

## TÉCNICAS BIYECTIVAS: ENUMERACIÓN DE MAPAS.

JUANJO RUÉ

En estas notas vamos a utilizar los métodos antes descritos para hallar la enumeración de una familia combinatoria muy interesante: la familia de los mapas planos con raíz, en términos del número de aristas. Introduciremos asimismo el denominado *método cuadrático* para resolver ecuaciones con variables catalíticas. Finalmente, redemostraremos el resultado principal mediante el uso de técnicas biyectivas.

De manera más precisa, un *mapa* es grafo conexo y finito dibujado en la esfera, de tal manera que en esta representación las aristas del grafo no se cortan. Un mismo grafo puede dar lugar a mapas distintos según como se dibuje. En la definición de mapa asumimos que los grafos pueden tener aristas múltiples y también aristas cuyos dos extremos son el mismo vértice (denominadas *lazos*). Un mapa tiene *vértices*, *aristas* y *caras*; estas últimas son las regiones planas en las que la esfera queda dividida. Observar que dibujar un grafo en la esfera es equivalente a hacerlo en el plano, ya que la noción de planaridad es la misma en las dos superficies. Es por ello que habitualmente los mapas se representan en el plano (es decir, sobre una hoja de papel). Cuando representamos un mapa en el plano, decimos que la cara no acotada es la *cara externa* del mapa. Esta distinción no es necesaria cuando estudiamos el problema en la esfera, ¡ya que no existen caras no acotadas en esta superficie!

Cada arista que define una cara puede ser incidente 1 vez o 2 veces con ésta. La *longitud* de una cara es el número de aristas (contadas con multiplicidad) con las que ésta es incidente. Para ilustrar este concepto, en la Figura 1 se muestra un mapa con cuatro caras de longitud 1, 2, 3 y 8, respectivamente (en particular, la longitud de la cara no acotada es igual a 8). Observar que la arista inferior de dicha figura es incidente 2 veces con la cara externa.

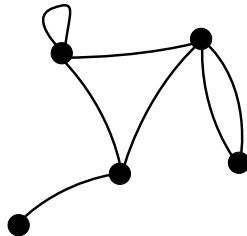


FIGURE 1. Un mapa con 4 caras, 5 vértices y 7 aristas.

Estaremos interesados en el estudio de los mapas como objetos combinatorios: consideraremos que dos mapas son el mismo si uno se obtiene a partir del otro a través de una deformación continua que conserve la orientación de la esfera. Es decir, en nuestro contexto no aceptamos las reflexiones como transformaciones válidas. Así, en la Figura 2 los dos primeros diseños representan el mismo mapa, pero no el tercero de ellos: aunque el grafo subyacente es el mismo, el mapa que define no lo es (las longitudes de las caras son distintas). La información importante en los mapas son las incidencias entre vértices y aristas (inherentes a los grafos subyacentes), pero también a las relaciones de incidencias entre las caras mediante las aristas que las definen. En particular, en esta figura observamos nuevamente que en los mapas es muy importante el

---

El autor está financiado por una beca JAE-DOC de la Junta para la Ampliación de Estudios (CSIC), conjuntamente financiada por la FSE, por la beca MTM2011-22851 (España) y el proyecto ICMAT Severo Ochoa SEV-2011-0087.

modo como el grafo se dibuja, ya que el mismo grafo puede dar lugar a mapas distintos (tal y como ocurre en la Figura 2).

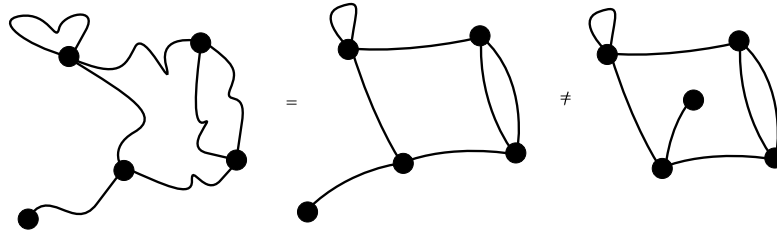


FIGURE 2. Equivalencia de mapas.

El lector recordará la bien conocida *fórmula de Euler*: dado un mapa con  $v$  vértices,  $a$  aristas y  $c$  caras (donde la cara externa se toma en cuenta), se cumple la relación

$$c + v = a + 2.$$

Es importante realizar la siguiente observación: existe un número infinito de mapas con un número dado de caras, o con un número fijado de vértices; ahora bien, existe únicamente un número *finito* de mapas con una cantidad dada de aristas. El lector puede comprobar esta afirmación observando que el único parámetro que podemos fijar en la ecuación de Euler de tal manera que los otros dos varíen dentro de un conjunto finito es la variable  $a$  (recordar que  $c, v$  y  $a$  sólo pueden tomar valores positivos). En definitiva, una cuestión natural es la de saber contar cuántos mapas existen con un número fijado de aristas. Más concretamente, nos interesaremos por los mapas *con raíz*: enraizar un mapa consiste en privilegiar una arista y darle una orientación, que dibujaremos mediante una flecha. De este modo, estamos distinguiendo un vértice (el extremo inicial de la arista, que denominaremos de aquí en adelante *vértice raíz*), una arista (la que tiene la flecha, que denominaremos *arista raíz*) y una cara del mapa (la *cara raíz*), que por convenio será la que quede a la derecha de la arista raíz según la orientación indicada por la flecha. Un mapa con raíz siempre se puede representar de tal modo que la cara raíz sea la cara no acotada (recordar que los mapas son dibujos en la esfera). En la Figura 3 se representa un mapa con raíz. En este caso la cara raíz no es la cara no acotada.

