R_X(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, ds d\tau, \qquad (4.3)$$

on ara $D^\star = \{(s,\tau) : s - T \le \tau \le s + T, -T \le s \le T\}$. Calculant la integral (4.3) integrant primer respecte de la variable $s$ podem escriure:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(|\widehat{X_T}(f)|^2) &= \int_{-2T}^{0} R_X(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\left(\int_{-T}^{\tau+T} ds\right) d\tau \\
&\quad + \int_{0}^{2T} R_X(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\left(\int_{\tau-T}^{T} ds\right) d\tau \\
&= \int_{-2T}^{2T} R_X(\tau)(2T - |\tau|)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau.
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T}\mathrm{E}(|\widehat{X_T}(f)|^2) &= \int_{-2T}^{2T} R_X(\tau)\left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_T(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau, \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

on

$$R_T(\tau) = \begin{cases} R_X(\tau)\left(1 - \dfrac{|\tau|}{2T}\right), & |\tau| \le 2T \\ 0, & |\tau| > 2T \end{cases}$$

Com que $|R_T(\tau)| \le |R_X(\tau)|$ i la funció $R_X(\tau)$ és absolutament integrable, podem aplicar el teorema de la convergència dominada de Lebesgue:

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_T(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \lim_{T\to\infty} R_T(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau = \widehat{R_X}(\tau). \end{aligned}$$

Per tant, prenent a (4.4) el límit quan $T \to \infty$, veiem que existeix la densitat espectral de potència $S(f)$ i val:

$$S_X(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}(|\widehat{X_T}(f)|^2)}{2T} = \widehat{R_X}(\tau).$$

□

*Exemple 4.3*
La densitat espectral de potència del senyal telegràfic aleatori de paràmetre $\mu$ val:

$$S_X(f) = \widehat{R_X}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\mu|t|}\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \frac{\mu}{\mu^2 + \pi^2 f^2}$$

□

## 4.3 Sistemes lineals amb entrades estocàstiques

Un sistema caracteritzat per una transformació $\mathcal{T}$ s'anomena *lineal* si:

$$\mathcal{T}\left(\alpha x(t) + \beta y(t)\right) = \alpha \mathcal{T}\left(x(t)\right) + \beta \mathcal{T}\left(y(t)\right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

on $x(t)$ i $y(t)$ són funcions que pertanyen al conjunt $\mathcal{E}$ d'entrades admissibles al sistema. A més, el sistema és *invariant en el temps* si:

$$\mathcal{T}(x(t)) = z(t) \Longrightarrow \mathcal{T}(x(t - t')) = z(t - t'),$$

per a tot desplaçament $t'$ de l'origen de temps. La teoria dels sistemes lineals i invariants en el temps ens ensenya que la resposta $y(t)$ a una entrada $x(t)$ queda determinada per la funció *resposta a l'impuls* $h(t) = \mathcal{T}(\delta(t))$. En efecte, es té:

$$y(t) = \mathcal{T}(x(t)) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau)\, d\tau. \tag{4.5}$$

Quan $X(t)$ és un procés estocàstic tal que cadascuna de les seves possibles realitzacions $X(t,\omega)$ ($\omega \in \Omega$) pertany a $\mathcal{E}$, tenim:

$$Y(t,\omega) = \mathcal{T}\,(X(t,\omega)) = X(t,\omega) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau,\omega)h(\tau)\,d\tau;$$

és a dir, la sortida $Y(t)$ del sistema és també un procés estocàstic.

**Teorema 4.4** *Si* $Y(t) = \mathcal{T}(X(t))$*, aleshores* $m_Y(t) = \mathcal{T}(m_X(t))$*. Per tant,*

$$m_Y(t) = m_X(t) * h(t).$$

**Demostració.** El resultat és conseqüència de la linealitat de l'operador E. En efecte,

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= \mathrm{E}(Y(t)) = \mathrm{E}(X(t)*h(t)) = \mathrm{E}\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau)h(\tau)\,d\tau\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}(X(t-\tau))h(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} m_X(t-\tau))h(\tau)\,d\tau \\ &= m_X(t) * h(t) = \mathcal{T}(m_X(t)). \end{aligned}$$

□

*Exemple 4.5*
Considereu el sistema lineal i invariant en el temps definit per

$$\mathcal{T}(x(t)) = x'(t). \tag{4.6}$$

A la Secció 2.2 hem estudiat el procés impulsos de Poisson derivant (formalment) un procés de Poisson $X(t)$:

$$Y(t) = X'(t) = \sum_k \delta(t-t_k),$$

on els valors $t_k$ corresponen als instants aleatoris en què es produeixen les transicions de $X(t)$. El Teorema 4.4 implica:

$$m_Y(t) = \mathcal{T}(m_X(t)) = \frac{d}{dt}(\mu t) = \mu,$$

d'acord amb el resultat obtingut prèviament a (2.12). □

Per tal de calcular la funció d'autocorrelació del procés de sortida $Y(t) = \mathcal{T}(X(t))$ determinem, en primer lloc, la correlació creuada $R_{XY}(t_1,t_2)$ de $X(t)$ i $Y(t)$. Noteu que, per a $t_1$ fix, com a conseqüència de la linealitat de $\mathcal{T}$ tenim:

$$X(t_1)Y(t) = X(t_1)\mathcal{T}(X(t)) = \mathcal{T}(X(t_1)Y(t)),$$

i, per tant, pel Teorema 4.4:

