① (Primitives immediates) Calculeu les primitives següents

a) $\int \frac{x+6}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 12x^{1/2} + C = \boxed{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 12\sqrt{x} + C}$

b) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \boxed{-\frac{1}{\sin x} + C}$

c) $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{-2/3}(x^4 - x^2 - 2)\,dx = \int \left(x^{10/3} - x^{4/3} - 2x^{-2/3}\right)dx$

$= \frac{3}{13}x^{13/3} - \frac{3}{7}x^{7/3} - 6x^{1/3} + C$

$= \boxed{\sqrt[3]{x}\left(\frac{3}{13}x^4 - \frac{3}{7}x^2 - 6\right) + C}$

d) $\int (a+bx^3)^2 dx = \int (a^2 + 2abx^3 + b^2x^6)\,dx = \boxed{a^2x + \frac{1}{2}abx^4 + \frac{b^2}{7}x^7 + C}$

e) $\int (\cos^2\theta - \sin\theta)\,d\theta = \int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} - \sin\theta\right)d\theta = \boxed{\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \cos\theta + C}$

② (Canvis de variables) Calculeu les primitives següents:

(a) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \left\{ \begin{array}{l} s = x^2+1 \\ ds = 2x\,dx \end{array} \right\} = \left(\int \frac{ds}{2\sqrt{s}}\right) \circ \sqrt{x^2+1} = \boxed{\sqrt{x^2+1} + C}$

(b) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx = \left\{ \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right\} = \left(\int \frac{1+t^2}{1+t}2t\,dt\right) \circ \sqrt{x} = \int \left(2t^2 - 2t + 4 - \frac{4}{t+1}\right)dt \circ \sqrt{x}$

Apunts pàg. 2

$= \left(\frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 4t - \ln|t+1|\right) \circ \sqrt{x} + C$

$= \boxed{\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C}$

(c) $\displaystyle\int \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}\,dx = \int \frac{\ln 2+\ln x}{x(2\ln 2+\ln x)}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x=e^{t}/4 \\ dx=\frac{1}{4}e^{t} \end{array}\right\} =$

↳ Apunts pàg. 2

$$= \left(\int \frac{t-\ln 2}{t}\,dt\right)\circ \ln(4x) = \int\left(1-\frac{\ln 2}{t}\right)dt \circ \ln(4x)$$

$$= \left(t-\ln 2\cdot \ln|t|\right)\circ \ln(4x) + C = \boxed{\ln(4x)-\ln 2\,\ln|\ln(4x)|+C}$$

(d) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{3-4x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t=3-4x^2 \\ dt=-8x\,dx \end{array}\right\} = \left(-\frac{1}{8}\int t^{1/3}\,dt\right)\circ(3-4x^2)$

$$= \left(-\frac{3}{32}t^{4/3}\right)\circ(3-4x^2) + C = \boxed{-\frac{3}{32}(3-4x^2)\sqrt[3]{3-4x^2}+C}$$

(e) $\displaystyle\int \sec(2x)\tan(2x)\,dx = \left\{\begin{array}{l} t=\sec(2x)\,; \\ dt = 2\frac{\sin(2x)}{\cos^2(2x)}\,dx = 2\sec(2x)\tan(2x)\,dx \end{array}\right\} =$

↳ Fer a classe

$$= \left(\frac{1}{2}\int dt\right)\circ \sec(2x) = \boxed{-\frac{1}{2}\sec(2x)+C}$$

(f) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t=\arctan x \\ dt=\frac{dx}{1+x^2} \end{array}\right\} = \left(\int (\operatorname{tg} t-\sqrt{t})\,dt\right)\circ \arctan x$

↳ Apunts pàg. 2

$$= \left(-\ln|\cos t| - \frac{2}{3}t^{3/2}\right)\circ \arctan x + C$$

$$\overset{(*)}{=} \boxed{+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{2}{3}(\arctan x)^{3/2}+C}$$

(*) $-\ln|\cos t| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right) = \frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)$

(g) $\int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}dx = \frac{b}{b^2}\int \frac{\frac{a}{b}x+1}{\left(\frac{a}{b}x\right)^2+1}dx = \left\{ \begin{array}{l} t=\frac{ax}{b} \\ dt=\frac{a}{b}dx \end{array} \right\} =$

$= \frac{1}{\cancel{b}}\frac{\cancel{b}}{a}\int \frac{t+1}{t^2+1}dt \circ \left(\frac{ax}{b}\right) = \left[\frac{1}{a}\int\left(\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt\right]\circ\left(\frac{ax}{b}\right)$

$= \left(\frac{1}{2a}\ln(1+t^2)+\frac{1}{a}\arctan t + C\right)\circ\left(\frac{ax}{b}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left(1+\frac{a^2x^2}{b^2}\right)+\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{ax}{b}\right)+C$

(h) $\int \frac{e^x}{e^x-1}dx = \left\{ \begin{array}{l} t=e^x \\ dt=e^x dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t-1}\circ e^x = \left(\ln|t-1|+C\right)\circ e^x$

$= \boxed{\ln|e^x-1|+C}$

(i) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dt = \left\{ \begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{array} \right\} = \left(2\int \cos t\, dt\right)\circ\sqrt{x} = \boxed{2\sin\sqrt{x}+C}$

(j) $\int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}dx = \left\{ \begin{array}{l} t=a^{x/2} \\ dt=\frac{1}{2}a^{x/2}\ln a\, dx \iff dx=\frac{2dt}{t\ln a} \end{array} \right\} = \frac{2}{\ln a}\left(\int\frac{t^4-1}{t^2}dt\right)\circ a^{x/2}$

$= \frac{2}{\ln a}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{1}{t}\right)\circ a^{x/2} = \frac{2}{\ln a}\left(\frac{1}{3}a^{3x/2}+\frac{1}{\sqrt{a^x}}\right)+C$

$= \boxed{\frac{2}{3\ln a}a^x\sqrt{a^x}+\frac{2}{\sqrt{a^x}\ln a}+C}$

(k) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx = \left\{ \begin{array}{l} t=1+\ln x \\ dt=\frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \left(\int t^{1/3}dt\right)\circ(1+\ln x)$

$= \left(\frac{3}{4}t^{4/3}+C\right)\circ(1+\ln x) = \boxed{\frac{3}{4}(\ln x+1)^{4/3}+C}$

$$(l)\quad \int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}}_{I_2} = \text{\&}$$

$$I_1 := \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \left\{\begin{array}{l} x=\sqrt{2}\,t \\ dx=\sqrt{2}\,dt \end{array}\right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \circ \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \left(\arcsin t + C_1\right)\circ\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_1$$

$$I_2 := \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} = \left\{\begin{array}{l} x=\sqrt{2}\,t \\ dx=\sqrt{2}\,dt \end{array}\right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \circ \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \left(\operatorname{argsh} t + C_1\right)\circ\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \operatorname{argsh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_1$$

$$\text{\&} = \boxed{\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{argsh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_1}$$

Nota:
$$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{argsh} t\right) = \frac{1}{D\,sh}\circ \operatorname{argsh} = \frac{1}{ch}\circ \operatorname{argsh} t = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2(\operatorname{argsh} t)}}$$

$$ch^2 t - sh^2 t = 1$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}$$

3 (Integrals per parts) Calculeu les primitives següents:

a) $\int x^3 e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} f = x^3 \to f' = 3x^2 \\ g' = e^x \to g = e^x \end{array} \right\} = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$

$= \left\{ \begin{array}{l} f = x^2 \Rightarrow f' = 2x \\ g' = e^x \Rightarrow g = e^x \end{array} \right\} = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x dx$

$= \left\{ \begin{array}{l} f = x \Rightarrow f' = 1 \\ g' = e^x \Rightarrow g = e^x \end{array} \right\} = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6\int e^x dx$

$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + C = \boxed{(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C}$

(c) $\int x\sqrt{x-5}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} f = x \; ; \; f' = 1 \\ g' = (x-5)^{1/2} \; ; \; g = \frac{2}{3}(x-5)^{3/2} \end{array} \right\} =$

$= \frac{2}{3}x(x-5)\sqrt{x-5} - \frac{2}{3}\int (x-5)^{3/2} dx$

$= \frac{2}{3}x(x-5)\sqrt{x-5} - \frac{4}{15}(x-5)^2\sqrt{x-5} + C$

$= \frac{2}{3}(x-5)\sqrt{x-5}\left(x - \frac{2}{5}(x-5)\right) + C$

$= \boxed{\frac{2}{15}\sqrt{(x-5)^3}\,(3x+10) + C}$

(b) $\int x \ln x\, dx = \left\{ \begin{array}{l} f = \ln x \Rightarrow f' = \frac{1}{x} \\ g' = x \Rightarrow g = x^2/2 \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx$

$= \boxed{\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C}$

(d) $\int x^2\cos x\,dx = \left\{\begin{array}{l} f=x^2 \Rightarrow f'=2x \\ g'=\cos x \Rightarrow g=\sin x \end{array}\right\} = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx$

$= \left\{\begin{array}{l} f=x \Rightarrow f'=1 \\ g'=\sin x \Rightarrow g=-\cos x \end{array}\right\} = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx$

$= \boxed{x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C}$

e) $\int \arctan x\,dx = \left\{\begin{array}{l} f=\arctan x \Rightarrow f'=\frac{1}{1+x^2} \\ g'=1 \Rightarrow g=x \end{array}\right\} =$

↳ Apunts pàg. 2

$= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \boxed{x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C}$

f) $\int e^{2x}\sin x\,dx = \left\{\begin{array}{l} f=\sin x \Rightarrow f'=\cos x \\ g'=e^{2x} \Rightarrow g=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\} =$

$= \frac{\sin x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\,dx = \left\{\begin{array}{l} f=\cos x \Rightarrow f'=-\sin x \\ g'=e^{2x} \Rightarrow g=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\}$

$= \frac{\sin x}{2}e^{2x} - \frac{\cos x}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}\int e^{2x}\sin x\,dx$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4}\int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{4}(2\sin x - \cos x)e^{2x}$

d'on: $\int e^{2x}\sin x\,dx = \boxed{\frac{1}{5}(2\sin x - \cos x)e^{2x} + C}$

g) $\int x\sin^2 x\,dx = \left\{\begin{array}{l} f=x\sin x \Rightarrow f'=\sin x + x\cos x \\ g'=\sin x \Rightarrow g=-\cos x \end{array}\right\} =$

$= -x\sin x\cos x + \int \sin x\cos x\,dx + \underbrace{\boxed{\int x\cos^2 x\,dx}}_{\int x\,dx - \int x\sin^2 x\,dx}$

d'on:

$\int x\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\sin(2x) + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{x^2}{2}\right) + C$

$= \boxed{-\frac{x}{4}\sin(2x) + \frac{1}{4}\sin^2 x + \frac{x^2}{4} + C}$

4 (Més integrals per parts) Proven les fórmules següents:

(a) $$\int x^n \sin x\, dx = \left\{\begin{array}{l} f = x^n \Rightarrow f' = nx^{n-1} \\ g' = \sin x \Rightarrow g = -\cos x \end{array}\right\} = \boxed{-x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\, dx}$$

d'on: $$\boxed{\int x^n \sin x = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\, dx}$$

(b) $$\int x^n \cos x\, dx = \left\{\begin{array}{l} f = x^n \Rightarrow f' = nx^{n-1} \\ g' = \cos x \Rightarrow g = \sin x \end{array}\right\} = \boxed{x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\, dx}$$

(c) $$\int x^n \ln x\, dx = \left\{\begin{array}{l} f = \ln x \Rightarrow f' = 1/x \\ g' = x^n \Rightarrow g = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array}\right\} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx$$

↳ Apunts pàg. 2

$$= \boxed{\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C}$$

(d) $$\int x^n e^{ax} dx = \left\{\begin{array}{l} f = x^n \Rightarrow f' = nx^{n-1} \\ g' = e^{ax} \underset{a\neq 0}{\Rightarrow} g = \frac{1}{a}e^{ax} \end{array}\right\} = \boxed{\frac{x^n}{a}e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax} dx}$$

• (e) $$\int e^{ax}\sin(bx)\, dx = \left\{\begin{array}{l} f = e^{ax} \Rightarrow f' = ae^{ax} \\ g' = \sin(bx) \Rightarrow g = \frac{-1}{b}\cos(bx) \end{array}\right\} =$$

↳ Exercici pàg. 3 Apunts. (Fer a classe)

$$= -\frac{e^{ax}}{b}\cos(bx) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)\, dx = \left\{\begin{array}{l} f = e^{ax} \Rightarrow f' = ae^{ax} \\ g' = \cos(bx) \Rightarrow g = \frac{\sin(bx)}{b} \end{array}\right\}$$

$$= -\frac{e^{ax}}{b}\cos(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin(bx) - \left(\frac{a}{b}\right)^2\int e^{ax}\sin(bx)\, dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{b^2}\int e^{ax}\sin(bx)\, dx = \frac{a\sin(bx) - b\cos(bx)}{b^2}e^{ax}$$

$$\Leftrightarrow \int e^{ax}\sin(bx)\, dx = \boxed{\frac{a\sin(bx) - b\cos(bx)}{a^2+b^2}e^{ax} + C}$$

f) $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} f = e^{ax} \Rightarrow f' = ae^{ax} \\ g' = \cos(bx) \Rightarrow g = \frac{1}{b}\sin(bx) \end{array} \right\}$

pàg. 3 dels Apunts.

$$= \frac{e^{ax}}{b}\sin(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} f = e^{ax} \Rightarrow f' = ae^{ax} \\ g' = \sin(bx) \Rightarrow g = -\frac{1}{b}\cos(bx) \end{array} \right.$$

$$= \frac{e^{ax}}{b}\sin(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos(bx) - \left(\frac{a}{b}\right)^2\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \boxed{\frac{a\cos(bx)+b\sin(bx)}{a^2+b^2}e^{ax} + C_1}$$