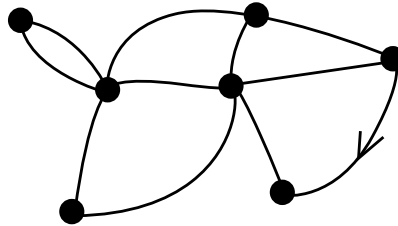


FIGURE 3. Un mapa con raíz.

Una raíz elimina las simetrías internas del mapa considerado (que a priori pueden ser de cualquier tipo), y este hecho puede ser aprovechado con el fin de obtener descomposiciones combinatorias recursivas *únicas*. Como veremos en lo que sigue, la noción de raíz en el marco de la enumeración de mapas además de facilitar mucho el trabajo, da lugar a fórmulas enumerativas extremadamente simples. Esto no ocurre en mapas sin raíz, donde las fórmulas de conteo que se obtienen no acostumbran a ser cerradas. De ahí la importancia (y la belleza estética) del estudio de estos objetos que, a primera vista, podrían parecer más artificiosos comparados con sus parientes más sencillos (los mapas sin raíz).

Pasemos a desarrollar la teoría para contar los mapas. Para ello, y para que el lector se sienta cómodo con esta familia combinatoria, puede intentar recuperar todos los mapas planos con raíz que tienen 2 aristas. Son los que se incluyen en la Figura 4.

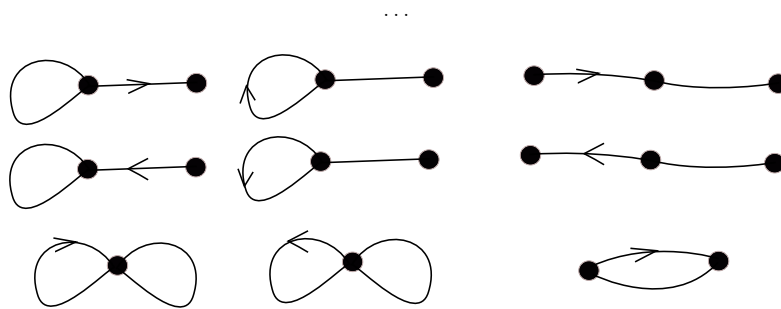


FIGURE 4. Los 9 mapas planos con raíz con 2 aristas

El lector impaciente puede intentar desarrollar un argumento similar al realizado para los árboles, pero verá que es imposible obtener las ecuaciones para la función generatriz asociada. Aplicando la técnica de descomposición de la raíz que ya hemos utilizado en el caso de los árboles se puede llegar a una expresión cerrada para la función generatriz encargada de enumerar los mapas con raíz según el número de aristas. Ahora bien, la técnica, es mucho más complicada. Pasemos a explicarla.

Denotemos por  $M_n$  el número de mapas con raíz y con  $n$  aristas, y  $M(x) = \sum_{n \geq 0} M_n x^n$  la función generatriz correspondiente. Esta es nuestra función a obtener, pero de hecho, vamos a estudiar una secuencia mucho más general: el número de mapas con raíz, con  $n$  aristas y cuya cara externa tiene longitud  $m$ . Denotemos este número por  $M_{n,m}$  y la función generatriz correspondiente por  $M(x, u) = \sum_{n,m \geq 0} M_{n,m} x^n u^m$ . En particular, observar que  $M(x, 0) = M(x)$ . Diremos que  $u$  es una variable *catalítica*, por razones que vendrán más adelante.

Para hallar ecuaciones que nos permitan hallar  $M(x, u)$  y  $M(x)$  vamos a utilizar la técnica de la eliminación de la raíz. Observar que un mapa con raíz cumple una de las tres condiciones siguientes:

- No tiene ninguna arista, por lo tanto, debe de estar formado de un único vertice.
- La arista raíz, al ser eliminada, desconecta el mapa.
- La arista raíz, al ser eliminada, no desconecta el mapa.

Al usar el método simbólico, la relación más complicada a codificar es la tercera. En este caso, se puede imaginar que el nuevo mapa se obtiene añadiendo la arista raíz a un mapa inicial (preservando el vértice raíz) de todas las maneras posibles. Haciendo esta operación, en concreto, estamos reduciendo el grado de la cara externa, tal y como puede verse en la Figura 5.

