El diablo de los números

Sección a cargo de

Javier Cilleruelo Mateo

Del teorema de los 4 colores a la gravedad cuántica: enumeración de mapas.

por

Juanjo Rué Perna

1. Cuentas para el problema de los 4 colores

Es más que habitual que cuestiones elementales no tengan una respuesta sencilla. Esto ocurre con el enigma con el que iniciaremos esta aventura hacia la combinatoria de los mapas. Deseamos pintar los distintos términos municipales de nuestra provincia de origen, de tal modo que dos regiones colindantes reciban un color distinto. Si nuestra paleta de tonalidades es suficientemente rica siempre podremos realizar esta tarea (ya que el número de regiones es finito), pero...¿qué ocurre si además pretendemos realizar esta labor utilizando el mínimo número de colores? Lejos de pertenecer al dominio del diseño gráfico y de la cartografía, ésta no es una cuestión baladí y de hecho ha sido el *leivmotiv* de muchos de los matemáticos del siglo pasado. Demostrar que todo mapa plano puede colorearse con 5 colores no deja de ser un problema con una ingeniosa solución (véase por ejemplo [1]), pero la cuestión de fondo es la decidir si *existe algún mapa plano que no pueda colorearse con 4 colores.* Muchos han sido los que se han ocupado de hallar respuesta a esta pregunta desde que la cuestión se formulase a mediados del siglo XIX, y de la misma manera, muchas y variadas técnicas se han utilizado para atacar el problema. No fue hasta el año 1976 que Kenneth Appel y Wolfgang Haken hallaron la solución [2] (ver también [9]), demostrando que 4 colores son suficientes:

Teorema 1 (Teorema de los 4 colores). *Las regiones de cualquier mapa plano pueden pintarse con 4 colores de tal forma que dos regiones colindantes cualesquiera tengan un color distinto.*

La demostración de este teorema ha estado ligada, ya en sus orígenes, a la controversia y discusión, ya que el argumento de la prueba se sustenta en una comprobación

realizada por ordenador, con el propósito de verificar que un conjunto finito de mapas pueden colorearse mediante 4 colores. Reducir un problema matemático a analizar un número finito de casos es algo bastante común. El problema en esta situación es que este número finito es demasiado grande y es por ello que ¡el uso de técnicas computacionales es crítico!

Pero todo este asunto es una batalla en la que no tomaremos parte. No nos vamos a preocupar aquí de las luces y de las sombras de la historia de este problema, más únicamente de un capítulo muy concreto, y relacionado con el siguiente intento de ataque: una manera para hallar una prueba del resultado sería medir el exceso de mapas que se pueden colorear con 5 colores respecto a los que se pueden colorear con 4. El teorema de los 4 colores es equivalente a afirmar que este exceso es igual a 0 (o dicho de otro modo, que todo mapa que se puede colorear con 5 colores de hecho se puede colorear con 4). Esta fue la idea de partida de William Thomas Tutte (Newmarket, 1917– Kitchener, 2002), la de intentar desarrollar técnicas de conteo para poder atacar el problema. Y es en este intento de ataque donde se halla el origen de la teoría enumerativa de los mapas. Un intento frustrado (ya que la demostración que actualmente se conoce no utiliza este tipo de argumentos) pero que ha dado lugar a toda una nueva área de las matemáticas. En este artículo no nos preocuparemos de la conexión existente entre estos resultados enumerativos y sus implicaciones en el contexto del teorema de los 4 colores: estaremos interesados en saber contar mapas, sin tener en cuenta los colores.

Figura 1: William Tutte, figura clave en la combinatoria y teoría de grafos del siglo XX.

Nuestro objetivo es el de seguir los primeros pasos de esta teoría. Empezaremos definiendo con rigor qué es lo que entendemos por mapa e introduciremos todos los conceptos que necesitaremos posteriormente. En particular, definiremos la noción de *raíz* en un mapa (intuitivamente es una arista privilegiada a la que se le asigna una orientación) y justificaremos que el estudio enumerativo de los mapas con raíz es de vital importancia para poder explicar cuestiones de conteo para mapas sin raíz. Como aperitivo, aplicaremos la técnica denominada de *descomposición de la raíz* para deducir que el número de mapas con raíz, con n aristas y con una sola cara (también llamados *árboles*) es igual a $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Posteriormente, y aunque no demos todos los

detalles, veremos que el número de mapas con raíz y con n aristas es igual a $2\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$, número que tiene una relación muy íntima con el número de árboles. La explicación de esta relación será el núcleo del artículo. La explicación vendrá dada por una biyección combinatoria, la biyección de Schaeffer, que explicaremos con todo detalle y que permitirá vislumbrar el porqué objetos puramente bidimensionales como son los mapas pueden describirse usando únicamente árboles (en particular, los árboles tienen una estructura que puede codificarse de manera sencilla). Finalmente daremos algunas pinceladas de las las implicaciones más importantes que esta biyección tiene en otros campos, como en probabilidad y en física teórica.

2. Pero...¿qué es un mapa?

Hemos hablado de mapas geográficos y de regiones, pero... ¿qué es un mapa en términos precisos? De manera muy vaga, por mapa entendemos una subdivisión de una geografía (como en el mapa de la Ribagorza que se muestra en la Figura 2), pero la abstracción matemática nos permite imaginar también un mapa como una partición del plano en diferentes regiones, tal y como ocurre en las pinturas supremacistas de Piet Mondrian.

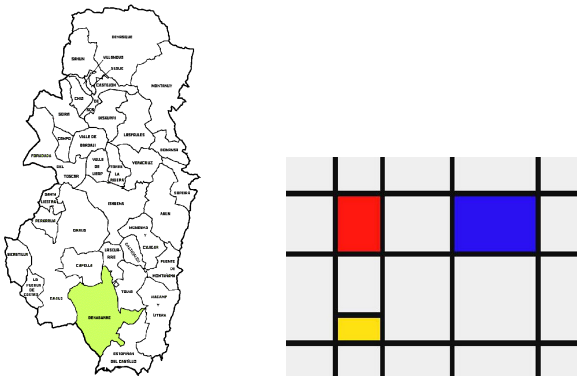

Figura 2: Un mapa de la Ribagorza aragonesa y una pintura de Mondrian. Ejemplos de lugares geográficos...y oníricos.