Aplicació al càlcul de les primitives:

$$\int x^5 \ln x\,dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{x^6}{36} + C_1 = \boxed{\frac{x^6}{36}(6\ln x - 1) + C_1}$$

$$\int x^3 e^{2x}dx = \underbrace{\frac{x^3}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}\int x^2 e^{2x}dx}_{\substack{\text{(d) amb:} \\ n=3 \\ a=2}} = \underbrace{\frac{x^3}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{2}{2}\int xe^{2x}dx\right)}_{\substack{\text{(d) amb} \\ n=2 \\ a=2}}$$

$$= \frac{x^3}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{2}\int xe^{2x}dx = \underbrace{\frac{x^3}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right)}_{\substack{\text{(d) amb} \\ n=1 \\ a=2}}$$

$$= \boxed{\left(\frac{x^3}{2} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right)e^{2x} + C_1}$$

5 (Integrals trigonomètriques) Calculeu les primitives següents:

a) $\int \underset{2\sin x\cos x}{\sin(2x)}\cos x\,dx = \int 2\sin x\cos^2 x\,dx = \boxed{-\frac{2}{3}\cos^3 x + C_1}$

fer a classe

$2-\frac{1}{2}$ $4-\frac{1}{2}$

b) $\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt{\sin x}}dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx = \int \frac{1-2\sin^2 x + \sin^4 x}{\sqrt{\sin x}}\cos x\,dx$

$$= 2\sin^{1/2}x - \frac{4}{5}\sin^{5/2}x + \frac{2}{9}\sin^{9/2}x + C_1 = \boxed{\sqrt{\sin x}\left(2 - \frac{4}{5}\sin^2 x + \frac{2}{9}\sin^4 x\right) + C_1}$$

(c) $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x\,(1-\cos^2 x)\,dx = \boxed{-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C}$

6 (Integrals de funcions racionals) Calculeu les primitives següents..

a) $\int \frac{5x\,dx}{x^2-10x+25} = 5\int \frac{\cancel{x-5}}{(x-5)^{\cancel{2}}}dx + 25\int \frac{dx}{(x-5)^2} =$

$= \boxed{5\ln|x-5| - \frac{25}{x-5} + C}$

b) $\int \frac{dx}{x^2-25} = \int \frac{A}{x-5}dx + \int \frac{B}{x+5}dx = \frac{1}{10}\ln|x-5| - \frac{1}{10}\ln|x+5| + C$

$= \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + C$

A, B ?

$(x+5)A + (x-5)B = 1$

$x=-5$: $-10B = 1$, d'on: $B = -\frac{1}{10}$

$x=5$: $10A = 1$, d'on $A = \frac{1}{10}$

$\int \frac{dx}{(1+(x+2)^2)^2} = \left\{\begin{array}{l} \text{c.v.} \\ t = x+2 \\ dt = dx \end{array}\right\} = \int \frac{d}{(1+}$

//

c) $\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}dx - \boxed{\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}} =$

$= -\frac{1/2}{x^2+4x+5} - \int \frac{dx}{(1+(x+2)^2)^2} \overset{(*)}{=} -\frac{1/2}{x^2+4x+5} - \frac{x+2}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$

$= \boxed{-\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2}\arctan(x+2) + C}$

Integrals per parts:
$\int g'f = gf - \int f'g$

(*) Exercici. Proveu que: $\int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{(2n-2)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}$ $n = 1, 2, 3, \dots$

En efecte:

$\int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n}dt = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^n}dt \overset{\text{Parts}}{=} \left\{\begin{array}{l} f = t \Rightarrow f' = 1 \\ g' = \frac{t}{(1+t^2)^n} \Rightarrow g = \frac{1}{2(1-n)(1+t^2)^{n-1}} \end{array}\right\} =$

$= \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} + \frac{t}{(2n-2)(1+t^2)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} = \frac{t}{(2n-2)(1+t^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}$

(d) $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b}\int \frac{\cancel{a+bx}}{(a+bx)^{\cancel{2}}}\,dx - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{(a+bx)^2} =$$

(Suposem $b \neq 0$)

$$= \frac{1}{b^2}\ln|a+bx| + \frac{a}{b^2}\cdot\frac{1}{a+bX} + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bx} + \ln|a+bx|\right) + C_1}$$

(e) $$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B}{x^2}\,dx + \int \frac{C_1}{a+bx}\,dx = (\&)$$

$$A\,x(a+bx) + B(a+bx) + Cx^2 = 1$$

$x = -a/b$: $a^2/b^2\, C_1 = 1 \iff C_1 = b^2/a^2$,

$x = 0$: $aB = 1 \iff B = 1/a$,

$x = 1$: $A(a+b) + \frac{a+b}{a} + b^2/a^2 = A(a+b) + \frac{a^2+ab+b^2}{a^2} = 1$

$A(a+b) = 1 - \frac{a^2+ab+b^2}{a^2} = -\frac{b(a+b)}{a^2} \iff A = -b/a^2$

(&) $= \boxed{-\frac{b}{a^2}\ln|x| - \frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\ln|a+bx| + C_1}$. Δ

(f) $$\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx = \int\left(1 + \frac{1}{x(x^2+1)}\right)dx = x + \int \frac{dx}{x(x^2+1)} = (\&)$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

$A(x^2+1) + Cx^2 + Dx = (A+C_1)x^2 + Dx + A = 1$, d'on: $A=1$, $D=0$, $A+C=0$

$\iff C_1 = -A = -1$

(&) $= x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1 = \boxed{x + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) + C_1}$. Δ

(g) $$\int \frac{dx}{x^3(x^3+1)} = \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B}{x^2}\,dx + \int \frac{C}{x^3}\,dx + \int \frac{D}{x+1}\,dx + \int \frac{Ex+F}{x^2-x+1}\,dx$$

→ fer a classe

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \qquad x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

$$\frac{1}{x^3(x^3+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{Ex+F}{x^2-x+1}$$

$$Ax^2(x+1)(x^2-x+1) + Bx(x+1)(x^2-x+1) + C(x+1)(x^2-x+1)$$
$$+ Dx^3(x^2-x+1) + (Ex+F)x^3(x+1) =$$
$$= A(x^5+x^2) + Bx(x^3+1) + C(x^3+1) + D(x^5-x^4+x^3) + Ex^5$$
$$+ (E+F)x^4 + Fx^3$$
$$= (A+D+E)x^5 + (B-D+E+F)x^4 + (C+D+F)x^3 + Ax^2 + Bx + C = 1$$

$\boxed{C=1}$, $\boxed{A=B=0}$, $\left.\begin{array}{rl} D+E & =0 \\ -D+E+F & =0 \\ D \quad +F & =-1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 2E+F=0 \\ E+2F=0 \end{array}$ $\begin{array}{|l} -3F=2 \Leftrightarrow \boxed{F=-\frac{2}{3}} \\ E=-\frac{1}{2}F=-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)=\boxed{\frac{1}{3}} \\ D=-E=\boxed{-\frac{1}{3}} \end{array}$

Llavors: $A=B=0$, $C=1$, $D=-\frac{1}{3}$, $E=\frac{1}{3}$, $F=-\frac{2}{3}$, *i aleshores;*

$$\int \frac{dx}{x^3(x^3+1)} = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x^2}dx + \int \frac{C}{x^3}dx + \int \frac{D}{x+1}dx + \int \frac{Ex+F}{x^2-x+1}dx$$
$$= \int \frac{dx}{x^3} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$
$$\overset{(*)}{=} \boxed{-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C} \;. \Delta$$

$(*)$ $\displaystyle \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{3}{4}+(x-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) - \sqrt{3}\,\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}\int \frac{dx/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$$= \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

7 (Integrals de funcions amb arrels) Calculeu les primitives següents:

a) $$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} C.V.\ \ x = 2\sin t \\ \quad\quad\ dx = 2\cos t\,dt \end{array}\right\} = \left(\int 4\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt\right)\circ \arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)$$

$$\overset{(*)}{=} \left(4\int \cos^2 t\,dt\right)\circ\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right) = 4\left(\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt\right)\circ \arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)$$

$$= \left[2t+2\sin t\cos t\right]\circ\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right) + C = \left[2t + 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right]\circ \arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right) + C$$

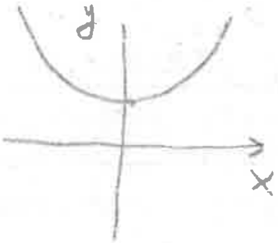
$$= 2\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right) + x\sqrt{1-\tfrac{x^2}{4}} + C = \boxed{2\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)+\tfrac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C}$$

(*) $-2\le x\le 2$, podem agafar $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$, i llavors $\cos t > 0$

b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} = \int\frac{\frac{1}{5}\,dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2-1}} = \arg ch\left(\tfrac{x}{2}\right) + C = \boxed{\ln\left(\tfrac{x}{2}+\sqrt{\tfrac{x^2}{4}-1}\right) + C}$$

(*) $y = ch\,x = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) \Leftrightarrow e^x+e^{-x}=2y \Leftrightarrow e^{2x}-2ye^x+1=0$

d'on $e^x = \dfrac{2y\pm\sqrt{4y^2-4}}{2} = y\pm\sqrt{y^2-1} \geq 1$, ja que agafam $x\geq 0$ per definir la inversa i $y\geq 0$. Amb la qual cosa descartem el signe $-$, i llavors:



$y = ch\,x = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

$y = \arg ch : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y = \arg ch\,x \Leftrightarrow ch\,y = x$

$x = \ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$,

d'on, finalment:

$$\boxed{y = \arg ch(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

c) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} C.V.:\ t = \frac{1}{x}: \\ \text{d'on: } dt = -\frac{dx}{x^2} \end{array}\right\} = \left(-\int \frac{dt}{\sqrt{16-\frac{1}{t^2}}}\right)\circ\frac{1}{x} =$$

$$= -\left(\int\frac{|t|\,dt}{\sqrt{16t^2-1}}\right)\circ\frac{1}{x} \underset{\substack{\text{suposem } x>0 \\ \Leftrightarrow\ t>0}}{=} -\left(\int\frac{t\,dt}{\sqrt{16t^2-1}}\right)\circ\frac{1}{x} =$$

$$= \left(-\frac{1}{16}\sqrt{16t^2-1}\right)\circ\frac{1}{x} + C_1 = -\frac{1}{16}\sqrt{\frac{16}{x^2}-1} = \boxed{-\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + C_1}$$

$(x>0)$

Si suposem $x<0 \Leftrightarrow t<0$ es comprova que el resultat és el mateix (exercici)

d) $$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x=\cos t \\ dx = -\sin t\,dt \end{array}\right\} \overset{(*)}{=} \left(-\int \frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}\,dt\right)\circ \arccos x$$

(*) $-1 \leq x \leq 1$, per tant podem agafar $0 \leq t \leq \pi$ i llavors $\sin t > 0$

$$= \left(-\int tg^2 t\,\frac{dt}{\cos^2 t}\right)\circ \arccos x$$

$$= -\left(\frac{tg^3 t}{3}\right)\circ \arccos x + C_1$$

$$= \left(-\frac{\sin^3 t}{3\cos^3 t}\right)\circ \arccos x = \left(-\frac{(1-\cos^2 t)(1-\cos^2 t)^{1/2}}{3\cos^3 t}\right)\circ \arccos x + C_1$$

$$= \boxed{-\frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{3x^3} + C_1}$$

e) $$\int e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \boxed{\frac{1}{3}\left(1+e^{2x}\right)^{3/2} + C_1}$$

En efecte. Comprovem-ho! $\cancel{\frac{1}{3}}\cdot\cancel{\frac{3}{2}}\left(1+e^{2x}\right)^{1/2}\cdot 2e^{2x}$ (ok)

o bé amb el canvi
$$= \left\{\begin{array}{l} \text{c.v.:} \\ t=e^x \\ \text{d'on: } dt = e^x dx \end{array}\right\} = \left(\int t\,(1+t^2)^{1/2}\,dt\right)\circ e^x = \frac{1}{2}\left(\int 2t(1+t^2)^{1/2}\,dt\right)\circ e^x$$

$$= \left[\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{3}\left(1+t^2\right)^{3/2}\right]\circ e^x + C_1 = \boxed{\frac{1}{3}\left(1+e^{2x}\right)^{3/2} + C_1}$$ (ok)

f) $$\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+2}\,dx = \int (x+1)\sqrt{(x+1)^2+1}\,dx = \boxed{\frac{1}{3}\left(x^2+2x+2\right)^{3/2} + C_1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{o bé amb el canvi} \\ t=x+1, \\ \text{d'on } dx=dt \end{array}\right\} = \left(\int t\,(t^2+1)^{1/2}\,dt\right)\circ(x+1) = \left(\frac{1}{2}\int 2t(t^2+1)^{1/2}\,dt\right)\circ(x+1)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(t^2+1)^{3/2}}{3/2}\circ(x+1) + C_1 = \frac{1}{3}\left((x+1)^2+1\right)^{3/2} + C_1 = \boxed{\frac{1}{3}\left(x^2+2x+2\right)^{3/2} + C_1}$$

g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = sh\,t \\ dx = ch\,t\,dt \end{array} \right\} = \left(\int \frac{\sqrt{sh^2t+1}}{sh\,t}\,ch\,t\,dt\right)\circ \arg sh\,x$

$$= \left(\int \frac{ch^2 t}{sh\,t}\,dt\right)\circ \arg sh\,x = \left(\int \frac{1+sh^2t}{sh\,t}\,dt\right)\circ \arg sh\,x$$

$ch^2t - sh^2t = 1$

$$= \left(ch\,t + \int \frac{dt}{sh\,t}\right)\circ \arg sh\,x \overset{(*)}{=} \boxed{\sqrt{1+x^2} + \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right| + C}$$