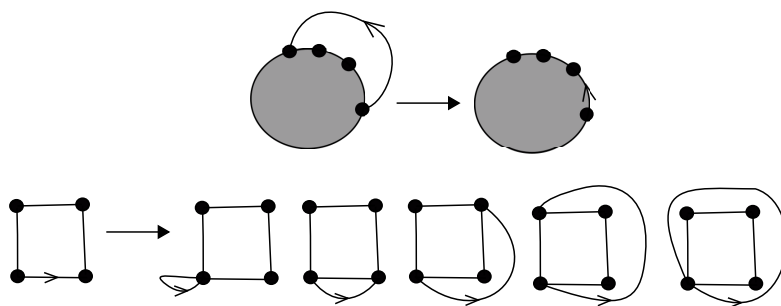


FIGURE 5. Eliminación de la raíz sin desconectar el mapa.

El efecto general que provoca esta operación sobre un término de la forma  $u^k$  es

$$u^k \rightarrow xu(1 + u + \dots + u^k) = xu \frac{u^{k+1} - 1}{u - 1}.$$

donde  $x$  indica que hemos añadido una nueva arista. Esto se traduce en el contexto de las funciones generatrices como:

$$g(u) = \sum_{k \geq 0} g_k u^k \rightarrow xu \sum_{k \geq 0} g_k \frac{1 - u^{k+1}}{1 - u} = \frac{xu}{u - 1} \left( \sum_{k \geq 0} g_k u^{k+1} - g_k \right) = xu \frac{ug(u) - g(1)}{u - 1}.$$

Y, por lo tanto, la ecuación que cumple  $M(x, u)$  es la siguiente:

$$(1) \quad M(x, u) = 1 + xu^2 M(x, u)^2 + xu \frac{M(x, u) - M(x, 1)}{u - 1}.$$

Observar que aquí tenemos dos incógnitas: tanto  $M(x, u)$  como  $M(x, 1)$ . ¿Cómo podemos resolver una ecuación de este tipo? La clave es ahora utilizar la variable auxiliar  $u$  para nuestro propósito. De ahí el nombre de variable catalítica. Lo que vamos a hacer, más concretamente, es escribir  $u = u(x)$  función algebraica y ver cuando existe algún tipo de anulación que nos permita simplificar la ecuación. En concreto, la Ecuación (1) puede escribirse de la forma:

$$P(M, M_1, x, u) = (u - 1)M - (u - 1) - xu^2(u - 1)M^2 - xu(M - M_1) = 0.$$

Esta ecuación nos da un cierto grado de libertad, ya que tenemos una dependencia entre  $M$  y  $M_1$ , y  $u$  que continua siendo libre. El método ahora consiste en escoger, como hemos dicho, una función  $u(x)$  adecuada. Para ello, tomaremos  $u$  que cumpla:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial M} &= u - 1 - 2xu^2(u - 1)M - xu^2 = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial u} &= M - 1 - xu(3u - 2)M^2 + 2xuM - xM_1. \end{aligned}$$

Observar que estas condiciones surgen de derivar la expresión relativa a  $P$  e igualar las derivadas a 0 (cosa que puede hacerse ya que tenemos una variable auxiliar que nos lo permite). En este caso, tenemos 3 ecuaciones algebraicas y 3 incógnitas, con lo que utilizando eliminación computacional podemos obtener la expresión de las 3 incógnitas. En concreto,

$$(2) \quad M(x, 1) = M(x) = -\frac{1}{54x^2} \left( 1 - 18x - (1 - 12x)^{3/2} \right).$$

Ya tenemos casi todo lo que queríamos. Falta extraer el coeficiente  $n$ -ésimo de esta función generatriz. Desarrollando en serie la expresión que aparece en la Ecuación (2) (el lector puede entretenerse utilizando el teorema del binomio) se obtiene una fórmula compacta para  $M_n$ :

$$(3) \quad M_n = 2 \frac{3^n}{n+2} C_n,$$

donde los coeficientes  $C_n$  son los números de Catalan introducidos anteriormente. ¡Interesante! El número de mapas planos con raíz y con  $n$  aristas es muy parecido al número de árboles con  $n$  aristas!

Veamos a demostrar esta fórmula directamente, sin el uso de variables catalíticas (que distorsionan la combinatoria subyacente). En lo que sigue, y para simplificar argumentos, supondremos que la cara raíz es la cara no acotada (recordar que esta hipótesis siempre es válida, ya que los mapas se consideran sobre la esfera). El primer paso consiste en reducir nuestro estudio a una familia muy concreta de mapas: las cuadrangulaciones, o mapas cuyas caras tienen longitud 4. Para ello, lo que hacemos es dibujar un vértice auxiliar en cada una de las caras de nuestro mapa inicial (los representamos de color blanco, véase la Figura 6). Seguidamente, unimos estos vértices blancos con los vértices iniciales que son incidentes con la cara correspondiente, eliminando posteriormente las aristas iniciales. Observar que si el mapa inicial tenía  $v$  vértices,  $a = n$  aristas y  $c$  caras, entonces la cuadrangulación que construimos tiene  $c + v = n + 2$  vértices. Puesto que en toda cuadrangulación se cumple que el número de caras es igual al doble del número de aristas, se cumple que la cuadrangulación que resulta tiene, además,  $n$  caras.

