2. Derivació

24-10-2014 1

1. Sigui $f(x)$ una funció derivable. Calculeu,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+3h)^2 - f(x+h)^2}{h}$$

Solució.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+3h)^2 - f(x)^2 - \left(f(x-h)^2 - f(x)^2\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \Big[\underbrace{\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}}_{\downarrow\, f'(x)} \cdot 3 \underbrace{\left(f(x+3h)+f(x)\right)}_{\downarrow\, 2f(x)} + \underbrace{\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}}_{\downarrow\, f'(x)} \underbrace{\left(f(x-h)+f(x)\right)}_{\downarrow\, 2f(x)} \Big] \quad h\to 0$$

$$= 8 f(x) f'(x). \ \triangle$$

1. Sigui $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ i $g(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

(a) Demostreu que $f(x)$ és contínua però no és derivable en $x=0$.

(b) Demostreu que $g(x)$ és derivable en 0 i calculeu $g'(0)$.

Solució.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{0} x\sin\frac{1}{x} = 0$: en efecte, ja que $|x\sin\frac{1}{x}| = |x|\cdot|\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$, $x\neq 0$, d'on: $-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|$ i com que $|x|\to 0$ quan $x\to 0$, aplicant el lema "de l'encaix" resulta $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

En canvi no es derivable en $x=0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x},$$

i aquest límit no existeix. En efecte siguin $x_k = \dfrac{1}{\pi/2 + 2k\pi}$, $\bar{x}_k = \dfrac{1}{3\pi/2 + 2k\pi}$, $k\in\mathbb{N}$.

Clarament $x_k, \bar{x}_k \to 0$ quan $k\to\infty$, però:

$y_k = \sin\frac{1}{x_k} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$, mentre que: $\bar{y}_k = \sin\frac{1}{\bar{x}_k} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$

$= -1 \xrightarrow[k\to\infty]{} -1.$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin 1/x}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin 1/x = 0 = g'(0)$. Δ

12. Signi u una funció derivable de x. Considereu $|u| = \sqrt{u^2}$ per demostrar que $d/dx(|u|) = u' \cdot u/|u|$, $u \neq 0$. Feu servir el resultat per trobar la derivada de les funcions següents.

(a) $h(x) = |x| \cos x$, (b) $f(x) = |x^2 - 9|$

Solució

$$\frac{d}{dx}(|u|) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{u^2}\right) = \frac{2u}{2\sqrt{u^2}} u' = \frac{u}{|u|} u', \text{ si } u \neq 0$$

(a) $h'(x) = \frac{x}{|x|} \cos x - |x| \sin x$, $x \neq 0$. En canvi $\lim_{x\to 0} \frac{|x|\cos x - 0}{x} = \begin{cases} \lim_{0^+}(\dots) = 1 \\ \lim_{0^-}(\dots) = -1 \end{cases}$

d'on $h'(0^+) = 1 \neq h'(0^-) = -1$ i llavors h no és derivable en $x = 0$.

(b) $f'(x) = \frac{x^2-9}{|x^2-9|} \cdot 2x$, $x \neq 0$. En canvi: $\lim_{x\to 3} \frac{|x^2-9|-0}{x-3} = \begin{cases} \lim_{3^+} \frac{|x-3||x+3|}{x-3} = \lim_{3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6 \\ \lim_{3^-} \frac{\dots}{\dots} = \lim_{3^-} \frac{(3-x)(x+3)}{x-3} = -6 \end{cases}$

Per tant $f'(3^+) = 6 \neq f'(3^-) = -6$. Δ

15. Considereu la paràbola $x = y^2$. Trobeu el nombre de rectes normals a la paràbola en els punts següents (a) $(\frac{1}{2}, 0)$; (b) $(1, 0)$; (c) Per a quin valor de $(x_0, 0)$ existeixen dues rectes normals perpendiculars entre si?

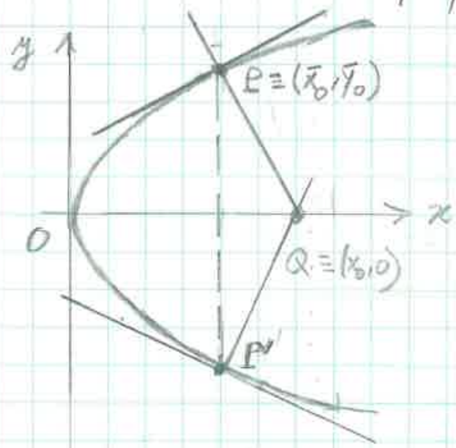


figura 15. Paràbola $x = y^2$.

Solució

Pendent de la recta normal a la paràbola pel punt $P \equiv (\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (\bar{y}_0^2, \bar{y}_0)$ a partir de l'equació de la paràbola, $x = y^2$, derivant implícitament: $1 = 2y(x)\, y'(x)$ s'obté el pendent de la tangent en el punt P: $y'(\bar{x}_0) = \frac{1}{2y(\bar{x}_0)} = \frac{1}{2\bar{y}_0}$. Tenint en compte que rectes perpendiculars tenen pendents recíproques i amb signes oposats, tenim, per la recta normal, l'equació:

$$r \equiv y - \bar{y}_0 = -2\bar{y}_0 (x - \bar{y}_0^2)$$

D'altra banda, volem que la recta r passi pel punt $Q \equiv (x_0, 0)$. Cal doncs que $\bar{y}_0$

verifiqui: $\bar{y}_0 = 2\bar{y}_0(x_0 - \bar{y}_0^2) \iff \bar{y}_0 = 0$ (i llavors $y=0$), o bé $\bar{y}_0^2 = x_0 - \frac{1}{2}$ d'on $\bar{y}_0 = \pm\sqrt{x_0 - \frac{1}{2}}$ (el signe + correspon al punt P sobre la branca superior i el signe − correspon al punt P' sobre la branca inferior). Aleshores:

$\triangledown$ Si $x_0 > \frac{1}{2}$, tenim 3 rectes normals a la paràbola $x = y^2$ que passen pel punt $Q \equiv (x_0, 0)$:

$$y = 0, \quad i \quad y = \mp 2\sqrt{x_0 - \tfrac{1}{2}}\,(x - x_0).$$

(b) En particular, quan $x_0 = 1$ $(>\frac{1}{2})$ aquestes tres rectes són $y=0$, $y = \mp\sqrt{2}\,x \pm \sqrt{2}$.

$\triangledown$ Si $x_0 \le \frac{1}{2}$; en aquest cas només hi ha una recta normal a la paràbola que passa pel punt Q: la recta $y=0$. En particular, per $x_0 = \frac{1}{2}$ (apartat a) només tindrem aquesta recta normal.

(c) Per últim, quan $x_0 > \frac{1}{2}$, les dues rectes $y = \mp 2\sqrt{x_0 - \frac{1}{2}}\,(x - x_0)$ seran perpendiculars si i només si: $2\sqrt{x_0 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0 - \frac{1}{2}}} \iff 4x_0 - 2 = 1 \iff \boxed{x_0 = \frac{3}{4}}$ Δ.

16. Calculeu la derivada de la funció $f(x) = \arctan\dfrac{x+c}{1-xc}$, $x \in \mathbb{R}$ i deduïu que $f(x) = \arctan x + \arctan c$.

Solució. Notem 1er de tot que si $c=0$, llavors la igualtat es verifica de manera immediata, ja que aleshores $f(x) = \arctan x$ i $\arctan c = \arctan 0 = 0$. Suposarem, per tant, que $c \neq 0$.

Vegem, a continuació, que $f(x)$ té una discontinuïtat finita o "de salt" on $x = \frac{1}{c}$. En efecte:

$\triangledown$ Si $c > 0$: $\displaystyle\lim_{x\to(\frac{1}{c})^+} \arctan\frac{x+c}{1-xc} = -\frac{\pi}{2}$, mentre que: $\displaystyle\lim_{x\to(\frac{1}{c})^-} \arctan\frac{x+c}{1-xc} = \frac{\pi}{2}$ (figura 16·1)

($x + c \to \frac{1}{c} + c > 0$, quan $x \to \frac{1}{c}$ i $c>0$; $1 - xc < 0$ si $0 < \frac{1}{c} < x$, d'on $1 - xc \to 0^-$ quan $x \underset{(c>0)}{\to} (\frac{1}{c})^+$. D'altra banda $1 - xc > 0$ si $x < \frac{1}{c}$. Aleshores $1 - xc \to 0^+$ quan $x \underset{(c>0)}{\to} (\frac{1}{c})^-$.)

$\triangledown$ Si $c < 0$: $\displaystyle\lim_{x\to(\frac{1}{c})^+} \arctan\frac{x+c}{1-xc} = \frac{\pi}{2}$, mentre que: $\displaystyle\lim_{x\to(\frac{1}{c})^-} \arctan\frac{x+c}{1-xc} = -\frac{\pi}{2}$ (figura 16·2)

($x + c \to \frac{1}{c} + c < 0$, quan $x \to \frac{1}{c}$ i $c<0$; $1 - xc > 0$ quan $x > \frac{1}{c}$ i llavors $1 - xc \to 0^+$ quan $x \underset{(c<0)}{\to} (\frac{1}{c})^-$

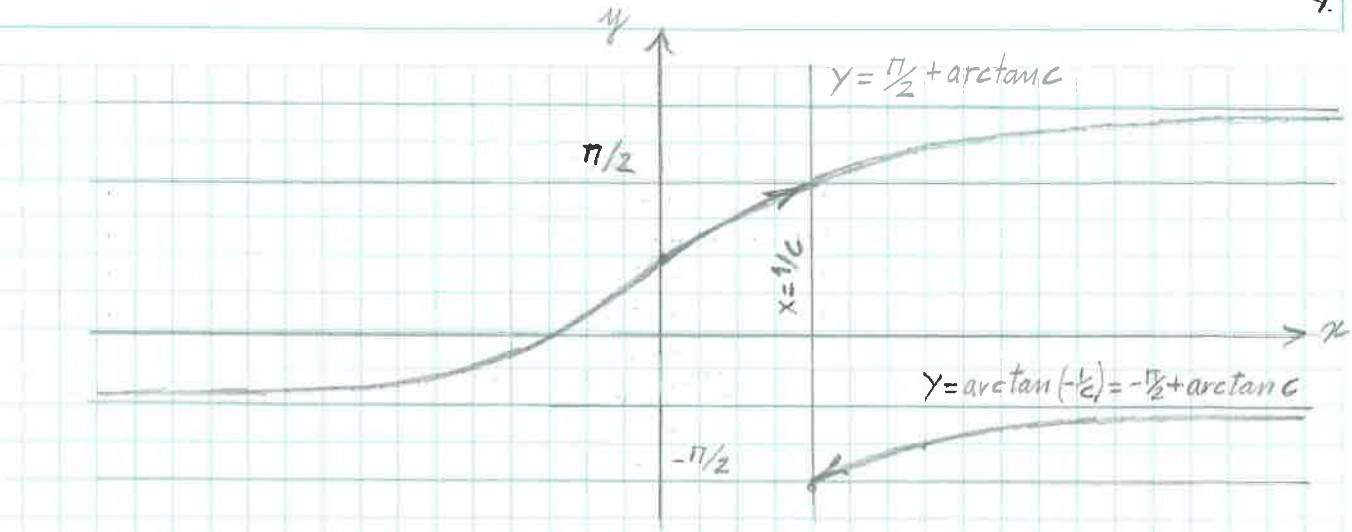


figura 16.1. Gràfiques aproximades de $f(x)=\arctan\frac{x+c}{1-xc}$ i de $g(x)=\arctan x+\arctan c$ per $c>0$.