... O, més fàcil:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{1/x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx}_{I_2} \overset{(**)}{=} \boxed{\sqrt{1+x^2} + \ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}} + C}$$

(*) $\displaystyle\int \frac{dt}{sh\,t} = \int \frac{ch^2\frac{t}{2} - sh^2\frac{t}{2}}{2\,sh\frac{t}{2}\,ch\frac{t}{2}}\,dt = \int \frac{\frac{1}{2}ch\frac{t}{2}}{sh\frac{t}{2}}\,dt - \int \frac{\frac{1}{2}sh\frac{t}{2}}{ch\frac{t}{2}}\,dt =$

$$= \ln\left|sh\left(\tfrac{t}{2}\right)\right| - \ln\left(ch\left(\tfrac{t}{2}\right)\right) = \ln\left|th\left(\tfrac{t}{2}\right)\right|$$

$$= \ln\left|\frac{sh\,t}{1+\sqrt{1+sh^2t}}\right|$$

$$sh(2x) = \tfrac{1}{2}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$
$$= 2\,\frac{e^x - e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$= 2\,sh\,x\,ch\,x$$

$$ch(2x) = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 = 2ch^2x - 1$$
$$\Longleftrightarrow 2ch^2x = 1 + ch(2x)$$

$$th\left(\tfrac{t}{2}\right) = \frac{2\,sh\frac{t}{2}}{2\,ch\frac{t}{2}}\cdot\frac{ch\frac{t}{2}}{ch\frac{t}{2}} = \frac{sh\,t}{1+ch\,t} = \frac{sh\,t}{1+\sqrt{1+sh^2t}}$$

(**) $I_1 = \sqrt{x^2+1}$ (immediata)

$$I_2 = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \underset{x\neq 0}{=} -\int \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{+1}{|x|}\right)dx}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\arg sh\left(\frac{1}{|x|}\right) + C \overset{\text{Exercici}}{=} \ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$-\frac{1}{|x|^2}\cdot\frac{|x|}{x}$$

8. (Miscel·lània) Calculeu les primitives següents:

a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,dx}{\sqrt{\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right)^2+1}} = \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} = \boxed{\operatorname{argsh}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C}$$

b) $$\int \sqrt{4+\tan^2 x}\,dx = \left\{\begin{array}{l} \text{c.v.: } \tan x = 2\operatorname{sh} t \\ \Leftrightarrow (1+\tan^2 x)\,dx = 2\operatorname{ch} t\,dt \Leftrightarrow dx = \dfrac{2\operatorname{ch} t}{1+4\operatorname{sh}^2 t} \\ \sqrt{4+\tan^2 x} = \sqrt{4+4\operatorname{sh}^2 t} = 2\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = 2\sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = 2\operatorname{ch} t \\ \qquad \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \\ \qquad \operatorname{ch}^2 t = 1+\operatorname{sh}^2 t \end{array}\right\}$$

$$= \int \frac{4\operatorname{ch}^2 t}{1+4\operatorname{ch}^2 t}\,dt = \int \frac{4+4\operatorname{sh}^2 t}{1+4\operatorname{sh}^2 t}\,dt = \int \left(1+\frac{3}{1+4\operatorname{sh}^2 t}\right)dt$$

$$= t + \int \frac{3\,dt}{1+\frac{4\operatorname{th}^2}{1-\operatorname{th}^2}} = t + 3\int \frac{1-\operatorname{th}^2 t}{1+3\operatorname{th}^2 t}\,dt = t+\sqrt{3}\int \frac{1-\operatorname{th}^2 t}{1+(\sqrt{3}\operatorname{th} t)^2}\,dt$$

$$= t+\sqrt{3}\arctan\left(\sqrt{3}\operatorname{th} t\right)+C = t+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}\,2\operatorname{sh} t}{\sqrt{4+4\operatorname{sh}^2 t}}\right)+C$$

$$= \operatorname{argsh}\left(\frac{\tan x}{2}\right)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{4+\tan^2 x}}\right)+C$$

$$1-\operatorname{th}^2 t = 1-\frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{ch}^2 t = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 t}$$

$$\operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t - 1 = \frac{1}{1-\operatorname{th} t}-1 = \frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\operatorname{th}^2 t}{1-\operatorname{th}^2 t} = \frac{\operatorname{th}^2 t}{1-\operatorname{th}^2 t}$$

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{th} t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\right) = \frac{\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$$

$$= 1-\operatorname{th}^2 t$$

c) $$\int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow dx = 2t\,dt \end{array}\right\}$$

$$= \int \frac{3-4t^2}{(2t-1)^2}\,2t\,dt = \int \frac{6t-8t^3}{4t^2-4t+1}\,dt$$

$$= \int \left[-2t-2+\frac{2}{(2t-1)^2}\right]dt$$

$$= -t^2-2t-\frac{1}{2t-1}+C$$

$$= \boxed{-x-2\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}-1}+C}$$

d) $$\int x^2 \ln\sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} f=\ln\sqrt{1-x^2} : f' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{1-x^2} \\ g' = x^2 : g = \dfrac{x^3}{3} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^4/3}{1-x^2}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}\int \frac{x^4-1+1}{x^2-1}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}\int \frac{\cancel{(x^2-1)}(x^2+1)}{\cancel{x^2-1}}dx - \frac{1}{3}\int\left(\frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}\right)dx$$

$$= \boxed{\frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{9} - \frac{x}{3} - \frac{1}{6}\cdot\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C}$$

f) $$\int\frac{dx}{x^4-2x^2+1} = \int\frac{dx}{(x^2-1)^2} = \int\frac{dx}{(x-1)^2(x+1)^2} = \int\left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}\right]dx$$

$A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2 = 1$

$x=1: \quad 4B = 1 \Leftrightarrow B = \frac{1}{4}$

$x=-1: \quad 4D = 1 \Leftrightarrow D = \frac{1}{4}$

$x=0: \quad -A+B+C+D = -A+C+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow -A+C = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A-C = -\frac{1}{2}$

$x=2: \quad 9A+9B+3C+D = 9A+\frac{9}{4}+3C+\frac{1}{4} = 9A+3C+\frac{10}{4} = 1 \Leftrightarrow 9A+3C = 1-\frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$

$+3A-3C = -\frac{3}{2}$

$9A+3C = -\frac{3}{2} \quad ; \; 12A = -3 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{4}$

$C = +\frac{1}{4}$

Aleshores:

$$\int\frac{dx}{x^4-2x^2+1} = \int\frac{-\frac{1}{4}dx}{x-1} + \int\frac{\frac{1}{4}dx}{(x-1)^2} + \int\frac{\frac{1}{4}dx}{x+1} + \int\frac{\frac{1}{4}dx}{(x+1)^2}$$

$$= \boxed{-\frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1/4}{x-1} - \frac{1/4}{x+1} + C}$$

g) $$\int\frac{dx}{2+3\cos^2 x} = \left\{\begin{array}{l} \text{C.V.:} \\ t = \operatorname{tg} x, \text{ d'on } dt = (1+\operatorname{tg}^2 x)dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ 1+\operatorname{tg}^2 x = 1+t^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array}\right\} = \int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2+\frac{3}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{2t^2+5}$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{\frac{2}{5}}}\int\frac{\sqrt{2/5}\,dt}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}t\right)^2+1} = \frac{\sqrt{10}}{10}\cdot\int\frac{\sqrt{10}/5\,dt}{\left(\frac{\sqrt{10}}{5}t\right)^2+1} = \frac{\sqrt{10}}{10}\arctan\left(\frac{\sqrt{10}}{5}t\right) + C$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{10}}{10}\arctan\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\tan x\right) + C}$$

h) $$\int\frac{dx}{\sqrt{2x+1} - \sqrt[4]{2x+1}} = \left\{\begin{array}{l} 2x+1 = t^4, \\ \text{d'on } 2dx = 4t^3dt \\ \Leftrightarrow dx = 2t^3dt \end{array}\right\} = \int\frac{2t^3dt}{t^2-t} = 2\int\frac{t^{\cancel{3}\,2}dt}{\cancel{t}(t-1)} =$$

$$= 2\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt = 2\int\frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1}dt = 2\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= t^2+2t+2\ln|t-1| + C = \boxed{\sqrt{2x+1} + 2\sqrt[4]{2x+1} + 2\ln\left|\sqrt[4]{2x+1}-1\right| + C}$$

i) $$\int \frac{\arcsin(2x-1)}{\sqrt{x-x^2}}dx = \int \frac{2\arcsin(2x-1)}{\sqrt{4x-4x^2}}dx = \int \frac{2\arcsin(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}dx$$

$$= \boxed{\tfrac{1}{2}\left(\arcsin(2x-1)\right)^2 + C_1}$$

j) $$\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left\{ \begin{array}{l} f=\arctan x \Rightarrow f'=\frac{1}{1+x^2} \\ g'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow g=\sqrt{1+x^2} \end{array} \right\} = \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}dx$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\arctan x - \operatorname{argsh} x + C_1$$

$$= \boxed{\sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C_1}$$

k) $$\int \frac{x^3\,dx}{x^2+2x+\frac{1}{2}} = \int\left(x-2+\frac{\frac{7x}{2}+1}{x^2+2x+\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{x^2}{2}-2x+\frac{7}{4}\int\frac{2x+\frac{4}{7}+\frac{10}{7}-\frac{10}{7}}{x^2+2x+\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}-2x+\frac{7}{4}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+\frac{1}{2}}dx - \frac{5}{2}\int\frac{dx}{x^2+2x+\frac{1}{2}} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{x^2}{2}-2x+\frac{7}{4}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+\frac{1}{2}}dx - \frac{5\sqrt{2}}{4}\int\left(\frac{1}{x+1-\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{x+1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)dx$$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2}-2x+\frac{7}{4}\ln\left|x^2+2x+\tfrac{1}{2}\right| - \frac{5\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{x+1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x+1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2+2x+\frac{1}{2} \\ \hline -x^3-2x^2-\frac{x}{2} & x-2 \\ \quad -2x^2-\frac{x}{2} & \\ \quad +2x^2+4x+1 & \\ \quad \frac{7x}{2}+1 & \end{array}$$

$$(*)\ \frac{1}{x^2+2x+\frac{1}{2}} = \frac{A}{x+1-\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{B}{x+1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}/2}{x+1-\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{\sqrt{2}/2}{x+1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$x^2+2x+\tfrac{1}{2} = \left(x-\left(-1-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(x-\left(-1+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$
$$= \left(x+1+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+1-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\left(x+1+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)A + \left(x+1-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)B = 1$$

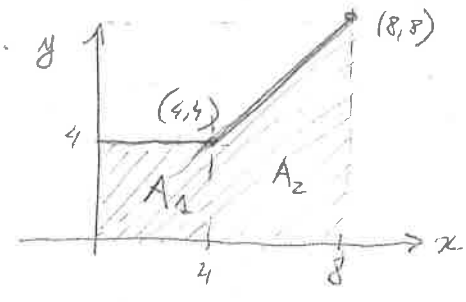
$$x=-1-\tfrac{\sqrt{2}}{2}:\ -\sqrt{2}B=1 \Leftrightarrow B=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x=-1+\tfrac{\sqrt{2}}{2}:\ \sqrt{2}A=1 \Leftrightarrow A=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

9 (Àrees i integrals). Considerem la funció definida a trossos $f(x)=\begin{cases}4, \text{si } x\le 4\\ x, \text{si } x\ge 4\end{cases}$

Usem fórmules geomètriques per calcular la integral $\int_0^8 f(x)dx$

5.



$$A=\int_0^8 f(x)dx = \int_0^4 4\,dx + \int_4^8 x\,dx = \left[4x\right]_0^4 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_4^8$$
$$= 16 + \frac{64}{2} - \frac{16}{8} = 8+32 = \boxed{40}$$

Usant fórmules geomètriques:

$$A = \underset{\text{quadrat}}{A_1} + \underset{\text{trapezi}}{A_2} = \underbrace{4\times 4}_{A_1} + \underbrace{(4+8)\frac{4}{2}}_{A_2} = 16+24 = \boxed{40}$$

10) a) $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$. Sumes de Riemann. Considerem la funció $f(x)=x$, $x_i = \frac{i}{n}$, $i=0\div n$;
$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k=1,\dots,n$

Aleshores.