Es importante notar varios aspectos en esta construcción: la cuadrangulación que se construye también se puede dibujar la raíz de manera canónica, tomando como raíz la arista que une el vértice raíz con el vértice blanco asociado a la cara raíz del mapa inicial. Observar también que

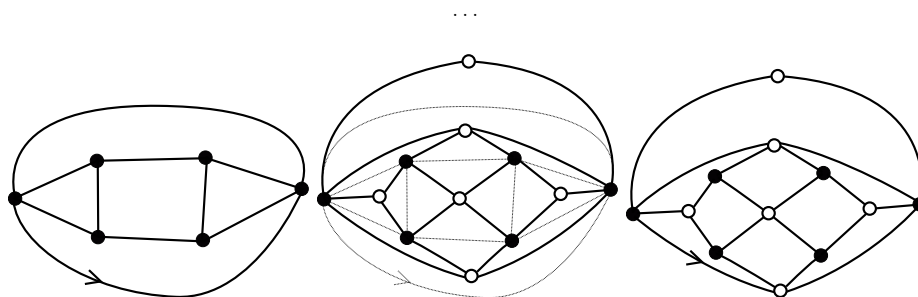


FIGURE 6. Construcción de una cuadrangulación a partir de un mapa genérico.

las cuadrangulaciones son siempre *bipartidas* (es decir, podemos colorear los vértices de blanco y negro de tal forma que vértices del mismo color no se hallan conectados por una arista), con lo que a partir de una cuadrangulación podemos invertir la operación antes descrita para recuperar el mapa original. Dicho de otro modo, existe una biyección entre los mapas planos con raíz con  $n$  aristas y las cuadrangulaciones con raíz con  $n$  caras (o equivalentemente, con  $n + 2$  vértices). De aquí en adelante nos centraremos en el estudio de esta segunda familia, que denotaremos por  $\mathcal{Q}_n$ . Nuestro objetivo es hallar el valor de  $|\mathcal{Q}_n|$ .

Continuamos la construcción de la siguiente forma: consideramos un vértice privilegiado, que denominaremos *origen*. Dicho vértice puede ser el vértice raíz, o no serlo. Asociamos a cada vértice del mapa un número positivo correspondiente a la distancia a la que se encuentra respecto al origen: en particular, al origen le asociamos un 0, a los vértices que se conectan a éste le asociamos un 1, y así de manera sucesiva. Ver Figura 7.

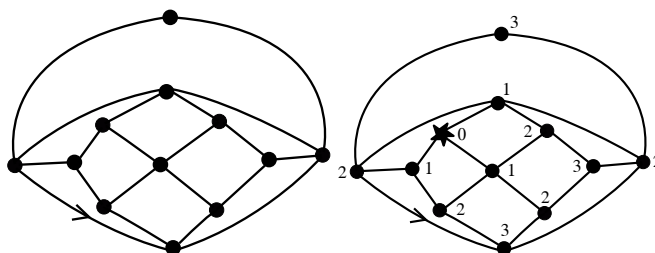


FIGURE 7. Distancias en la cuadrangulación respecto al vértice origen, que hemos marcado con una estrella.

Es evidente que el número de cuadrangulaciones con  $n$  caras y un origen (conjunto que denotamos por  $\mathcal{Q}_n^\bullet$ ) es igual a  $(n + 2)|\mathcal{Q}_n|$ , ya que para cada cuadrangulación de la familia tenemos  $(n + 2)$  posibilidades para elegir el origen. Continuemos. Hasta el momento el lector puede pensar que se va a la deriva, pero el golpe de timón definitivo se realizará en el siguiente paso. Observar que al encontrarnos en una cuadrangulación, las caras únicamente admiten dos patrones de etiquetación, que son precisamente los que se muestran en la Figura 8.

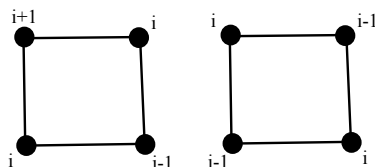


FIGURE 8. Dos tipos de caras en una cuadrangulación.

El lector puede convencerse de este hecho comprobando que al ser todos los ciclos de longitud par, no existen dos vértices adyacentes con la misma distancia al origen. El siguiente paso consiste en dibujar, para cada tipo de cara, una arista según se muestra en la Figura 9. El

proceso consiste simplemente en unir 2 de los 4 vértices de cada una de las caras. En el segundo tipo de caras dicha regla está bien definida (ya que unimos simplemente los vértices con mayores etiquetas), mientras que para el primer tipo de caras hay que hacer algo más (unimos el vértice de etiqueta mayor con uno de sus dos adyacentes). Con este propósito, orientamos todas estas caras en sentido horario. Con este convenio, el vértice que unimos al de etiqueta máxima es su vecino precedente según el orden inducido. Únicamente existe una excepción, la cara externa, donde esta regla hay que tomarla a la inversa (la orientación de la cara externa se toma en sentido inverso: en nuestro caso en sentido antihorario).