De manera más precisa, un *mapa* es grafo conexo y finito dibujado en la esfera, de tal manera que en esta representación las aristas del grafo no se cortan. Un mismo grafo puede dar lugar a mapas distintos según como se dibuje. En la definición de mapa asumimos que los grafos pueden tener aristas múltiples y también aristas cuyos dos extremos son el mismo vértice (denominadas *lazos*). Un mapa tiene *vértices*, *aristas* y *caras*; estas últimas son las regiones planas en las que la esfera queda dividida. Observar que dibujar un grafo en la esfera es equivalente a hacerlo en el plano, ya que la noción de planaridad es la misma en las dos superficies. Es por ello que habitualmente los mapas se representan en el plano (es decir, sobre una hoja de papel). Cuando representamos un mapa en el plano, decimos que la cara no acotada

es la *cara externa* del mapa. Esta distinción no es necesaria cuando estudiamos el problema en la esfera, ¡ya que no existen caras no acotadas en esta superficie!
Cada arista que define una cara puede ser incidente 1 vez o 2 veces con ésta. La *longitud* de una cara es el número de aristas (contadas con multiplicidad) con las que ésta es incidente. Para ilustrar este concepto, en la Figura 3 se muestra un mapa con cuatro caras de longitud 1, 2, 3 y 8, respectivamente (en particular, la longitud de la cara no acotada es igual a 8). Observar que la arista inferior de dicha figura es incidente 2 veces con la cara externa.

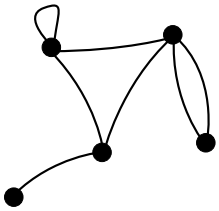

Figura 3: Un mapa con 4 caras, 5 vértices y 7 aristas.

Estaremos interesados en el estudio de los mapas como objetos combinatorios: consideraremos que dos mapas son el mismo si uno se obtiene a partir del otro a través de una deformación continua que conserve la orientación de la esfera. Es decir, en nuestro contexto no aceptamos las reflexiones como transformaciones válidas. Así, en la Figura 4 los dos primeros diseños representan el mismo mapa, pero no el tercero de ellos: aunque el grafo subyacente es el mismo, el mapa que define no lo es (las longitudes de las caras son distintas). La información importante en los mapas son las incidencias entre vértices y aristas (inherentes a los grafos subyacentes), pero también a las relaciones de incidencias entre las caras mediante las aristas que las definen. En particular, en esta figura observamos nuevamente que en los mapas es muy importante el modo como el grafo se dibuja, ya que el mismo grafo puede dar lugar a mapas distintos (tal y como ocurre en la Figura 4).

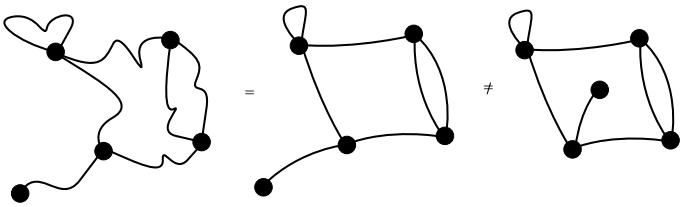

Figura 4: Equivalencia de mapas.

El lector recordará la bien conocida *fórmula de Euler*: dado un mapa con v vértices, a aristas y c caras (donde la cara externa se toma en cuenta), se cumple la relación

$$c + v = a + 2.$$

Es importante realizar la siguiente observación: existe un número infinito de mapas con un número dado de caras, o con un número fijado de vértices; ahora bien, existe únicamente un número *finito* de mapas con una cantidad dada de aristas. El lector puede comprobar esta afirmación observando que el único parámetro que podemos fijar en la ecuación de Euler de tal manera que los otros dos varíen dentro de un conjunto finito es la variable a (recordar que c, v y a sólo pueden tomar valores positivos). En definitiva, una cuestión natural es la de saber contar cuántos mapas existen con un número fijado de aristas. Pero...¿cómo se cuentan estos objetos? es claro que una enumeración directa no es viable, puesto que estas estructuras son demasiado complicadas. ¿Qué técnicas debemos explotar para hallar fórmulas exactas de conteo?

3. ¡Contemos!: técnicas enumerativas clásicas

Estas preguntas son las que se hizo Tutte. Desgraciadamente para sus propósitos, las cuentas eran más difíciles de lo que él esperaba, y no conseguía hallar fórmulas enumerativas cerradas. Viendo que no existía ningún camino directo para enumerar estos objetos combinatorios, Tutte giró los ojos hacia los clásicos. Más concretamente, puso su atención en el trabajo de Arthur Cayley (Richmond, 1821 – Cambridge, 1895) relativo a la enumeración de los árboles (mapas con una sola cara). Tutte dice al respecto que *"...having made no progress with the enumeration of these diagrams I bethought myself of Cayley's work on the enumeration of trees. His first successes had been with the rooted trees, in which one vertex is distinguished as the root..."* [11]. Fue así que Tutte tomó esta idea seminal, la de *enriquecer* la estructura bajo estudio. Muchas veces (y como ocurre en este contexto) estudiar un objeto que contiene estructura adicional puede resultar más simple y, más importante, puede llevar a conclusiones referentes a la estructura que inicialmente queríamos estudiar.

Con este propósito en mente, Tutte definió la noción de mapa *con raíz*: enraizar un mapa consiste en privilegiar una arista y darle una orientación, que dibujaremos mediante una flecha. De este modo, estamos distinguiendo un vértice (el extremo inicial de la arista, que denominaremos de aquí en adelante *vértice raíz*), una arista (la que tiene la flecha, que denominaremos *arista raíz*) y una cara del mapa (la *cara raíz*), que por convenio será la que quede a la derecha de la arista raíz según la orientación indicada por la flecha. Un mapa con raíz siempre se puede representar de tal modo que la cara raíz sea la cara no acotada (recordar que los mapas son dibujos en la esfera). En la Figura 5 se representa un mapa con raíz. En este caso la cara raíz no es la cara no acotada.

Una raíz elimina las simetrías internas del mapa considerado (que a priori pueden ser de cualquier tipo), y este hecho puede ser aprovechado con el fin de obtener descomposiciones combinatorias recursivas *únicas*. Como veremos en lo que sigue, la noción de raíz en el marco de la enumeración de mapas además de facilitar mucho el trabajo, da lugar a fórmulas enumerativas extremadamente simples. Esto no ocurre en mapas sin raíz, donde las fórmulas de conteo que se obtienen no acostumbran a ser cerradas. De ahí la importancia (y la belleza estética) del estudio de estos objetos que, a primera vista, podrían parecer más artificiosos comparados con sus parientes

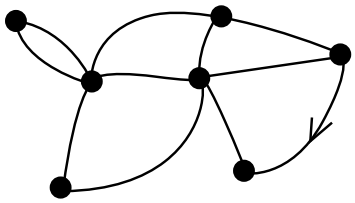

Figura 5: Un mapa con raíz.

más sencillos (los mapas sin raíz). No entraremos en este tema mucho más, pero existe un resultado, el denominado *teorema de disimetría*, que permite escribir fórmulas enumerativas para mapas sin raíz en términos de las fórmulas que se obtienen para mapas con raíz (generalmente fórmulas que dependen de sumatorios). Lo importante es resaltar que el estudio de los mapas con raíz es el objeto del deseo en la teoría enumerativa de mapas.