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_n \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i\,\Delta x_i = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \lim_n \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \Rightarrow \lim_n S_n = \lim_n \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \int_0^1 x\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Càlcul directe:

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2 = 2^2+3^2+4^2+\dots+n^2+(n+1)^2-(1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2)$$

$$= (n+1)^2 - 1^2 = (n+1-1)(n+2) = n(n+2)$$

D'altra banda:

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^2 - i^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\cancel{i^2}+2i+1-\cancel{i^2}\right) = 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} i + n;$$

Igualant:

$$2\sum_{i=1}^{n} i + n = n(n+2) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}\left(n(n+2)-n\right) = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Llavors:

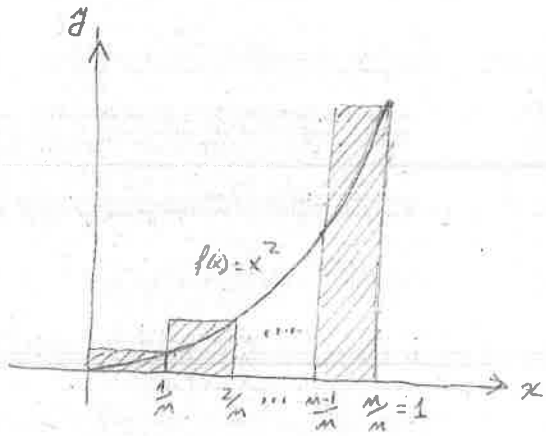
$$S_n := \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2n^2}, \text{ d'on } \lim_n S_n = \lim_n \frac{n(n+1)}{2n^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) $S_n := \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$

Considerem la funció: $f(x) = x^2$, i:

$x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0,1,2,\dots,n$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1,2,\dots,n$



Llavors:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2\,\Delta x_i = \lim_n \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

$$= \lim_n \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \text{. Aleshores } \lim_n S_n = \lim_n \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Càlcul directe:

$$\sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^3-i^3\right) = \sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 = 2^3+3^3+\dots+n^3+(n+1)^3$$
$$-1-2^3-3^3-\dots-n^3 = (n+1)^3-1$$
$$= n^3+3n^2+3n+\cancel{1}-\cancel{1}$$

D'altra banda:

$$\sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^3-i^3\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\cancel{i^3}+3i^2+3i+1-\cancel{i^3}\right) = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\underset{\text{Apartat (a)}}{=} 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n,$$

d'on, igualant:

$$3\sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n = n^3+3n^2+3n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{3}\left(n^3+3n^2+3n-\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n-n\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(n^3+\left(3-\frac{3}{2}\right)n^2+\left(3-\frac{3}{2}-1\right)n\right)$$
$$= \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Aleshores el límit $\lim_{+\infty} S_n$ es pot calcular directament. En efecte:

$$\lim_n S_n = \lim_n \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_n \frac{n(2n+1)(n+1)}{6n^3} = \lim_n \frac{2n^3+\dots}{6n^3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

(11) Sigui f una funció contínua en $\mathbb{R}$. Considerem la integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}\,dx$$

Fem el canvi de variable $t=\frac{\pi}{2}-x$ i deduïu que $2I=\frac{\pi}{2}$ i, per tant, que $I=\frac{\pi}{4}$, independentment de la funció f.

Solució.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}\,dx = \left\{\begin{array}{l} \text{c.v.: } \varphi:[0,\frac{\pi}{2}]\to[0,\frac{\pi}{2}] \\ \qquad x \mapsto t=\varphi(x)=\frac{\pi}{2}-x \text{ Monòtona decreixent} \\ dt=-dx \end{array}\right\} =$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)}{f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)+f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos t)}{f(\sin t)+f(\cos t)}\,dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos t)+f(\sin t)-f(\sin t)}{f(\sin t)+f(\cos t)}\,dt = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos t)+f(\sin t)}{f(\sin t)+f(\cos t)}\,dt}_{1} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin t)}{f(\sin t)+f(\cos t)}\,dt}_{I}.$$

$$= \int_0^{\pi/2} dt - I = \frac{\pi}{2} - I \iff 2I = \frac{\pi}{2} \iff \boxed{I = \frac{\pi}{4}} \ \square$$

(independentment de la funció f).

(12) (teorema del valor mig per integrals). Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ és contínua hi ha un punt $c\in(a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$. Determineu c per a les integrals $\int_0^3 x^3dx$, i $\int_0^2 (x-2\sqrt{x})\,dx$

- $$I = \int_0^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{3^4}{4} = f(c)\cdot(3-0) = c^3(3-0) \iff c^3 = \frac{3^3}{4} \iff \boxed{c = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}}$$ $= 1.88988157\ldots$
- $$I = \int_0^2 (x-2\sqrt{x})\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 = 2-\frac{4}{3}\cdot 2^{3/2} = 2\left(1-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$= f(c)(2-0) = 2(c-2\sqrt{c}) \iff c-2\sqrt{c}-\left(1-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=0$$

d'on: $$\sqrt{c} = \frac{2\pm\sqrt{4+4(1-4\sqrt{2}/3)}}{2} = 1\pm\sqrt{2-4\sqrt{2}/3} \Rightarrow c = \left(1\pm\sqrt{2-4\sqrt{2}/3}\right)^2$$

Llavors: $c = c_+ = \left(1+\sqrt{2-\frac{4\sqrt{2}}{3}}\right)^2 = 1.790789833\ldots$

$c = c_- = \left(1-\sqrt{2-\frac{4\sqrt{2}}{3}}\right)^2 = 0.4379740011\ldots$

Remarca: notem que $c_+, c_- \in (0,2)$. Per tant tots dos valors de c són vàlids (1). $\square$

(13) (Promig d'una funció) El promig d'una funció integrable $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ és la quantitat

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Troben el promig de les funcions següents

a) $f(x) = 9-x^2$, $[a,b]=[-3,3]$

---

(1) comprovació. Obviament:

$$f(c_+) = \left(1+\sqrt{2-4\sqrt{2}/3}\right)^2 - 2\left(1+\sqrt{2-4\sqrt{2}/3}\right) = \left(1+\sqrt{2-4\sqrt{2}/3}\right)\left(\sqrt{2-4\sqrt{2}/3}-1\right) = 1-\frac{4\sqrt{2}}{3} = f(c_-)$$

d'on: $I = (2-0)\,f(c_+) = (2-0)\,f(c_-) = 2(1-4\sqrt{2}/3)$ (OK)

a) $\bar{f} = \frac{1}{3-(-3)} \int_{-3}^{3} (9-x^2)\,dx = \frac{1}{6}\left[9x - x^3/3\right]_{x=-3}^{x=3} = \frac{2}{6}\left(27 - \frac{27}{3}\right) = \frac{1}{3}(27-9)$

$= \boxed{6}$

b) $f(x) = \sin x$, $[a,b]=[0,\pi]$: $\bar{f} = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\frac{1}{\pi}\left[\cos x\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}(\cos\pi - \cos 0)$

$= \boxed{2/\pi}$

c) $f(x) = \frac{4(x^2+1)}{x^2}$, $[a,b]=[1,3]$: $\bar{f} = \frac{1}{3-1}\int_1^3 \frac{4(x^2+1)}{x^2}\,dx = \frac{4}{2}\int_1^3 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$= 2\left[x - \frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=3} = 2\left(3 - \frac{1}{3} - 1 + 1\right) = \boxed{\frac{16}{3}}$

14. (Regla de Barrow) Calculeu $(F^{-1})'(0)$ per a les funcions següents

a) $F(x) = \int_0^x \left(1 + \sin(\sin t)\right)dt$:

$F'(x) = 1 + \sin(\sin x)$. Notem d'altra banda que $F(0) = 0$ d'on: $F^{-1}(0) = 0$ i que: $F'(0) = 1 \neq 0$. Aleshores: $(F^{-1})'(0) = \left(\frac{1}{F'} \circ F^{-1}\right)(0) = \frac{1}{F'(F^{-1}(0))} = \frac{1}{F'(0)} = 1$

b) $F(x) = \int_1^x \sin(\sin t)\,dt$;

$F'(x) = \sin(\sin x)$. Notem que $F(1) = 0$, d'on $F^{-1}(0) = 1$ i que $F'(1) = \sin(\sin 1)$; ($\sin(\sin 1) = 0.7456241417\ldots$) Llavors:

$(F^{-1})'(0) = \left(\frac{1}{F'} \circ F^{-1}\right)(0) = \frac{1}{F'(F^{-1}(0))} = \frac{1}{F'(1)} = \frac{1}{\sin(\sin(1))} = 1.341158292\ldots$

15 (Regla de Leibnitz) Calculeu les derivades de les funcions següents

a) $F(x) = \int_a^{x^3} \sin t \, dt$:

$$F'(x) = 3x^2 \sin(x^3)$$

b) $F(x) = \int_{15}^{x} \left(\int_{18}^{y} \frac{dt}{1+t^2+\sin t^2} \right) dy = \int_{15}^{x} f(y)\, dy$, amb $f(y) := \int_{18}^{y} \frac{dt}{1+t^2+\sin t^2}$

Llavors:

$$F'(x) = f(x) = \int_{18}^{x} \frac{dt}{1+t^2+\sin t^2}$$

c) $F(x) = \sin\left(\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin^3 t \, dt \right) dy \right) = \sin\left(\int_0^x f(y)\, dy \right)$, amb $f(y) = \sin\left(\int_0^y \sin^3 t \, dt \right)$

$$F'(x) = \cos\left(\int_0^x f(y)\, dy \right) f(x) = \cos\left(\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin^3 t \, dt \right) dy \right) \cdot \sin\left(\int_0^x \sin^3 t \, dt \right)$$

d) $F(x) = \int_{x^2-1}^{4x^3} \cos(t+1)\, dt$:

$$F'(x) = 12x^2 \cos(4x^3+1) - 2x \cos(x^2+1-1) = 12x^2 \cos(4x^3+1) - 2x \cos(x^2)$$

16 (Regla de Barrow, bis) Calculeu la recta tangent a la gràfica de la funció $F(x) = \int_0^x \ln^2(t+e)\, dt$ en el punt d'abscissa $x=0$.

Solució: $F(0) = 0$, $F'(x) = \ln^2(x+e)$: $F'(0) = 1$. Llavors la recta tangent en el punt $x=0$ serà: $y = x$

17 (Integral gaussiana). Considereu la funció $F: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida per

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

a) Proveu la desigualtat $\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt \quad \forall x \geq 1$

Deduïu que existeix el límit $\lim_{x \to +\infty} F(x)$

b) Estudieu la derivabilitat i la gràfica de la funció $F(x)$.

Solució

a) $t \geq 1 \Rightarrow t^2 \geq t \Rightarrow -t^2 \leq -t \Rightarrow 0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

Aleshores, per la propietat de monotonia de la integral:

$$0 \leq \int_0^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^x e^{-t} dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

Aleshores $F(x)$ és una funció positiva, estrictament creixent i acotada superiorment.
Llavors $\exists\ L = \lim_{+\infty} F(x) = \lim_{+\infty} \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$, $0 < L < +\infty$

b) $F(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} s=-t \Rightarrow dt=-ds \\ t=-x \Rightarrow s=x \\ t=0 \Rightarrow s=0 \end{array} \right\} = -\int_0^x e^{-s^2} ds = -F(x)$$

Aleshores F és una funció senar.

D'altra banda, com que $f(x) = e^{-x^2}$ es contínua en tot $\mathbb{R}$, la funció integral $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ estarà definida i serà derivable en tot $\mathbb{R}$ (pel Teorema Fonamental del Càlcul). A més:

$F'(x) = e^{-x^2} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$: d'on tenim que $F(x)$ és <u>estrictament creixent</u> $\forall x \in \mathbb{R}$

$F''(x) = -2x e^{-x^2} > 0$ per $x < 0$ i llavors la funció és <u>convexa</u> en $(-\infty, 0)$ ⌣

< 0 " $x > 0$ " " " " " <u>còncava</u> " $(0, +\infty)$ ⌢

i presenta un punt d'inflexió en $x = 0$ on val $F(0) = 0$. Per últim:

$\lim_{+\infty} F(x) = \lim_{+\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = L$, $0 < L < +\infty$. Aleshores té una asímptota horitzontal donada per $y = L$.

Gràfica aproximada:

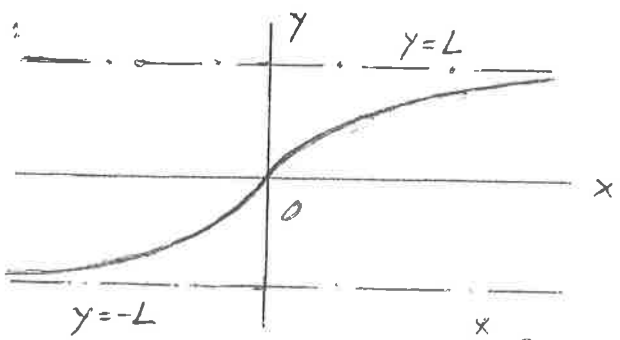


Figura. Gràfica de la funció $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

18. (Propietat regularitzadora de la integral) Sigui $f:[0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida a trossos

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \in [0,2] \\ x^2+x+1, & \text{si } x \in (2,3] \end{cases}$$

Trobeu $F:[0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ per a tot $x \in [0,2) \cup (2,3]$ i $\int_0^3 F(x)dx = 6$

Estudieu la continuïtat i la derivabilitat de les funcions $f(x)$ i $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} x^2/2 + x + C_1, & x \in [0,2) \\ x^3/3 + x^2/2 + x + C_2, & x \in (2,3] \end{cases}$$

Llavors $F'(x) = f(x)$ per tot $x \in [0,2) \cup (2,3]$ i ajustem C_1, C_2 de manera que $\lim_{2^-} F(x) = \lim_{2^+} F(x)$, $\int_0^3 F(x)\,dx = 6$:

$$F(2^-) = \lim_{2^-} F(x) = 4/2 + 2 + C_1 = 4 + C_1$$
$$F(2^+) = \lim_{2^+} F(x) = 8/3 + 4/2 + 2 + C_2 = 20/3 + C_2$$

Llavors imposem: $F(2^-) = F(2^+) \Leftrightarrow 4 + C_1 = 20/3 + C_2 \Leftrightarrow \boxed{C_1 - C_2 = 8/3}$

D'altra banda: $\int_0^3 F(x)\,dx = \int_0^2 (x^2/2 + x + C_1)\,dx + \int_2^3 (x^3/3 + x^2/2 + x + C_2)\,x$

$$= \left[x^3/6 + x^2/2 + C_1 x \right]_0^2 + \left[x^4/12 + x^3/6 + x^2/2 + C_2 x \right]_2^3$$

$$= \frac{8}{6} + \frac{4}{2} + C_1 2 + \frac{3^4}{3\cdot 4} + \frac{3^3}{3\cdot 2} + \frac{3^2}{2} + C_2 3 - \frac{2^4}{3\cdot 2^2} - \frac{2^3}{2\cdot 3} - \frac{2^2}{2} - C_2 2$$

$$= \frac{10}{3} + 2C_1 + \frac{27}{4} + 9 + 3C_2 - \frac{8}{3} - 2 - 2C_2 = \frac{10}{3} + 2C_1 + \frac{63}{4} - \frac{14}{3} + C_2$$

$$= \frac{189 + 40 - 56}{12} + 2C_1 + C_2 = \frac{173}{12} + 2C_1 + C_2 = 6 \Leftrightarrow \boxed{2C_1 + C_2 = -\frac{101}{12}}$$