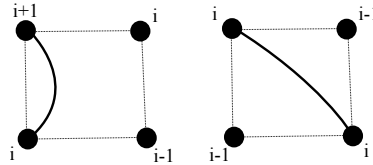


FIGURE 9. Reglas a aplicar según el tipo de cara.

Si ahora aplicamos la regla descrita en nuestro ejemplo, lo que observamos es que el mapa que obtenemos tiene un aspecto familiar. Ver Figura 10. A la cara raíz (que consideramos la cara externa), además, le asignaremos un valor binario (es decir, un 0 o bien un 1) del que hablaremos más adelante; veremos como se define y la importancia de este parámetro, (dicho parámetro permitirá realizar la operación inversa para recuperar la raíz de la cuadrangulación), aunque ahora no le vamos a prestar más importancia. Sólo a efectos ilustrativos, en el ejemplo considerado en la Figura 10, el parámetro adecuado es el 0 (ver más adelante la Figura 15 donde se precisa el procedimiento para obtener este parámetro).

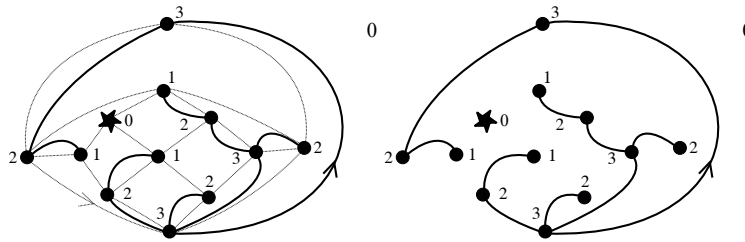


FIGURE 10. Construcción final usando las reglas definidas para cada cara.

¡Magia! Si olvidamos el origen, el mapa que obtenemos es un árbol! ¿Esto es casualidad o bien tiene una razón profunda? Veamos que, efectivamente, existe un motivo de fondo. Razonaremos que el mapa que se obtiene es conexo y que no tiene ciclos. ¡Así pues es un árbol! Supongamos primero que contiene un ciclo, que podemos suponer simple. Sea  $i$  la menor etiqueta de un vértice del ciclo. Estudiando los dos casos posibles, que se muestran en la Figura 11, se muestra que existen dos vértices cuyas etiqueta son iguales a  $i - 1$ , de tal forma que uno de ellos se halla en el interior del ciclo y el otro se halla en el exterior del ciclo. Esto implicaría que el origen debería hallarse tanto en el interior del ciclo como en el exterior, cosa que es imposible.

Hemos visto pues que el mapa que se obtiene no contiene ciclos. Así pues, es un árbol o bien un conjunto desconectado de árboles. Veremos que ocurre la primera situación. Recordando que dicho mapa tiene tantas aristas como caras tenía la cuadrangulación (un total de  $n$ ), y un total de  $n + 2 - 1$  vértices (nos olvidamos del origen), resulta que hay un exceso de 1 unidad en cuanto al número de vértices respecto al número aristas. Aplicando nuevamente la fórmula de Euler resulta de manera sencilla que el mapa tiene que tener una sola componente conexa, tal y como queríamos demostrar. Así pues, el mapa resultante es un árbol.

¿Y que propiedades tienen estos árboles que obtenemos? Son árboles con raíz y con la particularidad que sus vértices cargan etiquetas enteras positivas. El valor mínimo que puede tomar

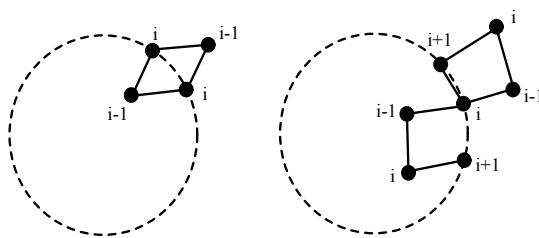


FIGURE 11. Diferentes configuraciones: el mapa no contiene ciclos.