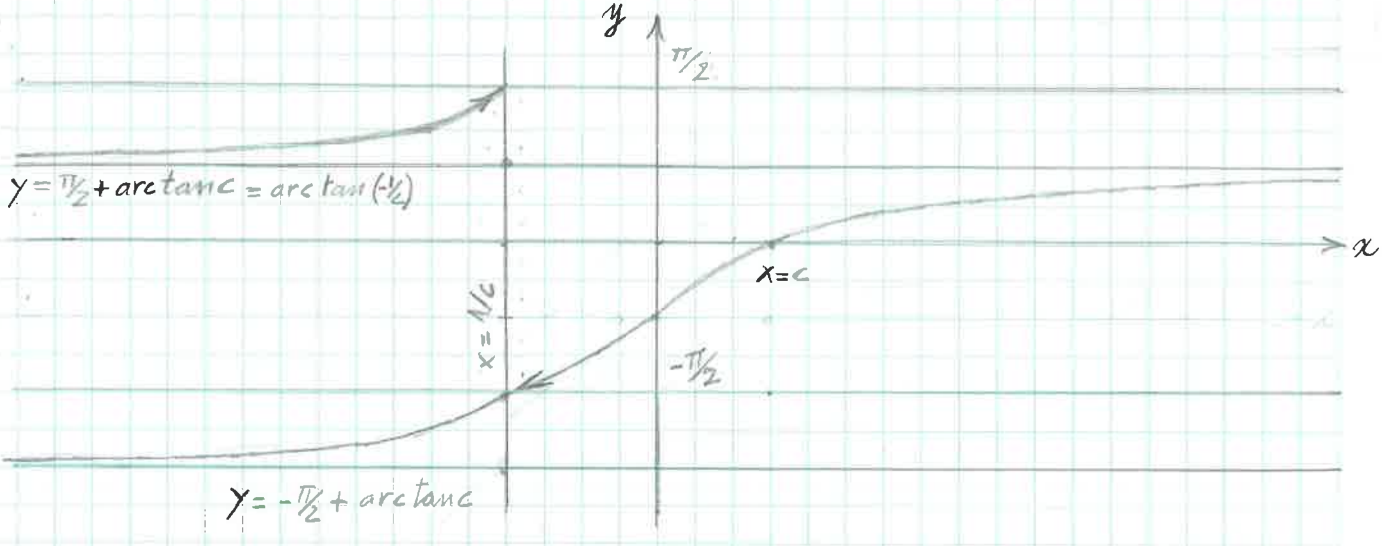


figura 16.2. Gràfiques aproximades de $f(x)=\arctan\frac{x+c}{1-xc}$ i de $g(x)=\arctan x+\arctan c$ per $c<0$.

D'altra banda, per $x\neq 1/c$ es dedueix, a partir de les propietats de les operacions (suma, producte, quocient, composició, etc.) entre funcions derivables, que $f(x)$ és derivable i podem, per tant, calcular la seva derivada aplicant les regles de derivació que ja hem vist:

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+c}{1-xc}\right)^2}\cdot\frac{1-xc+c(x+c)}{(1-xc)^2}=\frac{(1-xc)^2}{1-2xc+x^2c^2+x^2+2xc+c^2}\cdot\frac{1+c^2}{(1-cx)^2}\underset{x\neq 1/c}{=}$$

$$=\frac{\cancel{1+c^2}}{(1+x^2)\,\cancel{(1+c^2)}}=\frac{1}{1+x^2}.\ \text{Per tant } f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=(\arctan x)',\ x\in\mathbb{R}\setminus\{\tfrac{1}{c}\}$$

Suposem $c>0$:

$f(x)-\arctan x = \arctan\frac{x+c}{1-xc} - \arctan x = c_1 \ \forall x\in\left(-\infty,\frac{1}{c}\right)$, $c_1\in\mathbb{R}$ ctnt.

$f(x)-\arctan x = \arctan\frac{x+c}{1-xc} - \arctan x = c_2 \ \forall x\in\left(\frac{1}{c},+\infty\right)$, $c_2\in\mathbb{R}$ ctnt.

Per trobar c_1, c_2:

- Com que $0\in\left(-\infty,\frac{1}{c}\right)$ quan $c>0$: $c_1 = f(0)-\arctan 0 = \arctan c - \arctan 0 = \arctan c$
- $c_2 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\arctan x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\arctan\frac{x+c}{1-xc}-\arctan x\right) = \underbrace{\arctan\left(-\frac{1}{c}\right)}_{\arctan c-\frac{\pi}{2}\ (*)} - \frac{\pi}{2}$

  $= \arctan c - \pi$;

Llavors:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \arctan\frac{x+c}{1-xc} = \arctan x + c_1 = \arctan x + \arctan c, \ \forall x\in\left(-\infty,\tfrac{1}{c}\right)\\ f(x) &= \arctan\frac{x+c}{1-xc} = \arctan x + c_2 = \arctan x + \arctan c - \pi, \ \forall x\in\left(-\infty,\tfrac{1}{c}\right)\end{aligned}}$$

De la mateixa manera, si suposem $c<0$:

$f(x)-\arctan x = \hat{c}_1 \ \forall x\in\left(-\infty,\frac{1}{c}\right)$, $\hat{c}_1\in\mathbb{R}$ ctnt.

$f(x)-\arctan x = \hat{c}_2 \ \forall x\in\left(\frac{1}{c},+\infty\right)$, $\hat{c}_2\in\mathbb{R}$ ctnt.

Llavors:

$\hat{c}_1 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\arctan x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\arctan\frac{x+c}{1-xc}-\arctan x\right) =$

$= \underbrace{\arctan\left(-\frac{1}{c}\right)}_{\arctan c+\frac{\pi}{2}\ (*)} + \frac{\pi}{2} = \arctan c + \pi$, d'on: $\boxed{f(x) = \arctan\frac{x+c}{1-xc} = \arctan x + \arctan c + \pi \quad \forall x\in\left(-\infty,\tfrac{1}{c}\right)}$

$\hat{c}_2 = f(0) - \arctan 0 = \arctan c - \arctan 0 = \arctan c$,

d'on:

$$\boxed{f(x) = \arctan\frac{x+c}{1-xc} = \arctan x + \arctan c, \ \forall x\in\left(\tfrac{1}{c},+\infty\right)}$$ $\square$

(*) Si $c>0$: $0\le d := \arctan c \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow c = \tan d \overset{\neq 0}{\Leftrightarrow} 1/c = 1/\tan d = \cos d/\sin d =$
$= \sin(\frac{\pi}{2}-d)/\cos(\frac{\pi}{2}-d) = \tan(\frac{\pi}{2}-d)$; d'on: $\arctan(1/c) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-d\right)\right) =$
$= \frac{\pi}{2}-d$ i llavors: $\arctan c + \arctan 1/c = \pi/2$

Anàlogament, si $c<0$; posem: $-\frac{\pi}{2} \le d := \arctan c \le 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c = \tan d > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{\cos d}{\sin d} = -\frac{\sin(d+\frac{\pi}{2})}{\cos(d+\frac{\pi}{2})} = -\tan(\frac{\pi}{2}+d)$, d'on:
$\arctan(\frac{1}{c}) = \arctan(-\tan(\frac{\pi}{2}+d)) = -\arctan(\tan(\frac{\pi}{2}+d)) = -\frac{\pi}{2}-d \Leftrightarrow \arctan c + \arctan(\frac{1}{c}) = -\frac{\pi}{2}$

---

19) Signi f una funció dues vegades derivable en el interval I, tal que $f''(x)>0$. Proveu que per a tot $a,b \in I$ és té:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{19.1}$$

Solució. Provarem quelcom més general; provarem que, sota les condicions de l'enunciat:

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b), \text{ per tot } 0 \leq t \leq 1.$$

Sense pèrdua de generalitat, suposarem $b>a$. Considerem l'interval $J=[a,b] \subset I$. Definim, a l'interval $[0,1]$, la funció:

$$F(t) := f((1-t)a+tb), \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{19.2}$$

Com que f és dos cops derivable en $[a,b]$, F és dos cops derivable en $[0,1]$ $^{(*)}$. Aplicant la regla de la cadena tenim que:

$$F'(t) = f'((1-t)a+tb)\cdot(b-a), \quad F''(t) = f''((1-t)a+tb)(b-a)^2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Signi, t, 0 t 1, qualsevol. Aplicant el teorema del valor mig, tenim que existeixen α,β amb $0<\alpha<t<\beta<1$ tals que:

$$F(t) = F(0) + F'(\alpha)t,$$
$$F(t) = F(1) + F'(\beta)(1-t).$$

Si multipliquem la primera per $(1-t)$, la segona per t i sumem, obtenim:

$$F(t) = (1-t)F(0) + tF(1) - (F'(\beta)-F'(\alpha))t(1-t). \tag{19.3}$$

Aplicant de nou el teorema del valor mig $^{(**)}$, veiem que existeix γ, amb $0<\alpha<\gamma<\beta$ de manera que: $F'(\beta)-F'(\alpha) = F''(\gamma)\cdot(\beta-\alpha)$.