Determinem C_1 i C_2 resolent el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 - C_2 = 8/3 \\ 2C_1 + C_2 = -\frac{101}{12} \end{array}\right| \quad 3C_1 = \frac{8}{3} - \frac{101}{12} = \frac{32-101}{12} = -\frac{69}{12}, \text{ d'on } \boxed{C_1 = -\frac{23}{12}}$$

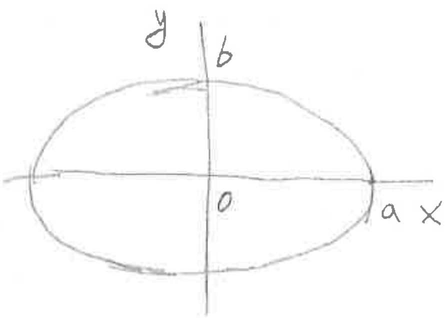
$$\boxed{C_2 = C_1 - \frac{8}{3} = -\frac{23}{12} - \frac{8}{3} = -\frac{55}{12}}$$

Llavors:

$$F(x) = \begin{cases} x^2/2 + x - 23/12, & x \in [0,2] \\ x^3/3 + x^2/2 + x - 55/12, & x \in (2,3] \end{cases}$$

$f(x)$ és discontínua en $x=2$. $F(x)$ és contínua en $x=2$: $F(2^-) = \frac{25}{12} = F(2^+)$, però no és derivable en $x=2$: $F'(2^-) = 3 \neq F'(2^+) = 7$

19 (Àrea de una elipse) Calculeu l'àrea d'una el·lipse de semieixos a i b.



$$x^2/a^2+y^2/b^2=1$$

$$\frac{A}{4} = \int_0^a b\sqrt{1-x^2/a^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x=a\sin\theta,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ dx=a\cos\theta\, d\theta \\ x=0 \Rightarrow \theta=0\,;\ x=a\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

$$= b\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2\theta}\; a\cos\theta\, d\theta = ab\int_0^{\pi/2}|\cos\theta|\cos\theta\, d\theta$$

$$\underset{0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}{=} ba\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta = ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = ab\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{?}$$

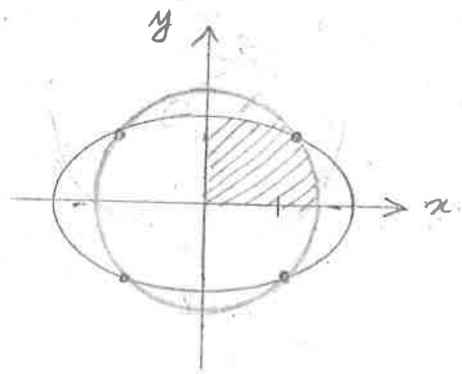
$$= ab\,\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \text{Àrea de la el·lipse} = A = \boxed{\pi a b}$$

20 (Àrea de un domini pla) Calculeu l'àrea del domini

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4,\ \frac{x^2}{16}+y^2\le 1\right\}$$

Indicació: D és l'intersecció d'un cercle de radi dos i una el·lipse de semieixos $a=4$, i $b=1$.

Solució.



$$x^2+y^2=4$$

$$x^2+16y^2=16 \Leftrightarrow 4+15y^2=16 \Leftrightarrow y^2=\frac{12}{15}$$

$$y^2=\frac{4\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 5} \Leftrightarrow y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$x^2=4-y^2=4-\frac{4}{5}=\frac{16}{5} \Leftrightarrow x=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}=\pm\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\text{Àrea}}{4} = \underbrace{\int_0^{4\sqrt{5}/5}\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}\,dx}_{\overset{\shortparallel}{I_1}} + \underbrace{\int_{4\sqrt{5}/5}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx}_{\overset{\shortparallel}{I_2}}$$

$$I_1 := \left\{\begin{array}{l} x=4\sin\theta,\quad 0\le 4\sin\theta\le\frac{4\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow 0\le\sin\theta\le\frac{\sqrt{5}}{5} \\ dx=4\cos\theta : x=0\Rightarrow\theta=0,\ x=\frac{4\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\theta=\alpha_1=\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\end{array}\right\} = 4\int_0^{\alpha_1}\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 4\int^{\alpha_1}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = 4\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]^{\alpha_1} = 2\left[\theta+\cos\theta\sin\theta\right]^{\alpha_1} =$$

$$= 2\arcsin\left(\frac{\sqrt5}{5}\right)+\frac{4}{5}$$

$$I_2 = \int_{4\sqrt5/5}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x=2\sin\theta \\ x=\frac{4\sqrt5}{5}=2\sin\theta \Leftrightarrow \sin\theta=\frac{2\sqrt5}{5} \Leftrightarrow \theta=\arcsin\left(\frac{2\sqrt5}{5}\right)=:\alpha_2 \\ x=2=2\sin\theta \Leftrightarrow \sin\theta=1 \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \\ dx=2\cos\theta\,d\theta \end{array}\right.$$

$$= \int_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\;2\cos\theta\,d\theta = 4\int_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta = 4\int_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta =$$

$$= 4\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin2\theta}{4}\right]_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} = 2\Big[\theta+\sin\theta\cos\theta\Big]_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} = \pi-2\arcsin\left(\frac{2\sqrt5}{5}\right)-\frac{4}{5}$$

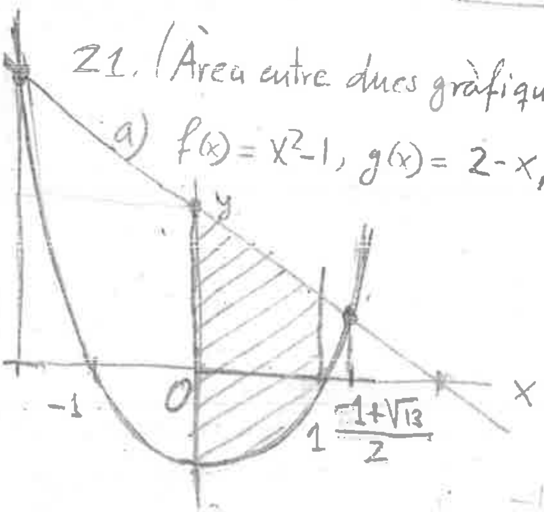
Aleshores, l'Àrea buscada és:

$$\text{Àrea} = 4(I_1+I_2) = 8\arcsin\left(\frac{\sqrt5}{5}\right)+\cancel{\frac{16}{5}}+4\pi-8\arcsin\left(\frac{2\sqrt5}{5}\right)-\cancel{\frac{16}{5}}$$

$$= \boxed{4\pi+8\arcsin\left(\frac{\sqrt5}{5}\right)-8\arcsin\left(\frac{2\sqrt5}{5}\right)}$$

21. (Àrea entre dues gràfiques). Troben l'àrea delimitada per les gràfiques de les funcions

a) $f(x)=x^2-1$, $g(x)=2-x$, per $x\in[0,1]$

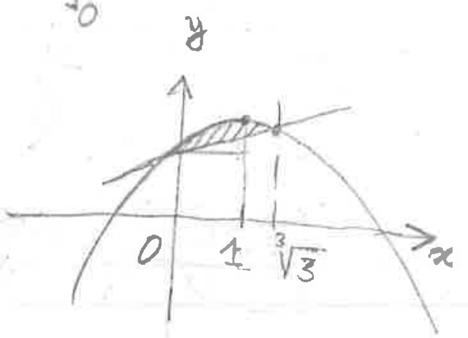


$$x^2-1=2-x \Leftrightarrow x^2+x-3=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+12}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

$$A=-\int_0^1(x^2-1)\,dx+\int_0^1(2-x)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3}-x\right\rvert_0^1+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}+2-\frac{1}{2} = \frac{2}{3}+\frac{3}{2} = \boxed{\frac{13}{6}}$$



b) $f(x)=-x^4+4x+1$, $g(x)=x+1$

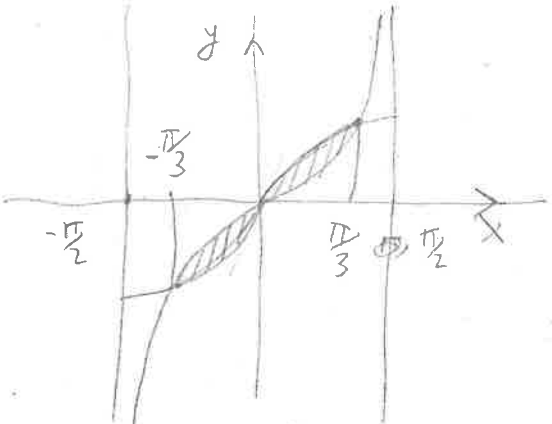
$$-x^4+4x+1=x+1 \Leftrightarrow -x^4+3x=-x(x^3-3)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0,\ x=\sqrt[3]{3},$$

$$\text{Àrea}=\int_0^{\sqrt[3]{3}}(-x^4+4x+1)\,dx-\int_0^{\sqrt[3]{3}}(x+1)\,dx = \left(-\frac{x^5}{5}+2x^2+x\right\rvert_0^{\sqrt[3]{3}}-\left(\frac{x^2}{2}+x\right\rvert_0^{\sqrt[3]{3}} =$$

$$= -\frac{3^{5/3}}{5} + 2\cdot 3^{2/3} + \cancel{3^{1/3}} - \frac{3^{2/3}}{2} - \cancel{3^{1/3}} = 3^{2/3}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{5}\right) = \boxed{\frac{9\cdot 3^{2/3}}{10}}$$

c) $f(x) = 2\sin x$ i $g(x) = \tan x$, per $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

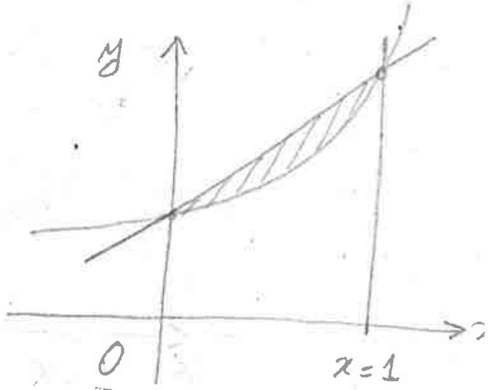


$$\frac{\sin x}{\cos x} = 2\sin x \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2\int_0^{\pi/3} (2\sin x - \tan x)\,dx = -4\cos x + 2\ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/3}$$

$$= -4\cdot\frac{1}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{\pi}{3}\right| = -2 + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 4$$

$$= \boxed{2 - 2\ln 2}$$



d) $f(x) = 3^x$, $g(x) = 2x+1$

$$= e^{x\ln 3}.$$

$$3^x = 2x+1 \iff x\ln 3 = \ln(2x+1) \iff x=0, x=1$$

En efecte $x=0$: $1 = 2\cdot 0 + 1$, $x=1$: $3^1 = 2\cdot 1 + 1$, llavors:

$$\text{Àrea} = \int_0^1 \left(2x+1 - e^{x\ln 3}\right)dx = \left[x^2 + x - \frac{3^x}{\ln 3}\right]_0^1 = 2 - \frac{3}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3} = \boxed{2\left(1 - \frac{1}{\ln 3}\right)}$$

22 (Càlcul d'integrals impròpies) Analitzeu si les següents integrals impròpies són convergents i, en cas afirmatiu, calculeu el seu valor.

a) $$\int_1^{+\infty} \frac{4\,dx}{x^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{4\,dx}{x^2+1} = 4\lim_{b\to+\infty} \left[\arctan x\right|_1^b = 4\lim_{b\to+\infty}(\arctan b - \arctan 1)$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\pi}$$

b) $$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}\cos x\,dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{\sin x - \cos x}{2} e^{-x}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\sin b - \cos b}{2} e^{-b} - \frac{\sin 1 - \cos 1}{2e}\right.$$

$\left(\begin{array}{c}\text{prob } 4 \\ a=-1 \\ \ldots\end{array}\right)$

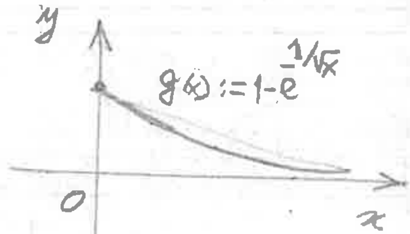
$$= \boxed{\frac{\cos 1 - \sin 1}{2e}}$$

c) $\displaystyle\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}} = \lim_{b\to 8^-}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}} = \lim_{b\to 8^-}\left[-\tfrac{3}{2}(8-x)^{2/3}\right]_0^b = \lim_{b\to 8^-}\left(6-\tfrac{3}{2}(8-b)^{2/3}\right) = \boxed{6}$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan\theta\, d\theta = \lim_{b\to \frac{\pi}{2}^-}\int_0^b \tan\theta\, d\theta = \lim_{b\to \frac{\pi}{2}^-}\Big[-\ln|\cos\theta|\Big]_0^b = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}\big(1-\ln(\cos b)\big) = \boxed{+\infty}$ (divergent).