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t) &= \mathrm{E}(X(t_1)Y(t)) = \mathrm{E}\left(\mathcal{T}(X(t_1)X(t))\right) \\ &= \mathcal{T}\left(\mathrm{E}(X(t_1)X(t))\right) = \mathcal{T}(R_X(t_1, t)). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Anàlogament, considerant $t_2$ fix:

$$Y(t)Y(t_2) = Y(t_2)\mathcal{T}(X(t)) = \mathcal{T}(X(t)Y(t_2)),$$

i:

$$\begin{aligned} R_Y(t, t_2) &= \mathrm{E}(Y(t)Y(t_2)) = \mathrm{E}\left(\mathcal{T}(X(t)Y(t_2))\right) \\ &= \mathcal{T}\left(\mathrm{E}(X(t)Y(t_2))\right) = \mathcal{T}(R_{XY}(t, t_2)). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Tenint en compte les equacions (4.7) i (4.8) i fent servir la caracterització de la sortida d'un sistema lineal i invariant en el temps mitjançant la resposta a l'impuls (vegeu (4.5), tenim:

**Teorema 4.6** *Si $Y(t) = \mathcal{T}(X(t))$, aleshores*

$$R_Y(t_1, t_2) = \mathcal{T}_1\left(\mathcal{T}_2\left(R_X(t_1, t_2)\right)\right),$$

*on $\mathcal{T}_i$ significa que la transformació $\mathcal{T}$ actua només respecte a $t_i$, $i = 1, 2$. Per tant,*

$$R_Y(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) * h(t_2) * h(t_1).$$

*Exemple 4.7*
Tornem a considerar, com a l'exemple anterior, el procés impulsos de Poisson $Y(t)$ com a sortida del sistema lineal (4.6) quan l'entrada és un procés de Poisson $X(t)$.

Com que $R_X(t_1, t_2) = \mu^2 t_1 t_2 + \mu \min(t_1, t_2)$ i

$$\min(t_1, t_2) = \begin{cases} t_1, & \text{si } t_1 < t_2 \\ t_2, & \text{altrament} \end{cases},$$

obtenim:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \mathcal{T}_2(R_X(t_1, t_2)) = \frac{\partial}{\partial t_2} R_X(t_1, t_2) = \mu^2 t_1 + \mu u(t_1 - t_2),$$

on $u(t)$ és la funció de Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}.$$

Per tant,

$$R_Y(t_1, t_2) = \mathcal{T}_1(R_{XY}(t_1, t_2)) = \frac{\partial}{\partial t_1} R_{XY}(t_1, t_2) = \mu^2 + \mu\delta(t_1 - t_2),$$

d'acord amb el resultat obtingut prèviament en (2.15) □

Quan el procés entrada al sistema és estacionari, els Teoremes 4.4 i 4.6 esdevenen:

**Teorema 4.8** *Si l'entrada $X(t)$ a un sistema lineal i invariant en el temps és un procés estacionari en sentit ampli, llavors el procés de sortida $Y(t) = \mathcal{T}(X(t))$ també és estacionari en sentit ampli i es compleix:*

$$\begin{aligned} m_Y &= \alpha m_X, \quad \textit{on } \alpha = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt, \\ R_Y(\tau) &= R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau). \end{aligned}$$

Fent us del teorema de convolució per a transformades de Fourier i del teorema de Wiener-Khintchine obtenim la versió espectral del Teorema 4.8:

**Teorema 4.9** *Sigui $\mathcal{T}$ un sistema lineal i invariant en el temps i $X(t)$ un procés estacionari en sentit ampli. Si $Y(t) = \mathcal{T}(X(t))$, llavors*

$$S_Y(f) = S_X(f)\ |H(f)|^2,$$

*on $H(f)$ és la transformada de Fourier de la resposta a l'impuls $h(t)$.*

*Exemple 4.10*
Volem determinar la densitat espectral de potència del procés

$$Y(t) = X(t) - X(t-T),$$

on $X(t)$ és un procés estacionari. Tenim:

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \mathrm{E}(Y(t)Y(t+\tau)) \\ &= \mathrm{E}\left((X(t) - X(t-T))\,(X(t+\tau) - X(t+\tau-T))\right) \\ &= 2R_X(\tau) - R_X(\tau - T) - R_X(\tau + T) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Així, pel teorema de Wiener-Khintchine i la propietat de desplaçament en el temps de la transformació de Fourier:

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= 2\ S_X(f) - S_X(f)\ e^{-j2\pi fT} - S_X(f)\ e^{j2\pi fT} \\ &= 2\ S_X(f)\,(1 - \cos(2\pi fT)) = 4\ S_X(f)\,(\sin(\pi fT))^2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Al resultat anterior hi podem arribar també aplicant el Teorema 4.9. En efecte, $Y(t)$ es pot interpretar com la sortida d'un sistema lineal i invariant en el temps amb funció resposta a l'impuls:

$$h(t) = \mathcal{T}(\delta(t)) = \delta(t) - \delta(t-T),$$

i, per tant,

$$H(f) = 1 - e^{-j2\pi fT}.$$

Així:

$$\begin{aligned} |H(f)|^2 &= \left(1 - e^{-j2\pi fT}\right)\left(1 - e^{j2\pi fT}\right) \\ &= 2\ (1 - \cos(2\pi fT)) = 4\ (\sin(\pi fT))^2. \end{aligned}$$

□

El Teorema 4.9 ens permet una justificació addicional a la interpretació de la funció $S_X(f)$ com una densitat espectral de potència. En efecte, podem interpretar la integral

$$\int_{f_1}^{f_2} S_X(f)\, df \tag{4.11}$$

com la potència mitjana del procés que trobaríem a la sortida d'un filtre passabanda ideal —tal que $|H(f)| = 1$ si $f \in [f_1, f_2]$ i $|H(f)| = 0$ altrament— quan a la seva entrada hi tenim $X(t)$, i, per tant, (4.11) ens dóna la potència transportada pel procés estocàstic $X(t)$ en la banda de freqüències $[f_1, f_2]$.