(*) Notem que $F = f\circ g$, amb $g:[0,1] \to [a,b]$ donada per $g(t) = (1-t)a+tb$
(**) F és dos cops derivable, per tant F' és derivable!

Si ara considerem la definició de F donada a (19.2), tenim:

$F(0)=a$, $F(1)=b$ i $F'(\beta)-F'(\alpha) = F''(\gamma)(\beta-\alpha) = f''((1-\gamma)a+\gamma b)(b-a)^2(\beta-\alpha)>0$

ja que $a<(1-\gamma)a+\gamma b<b$ i $f''>0$ en $I\supseteq J:=[a,b]$. D'aquesta manera, substituint a (19.3) s'arriba a la desigualtat que volíem provar:

$$f((1-t)a+tb) = (1-t)f(a)+t f(b) - \underbrace{f''((1-\gamma)a+\gamma b)(b-a)^2(\beta-\alpha)}_{\geq 0}$$

$$\leq (1-t)f(a)+t f(b), \qquad (19.4)$$

vàlida per qualsevol $0\leq t\leq 1$.(*) La desigualtat (19.1) de l'enunciat s'obté agafant $t=1/2$.

Nota (1). Si volem provar ~~directament~~ directament la desigualtat (19.1). Podem procedir de la manera següent, també aplicant el Teorema del Valor Mig (**)

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a) = f'(\alpha)\cdot\left(\frac{a+b}{2}-a\right) = f'(\alpha)\cdot\frac{b-a}{2}, \text{ per algun } \alpha \text{ amb } a<\alpha<\frac{a+b}{2}.$$

$$f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'(\beta)\cdot\left(b-\frac{a+b}{2}\right) = f'(\beta)\cdot\frac{b-a}{2}, \text{ per algun } \beta \text{ amb } \frac{a+b}{2}<\beta<b$$

D'altra banda, com que $f''>0$ en I, f' és creixent en l'interval $J=[a,b]\subseteq I$, i com que $\alpha<\beta$ tenim: $f'(\alpha)<f'(\beta)$ d'on: $\frac{b-a}{2}f'(\alpha) < \frac{b-a}{2}f'(\beta)$ i llavors:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a) = \frac{b-a}{2}f'(\alpha) < \frac{b-a}{2}f'(\beta) = f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

d'on es segueix la desigualtat:

Nota (2). La desigualtat (19.4) $\forall\, 0\leq t\leq 1$, defineix funció convexa, i.e., una funció és convexa(***) en l'interval $[a,b]$ si $f((1-t)a+tb)\leq(1-t)f(a)+tf(b)$ $\forall t\in[0,1]$. Aleshores el resultat obtingut demostra que si f és contínua en l'interval $[a,b]$ i derivable dos cops en (a,b) amb $f''>0$ en tot punt d'aquest interval. Llavors f és convexa en $[a,b]$. (que és el Teorema que hem vist a Teoria):

Funció convexa: la ~~corba~~ corda que uneix els punts $A\equiv(a,f(a))$ i $B\equiv(b,f(b))$ està per sobre de la gràfica de la funció (veure figura).

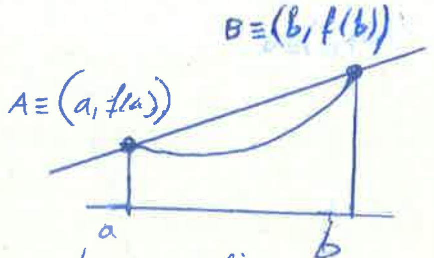


figura 19.1

(*) Notem que la igualtat correspon a $t=0$ i $t=1$ respectivament.

(**) Sense pèrdua de generalitat, suposem que $b>a$.

(***) La gràfica de la funció està per sota de la corda que uneix els extrems $(a,f(a))$ i $(b,f(b))$. Veure figura 19.1

22) En els casos següents useu la derivada per determinar si la funció $f(x)$ té una funció inversa global.

(a) $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$ b) $f(x) = \ln(x-3)$

Solució (a) $f'(x) = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3x}{2}\right) > 0 \iff \pi + 2k\pi < \frac{3x}{2} < 2\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$\iff \frac{2+4k}{3}\pi < x < \frac{4}{3}(1+k)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

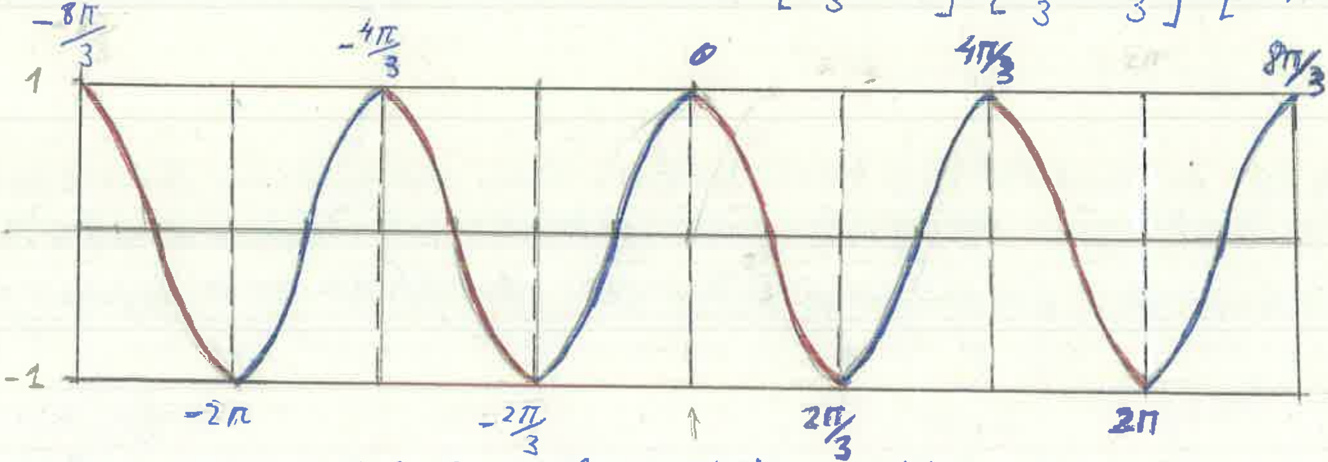
$< 0 \iff 2k\pi < \frac{3x}{2} < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\iff \frac{4}{3}k\pi < x < \frac{2}{3}(1+2k)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

- f (estrictament) creixent en: $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{2+4k}{3}\pi, \frac{4}{3}(1+k)\pi\right]$, per tant invertible sobre cadascun dels intervals: $\left[\frac{2+4k}{3}\pi, \frac{4}{3}(1+k)\pi\right], k \in \mathbb{Z}$
$\left(\dots, \left[\frac{10\pi}{3}, -\frac{8\pi}{3}\right], \left[-2\pi, -\frac{4\pi}{3}\right], \left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right], \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right], \left[2\pi, \frac{8\pi}{3}\right], \left[\frac{10\pi}{3}, 4\pi\right], \dots\right)$

- f (estrictament) decreixent en: $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{4}{3}k\pi, \frac{2}{3}(1+2k)\pi\right]$, per tant invertible sobre cadascun dels intervals: $\left[\frac{4}{3}k\pi, \frac{2}{3}(1+2k)\pi\right], k \in \mathbb{Z}$
$\left(\dots, \left[-\frac{8\pi}{3}, -2\pi\right], \left[-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right], \left[0, \frac{2\pi}{3}\right], \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right], \left[\frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}\right], \left[4\pi, \frac{14\pi}{3}\right], \dots\right)$

figura 22.a



Llavors, clarament la funció $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$ no és globalment invertible

(b) $f(x) = \ln(x-3),\ x > 0,\ f'(x) = \frac{1}{x-3} > 0$, llavors f és (estrictament) creixent per $x > 3$ i per tant invertible sobre tot el seu camp de definició. Δ

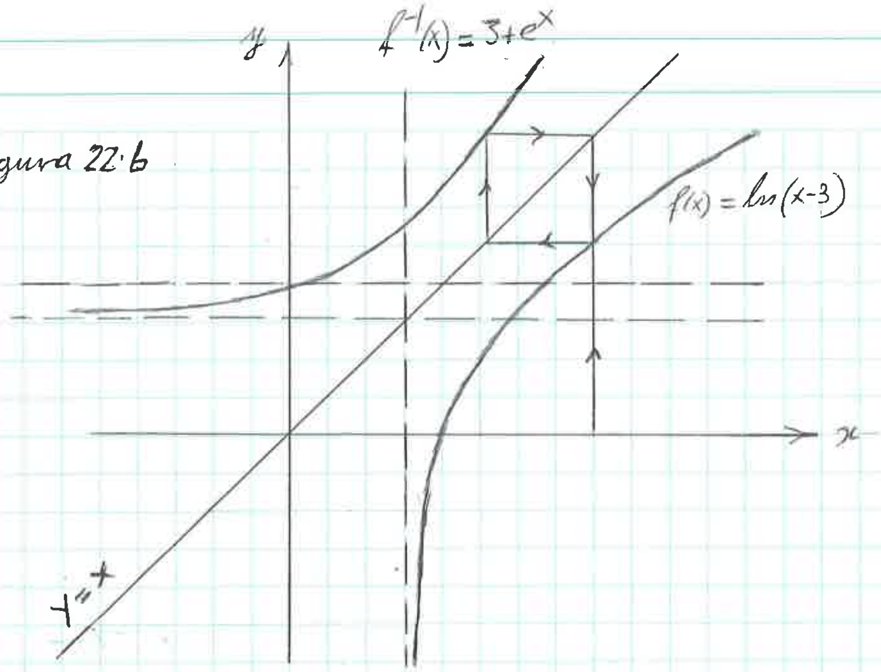


figura 22·b

Per tant f és globalment invertible (veure figura).

23 Representeu esquemàticament les següents funcions i indiqueu en quins intervals $[a,b]$ són injectives.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2$, (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Solució. (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$ >0 per $x>3$, <0 " $x<3$

$f<0$ $\quad$ $f>0$ ($x=3$)

f és derivable en tot $\mathbb{R}$: podem estudiar el seu creixement/decreixement mirant els signes de la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$; aleshores.