cualquiera de estas etiquetas es 1 (recordar que el origen ha quedado desconectado, y lo podemos obviar en lo que sigue), y además se cumple que el valor absoluto de la diferencia entre las etiquetas de dos vértices contiguos pertenece al conjunto  $\{0, 1\}$ . Estos objetos se denominan *árboles bien etiquetados*. Denotaremos por  $\mathcal{T}_n$  al conjunto de árboles bien etiquetados con  $n$  aristas. Observar que un árbol bien etiquetado con  $n$  aristas puede construirse de la siguiente forma (ver Figura 12): consideramos un árbol con raíz y asociamos a cada una de sus aristas un valor en el conjunto  $\{-1, 0, 1\}$ . Posteriormente, colocamos la etiqueta 0 en el vértice raíz. La etiqueta que colocamos en los vértices adyacentes al vértice raíz se obtienen sumando a 0 el valor que lleva la arista que los une. Y así de manera sucesiva. El árbol que se obtiene no está, en general, bien etiquetado (puede tener vértices cuyas etiquetas sean números negativos). Finalmente, normalizamos las etiquetas del siguiente modo: supongamos que la etiqueta menor es de valor  $-k$  (dicho valor o bien es 0 o bien es un número negativo). Entonces, si sumamos  $k+1$  a cada uno de los vértices, el resultado es un árbol bien etiquetado, ya que todas las etiquetas son positivas, la etiqueta mínima es igual a 1 y la diferencia entre las etiquetas de dos vértices contiguos pertenece al conjunto  $\{-1, 0, 1\}$ . El lector puede comprobar que estas operaciones son de hecho, trivialmente invertibles.

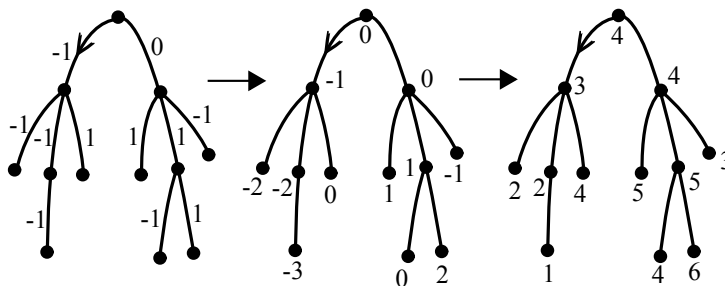


FIGURE 12. Construcción (biyectiva) de un árbol bien etiquetado a partir de un árbol con pesos en las aristas.

Estamos diciendo, por lo tanto, que existe una biyección combinatoria entre  $\mathcal{C}_n \times \{-1, 0, 1\}^n$  y  $\mathcal{T}_n$ , con lo que se cumple que el número de árboles bien etiquetados es igual a:

$$(4) \quad |\mathcal{T}_n| = 3^n C_n.$$

Lo último que nos queda por ver es que, dado un árbol bien etiquetado con  $n$  aristas y un valor 0 o 1 (recordar que asociábamos a la cara externa un valor binario para poder revertir la operación) podemos construir de manera unívoca una cuadrangulación con  $n$  caras y con un vértice marcado.

Para ello, empezamos realizando una *exploración* de nuestro árbol bien etiquetado. Por exploración entendemos la lista circular de vértices que se obtiene al recorrer en sentido antihorario el contorno del árbol; observar que en una exploración un mismo vértice aparecerá, en general, más de una vez en la lista (tantas veces como su grado). Cada una de las ocasiones en las que un vértice es encontrado define lo que denominamos *esquina* del árbol. Así pues, la exploración

de un árbol es la lista circular de las esquinas del árbol. Para aclarar en estos conceptos, en la Figura 13, la lista circular que consideramos es

$$(3, 3, 2, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 1, 2).$$

La operación fundamental ahora consiste en unir cada esquina del árbol con una etiqueta  $i$  con la esquina siguiente en el orden lexicográfico que tenga etiqueta  $i - 1$ . Recordar que la lista se considera en orden circular (el lector puede visualizarla dibujada sobre un círculo).

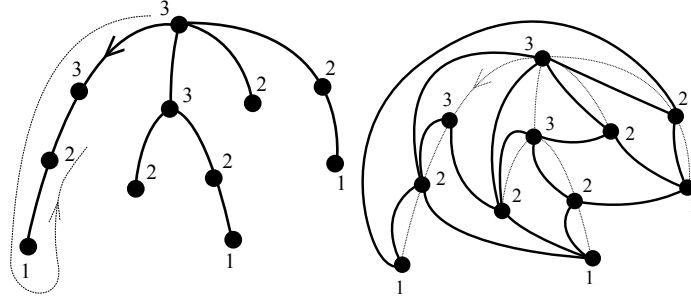


FIGURE 13. Árbol al que aplicamos la construcción, y el objeto que se obtiene después de realizarla.

El siguiente paso en la construcción consiste en recuperar el vértice origen. Esto no tiene mucha complicación: únicamente es necesario dibujar un vértice nuevo (que hará el papel de origen) en la cara externa y unirlo con los vértices cuyas etiquetas son iguales a 1. Esto lo podemos hacer directamente dibujando el vértice privilegiado en la única cara incidente con todos los vértices con etiqueta igual a 1, y trazando aristas entre éste y dichos vértices. Ver Figura 14 para ver dicha construcción.