A estas alturas del relato ya hemos precisado qué queremos contar (distintas familias de mapas con raíz) y respecto a qué parámetro (el número de aristas). Pero falta precisar la metodología que utilizaremos. La técnica habitual utilizada en el conteo de estructuras combinatorias es la de *encapsular* la información enumerativa dentro de un objeto formal denominado *función generatriz*: si estamos considerando el número de mapas con raíz con n aristas en una cierta familia (llamemos a este valor a_n), lo que vamos a hacer será estudiar la función generatriz $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Como veremos, las funciones generatrices nos permitirán traducir ecuaciones recurrentes (muchas veces complicadas) de los a_n en ecuaciones formales entre funciones generatrices . Por regla general estas segundas serán más sencillas y manejables.

Pasemos a mostrar como aplicar estas ideas en el caso de los árboles con raíz y con n aristas, familia que denotaremos por $\mathcal{C}_n$. Sea $C_n = |\mathcal{C}_n|$ el número de árboles con raíz y n aristas, y denotemos la función generatriz asociada por $C(x) = \sum_{n\geq 0} C_n x^n$. Por convenio diremos que $C_0 = 1$, correspondiente al árbol que se conforma de un único vértice (y de ninguna arista). La técnica que utilizaremos se denomina *descomposición usando la raíz*, y permite descomponer, de manera recursiva, la familia combinatoria que estamos estudiando. Vamos a verlo en nuestro caso. Observar que al eliminar la arista raíz estamos creando dos subárboles. A estos subárboles se les puede dibujar una raíz de manera canónica tal y como se muestra en la Figura 6. Dicha pareja de subárboles con raíz es ordenada, ya que la orientación de la arista raíz define un primer subárbol (el que contiene el vértice raíz) y un segundo subárbol.

De manera recíproca, un árbol se construye siempre a partir de dos subárboles pegando una nueva arista (la que hará el papel de arista raíz en el árbol que construimos) entre los vértices raíz de los subárboles, olvidando posteriormente las raíces de cada uno de estos subárboles, y orientando la arista raíz del primer subárbol hacia el segundo (de ahí la importancia de que la pareja de subárboles sea ordenada). Estas consideraciones dan lugar a una descomposición única de un árbol con raíz en dos subárboles con raíz ordenados.

Si suponemos que el número de aristas del árbol inicial era igual a n, entonces

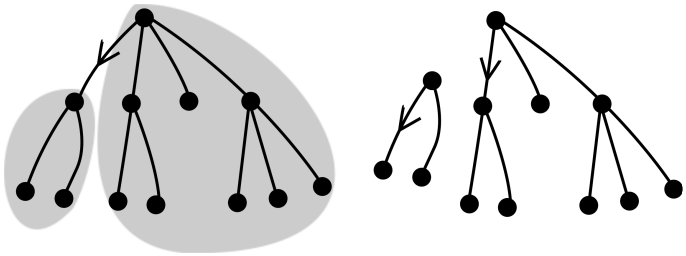

Figura 6: La descomposición de un árbol según su raíz en dos subárboles. El primer subárbol tiene 9 vértices y el segundo subárbol tiene 3 vértices.

la suma de las aristas de los dos subárboles que obtenemos al eliminar la raíz es igual a $n-1$. Recíprocamente, un árbol con n aristas se obtiene de manera única a partir de una pareja de subárboles con un número total de aristas igual a $n-1$. Resumiendo, lo que estamos diciendo es que existe una *biyección* entre árboles con raíz con n aristas y parejas de árboles con raíz con un número total de aristas igual a $n-1$. Así pues, se cumple la siguiente recurrencia para los valores C_n:

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}; \text{ con } C_0 = 1, \tag{1}$$

que surge de distribuir de todas las maneras posibles las $n-1$ aristas entre los dos subárboles que definen la biyección. Para resolver esta recurrencia vamos a utilizar la técnica de las funciones generatrices. Hallaremos primero $C(x)$ y después extraer los coeficientes C_n. Observando que si tenemos dos series de potencias $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ y $B(x) = \sum_{m\geq 0} b_m x^m$, entonces el coeficiente de x^m en $A(x)B(x)$ es igual a $\sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j}$, resulta que la Ecuación (1) puede traducirse en términos de $C(x)$ de la siguiente manera:

$$C(x) = 1 + xC(x)^2.$$

A partir de esta expresión podemos hallar explícitamente la función $C(x)$, obteniendo la expresión $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ (al resolver la ecuación de segundo grado obtenemos otra solución con coeficientes negativos, y por lo tanto sin interpretación combinatoria). Utilizando ahora el desarrollo en serie de Taylor del término $\sqrt{1-4x}$ y realizando manipulaciones con los binomiales y los factoriales que aparecen en su desarrollo, obtenemos que el término general C_n se puede expresar de la forma simplificada

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Estos números, miembros distinguidos de la familia real combinatoria, se conocen como *números de Catalan* en honor al matemático belga Eugène Catalan (Bruges, 1814 – Liège, 1894). Éstos no sólo aparecen en el problema con el que estamos lidiando, sino que son personajes con *pedigree* que surgen en muchos y diversos contextos

del mundo enumerativo; sin ir muy lejos, en el libro de referencia *Enumerative Combinatorics* de Richard Stanley [12], se presentan...¡ más de 50 familias combinatorias contadas por estos números! Como veremos más adelante, los números de Catalan, y su íntima relación con las estructuras arbóreas, serán los puntos de sustento de la teoría enumerativa de los mapas.

La idea seminal utilizada en la enumeración de los árboles, la *descomposición utilizando la raíz* de un mapa, puede utilizarse con el propósito de contar la familia de los mapas planos con un número de aristas dado; observar que únicamente existe un mapa con 0 aristas (un vértice aislado) y 2 mapas con 1 arista (un arista simple y un *lazo*). El lector atento puede comprobar que existen 9 mapas con 2 aristas, y que son los que se muestran en la Figura 7. ¡Recordar que es de vital importancia tener en cuenta cómo se considera la raíz estos objetos!