- $f'(x) > 0 \iff x \leq 0$ ó $x \geq 2$; i llavors f és creixent a $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$
- $f'(x) < 0 \iff 0 \leq x \leq 2$; i llavors f decreix a $[0,2]$.

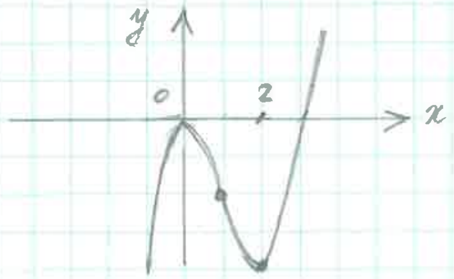


figura 23a

$f'>0$ $\quad$ $f'<0$ $\quad$ $f'>0$

$x=0$ $\quad$ $x=2$

MÀX. rel. $\quad$ mín. rel.

$f(0)=0$ $\quad$ $f(2) = 4(-1) = -4$.

En conclusió f és injectiva als intervals $[-\infty, 0]$ (estrictament) creixent; $[0,2]$ (estrictament) decreixent i $[2,+\infty)$ (estrictament) creixent.

(b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$: és derivable en tot $\mathbb{R}$ (quocient de funcions derivables i el denominador no s'anul·la per a cap valor de x), la seva derivada val: $f'(x)=\dfrac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}=$

$$=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}=-\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}=-\frac{(x-(-1+\sqrt{2}))(x-(-1-\sqrt{2}))}{(x^2+1)^2}$$

. Així, els intervals de creixement/decreixement són, esquemàticament:

$f'<0$		$f'>0$		$f'<0$
$\searrow$	$x=-1-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$x=-1+\sqrt{2}$	$\searrow$
	mín. rel.		MÀX. rel.	

D'aquest esquema es segueix:

- f (Estrictament) creixent en $[-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}]$,
- f (estrictament) decreixent en $(-\infty,-1-\sqrt{2}]\cup[-1+\sqrt{2},+\infty)$

$f(-1-\sqrt{2})=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ $f(-1+\sqrt{2})=\dfrac{\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{2})}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

Així, f és injectiva en els intervals $(-\infty,-1-\sqrt{2}]$, $[-1+\sqrt{2},+\infty)$ (estric. decreixent) i a l'interval $[-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}]$ (estric. creixent).

Tot i que l'enunciat no ho demana, podem, per afinar la representació gràfica de la funció, podem discutir la convexitat/concavitat de la funció a partir de l'estudi dels signes de la derivada 2ª. f' és derivable en tot $\mathbb{R}$ (pel mateix motiu que ho era f). Per trobar f'' apliquem la regla de derivació d'un quocient i obtenim:

$$f''(x)=-\frac{(x^2+1)^2(2x+2)-(x^2+2x-1)4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=-\frac{(x^2+1)(2x^3+2x^2+2x+2-4x^3-8x^2+4x)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2x^3+6x^2-6x^2-2}{(x^2+1)^3}=2\,\frac{(x-1)(x-(-2-\sqrt{3}))(x-(-2+\sqrt{3}))}{(x^2+1)^3}$$

	$x-(-2-\sqrt{3})$	$x-(-2+\sqrt{3})$	$x-1$	f''	
$-\infty,-2-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	$-$	CONCAVITAT
$-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}$	$+$	$-$	$-$	$+$	CONVEXITAT
$-2+\sqrt{3},1$	$+$	$+$	$-$	$-$	CONCAVITAT
$1,+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	CONVEXITAT.

$f''<0$		$f''>0$		$f''<0$		$f''>0$
	$x=-2-\sqrt{3}$		$x=-2+\sqrt{3}$		$x=1$	
CONCAVITAT		CONVEXITAT		CONCAVITAT		CONVEXITAT

Punts d'inflexió: $x=-2-\sqrt{3}$: $f(-2-\sqrt{3})=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\simeq-0{\cdot}18301\ldots$; $x=-2+\sqrt{3}$, $f(-2+\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}\simeq 0'6830\ldots$,

$x=1,\ f(1)=1:$

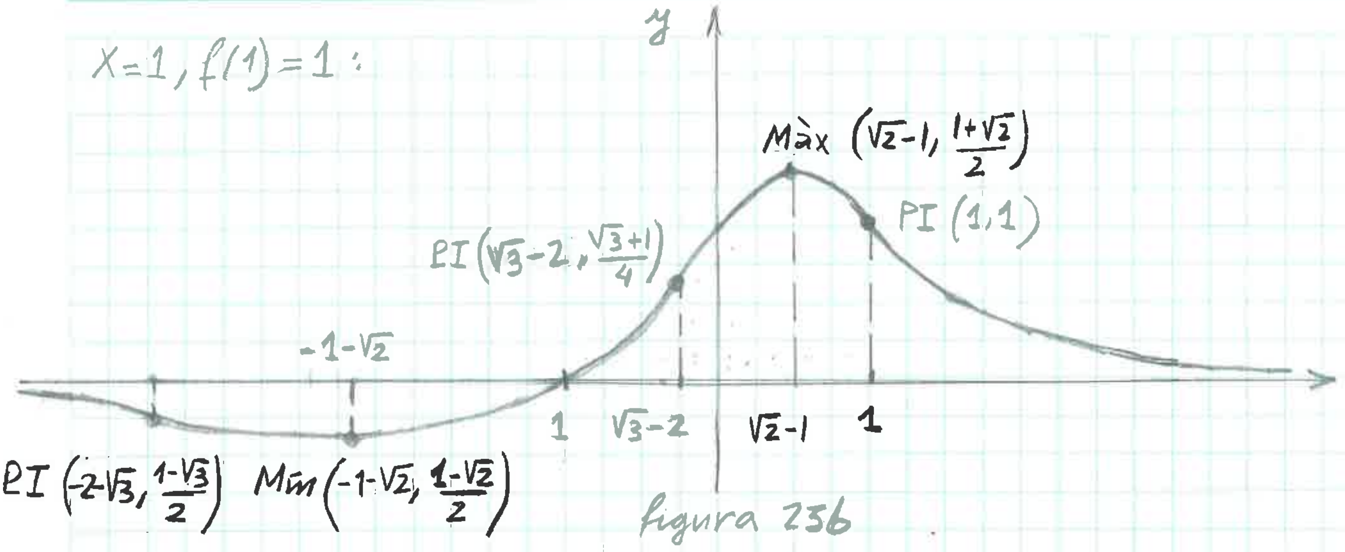


figura 236

Remarca. En aquest cas veiem que els extrems relatius trobats són, de fet, extrems absoluts. $\triangle$

25. En els casos següents troben dy/dx mitjançant la derivada implícita:

(a) $x^3-3x^2y+2xy^2=12$

$\frac{d}{dx}: 3x^2-6xy-3x^2y'+2y^2+4xyy' = (4xy-3x^2)y'+2y^2+3x^2-6xy=0$

$$\Leftrightarrow y'(x) = \frac{6xy(x)-3x^2-2y(x)^2}{4xy(x)-3x^2}.$$

(b) $\left(\sin(\pi x)+\cos(\pi y)\right)^2=2$

$\frac{d}{dx}: 2\left(\sin(\pi x)+\cos(\pi y)\right)\cdot\left(\pi\cos(\pi x)-\pi\sin(\pi y)\,y'\right)=0 \not\Leftrightarrow y'(x)=\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi y(x))}$

(c) $y=\sin(xy)$

$\frac{d}{dx}: y'=(y+xy')\cdot\cos(xy) \Leftrightarrow \left(1-x\cos(xy)\right)y'=y\cos(xy)$

$$\Leftrightarrow y'(x)=\frac{y(x)\cos(xy(x))}{1-x\cos(xy(x))}.\ \triangle$$

26. Calculeu el pendent de la recta tangent en el punt $(4,2)$ de la lemniscata

$$3(x^2+y^2)^2=100(x^2-y^2)$$

Solució.

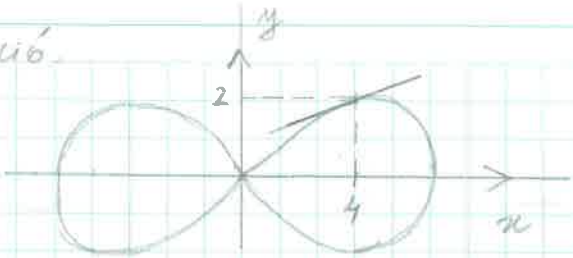


figura 26: lemniscata. Veure la pàgina de Wikipedia es.wikipedia.org/wiki/Lemniscata

(4,2) és un punt de la lemniscata, i.e. és solución de la ecuación $3(x^2+y^2)^2=100(x^2-y^2)$:

$$3(16+4)^2 = 3\cdot 400 = 1200 = 100(4^2-2^2)$$

Derivant implícitament l'equació:

$$6(x^2+y^2)(2x+2yy') = 100(2x-2yy')$$

$$\iff 3x(x^2+y^2)+3(x^2+y^2)yy' = 50x-50yy'$$

$$\iff (3(x^2+y^2)+50)yy' = (50-3(x^2+y^2))x$$

Avaluant en $x=4$ i tenint en compte que $y(4)=2$:

$$(3(4^2+2^2)+50)y(4)y'(4) = (50-3(4^2+2^2))4 \iff 220y'(4) = -40$$

$$\iff \boxed{y'(4) = -\frac{2}{11}}$$

Exercici. Quant val $(y^{-1})'(2)$?

29 apartats a, c, d, g, h, o, p.

29. En els casos següents, descriviu el tipus de forma indeterminada (si n'hi ha) que s'obté per substitució directa, i avalueu el límit usant la regla de l'Hôpital, si cal.