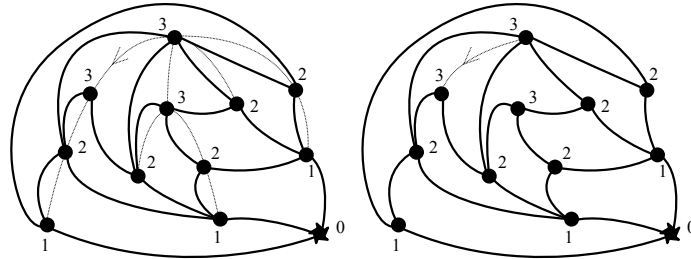


FIGURE 14. Inclusión del origen. ¡Falta únicamente considerar la raíz la cuadrangulación!

Y ahora, ya para acabar, falta hallar el método que nos permita recuperar de manera unívoca la raíz de la cuadrangulación. En este punto entra en escena el parámetro binario del que hemos hablado antes: lo que hacemos es utilizar la tabla de conversiones mostrada en la Figura 15, que nos permite reconstruir la raíz inicial de la cuadrangulación.

Mediante estas transformaciones conseguimos construir un mapa con raíz y con un vértice marcado. Pero nos falta comprobar un pequeño detalle...¿es una cuadrangulación? Es decir, ¿todas las caras tienen longitud 4? Veamos que efectivamente es así. Con este propósito, dado un árbol bien etiquetado, vamos a construir el *polígono asociado a su exploración* de la siguiente forma: consideramos la curva cerrada definida al recorrer el contorno del árbol, recordando en que instante encontramos cada una de las esquinas del árbol. Dicha curva se puede deformar a un polígono cuyos vértices son las esquinas del árbol (escritas en sentido antihorario sobre el círculo, ver Figura 16). Entonces las aristas que dibujamos según la construcción propuesta se traducen en aristas que se dibujan en el interior del polígono, utilizando el mismo criterio (es decir, unir un vértice de etiqueta  $i$  con el siguiente, en sentido antihorario, inmediatamente posterior con etiqueta  $i - 1$ ). Para aclarar posibles dudas, en la Figura 16 se realiza la construcción de dicho



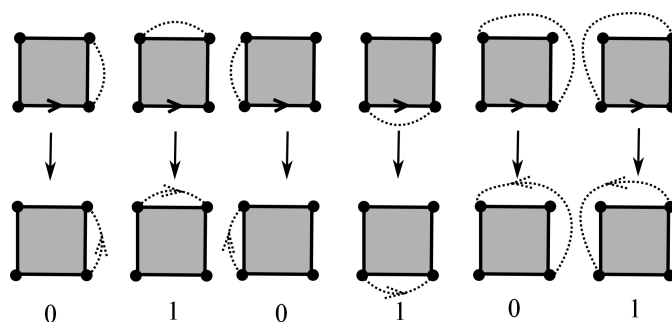


FIGURE 15. Asociación entre la cara raíz en la cuadrangulación y la manera de asignar la raíz en el árbol bien etiquetado.

polígono para un ejemplo concreto, indicando también que las aristas siempre se dibujarán en el interior del polígono.

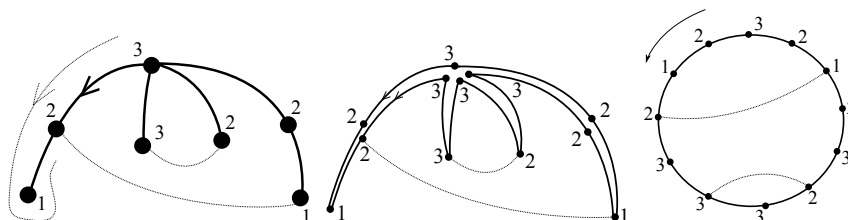


FIGURE 16. Construcción del polígono asociado a la exploración de un árbol bien etiquetado.

Observar que el polígono asociado a la exploración del árbol tiene el doble de aristas que el árbol inicial, ya que cada arista es recorrida 2 veces. Diremos que dos aristas del polígono que proceden de la misma arista en el árbol son *hermanas*. En particular, podemos recuperar el árbol pegando, dos a dos, todas las parejas de aristas hermanas. Esta observación nos permite traducir argumentos en el interior del polígono a argumentos sobre el árbol. En efecto, veamos qué estructura tienen las aristas que dibujamos en el interior del polígono. Para simplificar los argumentos, supondremos que todas las etiquetas de los vértices que consideraremos son mayores o iguales que 1. Este argumento se puede adaptar fácilmente si alguna de las etiquetas es igual a 1 (donde deberemos de considerar el origen, vértice que debe de añadirse en el interior del polígono y unirlo a los vértices cuya etiqueta es igual a 1).

Consideremos primero una arista (y su hermana) cuyos extremos llevan la misma etiqueta  $i$ . En la Figura 17 se muestran todas las posibilidades que pueden darse para este caso al realizar la construcción que antes proponíamos. En todos ellos se muestra que estas dos aristas forman parte de triángulos. Por lo tanto, al pegar aristas hermanas (que es la operación que realizamos para recuperar el árbol), y eliminar las aristas del árbol (que es lo que hacemos para construir el mapa) lo que obtenemos son caras de longitud 4. En la Figura 17 se muestran también como es la estructura de las caras que se generan en cada uno de los casos, según la posición del vértice (o vértices) con etiqueta  $i - 1$ .