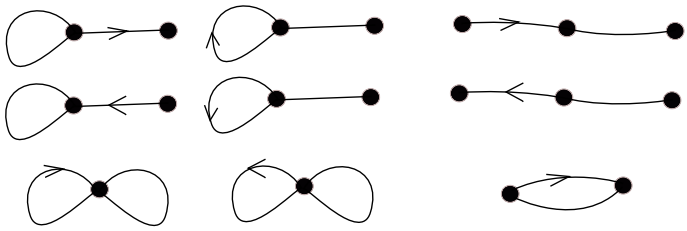

Figura 7: Los 9 mapas planos con raíz con 2 aristas

Denotemos por M_n el número de mapas con raíz y con n aristas. El lector impaciente puede intentar desarrollar un argumento similar al realizado para los árboles, pero verá que es imposible obtener las ecuaciones para la función generatriz asociada. Denotemos por $M(x) = \sum_{n\geq 0} M_n x^n$ la función generatriz correspondiente. Aplicando la técnica de descomposición de la raíz con un poco más de ingenio se puede llegar a una expresión cerrada para la función generatriz $M(x)$, encargada de enumerar los mapas con raíz según el número de aristas: para el caso en que la raíz no desconecta el mapa. Se muestran todos los casos para la cara externa de longitud igual a 4.

$$M(x) = -\frac{1}{54x^2}\left(1 - 18x - (1-12x)^{3/2}\right). \tag{2}$$

Ya tenemos casi todo lo que queríamos. Falta extraer el coeficiente n-ésimo de esta función generatriz. Desarrollando en serie la expresión que aparece en la Ecuación (2) se obtiene una fórmula compacta para M_n:

$$M_n = 2\frac{3^n}{n+2}C_n, \tag{3}$$

donde los coeficientes C_n son los números de Catalan introducidos anteriormente. ¡Interesante! El número de mapas planos con raíz y con n aristas es muy parecido al número de árboles con n aristas! ¿Cómo es posible que estos métodos analíticos den lugar a formulas tan simples, aún teniendo en cuenta la gran cantidad de pasos

intermedios que hemos realizado? ¿Qué magia existe detrás de esta expresión? En definitiva, ¿qué relación existe entre los mapas planos, objetos puramente bidimensionales, y los árboles? Deberían pasar algunos años hasta que en el 1998 se obtuviera la respuesta definitiva a este enigma.

4. La biyección de Schaeffer

Después de que Tutte obtuviera su celebrada fórmula para el número de mapas planos con raíz y con n aristas, muchos han sido los que han utilizado las técnicas recursivas de descomposición de la raíz para contar para distintas subfamilias de mapas. Y en la mayoría de los casos, los números que se obtienen son combinaciones sencillas de factoriales y de binomiales. Curioso, sin duda, teniendo en cuenta que los procedimientos por los que se llegan a estos resultados son técnicamente complejos. Más curioso puede resultar que muchas de estas cuentas tengan interés en la física estadística, y que se hallan obtenido (de manera independiente) utilizando métodos de integración de matrices basadas en la fórmula de Wick [6]. En cualquier caso, durante más de 30 años, aún teniendo fórmulas exactas para una gran variedad de familias de mapas, no se había llegado a un entendimiento profundo de la razón de la simplicidad de estas expresiones.

Fue en el año 1998 cuando Gilles Schaeffer, en su tesis doctoral [10], y basándose en trabajos previos de Robert Cori y de Bernard Vaulequin [7], consiguió dar una explicación completa de este fenómeno utilizando argumentos elementales basados en el uso de árboles. De hecho, Cori y Vaulequin ya conocían la naturaleza arbórea de los mapas, pero sus argumentos se basaban en ideas recursivas que Schaeffer refinó hasta llegar a una demostración directa y asombrosamente astuta. Lo que se denomina una *prueba biyectiva* en combinatoria. Matemáticas pueden hacerse siempre...pero no siempre se hacen con elegancia, y las pruebas biyectivas en este aspecto son especialmente bellas.

Figura 8: Robert Cori y Gilles Schaeffer.

Veamos cuál es este argumento. En lo que sigue, y para simplificar argumentos, supondremos que la cara raíz es la cara no acotada (recordar que esta hipótesis siempre es válida, ya que los mapas se consideran sobre la esfera). El primer paso

consiste en reducir nuestro estudio a una familia muy concreta de mapas: las cuadrangulaciones, o mapas cuyas caras tienen longitud 4. Para ello, lo que hacemos es dibujar un vértice auxiliar en cada una de las caras de nuestro mapa inicial (los representamos de color blanco, véase la Figura 9). Seguidamente, unimos estos vértices blancos con los vértices iniciales que son incidentes con la cara correspondiente, eliminando posteriormente las aristas iniciales. Observar que si el mapa inicial tenía v vértices, $a = n$ aristas y c caras, entonces la cuadrangulación que construimos tiene $c+v = n+2$ vértices. Puesto que en toda cuadrangulación se cumple que el número de caras es igual al doble del número de aristas, se cumple que la cuadrangulación que resulta tiene, además, n caras.

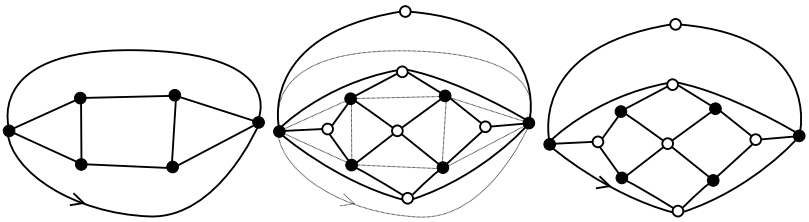

Figura 9: Construcción de una cuadrangulación a partir de un mapa genérico.

Es importante notar varios aspectos en esta construcción: la cuadrangulación que se construye también se puede dibujar la raíz de manera canónica, tomando como raíz la arista que une el vértice raíz con el vértice blanco asociado a la cara raíz del mapa inicial. Observar también que las cuadrangulaciones son siempre *bipartidas* (es decir, podemos colorear los vértices de blanco y negro de tal forma que vértices del mismo color no se hallan conectados por una arista), con lo que a partir de una cuadrangulación podemos invertir la operación antes descrita para recuperar el mapa original. Dicho de otro modo, existe una biyección entre los mapas planos con raíz con n aristas y las cuadrangulaciones con raíz con n caras (o equivalentemente, con $n+2$ vértices). De aquí en adelante nos centraremos en el estudio de esta segunda familia, que denotaremos por $\mathcal{Q}_n$. Nuestro objetivo es hallar el valor de $|\mathcal{Q}_n|$.

Continuamos la construcción de la siguiente forma: consideramos un vértice privilegiado, que denominaremos *origen*. Dicho vértice puede ser el vértice raíz, o no serlo. Asociamos a cada vértice del mapa un número positivo correspondiente a la distancia a la que se encuentra respecto al origen: en particular, al origen le asociamos un 0, a los vértices que se conectan a éste les asociamos un 1, y así de manera sucesiva. Ver Figura 10.

Es evidente que el número de cuadrangulaciones con n caras y un origen (conjunto que denotamos por $\mathcal{Q}_n^\bullet$) es igual a $(n+2)|\mathcal{Q}_n|$, ya que para cada cuadrangulación de la familia tenemos $(n+2)$ posibilidades para elegir el origen. Continuemos. Hasta el momento el lector puede pensar que se va a la deriva, pero el golpe de timón definitivo se realizará en el siguiente paso. Observar que al encontrarnos en una cuadrangulación, las caras únicamente admiten dos patrones de etiquetación, que son precisamente los que se muestran en la Figura 11.