(a) $\lim_{x\to\infty} x\ln x = \boxed{+\infty}$

(c) $\lim_{x\to0^+}(e^x+x)^{2/x} = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{2}{x}\ln(e^x+x)}$ " $= e^{\frac{0}{0}}$ "

$\lim_{x\to0^+}\frac{2D\ln(e^x+x)}{D(x)} = \lim_{0^+}\frac{2(1+e^x)}{x+e^x} = 4$, d'on: $\lim_{0^+}(e^x+x)^{2/x} = \boxed{e^4}$

(d) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ = " ∞^0 " $= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{D(\ln x)}{D(x)} = \lim_{+\infty}\frac{1/x}{1} = 0 \xRightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$. Per tant:

$\lim_{+\infty} x^{1/x} = \lim_{+\infty} e^{\ln x/x} = e^{\lim_{\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^0 = \boxed{1}$

(g) $\lim_{x\to0^+}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^x = \lim_{x\to0^+}(\sin x)^x = 0^0 = \lim_{0^+} e^{x\ln(\sin x)}$

$$\lim_{0^+} \frac{\ln(\sin x)}{1/x} = \frac{-\infty}{+\infty};\quad \lim_{0^+} \frac{D\ln(\sin x)}{D(\frac{1}{x})} = \lim_{0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{0^+}\left(-x\cos x \cdot \frac{x}{\sin x}\right) = 0$$

L'Hôp

$$\Rightarrow \lim_{0^+} x\ln(\sin x) = 0 \text{ d'on: } \lim_{0^+}\left[\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\right]^x = e^{\lim_{0^+} x\ln(\sin x)} = e^0 = \boxed{1}$$

h) $$\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{1}{x^2-4} - \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}\right] = \text{"}\infty-\infty\text{"}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{D(1-\sqrt{x-1})}{D(x^2-4)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x-1}}}{2x} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-1}{4x\sqrt{x-1}} = \frac{-1}{8}.$$

d'on, aplicant la regla de l'Hôpital, resulta: $\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{1}{x^2-4} - \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}\right] = \boxed{-\frac{1}{8}}$

(o) $$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan x - (\pi/4)}{x-1} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

Mirem el límit del quocient de derivades: $\lim_{x\to 1} \frac{D(\arctan x - \pi/4)}{D(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\arctan x - \pi/4}{x-1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(p) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ (Notem que: $0 \le \left|\frac{\cos x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|}$ $\forall x \neq 0$. La regla de l'Hôpital no s'aplica en aquest cas.)

Exercici: completeu els apartats b, e, f, i, j, k, l, m, q, r. Δ

30. Proveu que
$$\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$$
sense calcular $\sqrt{66}$.

Solució: Considerem $f(x) = \sqrt{x}$ i els punts $b = 66$, $a = 64$. f és derivable en l'interval $[a,b] = [64, 66]$ (de fet és derivable en tot el seu camp de definició, $x>0$).
Aleshores, pel Teorema del Valor Mig, existeix α, amb $64 < \alpha < 66$, t.q.:

$$\underbrace{f(66)}_{\sqrt{66}} - \underbrace{f(64)}_{8} = f'(\alpha)\cdot(66-64) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \qquad (30.1)$$

D'altra banda, com que $64 < \alpha < 66 \Leftrightarrow 8 = \sqrt{64} < \sqrt{\alpha} < \sqrt{66} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{66}} < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \frac{1}{8}$, i encara $\frac{1}{\sqrt{66}} > \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}$. Aleshores, de (30.1) es deriva la fita per la diferència $\sqrt{66}-8$ donada a l'enunciat: $\frac{1}{9} = \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{\sqrt{66}} < \sqrt{66} - 8 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \frac{1}{8}$. Δ

37 Siguin $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcions contínues i derivables en (a,b). Proveu que existeix una $c \in (a,b)$ tal que

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(c) & g'(c) & h'(c) \end{vmatrix} = 0$$

Apliqueu aquest resultat per deduir el teorema del valor mig

S. Definim $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ donada per $x \in [a,b] \to F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}$.
Obviament F és contínua i derivable en (a,b), amb:

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \end{vmatrix}.$$ En efecte: $F(x) = f(x) \cdot \begin{vmatrix} g(a) & h(a) \\ g(b) & h(b) \end{vmatrix} - g(x) \begin{vmatrix} f(a) & h(a) \\ f(b) & h(b) \end{vmatrix} + h(x) \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix}$,

i llavors: $F'(x) = f'(x) \cdot \begin{vmatrix} g(a) & h(a) \\ g(b) & h(b) \end{vmatrix} - g'(x) \begin{vmatrix} f(a) & h(a) \\ f(b) & h(b) \end{vmatrix} + h'(x) \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \end{vmatrix}$. D'altra Banda: $F(a) = 0 = F(b)$ (el determinant té dues files idèntiques). Per tant, pel Teorema de Rolle, existeix $c \in (a,b)$ t.q.

$$F'(c) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(c) & g'(c) & h'(c) \end{vmatrix} = 0,$$ i aquest és el resultat que buscàvem. El Teorema del valor mig s'obté agafant $g(x) = x$ i $h(x) = 1$ (funció constant idènticament $= 1$):

$$F'(c) = \begin{vmatrix} f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f'(c) & 1 & 0 \end{vmatrix} = f(b) - bf'(c) - f(a) + af'(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b-a),$$

per algun $c \in (a,b)$. Δ

(31) Siguin $f(x), g(x)$ dues funcions contínues a $[a,b]$ i derivables a l'interior. Suposem que $g'(x) \neq 0$ per a tot $x \in (a,b)$. Proveu que existeix c tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Solució. A problema 37, agafant $h \equiv 1$ (funció ctnt. 1: $h(x)=1 \; \forall x \in [a,b]$). Aleshores $\exists \; c \in (a,b)$ t.q.

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f'(c) & g'(c) & 0 \end{vmatrix} = f'(c) \cdot \begin{vmatrix} g(a) & 1 \\ g(b) & 1 \end{vmatrix} - g'(c) \cdot \begin{vmatrix} f(a) & 1 \\ f(b) & 1 \end{vmatrix} = f'(c) \cdot (g(a)-g(b)) - g'(c) \cdot (f(a)-f(b)) = 0$$

$$\underset{(g'(x)\neq 0 \; \forall x)}{\Longleftrightarrow} \boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$ (que és el que volíem provar). $\triangle$

(32) Trobeu els extrems absoluts de

(a) $y = 3x^{2/3} - 2x$, $x \in [-1,1]$; (b) $y = 3 - |x-3|$ en $x = [-1,5]$; (c) $y = \tan\left(\frac{\pi x}{8}\right)$, en $[0,2]$

(a) $y'(x) = 2x^{-1/3} - 2$, $x \neq 0$.

En $x=0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x^{2/3} - 2x}{x} = \lim_{x \to +0^+} \left(\frac{2}{x^{1/3}} - 2\right) = +\infty \Rightarrow f'(0^+) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2x^{2/3} - 2x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{2}{x^{1/3}} - 2\right) = -\infty \Rightarrow f'(0^-) = -\infty$$

$y(x)$ no és derivable en $x=0$. D'altra banda:

$$y'(x) = 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1\right) = 0, \; x \neq 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Aleshores, els candidats a extrems absolut són:

- Els punts crítics $x=0$, $x=1$.
- Els extrems de l'interval: $x=-1$, $x=1$.

Avaluant la funció en aquests punts veiem doncs:

$x=0$: $y(0)=0$, $x=1$: $y(1)=1$, $x=-1$: $y(-1)=5$

Per tant $y(x) = 3x^{2/3} - 2x$ té, a l'interval $[-1,1]$:

Un MÀXIM absolut en $x=-1$, on la funció val $y(-1)=5$ i
" mínim " " $x=0$, " " " " $y(0)=0$.
(Veure figura 32.1)

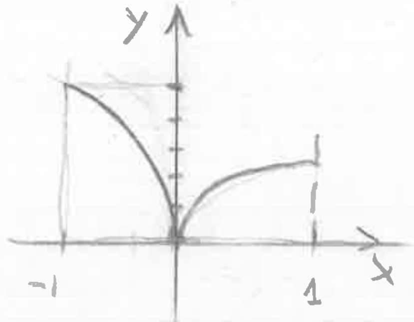


figura 32.1

b) $y = 3-|x-3|$ en $[-1,5]$:

$$y'(x) = -\frac{x-3}{|x-3|} = \begin{cases} -1, & x>3 \\ 1, & x<3 \end{cases} \quad \text{per } x\neq 3$$

En $x=3$ la funció no és derivable. En efecte:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\cancel{3}-|x-3|-\cancel{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3^+}\left(-\frac{x-3}{x-3}\right) = -1, \text{ mentre que:}$$

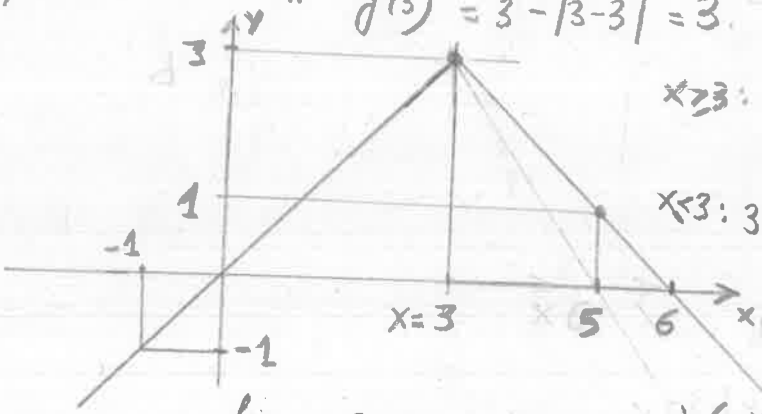
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{3-|x-3|-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{+(x-3)}{x-3} = 1$$

Aleshores $y'(3^+)=-1$, $y'(3^-)=1$. Així, els candidats a extrems absoluts són:

Punts crítics: $x=3$: $y(3)=3$
Extrems de l'interval: $x=-1$: $y(-1)=-1$ i $x=5$: $y(5)=1$
Per tant els extrems absoluts de la funció $y(x)=3-|x-3|$ en l'interval $[-1,1]$ es troben als punts:

- $x=-1$: Mínim absolut, on la funció val $y(-1) = 3-|-1-3| = 3-4 = -1$
- $x=3$: MÀXIM absolut, " " " " $y(3) = 3-|3-3| = 3$.