23 (Estudi d'integrals impròpies) Estudieu la convergència de les integrals impròpies següents

a) $\displaystyle I = \int_1^{+\infty} \frac{x^2\arctan x}{2x^3+\sin x}\,dx$. Definim $\displaystyle f(x) := \frac{x^2\arctan x}{2x^3+\sin x} > 0\ \forall x\geq 1$. I com que és contínua $\forall x\geq 1$, llavors és acotada sobre tot interval acotat $[1,a]\subset[1,+\infty)$, $a>1$. Aleshores: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\frac{x^2\arctan x}{2x^3+\sin x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}\arctan x}{\cancel{x^3}\left(2+\frac{\sin x}{x^3}\right)} = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4} \neq 0, \pm\infty$. Aleshores, I és convergent $\Leftrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ és CONVERGENT, i com que aquesta última és, de fet, divergent, la integral estudiada, $\displaystyle I = \int_1^{+\infty}\frac{x^2\arctan x}{2x^3+\sin x}\,dx$ és DIVERGENT.



b) $\displaystyle I = \int_0^{+\infty}\left(1-e^{-1/\sqrt{x}}\right)x^{\alpha}\,dx$. Nota: si definimos $g(x) := 1-e^{-1/\sqrt{x}}$

$\displaystyle\lim_{0^+} g(x) = 1$, $\displaystyle\lim_{+\infty} g(x) = 0$, $g(x)>0$, $g'(x) = -\frac{x^{-3/2}}{2}e^{-1/\sqrt{x}} < 0, \ldots$

Sigui $f(x) := \left(1-e^{-1/\sqrt{x}}\right)x^{\alpha} > 0\ \forall x>0\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$. A més $f(x)$ és contínua $\forall x>0$ i aleshores acotada sobre tot interval compacte $K=[a,b]\subset(0,+\infty)$ amb $b>a>0$. Escrivim:

$$I = \int_0^{+\infty}\left(1-e^{-1/\sqrt{x}}\right)dx = \int_0^1\left(1-e^{-1/\sqrt{x}}\right)x^{\alpha}dx + \int_1^{+\infty}\left(1-e^{-1/\sqrt{x}}\right)x^{\alpha}dx$$

Tenim:

- $\displaystyle I_1 := \int_0^1\left(1-e^{-1/\sqrt{x}}\right)x^{\alpha}dx$: $\displaystyle\lim_{0^+} x^{-\alpha}\left(1-e^{-1/\sqrt{x}}\right)x^{\alpha} = \lim_{0^+}\left(1-e^{-1/\sqrt{x}}\right) = 1 \neq 0, +\infty$. Llavors

I_1 és convergent $\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 x^{-\alpha}dx$ és convergent, i aquesta última integral és convergent $\Leftrightarrow \boxed{\alpha>-}$

per tant I_1 és convergent $\Leftrightarrow \alpha>-1$.

- $\displaystyle I_2 := \int_1^{+\infty}\left(1-e^{-1/\sqrt{x}}\right)x^{\alpha}dx$: $\displaystyle\lim_{+\infty} x^{-\alpha+\frac{1}{2}}\left(1+e^{-1/\sqrt{x}}\right)x^{\alpha} = \lim_{+\infty} x^{-\alpha+\frac12}\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{\sqrt{x}}+O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right)\right)x^{0}$

$$= \lim_{+\infty}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) = 1 \neq 0, +\infty.$$

Aleshores I_2 convergeix $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} x^{\alpha-\frac{1}{2}}dx$ és convergent, però aquesta integral és convergent $\Leftrightarrow \alpha-\frac{1}{2}<-1 \Leftrightarrow \alpha<-\frac{1}{2}$

Finalment es conclou que $I=I_1+I_2$ és convergent $\Leftrightarrow -1<\alpha<-\frac{1}{2}$ □

c) $I=\int_0^{+\infty}\frac{1-2\cos^5 x}{2+e^x+\sin x}dx$. Sigui $f(x)=\frac{1-2\cos^5 x}{2+e^x+\sin x}$. Aleshores $|f(x)|\leq\frac{1+2|\cos x|^5}{2+e^x+\sin x}\leq$

$$\leq\frac{3}{2+e^x+\sin x}=\frac{3e^{-x}}{1+e^{-x}\underbrace{(2+\sin x)}_{\geq 0}}\leq 3e^{-x}\ \forall x\geq 0$$

D'altra banda $f(x)$ és una funció contínua $\forall x\geq 0$ i per tant acotada sobre tot interval compacte $K=[0,a]\subseteq[0,+\infty)$, $a>0$ qualsevol (criteris de generació); a més, hem vist que $|f(x)|\leq 3e^{-x}\ \forall x\geq 0$. Aleshores, com que $\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$ és convergent, també ho és la integral estudiada $I=\int_0^{+\infty}\frac{1-2\cos^5 x}{2+e^x+\sin x}dx$, (de fet, és <u>ABSOLUTAMENT</u> convergent)

d) $I:=\int_0^{+\infty}\frac{1-x\sin x}{1+x^3}dx$. Escrivim $I=I_1+I_2$, amb $I_1:=\int_0^1\frac{1-x\sin x}{1+x^3}dx$, $I_2:=\int_1^{+\infty}\frac{1-x\sin x}{1+x^3}dx$

D'altra banda $f(x)$ és una funció contínua (criteris de generació) sobre qualsevol interval acotat de la forma $(0,b]\subset(0,+\infty)$, amb $b>0$ qualsevol. Tanmateix, com que $|f(x)|=\frac{|1-x\sin x|}{1+x^3}\leq\frac{1+|x|\cdot|\sin x|}{1+x^3}\leq\frac{1+x}{x^3}=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}\ \forall x>0$, i la integral $\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)dx$ és convergent; resulta, aplicant el criteri de comparació per majorització, que I_2 és convergent i d'aquí es conclou la convergència de $I=I_1+I_2$ (Notem que $I_1:=\int_0^1\frac{1-x\sin x}{1+x^3}dx$ <u>NO</u> és impròpia). □

$\boxed{24}$ (Càlcul de fórmules recurrents) Considerem la integral impròpia $I_n:=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}}dx$, $n\in\mathbb{N}$

a) Raoneu que és convergent $\forall n\in\mathbb{N}$.

b) Proveu la fórmula recurrent $I_n=\frac{n-1}{n+2}I_{n-1}$ per tot $n\geq 2$

c) Avalueu les integrals: $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+1)^4}$ i $\int_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{(x^2+1)^5}$.

Solució

a) $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}}=\int_0^1\frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}}dx$. Definim: $I_n^{(1)}:=\int_0^1\frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}}dx$, $I_n^{(2)}:=\int_1^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}}dx$. Tenim que $f(x):=\frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}}\geq 0\ \forall x\geq 0$ és contínua (criteris de generació) en tot $\mathbb{R}$, $(n\in\mathbb{N})$; per tant estarà acotada sobre tot interval compacte $K=$

$=[0,b] \subset [0,+\infty)$, $b>0$ qualsevol. Estudiem doncs la convergència de la 2ª integral, $I_n^{(2)}$ (la primera $I_n^{(1)} = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{(x^2+3)^{n+3}}dx$, NO és impròpia).

Aplicarem comparació per quocient, amb $g(x)=\frac{1}{x^7}$:

$$\lim_{+\infty} x^7 \frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}} = \lim_{+\infty}\frac{x^{2n+6}}{x^{2n+6}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{n+3}} = \lim_{+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{n+3}} = 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Aleshores: $I_n^{(2)} := \int_1^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}}dx \sim \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^7}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ i com que $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^7}$ és convergent, també ho és $I_n^{(2)}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Finalment, es conclou que $I_n = I_n^{(1)}+I_n^{(2)}$ és convergent $\forall n\in\mathbb{N}$.

b) $I_n = \int_0^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{-2x\cdot x^{2n-2}}{(x^2+1)^{n+3}}dx = \left\{ \begin{array}{l} f = x^{2n-2} \Rightarrow f' = (2n-2)x^{2n-3} \\ g' = \frac{-2x}{(x^2+1)^{n+3}} \Rightarrow g = \frac{1}{(n+2)(x^2+1)^{n+2}} \end{array}\right.$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{x^{2n-2}}{2(n+2)(x^2+1)^{n+2}}\right]_{x=0}^{x=b} + \frac{n-1}{n+2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{x^{2n-3}}{(x^2+1)^{n+2}}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{-b^{2n-2}}{2(n+2)\left(1+\frac{1}{b^2}\right)b^{2n}}$$

$$+ \frac{n-1}{n+2}\int_0^{+\infty}\frac{x^{2(n-1)-1}}{(x^2+1)^{(n-1)+3}} = \lim_{b\to+\infty}\frac{-b^{-6}}{2(n+2)\left(1+\frac{1}{b^2}\right)} + \frac{n-1}{n+2}I_{n-1} = \boxed{\frac{n-1}{n+2}I_{n-1}},\ \forall n\in\mathbb{N} \text{ amb } n\geq 1.$$

c) Aplicació. Avaluem les integrals:

c.1 $I_1 = \int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+1)^4} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{x\,dx}{(x^2+1)^4} = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-1}{6(x^2+1)^3}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6(b^2+1)^3}\right) = \boxed{\frac{1}{6}}$

c.2 $I_2 = \int_0^{+\infty}\frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^5} \underset{n=2}{=} \frac{2-1}{2+2}I_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{24}}$ □

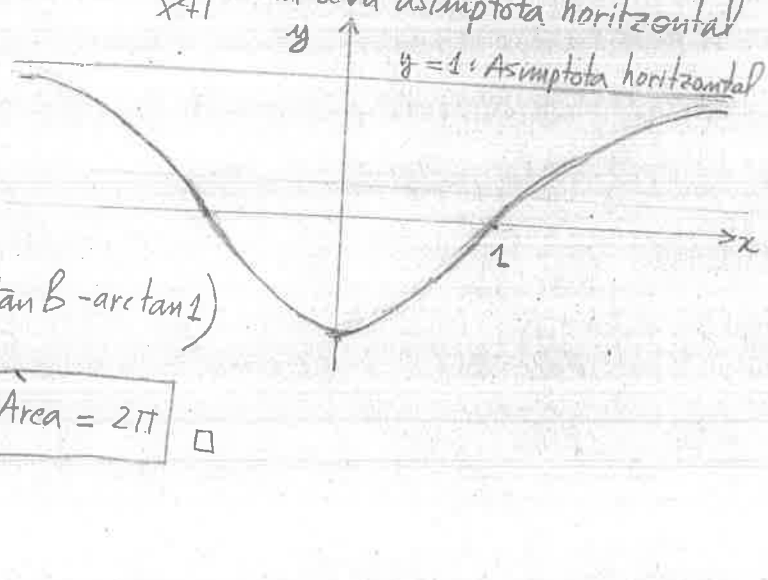
(25) Trobeu l'àrea compresa entre la gràfica de $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ i la seva asímptota horitzontal.

$$\frac{\text{Àrea}}{2} = 1 - \int_0^1\frac{x^2-1}{x^2+1}dx + \int_1^{+\infty}\left(1-\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= 1 - \int_0^1\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)dx + \int_1^{+\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+1}{x^2+1}dx$$

$$= 1 - \left[x - 2\arctan x\right]_{x=0}^{x=1} + 2\lim_{b\to+\infty}(\arctan b - \arctan 1)$$

$$= 1 - 1 + \cancel{2\frac{\pi}{4}} + 2\frac{\pi}{2} - \cancel{2\frac{\pi}{4}} = \pi, \text{ d'on } \boxed{\text{Àrea} = 2\pi}$$ □



26) (La funció Gamma d'Euler) Considerem la funció $\Gamma:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ donada per

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$$

a) Proveu que aquesta integral impròpia és convergent $\forall\, p>0$

b) Proveu, integrant per parts, que $\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p)$ per a tot $p>0$

c) Deduïu que $\Gamma(n+1)=n!$ i $\Gamma(n+\frac{1}{2})=(2n-1)!!\,2^{-n}\,\Gamma(\frac{1}{2})$ per a tot enter $n\geq 0$

d) Proveu que $\Gamma(\frac{1}{2})=2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$

Solució.

a) $\Gamma(p)=I_1+I_2=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}\,dx+\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$. Suposem $p>0$

I_1: Comparació per quocient (Notem que $f(x):=x^{p-1}e^{-x}$ és cont. positiva en $(0,1]$). Veiem, a més que $p>0\Rightarrow \alpha=p-1>-1$; Agafem doncs $g(x)=x^{p-1}$. Llavors:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{p-1}e^{-x}}{x^{p-1}}=\lim_{x\to 0^+}e^{-x}=1.$$ Llavors la integral I_1 és convergent quan $p>0$, ja que ho és la integral $\int_0^1 x^{p-1}\,dx$.