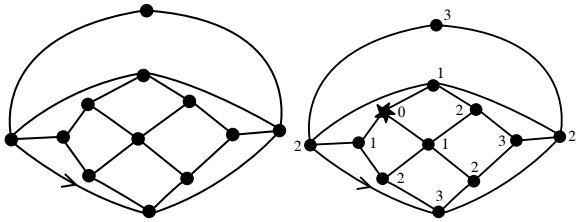

Figura 10: Distancias en la cuadrangulación respecto al vértice origen, que hemos marcado con una estrella.

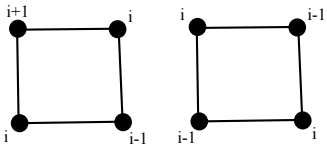

Figura 11: Dos tipos de caras en una cuadrangulación.

El lector puede convencerse de este hecho comprobando que al ser todos los ciclos de longitud par, no existen dos vértices adyacentes con la misma distancia al origen. El siguiente paso consiste en dibujar, para cada tipo de cara, una arista según se muestra en la Figura 12. El proceso consiste simplemente en unir 2 de los 4 vértices de cada una de las caras. En el segundo tipo de caras dicha regla está bien definida (ya que unimos simplemente los vértices con mayores etiquetas), mientras que para el primer tipo de caras hay hacer algo más (unimos el vértice de etiqueta mayor con uno de sus dos adyacentes). Con este propósito, orientamos todas estas caras en sentido horario. Con este convenio, el vértice que unimos al de etiqueta máxima es su vecino precedente según el orden inducido. Únicamente existe una excepción, la cara externa, donde esta regla hay que tomarla a la inversa (la orientación de la cara externa se toma en sentido inverso: en nuestro caso en sentido antihorario).

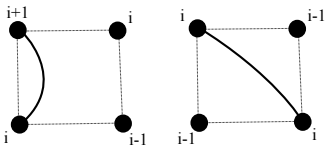

Figura 12: Reglas a aplicar según el tipo de cara.

Si ahora aplicamos la regla descrita en nuestro ejemplo, lo que observamos es que el mapa que obtenemos tiene un aspecto familiar. Ver Figura 13. A la cara raíz (que consideramos la cara externa), además, le asignaremos un valor binario (es decir, un 0 o bien un 1) del que hablaremos más adelante; veremos como se define y la importancia de este parámetro, (dicho parámetro permitirá realizar la operación inversa para recuperar la raíz de la cuadrangulación), aunque ahora no le vamos a prestar más importancia. Sólo a efectos ilustrativos, en el ejemplo considerado en la

Figura 13, el parámetro adecuado es el 0 (ver más adelante la Figura 18 donde se precisa el procedimiento para obtener este parámetro).

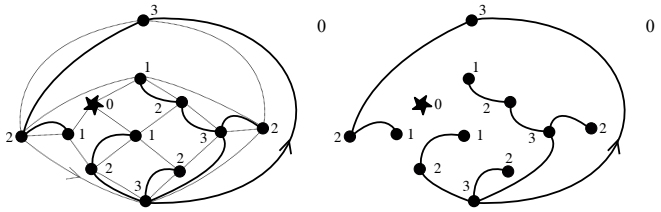

Figura 13: Construcción final usando las reglas definidas para cada cara.

¡Magia! Si olvidamos el origen, el mapa que obtenemos es un árbol! ¿Esto es casualidad o bien tiene una razón profunda? Veamos que, efectivamente, existe un motivo de fondo. Razonaremos que el mapa que se obtiene es conexo y que no tiene ciclos. ¡Así pues es un árbol! Supongamos primero que contiene un ciclo, que podemos suponer simple. Sea i la menor etiqueta de un vértice del ciclo. Estudiando los dos casos posibles, que se muestran en la Figura 14, se muestra que existen dos vértices cuyas etiqueta son iguales a $i-1$, de tal forma que uno de ellos se halla en el interior del ciclo y el otro se halla en el exterior del ciclo. Esto implicaría que el origen debería hallarse tanto en el interior del ciclo como en el exterior, cosa que es imposible.

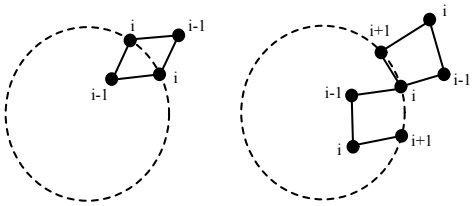

Figura 14: Diferentes configuraciones: el mapa no contiene ciclos.

Hemos visto pues que el mapa que se obtiene no contiene ciclos. Así pues, es un árbol o bien un un conjunto desconectado de árboles. Veremos que ocurre la primera situación. Recordando que dicho mapa tiene tantas aristas como caras tenía la cuadrangulación (un total de n), y un total de $n+2-1$ vértices (nos olvidamos del origen), resulta que hay un exceso de 1 unidad en cuanto al número de vértices respecto al número aristas. Aplicando nuevamente la fórmula de Euler resulta de manera sencilla que el mapa tiene que tener una sola componente conexa, tal y como queríamos demostrar. Así pues, el mapa resultante es un árbol.

¿Y que propiedades tienen estos árboles que obtenemos? Son árboles con raíz y con la particularidad que sus vértices cargan etiquetas enteras positivas. El valor mínimo que puede tomar cualquiera de estas etiquetas es 1 (recordar que el origen ha quedado desconectado, y lo podemos obviar en lo que sigue), y además se cumple que el valor absoluto de la diferencia entre las etiquetas de dos vértices contiguos

pertenece al conjunto $\{0,1\}$. Estos objetos se denominan *árboles bien etiquetados*. Denotaremos por $\mathcal{T}_n$ al conjunto de árboles bien etiquetados con n aristas. Observar que un árbol bien etiquetado con n aristas puede construirse de la siguiente forma (ver Figura 15): consideramos un árbol con raíz y asociamos a cada una de sus aristas un valor en el conjunto $\{-1,0,1\}$. Posteriormente, colocamos la etiqueta 0 en el vértice raíz. La etiqueta que colocamos en los vértices adyacentes al vértice raíz se obtienen sumando a 0 el valor que lleva la arista que los une. Y así de manera sucesiva. El árbol que se obtiene no está, en general, bien etiquetado (puede tener vértices cuyas etiquetas sean números negativos). Finalmente, normalizamos las etiquetas del siguiente modo: supongamos que la etiqueta menor es de valor $-k$ (dicho valor o bien es 0 o bien es un número negativo). Entonces, si sumamos $k+1$ a cada uno de los vértices, el resultado es un árbol bien etiquetado, ya que todas las etiquetas son positivas, la etiqueta mínima es igual a 1 y la diferencia entre las etiquetas de dos vértices contiguos pertenece al conjunto $\{-1,0,1\}$. El lector puede comprobar que estas operaciones son de hecho, trivialmente invertibles.