(veure figura 32.2). Δ



$x\geq 3$: $3-|x-3| = \cancel{3}-x+\cancel{3}$
$= 6-x$,
$x<3$: $3-|x-3| = \cancel{3}+x-\cancel{3}$
$= x$,

figura 32.2; $y = 3-|x-3| = \begin{cases} 6-x, & x\geq 3 \\ x, & x\leq 3 \end{cases}$

(c) $y = tg\left(\frac{\pi x}{8}\right)$, $x\in[0,2]$:

$0\leq x\leq 2 \iff 0\leq \frac{\pi x}{8} \leq \frac{\pi}{4}$. $y(x)$ és derivable en $[0,2]$ i la seva derivada val:

$y'(x) = \frac{\pi}{8}\left(1+tg^2\frac{\pi x}{8}\right) > 0 \ \forall x\in[0,2]$. Aleshores $y(x)$ és monòtona creixent en $[0,2]$. Per tant $x=0$ serà un punt de mínim absolut a l'interval $[0,2]$ on val $y(0) = 0$ i $x=2$ és un punt de MÀXIM ABSOLUT a l'interval, on val $y(2) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$. Δ

33. Useu el Teorema de Bolzano i el Teorema de Rolle per demostrar que les equacions següents tenen exactament una solució real

(a) $x^5+x^3+x+1=0$ (b) $3x+1-\sin x=0$

Solució.

(a) Busquem zeros de la funció $f(x)=x^5+x^3+x+1$. Aquesta funció és un polinomi, per tant és derivable en tot $\mathbb{R}$. Aleshores tenim:

$f(0)=1>0$, $f(-1)=(-1)^5+(-1)^3-\cancel{1}+\cancel{1}=-2<0$ i aplicant el Teorema de Bolzano, existeix $c\in(-1,0)$ t.q. $f(c)=0$. Aquest zero (aquesta solució de l'equació) és únic. En efecte suposem que existeix $d\in\mathbb{R}$ $d\neq c$ t.q. $f(d)=0$ (sense pèrdua de generalitat podem suposar $d>c$); llavors $f(c)=f(d)$ $(=0)$ i pel Teorema de Rolle —el qual veiem que podem aplicar perquè f és derivable en tot $\mathbb{R}$, en particular en l'interval (c,d), i per tant contínua en tot $\mathbb{R}$, en particular en l'interval $[c,d]$— existeix $\gamma\in(c,d)$ t.q. $f'(\gamma)=0$. D'altra banda, però: $f'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ $\forall x$: contradicció. Per tant, necessàriament $d=c$ (unitat).

(B) $g(x):=3x+1-\sin x$. Aquesta funció es derivable en tot $\mathbb{R}$. Pren valors amb signes oposats en $x=0$ i en $x=-\pi$: $g(0)=3\cdot0+1-\sin 0=1>0$; mentre que $g(-\pi)=-3\pi+1-\sin(-\pi)=-3\pi+1<0$. Llavors, pel Teorema de Bolzano, existeix $c\in(-\pi,0)$ t.q.: $g(c)=3c+1-\sin(c)=0$. Suposem ara que existeix $d\in\mathbb{R}$, $d\neq c$ t.q. $g(d)=0$ (sense pèrdua de generalitat podem suposar $d>c$). Aleshores, com que g és derivable en tot $\mathbb{R}$ —en particular es derivable en (c,d) i contínua en $[c,d]$— El Teorema de Rolle estableix l'existència d'un punt γ entre c i d, $\gamma\in(c,d)$, t.q.: $g'(\gamma)=0$. D'altra banda però que $g'(x)=$ $=3-\cos x>0$ $\forall x$, la qual cosa porta a una contradicció i per tant, necessàriament a una contradicció i per tant, necessàriament, $d=c$, i queda doncs provat que el zero trobat és únic.

Remarca. Observem que, en tots dos casos (a) i (b) hem demostrat l'existència d'un zero pel teorema de Bolzano i, per un altre costat, verifiquem que totes dues funcions són derivables en tot $\mathbb{R}$ amb derivada positiva; llavors són estrictament creixents en tot $\mathbb{R}$, amb la qual cosa les seves gràfiques només poden tallar un cop l'eix horitzontal i els zeros trobats (i.e. les solucions de les equacions) són únics.

35 Feu un estudi complet de la gràfica de les funcions següents:

(j) $y = x^x$, $x>0$

$y = f(x) = x^x = e^{x\ln x} > 0 \quad \forall x>0$. És clar que el Domini de $f(x)$ són tots els reals positius, i.e. està definida per tot $x>0$. D'altra banda aquesta funció és sempre positiva (no hi ha talls amb l'eix x). Quant als límits, mirem els seus límits quan $x\to 0$ i $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \text{ jà que } \lim_{0^+} x\ln x = 0 \quad \left(\lim_{0^+} \frac{D(\ln x)}{D(\frac{1}{x})} = \lim_{0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{0^+}(-x) = 0 \right.$$

i apliquem L'Hôpital.)

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x} = +\infty, \text{ jà que } \lim_{+\infty} x\ln x = +\infty \quad (\text{Exercici 29a})$$

· No hi ha asímptota obliqua en $+\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^x}{x} = \lim_{x\to\infty} x^{x-1} = \lim_{+\infty} e^{(x-1)\ln x}$

$= +\infty$: el pendent m seria "infinit" i per tant no hi ha asímptota obliqua quan $x\to+\infty$

· Mirem el seu creixement / decreixement; per això estudiem, on sigui derivable, el signe de la seva derivada:

$$f'(x) = (\ln x + 1)\, e^{x\ln x}, \quad x>0$$

: f és derivable en tot el seu domini; i: $\dfrac{f'<0 \quad | \quad f'>0}{\searrow \quad \frac{1}{e} \quad \nearrow}$

Així $x = \frac{1}{e}$ és un punt de mínim relatiu, on la funció val $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-1/e} = 0.69220 < 1 = f(0^+)$

i com que $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$, aquest extrem és, de fet un mínim absolut de la funció.

· Per estudiar la concavitat / convexitat de la funció estudiem el signe de la seva derivada 2ª (Notem que f' és derivable en tot el domini de la funció. Això és, $\forall x>0$), que quan la calculem dóna:

$$f''(x) = \left[\frac{1}{x} + (\ln x + 1)^2\right] e^{x\ln x} > 0 \quad \forall x>0$$

Llavors la funció és convexa en tot el seu domini.

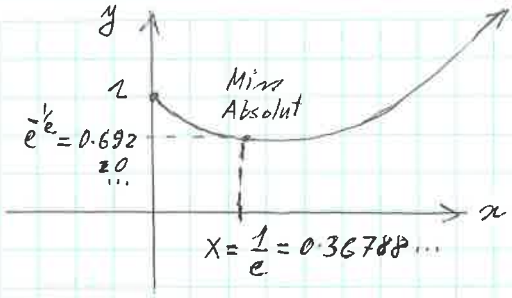


figura 35.j

Representació gràfica aproximada de $f(x) = x^x$, $x>0$.

(l) $y = f(x) = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$

· 1er de tot notem que, si $a=0$, llavors $f(x) = \sqrt[3]{-x^3} = -x$ i la gràfica es trivial. Aleshores suposarem que $a \neq 0$ i distingirem, quan s'escaigui, els casos $a>0$ i $a<0$.

· Domini: tot $\mathbb{R}$. D'altra banda és contínua a tot $\mathbb{R}$ i $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[3]{2ax^2-x^3} = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} \sqrt[3]{2ax^2-x^3} = +\infty$, per tant rang $f = \mathbb{R}$ (tot punt de $\mathbb{R}$ és imatge d'algun punt per l'aplicació f, i.e. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és exhaustiva).

· Signes $f(x) = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3} = \sqrt[3]{x^2(2a-x)} > 0 \Leftrightarrow x^2(2a-x) > 0 \Leftrightarrow$ $x \in (-\infty,0) \cup (0,2a), a>0$; $x \in (-\infty, 2a)$, $a<0$

· Talls amb els eixos: tall amb l'eix y: $x=0$, $f(0)=0$ per tant $(0,0)$. Tall amb l'eix x: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, $x=2a$: $(0,0)$, $(2a,0)$

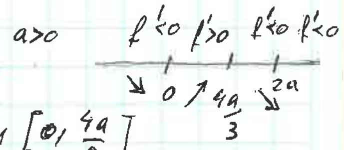
· Creixement/Decreixement: Veiem que f és derivable (criteris de generació) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2a\}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2ax^2 - x^3)^{-2/3}(4ax - 3x^2) = -x(2ax^2-x^3)^{-2/3}\left(x - \frac{4a}{3}\right).$$

Distingim els casos:

▷ Si $a>0$:

· $f'<0$ $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{4a}{3}, 2a) \cup (2a, +\infty)$: llavors f és monòtona creixent en $(-\infty, 0] \cup [\frac{4a}{3}, +\infty)$



· $f'>0$ $\forall x \in (0, \frac{4a}{3})$: aleshores f és monòtona decreixent en $[0, \frac{4a}{3}]$

Llavors: En $x=0$ hi ha un punt de **mínim** relatiu on la funció val $f(0)=0$
" $x=\frac{4a}{3}$ " " " " " MÀXIM " " " " val $f\left(\frac{4a}{3}\right)=\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}\,a\ (>0)$

▽ Si $a<0$

$f'<0\ \forall x \in (-\infty,2a)\cup\left(2a,\frac{4a}{3}\right)\cup(0,+\infty)$, d'on tenim que f és monòtona creixent en $\left(-\infty,\frac{4a}{3}\right]\cup[0,+\infty)$

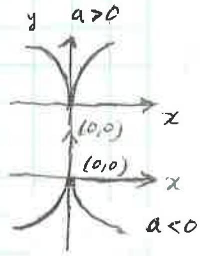
$f'>0\ \forall x\in\left(\frac{4a}{3},0\right)$, llavors f és monòtona decreixent en $\left[\frac{4a}{3},0\right]$

$a<0$: $f'>0$ | $2a$ | $f'>0$ | $\frac{4a}{3}$ | $f'<0$ | 0 | $f'>0$

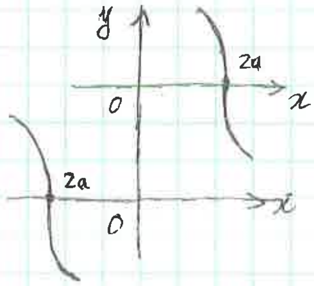
Llavors: En $x=0$ hi ha un punt de MÀXIM relatiu de la funció, on val $f(0)=0$
En $x=\frac{4a}{3}$ " " " " mínim " " " " , " " $f\left(\frac{4a}{3}\right)=\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}\,a\ (<0)$

□ Derivabilitat en $x=0$: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt[3]{2ax^2-x^3}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[3]{\dfrac{2a}{x}-1}=+\infty$, si $a>0$
$=-\infty$, si $a<0$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt[3]{2ax^2-x^3}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt[3]{\dfrac{2a}{x}-1}=-\infty$, si $a>0$
$+\infty$, si $a<0$



☒ Derivabilitat en $x=2a$: $\lim\limits_{x\to2a}\dfrac{\sqrt[3]{2ax^2-x^3}-0}{x-3}=\lim\limits_{x\to2a}\dfrac{x^{2/3}\sqrt[3]{2a-x}}{x-2a}=\lim\limits_{x\to2a}\left(-x^{2/3}(2a-x)^{-2/3}\right)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to2a^-}\ \dots=-\infty$ i això val tant quan $a>0$ i quan $a<0$

(Obviament, f no és derivable en $x=0$ ni en $x=a$)

Per tant: $f'(0^+)=+\infty$, $f'(0^-)=-\infty$, si $a>0$
$f'(0^+)=-\infty$, $f'(0^-)=+\infty$, si $a<0$
i $f'(2a^+)=f'(2a^-)=-\infty$, tant si $a>0$ com si $a<0$.