I_2: Notem que $f(x)=x^{p-1}e^{-x}$ és cont. positiva en $[1,+\infty)$. Apliquem comparació per quocient agafant $g(x)=1/x^2$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-1}e^{-x}}{x^{-2}}=\lim_{x\to+\infty}x^{p+1}e^{-x}=0$$

(Aplicant L'Hôp. $E(p+1)+1$ vegades, per ex., o bé considerant $x^{p+1}e^{-x}=e^{(p+1)\log x-x}$ i aplicant L'Hôp a l'exponent: $\frac{(p+1)\log x-1}{1/x}$)

$\forall p>0$. Aleshores, de la convergència de $\int_1^{+\infty}x^{-2}\,dx$, es segueix la convergència de I_2 $\forall\, p>0$

Finalment es conclou que I_1+I_2 és convergent $\forall\, p>0$.

b) $$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}\,dx=\left\{\begin{array}{l} f=e^{-x}\Rightarrow f'=-e^{-x}\\ g'=x^{p-1}\Rightarrow g=\frac{x^p}{p}\end{array}\right\}=\lim_{M\to+\infty}\left[\frac{x^p}{p}e^{-x}\right]_{x=0}^{x=M}+\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}x^{(p+1)-1}e^{-x}\,dx$$

$$=\lim_{M\to+\infty}\left(\frac{M^p}{p}e^{-M}\right)+\frac{1}{p}\Gamma(p+1)=\frac{1}{p}\Gamma(p+1)\Rightarrow\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p)\ \ \forall\, p>0.$$

c) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{M \to +\infty} \int_0^M e^{-x} dx = \lim_{M \to +\infty} (1 - e^{-M}) = 1$

$n=0$: $\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1 = 0!$ (trivialment)

$n=1$: $\Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1 = 1!$

$n=2$: $\Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2\Gamma(1+1) = 2\cdot 1 = 2!$

$n=3$: $\Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3\Gamma(2+1) = 3\cdot 2! = 3!$

Vegem que es satisfà per $n=1$. Suposem-ho cert per $n=k>1$ i.e. suposem que $\Gamma(k+1) = k!$. Mirem si també es satisfà per $n=k+1$:

$$\Gamma(k+1+1) = (k+1)\Gamma(k+1) = (k+1)\cdot k! = (k+1)!$$

Aleshores és cert que $\Gamma(n+1) = n!$ és cert per tot $n \in \mathbb{N}$ (i també per $n=0$)

$n=1$: $\Gamma(1+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2\cdot 1-1)!!}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$: Veiem que es verifica per $n=1$

$n=2$: $\Gamma(2+\frac{1}{2}) = \Gamma(1+\frac{1}{2}+1) = (1+\frac{1}{2})\Gamma(1+\frac{1}{2}) = (1+\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3\cdot 1}{2^2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2\cdot 2-1)!!}{2^2}\Gamma(\frac{1}{2})$

$n=3$: $\Gamma(3+\frac{1}{2}) = \Gamma(2+\frac{1}{2}+1) = (2+\frac{1}{2})\Gamma(2+\frac{1}{2}) = (2+\frac{1}{2})\frac{3\cdot 1}{2^2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{5\cdot 3\cdot 1}{2^3} = \frac{(2\cdot 3-1)!!}{2^3}\Gamma(\frac{1}{2})$

Hem vist que es satisfà per $n=1$. Suposem ara que es satisfà per $n=k>1$. Mirem si ho és també pel següent:

$$n=k+1: \Gamma(k+1+\tfrac{1}{2}) = \Gamma(k+\tfrac{1}{2}+1) \overset{\text{per hipòtesi (d'inducció)}}{=} (k+\tfrac{1}{2})\Gamma(k+\tfrac{1}{2}) = (k+\tfrac{1}{2})\cdot\frac{(2k-1)!!}{2^k}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{(2k+1)(2k-1)!!}{2^{k+1}}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{(2(k+1)-1)!!}{2^{k+1}}\Gamma(\tfrac{1}{2}).$$

Llavors queda provat que $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma(\frac{1}{2})$ per tot $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$

d) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{1-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{c.v.}^{(1)}\ t=\sqrt{x} : dt = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x\to+\infty \Rightarrow t\to+\infty \end{array} \right\}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

---

(1) Notem que $t=\varphi(x)=\sqrt{x}$ és monòtona creixent $\forall x>0$.

27. (EDOs Separables) Resoleu les següents equacions i troben la solució del problema de valors inicials que s'indica en cada cas.

a) $y' = \dfrac{e^x}{(1+e^x)y}$, $y(x_0) = y_0$

Solució: $y' = \dfrac{e^x}{(1+e^x)y} \Leftrightarrow yy' = \dfrac{e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$ ctnt.

$\Leftrightarrow \quad y(x) = \pm\sqrt{2\ln(1+e^x) + 2C_1}$.

Imposem les ci: $y_0^2/2 = \ln(1+e^{x_0}) + C_1 \Leftrightarrow 2C = y_0^2 - 2\ln(1+e^{x_0})$

$y^2/2 = \ln(1+e^x) + y_0^2/2 - \ln(1+e^{x_0}) \Leftrightarrow y^2/2 - y_0^2/2 = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right)$, d'on:

$$y(x) = \pm \; 2\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right) + y_0^2$$

b) $yy' + (1+y^2)\sin x = 0$, $y(0) = 1$

Solució:

$\Leftrightarrow \dfrac{yy'}{1+y^2} = -\sin x \Leftrightarrow \ln(1+y^2) = 2\cos x + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$ ctnt. arbitrària (lliure).

ci: $y(0) = 1$:

$\ln(1+y(0)) = 2\cos 0 + C_1$, d'on $C_1 = \ln 2 - 2$.

Llavors:

$$\ln(1+y^2) = 2\cos x + \ln 2 - 2 \Leftrightarrow 1+y^2 = e^{2\cos x + \ln 2 - 2} = 2e^{-4\sin^2 x/2}$$

d'on:

$$y^2 = 2e^{-4\sin^2 x/2} - 1$$

i aleshores:

$$y(x) = \pm\sqrt{2e^{-4\sin^2 x/2} - 1},$$

definida per $-x^* \leq x \leq x$, on $x^* = \arccos\left(1 - \frac{\ln 2}{2}\right)$,

$x^* = -0.85869\ldots \leq x \leq x^* = \arccos\left(1 - \frac{\ln 2}{2}\right) = 0.85869\ldots$,

de fet aquesta és la component connexa del domini que conté $x=0$. En general: $-x^* + 2k\pi \leq x \leq x^* + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

c) $y' = y + y^2,\ y(x_0) = y_0$

Solució.

$$\int \frac{dy}{y+y^2} = x + C_1$$

$$\int \frac{dy}{y+y^2} = \int \frac{A}{y}\,dy + \int \frac{B}{y+1}\,dy = \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y+1} = \ln\left|\frac{y}{y+1}\right|$$

$$A(y+1) + By = 1$$

$y = 0:\ A = 1$

$y = -1:\ -B = 1 \Leftrightarrow B = -1$

$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = x + C_1 \Leftrightarrow \frac{y}{y+1} = ce^x,\ c \in \mathbb{R} \text{ ctnt. arbitrària (lliure).}$$

d'on, aïllant y:

$$y(x) = \frac{ce^x}{1-ce^x} \qquad \left(\text{Comprovació: } y'(x) = \frac{(1-ce^x)ce^x + c^2e^{2x}}{(1-ce^x)^2} = y(x) + y^2(x)\right)$$

Imposem la ci:

$$\frac{y_0}{1+y_0} = ce^{x_0} \Leftrightarrow C = \frac{y_0}{1+y_0} e^{-x_0}.$$

Llavors la solució buscada és:

$$y(x) = \frac{\frac{y_0}{1+y_0} e^{x-x_0}}{1 - \frac{y_0}{1+y_0} e^{x-x_0}} = \boxed{\frac{y_0 e^{x-x_0}}{1+(1-e^{x-x_0})y_0}}$$

Nota: remarquem que hi ha una solució singular $y(x) \equiv -1$ que no està continguda a la família trobada $y(x) = \frac{ce^x}{1-ce^x}$, per cap $c \in \mathbb{R}$.

d) $y' = 1 + \frac{1}{y^2},\ y(0) = 1$

Solució. $\displaystyle\int \frac{dy}{1+\frac{1}{y^2}} = x + C_1 \Leftrightarrow \int \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) dy = x + C_1 \Leftrightarrow y - \arctan y = x + C_1$

Imposem la ci: $y(0) = 1$, d'on $1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} = C_1$

Llavors, la solució buscada s'escriu, en forma implícita, s'escriu $\boxed{y - \arctan y = x + 1 - \frac{\pi}{4}}$

De fet, podem aïllar x en funció de y:

$$\boxed{x(y) = y - \arctan y - 1 + \frac{\pi}{4}}$$

e) $(y^2+xy^2)\,y'+x^2-yx^2=0,\ y(0)=1$

Solució.

$$y^2(1+x)y'+x^2(1-y)=0 \iff y^2(1+x)y'=x^2(y-1) \iff \frac{y^2}{y-1}\,dy=\frac{x^2}{1+x}\,dx$$

Integrant

$$y^2/2+y+\ln|y-1|=x^2/2-x+\ln|x+1|+C_1,\ C_1\in\mathbb{R} \text{ ctnt arbitrària}$$

$$\left(\text{Comprovació.}\ yy'+y'+\frac{y'}{y-1}=x-1+\frac{1}{x+1} \iff y'\left[y+1+\frac{1}{y-1}\right]=x-1+\frac{1}{x+1} \iff \frac{y^2y'}{y-1}=\frac{x^2}{x+1} \iff (xy^2+y^2)y'+x^2-x^2y=0\right)$$

Per tant, tenim una família de solucions que s'escriu en forma implícita com:

$$y^2/2+y+\ln|y-1|-x^2/2+x-\ln|x+1|=C_1,\ C_1\in\mathbb{R} \text{ ctnt. arbitrària}$$

i una solució singular $y(x)\equiv 1$, que de fet és la solució particular que verifica la condició inicial $y(0)=1$ i és, per tant, la solució buscada.

f) $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0,\ y(0)=1$

Solució.

$$x\sqrt{1+y^2}=-yy'\sqrt{1+x^2} \iff \frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \iff \sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+C_1$$

Imposem la c.i.: $y(0)=1$: $\sqrt{2}=-1+C_1 \iff C_1=\sqrt{2}+1$,

d'on:

$$\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}+1 \iff y=\pm\sqrt{\left(\sqrt{2}+1-\sqrt{1+x^2}\right)^2-1},$$

definida per $|x|\le 1,\ |x|\ge\sqrt{(2+\sqrt{2})^2-1}$

g) $1+y'=e^y,\ y(0)=1$ (Indicació: feu el canvi $u=e^y$ per calcular la integral respecte y).

Solució.

$$1+y'=e^y \iff \int\frac{dy}{e^y-1}=x+C_1$$

Calculem la integral: $\displaystyle\int\frac{dy}{e^y-1}=\left\{\begin{array}{l}\text{canvi de variable}\\ u=e^y\Rightarrow du=e^y dy=u\,dy\end{array}\right\}=\int\frac{du}{u(u-1)}=\int\frac{A}{u}du+\int\frac{B}{u-1}du$

$$\overset{(*)}{=}-\int\frac{du}{u}+\int\frac{du}{u-1}=-\ln|u|+\ln|u-1|\underset{\text{desfent el canvi}}{=}-\ln e^y+\ln|e^y-1|=\ln|e^y-1|-y$$

(*) $(u-1)A+uB=1$

$u=0$: $-A=1 \iff A=-1$

$u=1$: $B=1$

Llavors tenim la família de solucions implícites:

$$\ln|e^y-1|-y-x=C_1,\quad C_1\in\mathbb{R} \text{ ctnt arbitrària (lliure)},$$

d'aquí podem aïllar x com funció de y:

$$x(y)=\ln|e^y-1|-y+c,$$

$c\in\mathbb{R}$ ctnt. arbitrària (lliure).

Imposem la ci: $y(0)=1$: $\ln(e-1)-1+c=0$, i tenim la solució:

$$\boxed{x(y)=\ln|e^y-1|-y+1-\ln(e-1)}$$

(Comprovació:

$$1=\frac{y'e^y}{e^y-1}-y' = \frac{\cancel{y'e^y}-\cancel{y'e^y}+y'}{e^y-1} \iff y'=e^y-1 \iff y'+1=e^y.$$

Per tant satisfà l'EDO i d'altra banda: $x(1)=\ln(e-1)-1+1-\ln(e-1)=0$)

Remarca. Notem la existència de la solució singular $y(x)\equiv 0$ no continguda en la família trobada $\ln|e^y-1|-y-x=C_1$, per a cap valor de la ctnt $C_1\in\mathbb{R}$.

j) $y'=y(1-y^2)$, $y(0)=2$

Solució

$$\int\frac{dy}{y(y^2-1)}=\int\frac{A}{y}dy+\int\frac{B}{y+1}dy+\int\frac{C}{y-1}=\int\frac{-dy}{y}+\int\frac{\frac{1}{2}dy}{y+1}+\int\frac{\frac{1}{2}dy}{y-1}=-x+C_1$$

$$1=(y+1)(y-1)A+y(y-1)B+y(y+1)C$$

$y=0$: $-A=1 \iff A=-1$

$y=1$: $2C=1 \iff C=1/2$

$y=-1$: $2B=1 \iff B=1/2$

Alesbores, tenim una família de solucions de la forma $\boxed{x(y)=\frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{|y^2-1|}+C_1}$ amb $C_1\in\mathbb{R}$ ctnt. arbitrària (lliure). A aquesta família hem d'afegir les solucions singulars $y(x)\equiv 0$, $y(x)\equiv 1$, $y(x)\equiv -1$.

Imposem la ci: $y(0)=2$: $0=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}+C_1 \iff C_1=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$. Amb la qual cosa, la solució buscada resulta:

$$\boxed{x(y)=\frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{|y^2-1|}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

h) $y'(x+x^2) = y-y^2,\ y(1)=0$

Solució.

$$y'(x+x^2) = y-y^2 \underset{\substack{y\neq 0\\ y\neq 1}}{\Longleftrightarrow} \frac{y'}{y(1-y)} = \frac{1}{x(1+x)}$$

Integrem:

$$G(y) = \int \frac{dy}{y(1-y)} = \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{1-y} = \ln\left|\frac{y}{1-y}\right|,$$

$$F(x) = \int \frac{dx}{x(1+x)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{1+x} = \ln\left|\frac{x}{1+x}\right|$$

Solució (en forma implícita): $\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = \ln\left|\frac{x}{1+x}\right| + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$ ctnt. arbitrària

$$\Longleftrightarrow \ln\left|\frac{y(1+x)}{x(1-y)}\right| = C_1 \Longleftrightarrow \frac{y(1+x)}{x(1-y)} = K, \text{ amb } K = \pm e^{C} \in \mathbb{R},\ K\neq 0$$

$$\Longleftrightarrow y(1+x) = Kx(1-y) \Longleftrightarrow y(1+x+Kx) = Kx \Longleftrightarrow y(x) = \frac{Kx}{1+x+Kx}, \quad (*)$$

$K\in\mathbb{R},\ K\neq 0$.

Important: notem però que en dividir per $y(1-y)$ hem 'perdut' dues solucions $y(x)\equiv 0$ i $y(x)\equiv 1$. La primera podem incorporar-la a la família treiem la restricció $K\neq 0$ i escriure:

$$\boxed{y(x) = \frac{Cx}{1+x+Cx}, \quad C\in\mathbb{R} \text{ ctnt. arbitrària}}$$

La segona solució singular però no correspon a cap solució d'aquesta família i l'hem d'escriure apart com $y(x)\equiv 1$.