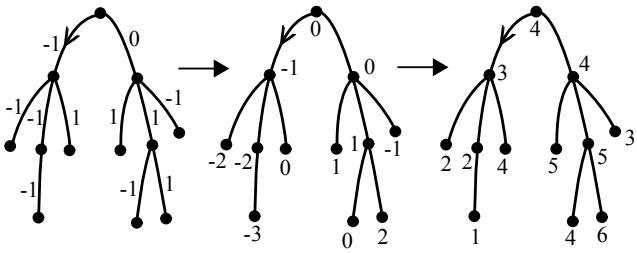

Figura 15: Construcción (biyectiva) de un árbol bien etiquetado a partir de un árbol con pesos en las aristas.

Estamos diciendo, por lo tanto, que existe una biyección combinatoria entre $\mathcal{C}_n \times \{-1,0,1\}^n$ y $\mathcal{T}_n$, con lo que se cumple que el número de árboles bien etiquetados es igual a:

$$|\mathcal{T}_n| = 3^n C_n. \tag{4}$$

Lo último que nos queda por ver es que, dado un árbol bien etiquetado con n aristas y un valor 0 o 1 (recordar que asociábamos a la cara externa un valor binario para poder revertir la operación) podemos construir de manera unívoca una cuadrangulación con n caras y con un vértice marcado.

Para ello, empezamos realizando una *exploración* de nuestro árbol bien etiquetado. Por exploración entendemos la lista circular de vértices que se obtiene al recorrer en sentido antihorario el contorno del árbol; observar que en una exploración un mismo vértice aparecerá, en general, más de una vez en la lista (tantas veces como su grado). Cada una de las ocasiones en las que un vértice es encontrado define lo que denominamos *esquina* del árbol. Así pues, la exploración de un árbol es la lista circular de las esquinas del árbol. Para aclarar en estos conceptos, en la Figura 16, la lista circular que consideramos es

$$(3,3,2,1,2,3,3,3,2,3,2,1,2,3,3,2,3,2,1,2).$$

La operación fundamental ahora consiste en unir cada esquina del árbol con una etiqueta i con la esquina siguiente en el orden lexicográfico que tenga etiqueta $i-1$. Recordar que la lista se considera en orden circular (el lector puede visualizarla dibujada sobre un circulo).

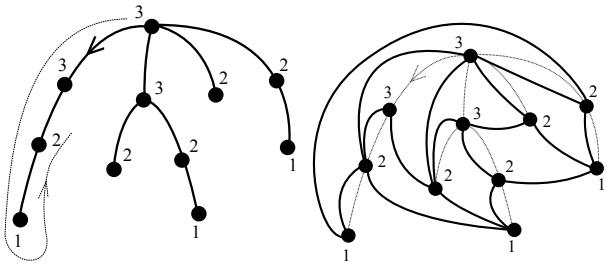

Figura 16: Árbol al que aplicamos la construcción, y el objeto que se obtiene después de realizarla.

El siguiente paso en la construcción consiste en recuperar el vértice origen. Esto no tiene mucha complicación: únicamente es necesario dibujar un vértice nuevo (que hará el papel de origen) en la cara externa y unirlo con los vértices cuyas etiquetas son iguales a 1. Esto lo podemos hacer directamente dibujando el vértice privilegiado en la única cara incidente con todos los vértices con etiqueta igual a 1, y trazando aristas entre éste y dichos vértices. Ver Figura 17 para ver dicha construcción.

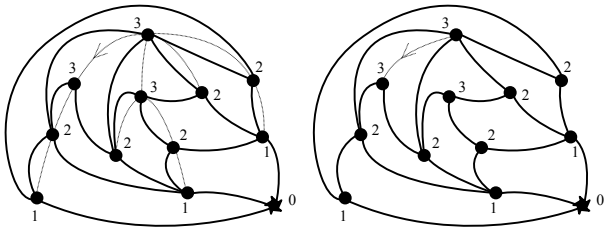

Figura 17: Inclusión del origen. ¡Falta únicamente considerar la raíz la cuadrangulación!

Y ahora, ya para acabar, falta hallar el método que nos permita recuperar de manera unívoca la raíz de la cuadrangulación. En este punto entra en escena el parámetro binario del que hemos hablado antes: lo que hacemos es utilizar la tabla de conversiones mostrada en la Figura 18, que nos permite reconstruir la raíz inicial de la cuadrangulación.

Mediante estas transformaciones conseguimos construir un mapa con raíz y con un vértice marcado. Pero nos falta comprobar un pequeño detalle...¿es una cuadrangulación? Es decir, ¿todas las caras tienen longitud 4? Veamos que efectivamente es así. Con este propósito, dado un árbol bien etiquetado, vamos a construir el *polígono asociado a su exploración* de la siguiente forma: consideramos la curva cerrada definida al recorrer el contorno del árbol, recordando en que instante encontramos cada

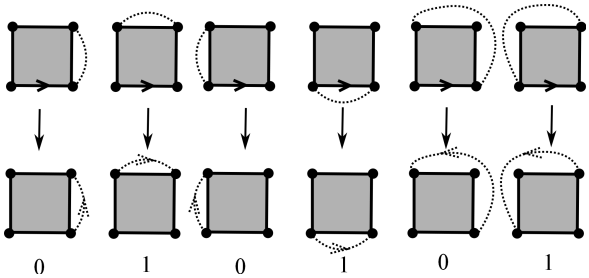

Figura 18: Asociación entre la cara raíz en la cuadrangulación y la manera de asignar la raíz en el árbol bien etiquetado.

una de las esquinas del árbol. Dicha curva se puede deformar a un polígono cuyos vértices son las esquinas del árbol (escritas en sentido antihorario sobre el círculo, ver Figura 19). Entonces las aristas que dibujamos según la construcción propuesta se traducen en aristas que se dibujan en el interior del polígono, utilizando el mismo criterio (es decir, unir un vértice de etiqueta i con el siguiente, en sentido antihorario, inmediatamente posterior con etiqueta $i-1$). Para aclarar posibles dudas, en la Figura 19 se realiza la construcción de dicho polígono para un ejemplo concreto, indicando también que las aristas siempre se dibujarán en el interior del polígono.

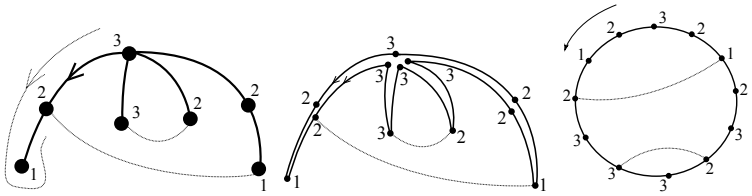

Figura 19: Construcción del polígono asociado a la exploración de un árbol bien etiquetado.