Concavitat/Convexitat: f' és derivable en $\mathbb{R}^2\setminus\{0,2a\}$ (criteris de generació). Podem calcular la seva derivada aplicant les regles de derivació:

$$f''(x)=-\frac{2}{9}(2ax^2-x^3)^{-5/3}(4ax-3x^2)^2+\frac{1}{3}(2ax^2-x^3)^{-2/3}(4a-6x)$$
$$=\frac{1}{9}(2ax^2-x^3)^{-5/3}\left(-2(4ax-3x^2)^2+3(2ax^2-x^3)(4a-6x)\right)$$

$\left[-2(16a^2x^2-24ax^3+9x^4)+3(8a^2x^2-12ax^3-4ax^3+6x^4)\right.$
$\left.=-32a^2x^2+\cancel{48ax^3}-\cancel{18x^4}+24a^2x^2-36ax^3-12ax^3+\cancel{18x^4}=-8a^2x^2\right]$

$$=-\frac{8a^2}{9}x^2x^{2/3}(2ax^2-x^3)^{-2}(2a-x)^{1/3}$$
$$=\frac{8a^2}{9}x^{8/3}(2ax^2-x^3)^{-2}(x-2a)^{1/3}>0\ \forall x\in(2a,+\infty),\ \text{si } a>0$$
$\forall x\in(2a,0)\cup(0,+\infty)$, si $a<0$
$<0\ \forall x\in(-\infty,0)\cup(0,2a)$ si $a>0$
$\forall x\in(-\infty,2a)$, si $a<0$

Aleshores f és convexa si $x > 2a$ i còncava si $x < 2a$ (tant si $a>0$ com si $a<0$)

- Asímptotes obliqües:

Quan $x \to +\infty$: $m_+ := \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \sqrt[3]{2a/x - 1} = -1$

$$b_+ := \lim_{+\infty} (f(x) + m_+ x) = \lim_{+\infty} \left(x \sqrt[3]{2a/x - 1} + x\right) \overset{(*)}{=} \lim_{+\infty} \frac{\sqrt[3]{2a/x - 1} + 1}{1/x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{D\left(\sqrt[3]{2a/x - 1} + 1\right)}{D(1/x)} = \lim_{+\infty} \frac{1/3\,(2a/x - 1)^{-2/3}(-2a/x^2)}{-1/x^2} = 2/3 \overset{\text{L'Hôp}}{\Rightarrow} b_+ = 2a/3$$

(*) També, per Taylor:

$$x \sqrt[3]{2a/x - 1} + x = x\left(1 - \sqrt[3]{1 - 2a/x}\right) = x\left(1 - \left(1 - \tfrac{2}{3}\tfrac{a}{x} + \dots\right)\right) =$$
$$= x\left(\cancel{1} - \cancel{1} + \tfrac{2}{3}\, a/x + O_2(1/x)\right) = 2/3\,a + O_1(1/x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \boxed{2/3\,a}$$

on fem servir el desenvolupament $\sqrt[3]{1+z} = 1 + z/3 + O(z^2)$,

vàlid per z propera a $z=0$.

∴ Aleshores $y = m_+ x + b_+ = \boxed{-x + \tfrac{2}{3}a}$ és una asímptota obliqua de la funció en $+\infty$

Quan $x \to -\infty$. És comprova d'immediat que $m_- = \lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = -x$ i $b_- = \lim_{-\infty} (f(x) - m_- x) = 2/3\,a$. Per tant $y = m_- x + b_- = \boxed{-x + \tfrac{2}{3}a}$ també és una asímptota obliqua de f en $-\infty$.

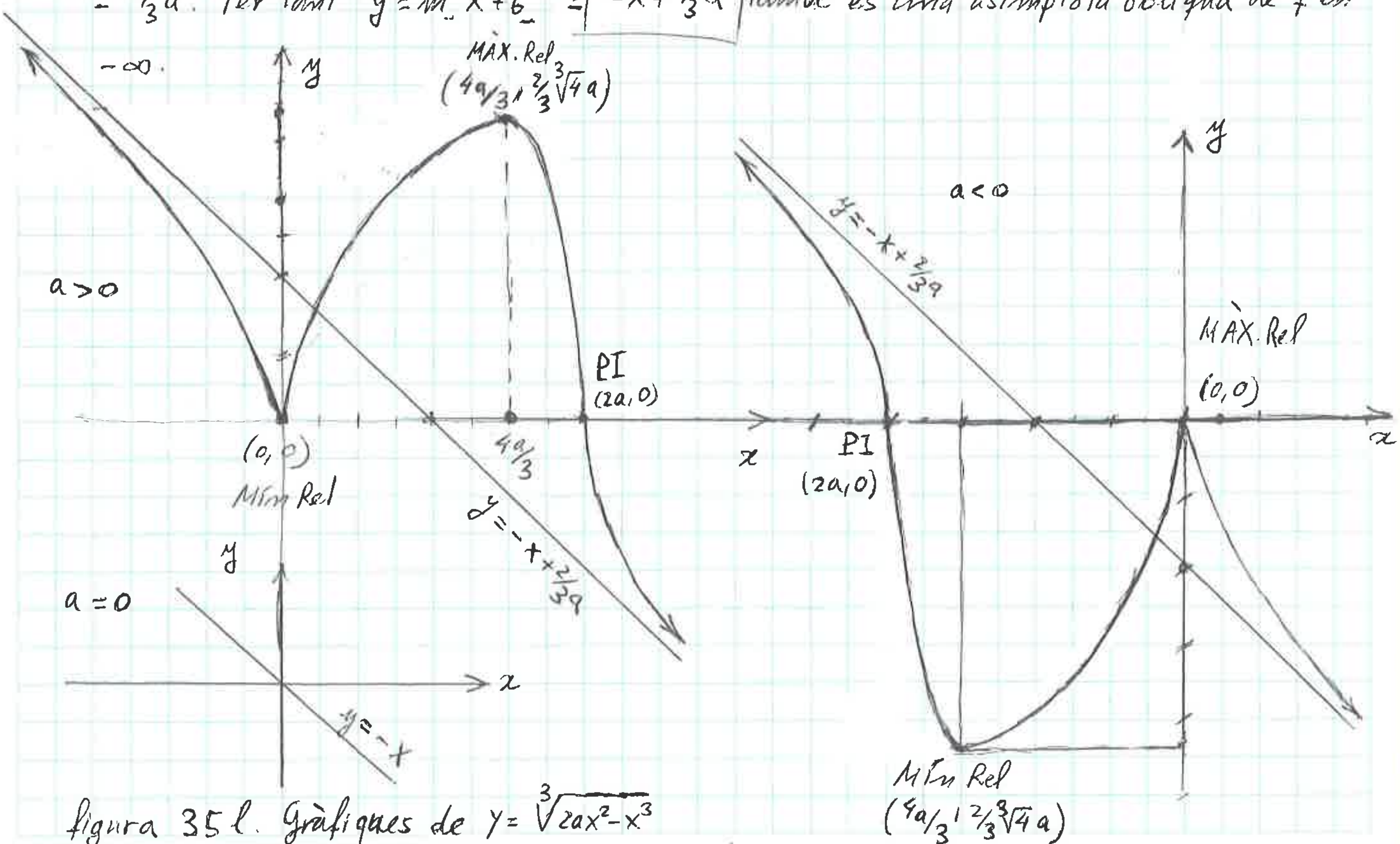


figura 35 l. Gràfiques de $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$ en funció de a ($a>0$, $a<0$ ó $a=0$)

38) Sigui $0 \le a \le b$. Proveu la desigualtat

$$\frac{b-a}{1+b^2} \le \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Solució. Considerem la funció $f(x) = \arctan x$, que és derivable en tot $\mathbb{R}$ en particular és derivable en (a,b) i contínua en $[a,b]$ on $0 \le a \le b$. Per tant, podem aplicar el Teorema del valor mitjà i llavors tenim que existeix c, $a<c<b$ t.q:

$$f(b)-f(a) = \arctan b - \arctan a = \frac{b-a}{1+c^2} \qquad (1)$$

$$f'(x) = D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

d'on $f'(c) = \frac{1}{1+c^2}$

Però, d'altra banda $0 \le a < c < b \Rightarrow a^2 < c^2 < b^2 \Rightarrow 1+a^2 < 1+c^2 < 1+b^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2} \underset{b-a \ge 0}{\Rightarrow} \frac{b-a}{1+b^2} < \frac{b-a}{1+c^2} < \frac{b-a}{1+a^2}$$

I substituint aquesta darrera desigualtat en (1) s'obté la desigualtat de l'enunciat.

41) Escriviu la fórmula de McLaurin fins a ordre 3 de la funció

$$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}} \quad \text{en } x=0$$

Solució:

1er calcularem les derivades i substituirem a la fórmula general del desenvolupament.