Un fenómeno similar sucede en el caso de aristas hermanas que unen vértices con etiquetas distintas,  $i + 1$  y  $i$ . Como antes, los casos que se consideran dependen de la posición del vértice (o vértices) con etiqueta  $i - 1$  que uniremos a los vértices con etiqueta  $i$  considerados. Los distintos casos que pueden acontecerse se resumen en la Figura 18. Observar que en la segunda y quinta figura se consideran vértices pintados en blanco: éstos son necesarios para finalizar el argumento, y aparecen como consecuencia del buen etiquetaje del árbol (en una exploración de un árbol bien etiquetado, entre un vértice de etiqueta  $i + 1$  y un vértice de etiqueta  $i - 1$  necesariamente debemos hallar un vértice con etiqueta  $i$ ).

Hemos demostrado pues la siguiente biyección combinatoria:

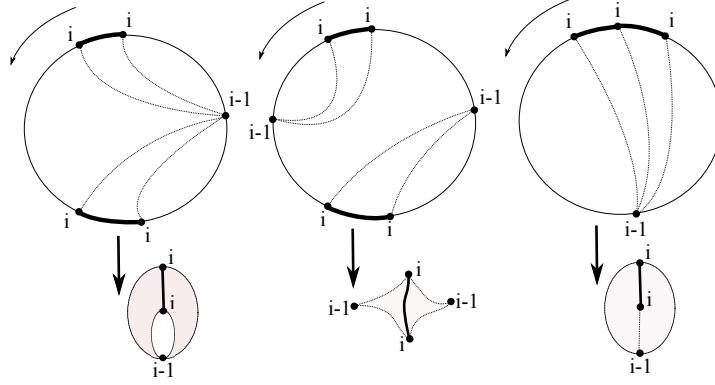


FIGURE 17. Diferentes casos para las aristas cuyos extremos tienen las mismas etiquetas, y las caras que se obtienen al pegar las aristas hermanas.

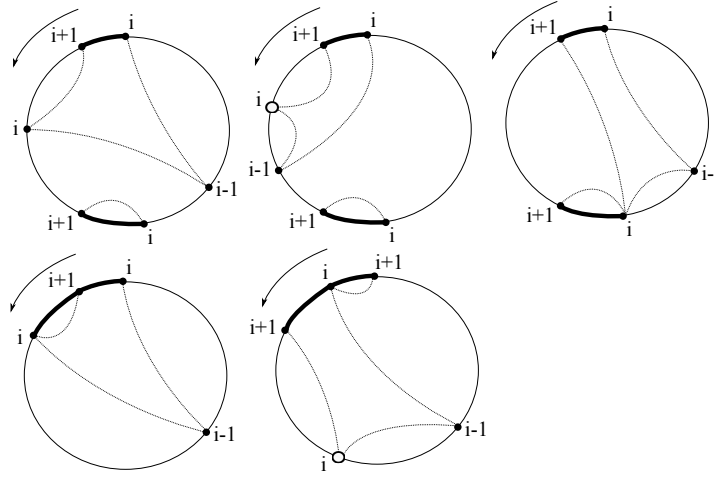


FIGURE 18. Diferentes casos para las aristas cuyos extremos tienen etiquetas distintas. Los vértices con interior blanco vienen forzados por la condición de que los árboles estén bien etiquetados.

**Theorem 1** (Bijección de Schaeffer). *Existe una biyección combinatoria entre  $\mathcal{Q}_n^\bullet$  y  $\{0, 1\} \times \mathcal{T}_n$ .*

Y puesto que en una biyección combinatoria lo importante es que las dos familias combinatorias tratadas tienen el mismo cardinal, resulta que se cumple

$$(n+2)|\mathcal{Q}_n| = |\mathcal{Q}_n^\bullet| = |\{0, 1\} \times \mathcal{T}_n| = |\{0, 1\} \times \mathcal{C}_n \times \{-1, 0, 1\}^n| = 2 \cdot 3^n C_n,$$

de donde deducimos de manera *elemental* que

$$|\mathcal{Q}_n| = 2 \frac{3^n}{n+2} C_n.$$

Resumiendo: un mapa con  $n$  aristas es, esencialmente, un árbol bien etiquetado. Este hecho tiene conexiones muy profundas con campos aparentemente muy alejados, como la probabilidad, la física estadística y la geometría. Y en todos ellos, el punto en común es la noción de distancia que hemos introducido.

J. RUÉ: INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (CSIC-UAM-UC3M-UCM), 28049 MADRID, SPAIN  
*E-mail address:* [juanjo.rue@icmat.es](mailto:juanjo.rue@icmat.es)