Observar que el polígono asociado a la exploración del árbol tiene el doble de aristas que el árbol inicial, ya que cada arista es recorrida 2 veces. Diremos que dos aristas del polígono que proceden de la misma arista en el árbol son *hermanas*. En particular, podemos recuperar el árbol pegando, dos a dos, todas las parejas de aristas hermanas. Esta observación nos permite traducir argumentos en el interior del polígono a argumentos sobre el árbol. En efecto, veamos qué estructura tienen las aristas que dibujamos en el interior del polígono. Para simplificar los argumentos, supondremos que todas las etiquetas de los vértices que consideraremos son mayores o iguales que 1. Este argumento se puede adaptar fácilmente si alguna de las etiquetas es igual a 1 (donde deberemos de considerar el origen, vértice que debe de añadirse en el interior del polígono y unirlo a los vértices cuya etiqueta es igual a 1).

Consideremos primero una arista (y su hermana) cuyos extremos llevan la misma etiqueta i. En la Figura 20 se muestran todas las posibilidades que pueden darse para este caso al realizar la construcción que antes proponíamos. En todos ellos se

muestra que estas dos aristas forman parte de triángulos. Por lo tanto, al pegar aristas hermanas (que es la operación que realizamos para recuperar el árbol), y eliminar las aristas del árbol (que es lo que hacemos para construir el mapa) lo que obtenemos son caras de longitud 4. En la Figura 20 se muestran también como es la estructura de las caras que se generan en cada uno de los casos, según la posición del vértice (o vértices) con etiqueta $i-1$.

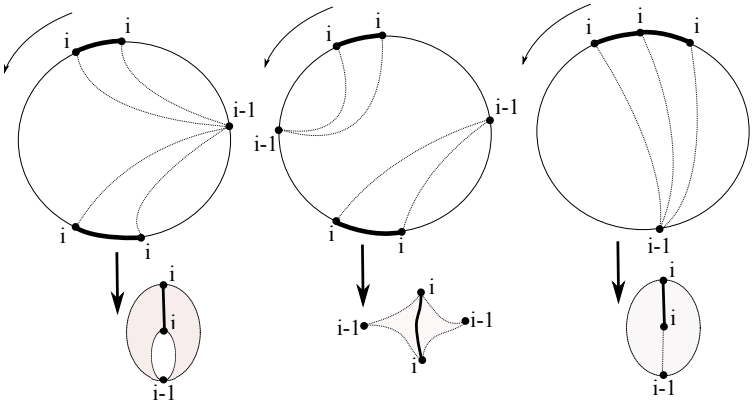

Figura 20: Diferentes casos para las aristas cuyos extremos tienen las mismas etiquetas, y las caras que se obtienen al pegar las aristas hermanas.

Un fenómeno similar sucede en el caso de aristas hermanas que unen vértices con etiquetas distintas, $i+1$ y i. Como antes, los casos que se consideran dependen de la posición del vértice (o vértices) con etiqueta $i-1$ que uniremos a los vértices con etiqueta i considerados. Los distintos casos que pueden acontecerse se resumen en la Figura 21. Observar que en la segunda y quinta figura se consideran vértices pintados en blanco: éstos son necesarios para finalizar el argumento, y aparecen como consecuencia del buen etiquetaje del árbol (en una exploración de un árbol bien etiquetado, entre un vértice de etiqueta $i+1$ y un vértice de etiqueta $i-1$ necesariamente debemos hallar un vértice con etiqueta i).

Hemos demostrado pues la siguiente biyección combinatoria:

Teorema 2 (Biyección de Schaeffer). *Existe una biyección combinatoria entre* $\mathcal{Q}_n^\bullet$ *y* $\{0,1\}\times\mathcal{T}_n$.

Y puesto que en una biyección combinatoria lo importante es que las dos familias combinatorias tratadas tienen el mismo cardinal, resulta que se cumple

$$(n+2)|\mathcal{Q}_n| = |\mathcal{Q}_n^\bullet| = |\{0,1\}\times\mathcal{T}_n| = |\{0,1\}\times\mathcal{C}_n\times\{-1,0,1\}^n| = 2\cdot 3^n C_n,$$

de donde deducimos de manera *elemental* que

$$|\mathcal{Q}_n| = 2\frac{3^n}{n+2}C_n.$$

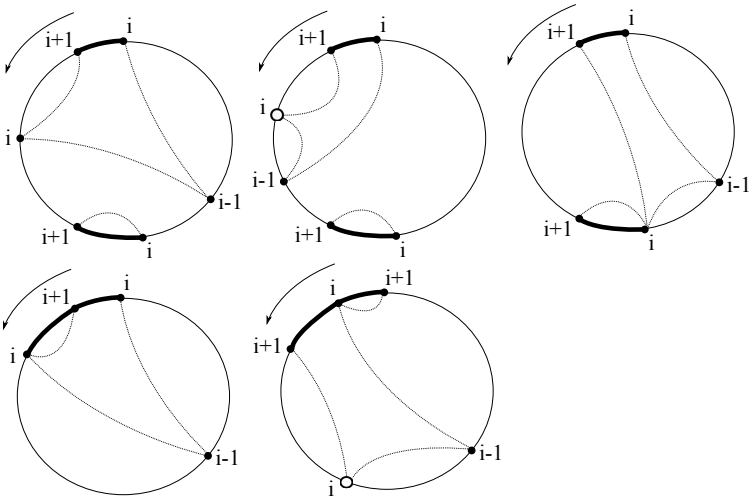

Figura 21: Diferentes casos para las aristas cuyos extremos tienen etiquetas distintas. Los vértices con interior blanco vienen forzados por la condición de que los árboles estén bien etiquetados.

Resumiendo: un mapa con n aristas es, esencialmente, un árbol bien etiquetado. Este hecho, como mostraremos en lo que sigue, tiene conexiones muy profundas con campos aparentemente muy alejados, como la probabilidad, la física estadística y la geometría. Y en todos ellos, el punto en común es la noción de distancia que hemos introducido.

5. La geometría intrínseca de los mapas, superficies y otras aplicaciones

Más allá de dar una bonita explicación a la fórmula de Tutte, la biyección de Schaeffer permite ir más allá, mucho más allá de la enumeración de la familia de mapas planos: permite acceder a la geometría intrínseca del mapa. Veamos que entendemos por ello. En la construcción de los árboles bien etiquetados hemos utilizado la noción de una distancia dentro del mapa: en la cuadrangulaciones hemos distinguido el origen y hemos asociado al resto de vértices la distancia a la que se encuentran respecto a éste. Con este procedimiento estamos dotando a un objeto discreto (el mapa) con una estructura de *espacio métrico*. Puesto que a medida que aumenta el número de caras cambiamos el espacio métrico, resulta de vital importancia hallar el factor de escala adecuado para estudiar la convergencia de estos espacios métricos en el sentido de Gromov-Hausdorff (sin entrar en detalles, en el sentido de la convergencia de los espacios métricos). La pregunta natural a realizarse es la siguiente: ¿cuál es el orden de magnitud de la distancia existente entre dos vértices cualesquiera en una cuadrangulación cualquiera con n caras? Asombrosamente se tiene una respuesta (que no demostraremos) que puede deducirse utilizando la biyección de

Schaeffer:

Teorema 3 (Chassaing-Schaeffer [5]). *Dada una cuadrangulación elegida aleatoriamente de manera uniforme entre todas las que tienen n caras, el orden de magnitud esperado de la distancia existente entre dos vértices elegidos al azar es $n^{1/4}$.*

¡Magnífico! Este resultado nos está diciendo que el factor de escala correcta que hay que considerar al tomar distancias en cuadrangulaciones con $n \to \infty$ es igual a $n^{1/4}$. De hecho, Chassaing y Schaeffer hallan resultados más precisos, relacionados con un objeto probabilístico universal denominado *serpiente browniana*, íntimamente relacionada con el célebre movimiento browniano, y que se obtiene como límite continuo de una secuencia de objetos discretos relacionados con los árboles. Recientemente se ha demostrado que el limite de las cuadrangulaciones con esta distancia (la que hemos definido antes, normalizada por un factor $n^{1/4}$) existe y se ha conseguido entender un poco más sus propiedades topológicas y métricas [8]. A este objeto se le denomina *mapa browniano*; a día de hoy es sin duda un gran desconocido y muchos de los probabilistas que trabajan en el campo de los limites continuos de objetos discretos se hallan volcados en su estudio; todavía queda un largo camino para entender con exactitud sus propiedades geométricas.

En otra dirección la noción de mapa puede también generalizarse en superficies compactas y conexas: la idea es la misma que en mapas planos (dibujos sin cortes de un grafo en la superficie), pero evidentemente surgen complicaciones inherentes al hecho que la superficie que se considera es más compleja: sin ir más lejos, no todo dibujo de un grafo en una superficie define un mapa (sus "caras" podrían ser no contractiles, como se muestra en la Figura 22).

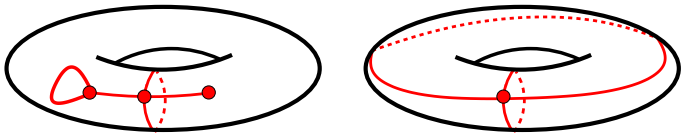

Figura 22: El primer diagrama no define un mapa en el toro. El segundo sí.

Recientemente se ha dado una explicación completa de la enumeración de estos objetos utilizando técnicas biyectivas [3, 4]: del mismo modo que en el caso plano se consigue reducir el estudio a la familia de los árboles, en superficies se observa que el estudio se puede limitar al estudio de las propiedades de los *mapas unicelulares*, o mapas con una sola cara (en el caso de la esfera son precisamente los árboles). ¡Lo sorprendente del caso es que estos objetos se pueden entender utilizando únicamente árboles planos! Así pues, nuevamente resulta que los árboles son las piezas fundamentales para entender la naturaleza de los mapas en superficies de género superior. Existe, pero, todavía mucho camino por andar en cuanto al estudio de los mapas: las técnicas de descomposición utilizando la raíz y las técnicas de integración de matrices son una metodología sistemática para generar fórmulas combinatorias, pero en muchos casos no se conocen explicaciones elementales de éstas. En estas familias se incluyen mapas con raíz en los que los vértices se colorean con algún tipo

de restricción (ejemplos bien conocidos son los modelos *hard-particule* o el modelo de Ising, procedentes de la física estadística), mapas donde se fija que algunas caras tengan unas longitudes fijas, mapas sin raíz, ... Será sólo en los años venideros que nuevas ideas, combinadas con las descomposiciones arbóreas, podrán resolver estos enigmas.

Y el lector, ya en este punto de la narración, podría quejarse aduciendo que no se ha llegado al resultado que el título prometía. Bien, una de las motivaciones para atacar estos problemas proceden de la física teórica: en los últimos 20 años muchos físicos procedentes de distintos campos han empezado a interesarse por considerar los mapas aleatorios como modelos discretos de superficies aleatorias (modelos denominados *modelos Euclídeos 2-dimensionales de gravedad cuántica*). Es de esta manera que, en lugar de atacar el problema continuo de manera directa, se intenta adquirir un buen conocimiento de los objetos discretos y pasar posteriormente al límite continuo. Las ideas físicas de toda esta teoría son claras, pero deficientes todavía desde un punto de vista matemático, y sin duda marcará el desarrollo de una gran parte de la investigación en este punto del universo donde se reúnen la combinatoria, la probabilidad y la geometría.

Agradecimientos: Es para mi una deuda de gratitud la que tengo con Marc Noy por haberme permitido adentrarme, bajo la dirección de su batuta, hacia el mundo de la combinatoria enumerativa, y de ese modo contemplar y aprender de los paisajes de las técnicas biyectivas. Asimismo, agradezco a Gilles Schaeffer todas las conversaciones acerca de mapas en el *bateau* de l'École Polytechnique, en Paris. Finalmente, agradecer a Javier Cilleruelo por ofrecerme la oportunidad de escribir este artículo en la gaceta de la RSME, así como por múltiples sugerencias que han permitido mejorar su presentación.
Este trabajo ha sido financiado por el programa JAE-DOC del CSIC.

Referencias

[1] M. Aigner y G. Ziegler, *El libro de las demostraciones*, Editorial Nivola.

[2] K. Appel y W. Haken, *Every Planar Map is Four Colorable*, Illinois Journal of Mathematics, vol. **21** (1977), 439–567.

[3] G. Chapuy, M. Marcus y G. Schaeffer, *A bijection for rooted maps on orientable surfaces*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, vol. **23** (2009), 1587-1611

[4] G. Chapuy, *The structure of unicellular maps, and a connection between maps of positive genus and planar labelled trees*, Probability Theory and Related Fields, vol. **147** (2010), 415-447.

[5] P. Chassaing y G. Schaeffer, *Random planar lattices and integrated super-Brownian excursion.* Probability Theory and Related Fields, vol. **128** (2004), 161–212.

[6] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi Y J.-B. Zuber, *Planar Diagrams*, Communications in Mathematical Physics, vol. **59** (1978), 35–51.

[7] R. Cori y B. Vauquelin, *Planar maps are well labeled trees*, Canadadian Journal of Mathematics, vol. **33** (1981) 1023–1042.

[8] G. Miermont, *The Brownian map is the scaling limit of uniform random plane quadrangulations*. Disponible en arXiv:1104.1606.

[9] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour y R. Thomas, *Efficiently four-coloring planar graphs*, STOC'96: Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing, (1996), 571–575.

[10] G. Schaeffer, *Conjugaison d'arbres et cartes combinatoires aléatoires*. Tesis doctoral, Université Bordeaux 1, 1998.

[11] W. T. Tutte, *Graph theory as I have known it*. Oxford Lectures Series in Mathematics and its Applications, **11**.

[12] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics. Volume 2*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **62**.

Juanjo Rué Perna, Instituto de Ciencias Matemáticas (CSIC-UAM-UC3M-UCM)
Correo electrónico: `juanjo.rue@icmat.es`