$f(0) = \sqrt{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+x}\right)^{-1/2} \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} = \frac{1}{4}\left(1+x+(1+x)^{3/2}\right)^{-1/2} ; \quad f'(0) = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{8}\left(1+x+(1+x)^{3/2}\right)^{-3/2}\left(1+\frac{3}{2}(1+x)^{1/2}\right) ; \quad f''(0) = -\frac{1}{8} 2^{-3/2} \frac{5}{2} = -\frac{5}{32\sqrt{2}} = -\frac{5\sqrt{2}}{64}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{16}\left(1+x+(1+x)^{3/2}\right)^{-5/2} \cdot \left(1+\frac{3}{2}(1+x)^{1/2}\right)^2 - \frac{3}{32}\left(1+x+(1+x)^{3/2}\right)^{-3/2}(1+x)^{-1/2}$$

$$\text{d'on } f'''(0) = \frac{3}{16} \cdot 2^{-5/2} \cdot \frac{5^2}{2^2} - \frac{3}{32} \cdot 2^{-3} = \frac{3 \cdot 5^2}{256\sqrt{2}} - \frac{3}{64\sqrt{2}} = \frac{75}{256\sqrt{2}} - \frac{12}{256\sqrt{2}} = \frac{63}{256\sqrt{2}} = \boxed{\frac{63\sqrt{2}}{512}}$$

El desarrollo de Taylor queda pues:

$$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\left(1+\frac{x}{8} - \frac{5}{128}x^2 + \frac{21}{1024}x^3\right) + R_3(x)$$

4? (notació?)

Per generació. A partir del desenvolupament de la funció binòmica:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \dots, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

on $\binom{\alpha}{k} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$,

agafant $\alpha = \frac{1}{2}$: $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \dots$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 2!}x^2 + \frac{3}{2^3 3!}x^3 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots$$

I podem fer servir el desenvolupament de $\sqrt{1+x^2}$ per generar el desenvolupament de $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$:

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\dots} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}x-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}-\dots}$$

$$= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}-\dots\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}x-\frac{x^2}{16}+\dots\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}x+\dots\right)^3+\dots\right.$$

$$= \sqrt{2}\Big(1+\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}x^2+\frac{x^3}{64}+\dots$$
$$-\frac{1}{128}x^2+\frac{1}{256}x^3+\dots$$
$$+\frac{1}{1024}x^3+\dots\Big)+\dots$$

$$= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{8}x-\frac{5}{128}x^2+\frac{21}{1024}x^3\right)+R_3(x)$$

42. Doneu una cota superior de l'error en les avaluacions següents

(a) $\cos(0.3) \simeq 1 - \dfrac{(0.3)^2}{2!} + \dfrac{(0.3)^4}{4!}$

(b) $e \simeq 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{5!}$

Solució. (a) $\left|\cos(0.3) - 1 + \dfrac{(0.3)^2}{2!} - \dfrac{(0.3)^4}{4!}\right| = \left|R_4(0.3)\right| = \dfrac{|\sin\alpha|}{5!}0.3^5 \le \dfrac{0.3^5}{5!} =$ $(0<\alpha<0.3)$

$$= \frac{3^5\cdot 10^{-5}}{5\cdot4\cdot3\cdot1} = \frac{81}{40}\cdot10^{-5} = 2'025\cdot10^{-5},$$

$0<\alpha<1$

(b) $\left| e-1-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!} \right| = |R_5(1)| = \frac{e^\alpha}{6!} \leq \frac{e}{720} = 3'775\ldots 10^{-3}$

43 - Sigui $f(x)=\ln(x+1)$. Aproximeu $f(0.5)$ amb un error menor de 10^{-4}

Solució.

$f(x)=\ln(x+1)$: $f(0)=0$

$f'(x)=(x+1)^{-1}$: $f'(0)=1$

$f''(x)=-(x+1)^{-2}$; $f''(0)=-1$

$f'''(x)=2(x+1)^{-3}$: $f'''(0)=2=2!$

$f^{(4)}(x)=-3\cdot 2\cdot(x+1)^{-4}$; $f^{(4)}(0)=-3\cdot 2=-3!$

... ...

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!\,(x+1)^{-n}$: $f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!$

Aleshores el polinomi de Taylor de grau n de $f(x)=\ln(1+x)$ s'escriu:

$$P_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},$$

amb la resta de Lagrange corresponent:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \underset{c=0}{=} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(1+\alpha)^{n+1}}x^{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\alpha)^{n+1}},$$

ó $n+1$

$\alpha\in\langle c,x\rangle$
$=\langle 0,x\rangle$

Remarca: $\langle c,x\rangle \equiv \begin{cases}(c,x), & x>c\\ (x,c), & x<c\end{cases}$

amb $\alpha\in\langle 0,x\rangle$

Volem n més petita, tal que $|f(0.5)-P_n(0.5)|=|R_n(0.5)|<10^{-4}$. Veiem que és qüestió d'acotar el romanent. Tenint en compte ara que $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$, i per tant $1+\alpha>1$ i llavors: $\frac{1}{(1+\alpha)^{n+1}}<1\ \forall n\in\mathbb{N}$;

$$|f(0.5)-P_n(0.5)|=|R_n(0.5)|=\frac{1}{(n+1)(1+\alpha)^{n+1}2^{n+1}}<\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

D'aquesta manera és suficient agafar com n, l'enter més petit que satisfà

$$\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}<10^{-4} \iff (n+1)2^{n+1}>10^4 \iff \log(n+1)+(n+1)\log 2>4 \quad (1)$$

Per $n=8$ tenim:

$$\log 9 + 9\log 2 = 2\log 3 + 9\cdot\log 2 = 2\cdot 0'4771\cdots + 9\cdot 0'3010\cdots$$
$$= 0'9542\cdots + 2'7090\cdots = 3'6632\cdots < 4.$$

Mentre que per $n=9$:

$$\log 10 + 10\log 2 = 1 + 3'010\cdots = 4'010\cdots > 4$$

Així $n=9$ és l'enter més petit que satisfà (1), amb la qual cosa, si fem el desenvolupament de Taylor fins a ordre $n=9$, l'error en aproximar $f(\frac{1}{2}) = \ln(1+\frac{1}{2}) = \ln(\frac{3}{2})$ per $P_9(\frac{1}{2})$, on P_9 és el polinomi de Taylor d'ordre (grau) 9:

$$P_9(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9}$$

avaluat en $x=\frac{1}{2}$, i.e.:

$$P_9\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2\cdot 2} + \frac{1}{2^3\cdot 3} - \frac{1}{2^4\cdot 4} + \frac{1}{2^5\cdot 5} - \frac{1}{2^6\cdot 6} + \frac{1}{2^7\cdot 7} - \frac{1}{2^8\cdot 8} + \frac{1}{2^9\cdot 9}$$
$$= +0\cdot 405532304067460$$

és menor que 10^{-4}. En efecte, ja que $\log(\frac{3}{2}) = 0'405465108108164$, i, per tant: $\left|f(\frac{1}{2}) - P_9(\frac{1}{2})\right| = \left|\log(\frac{3}{2}) - P_9(\frac{1}{2})\right| = 0'0000671959592\,96 < 10^{-4}$ $\triangle$

44. Proveu que si una funció és senar (respectivament parella), aleshores el seu polinomi de McLaurin de grau n només conté potències senars (respectivament parelles) de x.

Solució. Si f és senar $f(x) = -f(-x)$ i derivant $f'(x) = f'(-x)$,

$$f''(x) = -f''(-x),\quad f'''(x) = f'''(-x),\ \dots,\ f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} f^{(k)}(-x),\ k=0,1,2,\dots$$

En $x=0$: $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} f^{(k)}(0) \Leftrightarrow (1+(-1)^k)f^{(k)}(0) = 0$, d'on es dedueix que $f^{(k)}(0) = 0$ si $k = 2j$, $j=0,1,2,\dots$ parell. Aleshores la serie de McLaurin corresponent no tindrà termes parells.

Si f és parell $f(x)=f(-x)$, i derivant: $f'(x)=-f'(-x)$, $f''(x)=f''(-x)$, $f'''(x)=-f'''(-x)$, $f^{(4)}(x)=f^{(4)}(-x)$, ..., $f^{(k)}(x)=(-1)^k f^{(k)}(-x)$, $k=0,1,2,\dots$

Substituint en $x=0$: $(1+(-1)^{k+1})\,f^{(k)}(0)=0$. D'aquí es dedueix que si k és senar, $k=2j+1$, amb $j=0,1,2,\dots$ $(1+(-1)^{k+1})\,f^{(k)}(0)=(1+(-1)^{2j})\,f^{(2j+1)}(0)$ $=2\cdot f^{(2j+1)}(0)=0 \Rightarrow f^{(2j+1)}(0)=0$ per $j=0,1,2,3,\dots$ Per tant, la corresponent sèrie de McLaurin no tindrà termes senars. Δ

45. Utilitzeu desenvolupaments en sèrie per calcular els límits a l'origen de les funcions següents

(a) $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\dots\right)}{x^4}=$$

$$\overset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{x^4}{8}+O(x^5)}{x^4}=\boxed{\frac{1}{8}}$$

(*) $$1-\cos(1-\cos x)=1-\cos\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+O(x^5)\right)=1-\cos\left(\frac{x^2}{2!}+O(x^4)\right)$$
$$=1-\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2!}+O(x^4)\right)^2+O(x^5)\right)=\frac{x^4}{8}+O(x^5)$$

(b) $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x-\sin x^3}{\ln(1+x^5)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^3}-\frac{x^5}{2}+O(x^6)-\cancel{x^3}+O(x^6)}{x^5+O(x^6)}=(\&)$$

$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\dots$ d'on $\ln(1+x^5)=x^5+O(x^6)$

$\sin^3 x=\left(x-\frac{x^3}{3!}+O(x^4)\right)^3=x^3-\frac{x^5}{2}+O(x^6)$

$\sin x^3=x^3+O(x^6)$

$$(\&)=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^5}{2}+O(x^6)}{x^5+O(x^6)}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

(c) $$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin x)^2+\sin^3 x}{\sin x^2+\tan^2 x\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+O(x^3)}{x^2+O(x^3)}=\boxed{4}$$

$(x+\sin x)^2=\left(x+x-\frac{x^3}{3!}+\dots\right)^2=2x+O(x^3)$; $\sin x^2=x^2+O(x^3)$; $\tan^2 x\arctan x=O(x^3)$. Δ