Imposem la ci: $y(1)=0$: $y(1) = \frac{C}{2+C} = 0 \Longleftrightarrow C=0$.

D'on tenim que la solució buscada és precisament la solució constant $y(x)\equiv 0$.

i) $y' = 3y^{2/3},\ y(x_0) = y_0,\ y_0\neq 0$.

Solució. $y^{-2/3}y' = 3$: $3y^{1/3} = 3x + C_1$, d'on.

- $y(x) = (x+C)^3$, $C\in\mathbb{R}$ ctnt. arbitrària.
- $y(x)\equiv 0$ Solució singular: és la que correspon a $y(x_0)=0$ $(y_0=0)$.

Imposem la ci: $y^{1/3}(x_0) = x_0 + C \Longleftrightarrow y_0^{1/3} - x_0 = C$, d'on la solució del PVI és:

$$\boxed{y(x) = \left(x + y_0^{1/3} - x_0\right)^3}$$

28 (EDOs lineals) Resolen les equacions següents:

a) $(x^2+9)y'+xy=0.$

Solució; $y(x)=C_1\exp\left(+\int\frac{-x\,dx}{x^2+9}\right)=C_1\exp\left[\frac{-1}{2}\ln(x^2+9)\right]=\frac{C_1}{\sqrt{x^2+9}}$, $C_1\in\mathbb{R}$

C_1 arbitrari (lliure).

b) $y'+2y=x$

Solució. $y_h(x)=C_1e^{-2x}$, $C_1\in\mathbb{R}$ ctnt. arbitrària (lliure)

Busquem una solució particular de la forma $y_p(x)=u(x)e^{-2x}$. Entonces:

$y_p'(x)+2y_p(x)-x=u'(x)e^{-2x}-2u(x)e^{-2x}+2u(x)e^{-2x}-x=u'(x)e^{-2x}-x=0 \Leftrightarrow u'(x)=xe^{2x}$.

Llavors podem agafar $u(x)=\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}$, d'on: $y_p(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$. Amb la qual cosa la solució general s'escriu:

$$\boxed{y(x)=y_h(x)+y_p(x)=Ce^{-2x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4},\ C_1\in\mathbb{R}\text{ arbitrari (lliure)}}$$

c) $2xy'-y=3x^2$, per $x>0$

Solució.

$y_h(x)=C_1\exp\left(\int\frac{dx}{2x}\right)=C_1\sqrt{x}$, $x>0$, $C_1\in\mathbb{R}$ ctnt. arbitrària (lliure).

Busquem una solució particular de la forma $y_p(x)=ax^2+bx+c$:

$$2xy_p'(x)-y_p(x)-3x^2=2x(2ax+b)-ax^2-bx-c-3x^2=4ax^2+2bx-ax^2-bx-c-3x^2$$

$$=3ax^2-3x^2+bx-c=(3a-3)x^2+bx-c=0$$

$$\Leftrightarrow a=1,\ b=0=c.\ \text{Aleshores } y_p(x)=x^3$$

Llavors la solució general de l'EDO és: $\boxed{y(x)=C_1\sqrt{x}+x^2,\ x>0,\ C_1\in\mathbb{R}\text{ ctnt. arbitrària}}$

d) $y'+y\cos x=\sin x\cos x$

Solució.

$y_h(x)=Ce^{-\sin x}$, $C_1\in\mathbb{R}$ ctnt. arbitrària

Apliquem el <u>mètode de variació de paràmetres</u> $y_p(x)=u(x)e^{-\sin x}$:

$$y_p'(x)+y_p(x)\cos x-\sin x\cos x=u'(x)e^{-\sin x}-\cancel{\cos x\,u(x)e^{-\sin x}}+\cancel{\cos x\,u(x)e^{-\sin x}}-\sin x\cos x$$

$$=u'(x)e^{-\sin x}-\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow u'(x)=e^{\sin x}\cos x\sin x$$

$$u(x) = \int e^{\sin x} \cos x \sin x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin x \; ; \; u' = \cos x \\ v' = e^{\sin x} \cos x \; ; \; v = e^{\sin x} \end{array} \right\} = e^{\sin x} \sin x - \int e^{\sin x} \cos x \, dx$$

$$= e^{\sin x} (\sin x - 1)$$

Llavors tenim que una solució particular és: $y_p(x) = \sin x - 1$, i la solució general s'escriu com:

$$\boxed{y(x) = C e^{-\sin x} + \sin x - 1, \quad C \in \mathbb{R} \text{ ctnt arbitrària}}$$

e) $(x^2+2x-1)y' - (x+1)y = x-1$

Solució.

$$y' = \frac{x+1}{x^2+2x-1} y + \frac{x-1}{x^2+2x-1}$$

Solució de l'EDO homogènia associada $y_h(x) = C e^{\ln |x^2+2x-1|^{\frac{1}{2}}}$, $C \in \mathbb{R}$ ctnt. arbitrària

Veiem d'altra banda que $y_p(x) = x$ és una solució de l'EDO lineal. En efecte:

$$y_p'(x) = 1 = \frac{x+1}{x^2+2x-1} y_p(x) + \frac{x-1}{x^2+2x-1} = \frac{x(x+1)}{x^2+2x-1} + \frac{x-1}{x^2+2x-1} = \frac{x^2+2x-1}{x^2+2x-1},$$

o també a l'EDO original (sense normalitzar): $(x^2+2x-1)y_p'(x) - (x+1)y_p(x) - x + 1 =$
$= x^2+2x-1 - x(x+1) - x + 1 = x^2+2x-1-x^2-x-x+1 = x^2+2x-1-(x^2+2x-1) = 0$.

Per tant, la solució general de l'EDO lineal s'escriu com:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C\sqrt{|x^2+2x-1|} + x, \quad C \in \mathbb{R} \text{ ctnt. arbitrària.}}$$

f) $(1-x^2)y' + xy = 1$ per $x \in (-1,1)$ (Indicació: feu el canvi $x = \sin u$)

Solució.

Solució de l'EDO homogènia: $y_h(x) = C e^{\frac{1}{2}\ln|1-x^2|} = C\sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1,1)$, $C \in \mathbb{R}$ ctnt.

Es comprova d'immediat que $y_p(x) = x$ és una solució particular de l'EDO. Per tant, la solució general a l'interval $I = (-1,1)$ ve donada per:

$$\boxed{y(x) = C\sqrt{1-x^2} + x}$$

$x \in I = (-1,1)$, $C \in \mathbb{R}$ ctnt. arbitrària (lliure).

Nota. Aplicant el mètode de variació de paràmetres:

$$y_p(x) = \sqrt{1-x^2} \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{canvi: } x = \sin u \\ dx = \cos u \, du \\ -1 \le x = \sin u \le 1, \; -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2} \\ \text{d'on } \cos u > 0 \end{array} \right\} = \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x$$

$$\int \frac{\cos u \, du}{\cos^3 u} = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

g) $y' - \dfrac{ny}{x+1} = e^x(1+x)^n$ amb $n \in \mathbb{N}$

Solució.

$y_h(x) = C(x+1)^n$

Per trobar la solució particular, apliquem el mètode de variació de paràmetres (o de variació de les constants):

$y_p(x) = (x+1)^n \int e^x \, dx = e^x (1+x)^n.$

D'on la solució general resulta:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (1+x)^n (C + e^x), \; C \in \mathbb{R} \text{ ctat. arbitrària}}$$

29. (EDOs exactes) Verifiqueu que les següents equacions són exactes i resoleu-les:

a) $2x + \frac{1}{y} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) y' = 0$

Solució. Identifiquem $P(x,y) = 2x + \frac{1}{y}$, $Q(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}$. Llavors:

$P_y(x,y) = -\frac{1}{y^2} = Q_x(x,y)$: $U_x(x,y) = 2x + \frac{1}{y} \Rightarrow U(x,y) = x^2 + \frac{x}{y} + \varphi(y)$.

D'altra banda:

Remarca: $U_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, $U_y = \frac{\partial U}{\partial y}$ (Notació).

$U_y(x,y) = -\frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}$,

D'on es veu que podem agafar: $\varphi(y) = \ln|y|$, i llavors expressar les solucions en forma implícita com:

$$\boxed{U(x,y) = x^2 + \frac{x}{y} + \ln|y| = C,}$$

$C \in \mathbb{R}$ ctat. arbitrària.

b) $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2) y' = 0$

Solució.

Identifiquem: $P(x,y) = 2x^3 + xy^2$, $Q(x,y) = x^2 y + 2y^3$.

Veiem que $P_y(x,y) = 2xy = Q_x(x,y)$; per tant l'EDO és exacta. Busquem la solució:

$U_x(x,y) = 2x^3 + xy^2 \Rightarrow U(x,y) = x^4/2 + x^2y^2/2 + \varphi(y)$

D'altra banda: $U_y(x,y) = x^2 y + \varphi'(y) = x^2 y + 2y^3 \Leftrightarrow \varphi'(y) = 2y^3$.

Podem agafar $\varphi(y) = y^4/2$

Aleshores la solució general s'escriu, en forma implícita, com:

$$x^4+x^2y^2+y^4=c,\ c\in\mathbb{R}$$

comprovació: $4x^3+2xy^2+2x^2yy'+4y^3y'=2x(2x^2+y^2)+2y(x^2+2y^2)y'=0$

$\Leftrightarrow x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0.$

c) $3x^2-2x-y+(2y-x+3y^2)y'=0$

Solució:

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2-2x-2y)=-1=\frac{\partial}{\partial x}(2y-x+3y^2)$$

$U(x,y)$: $U_x(x,y)=3x^2-2x-y\Rightarrow U(x,y)=x^3-x^2-xy+\varphi(y)$

D'altra banda: $U_y(x,y)=-x+\varphi'(y)=2y-x+3y^2=Q(x,y)\Leftrightarrow\varphi'(y)=2y+3y^2$,

d'on agafem $\varphi(y)=y^2+y^3$, amb la qual cosa, tenim que la solució, en forma implícita es pot escriure:

$$U(x,y)=x^3-x^2-xy+y^2+y^3=c,\ c\in\mathbb{R}$$

d) $3x^2+6xy^2+(6x^2y+4y^3)y'=0$

Solució:

$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2+6xy^2)=12xy=\frac{\partial}{\partial x}(6x^2y+4y^3)$: Aleshores l'EDO és exacta.

Busquem $U=U(x,y)$ t.q.: $U_x(x,y)=3x^2+6xy^2\Longrightarrow U(x,y)=x^3+3x^2y^2+\varphi(y)$

i: $U_y(x,y)=6x^2y+\varphi'(y)=6x^2y+4y^3=Q(x,y)$

$\varphi'(y)=4y^3$. Per tant, agafem $\varphi(y)=y^4$ i llavors la solució general, en forma implícita, ve donada per

$$\boxed{U(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4=c,\ c\in\mathbb{R}\text{ ctnt. arbitrària}}$$

e) $\underbrace{\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}}_{P(x,y)}+\underbrace{\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)}_{Q(x,y)}y'=0$

Solució:

$$P_y(x,y)=\sin x=Q_x(x,y)\text{: per tant l'EDO és exacta.}$$

Busquem $U(x,y)$ t.q.: $U_x(x,y)=P(x,y)$ i $U_y(x,y)=Q(x,y)$. Així:

$U_x(x,y) = \sin y + y\sin x + \frac{1}{x} \Longrightarrow U(x,y) = x\sin y - y\cos x + \ln|x| + \varphi(y)$

$U_y(x,y) = x\cos y - \cos x + \varphi'(y) = x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}$, d'on: $\varphi'(y) = \frac{1}{y}$ i agafem una primitiva qualsevol, per exemple $\varphi(y) = \ln|y|$. Aleshores, la solució general, en forma implícita, s'escriu:

$$\boxed{x\sin y - y\cos x + \ln|xy| = C, \quad C\in\mathbb{R} \text{ ctnt arbitrària (lliure)}}$$

30. (Factors Integrants) Vegeu que en cada cas $\mu(x,y)$ és un factor integrant de l'equació diferencial donada i resoleu l'EDO exacta obtinguda.

a) $-y^2 + (x^2+xy)y' = 0$, $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2y}$

Solució. Identifiquem $P(x,y) = -y^2$, $Q(x,y) = x^2+xy$: $P_y = -2y \neq 2x+y = Q_x$. Per tant l'EDO NO és exacta. Siguin:

$\tilde{P} = \mu P = -y/x^2$, $\tilde{Q} = \mu Q = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$. Aleshores: $\tilde{P}_y = -1/x^2 = \tilde{Q}_x$. Aleshores l'EDO $\mu P + \mu Q y' = 0$ és exacta. Busquem doncs $U = U(x,y)$ t.q. $U_x = \tilde{P}$ i $U_y = \tilde{Q}$:

$$U_x = -y/x^2 \Longrightarrow U(x,y) = y/x + \varphi(y)$$

i fixem $\varphi(y)$ imposant la 2ª condició: $U_y(x,y) = \frac{1}{x} + \varphi'(y) = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \tilde{Q}(x,y)$. D'aquí: $\varphi'(y) = \frac{1}{y}$ i agafem $\varphi(y) = \ln|y|$. Aleshores la solució general (en forma implícita s'escriu:

$$\boxed{U(x,y) = y/x + \ln|y| = C, \quad C\in\mathbb{R} \text{ ctnt. arbitrària.}}$$

Comprovació: $-y/x^2 + y'/x + y'/y = \frac{1}{x^2y}(-y^2) + \frac{1}{x^2y}(x^2+xy)y' = \frac{1}{x^2y}\left(-y^2 + (x^2+xy)y'\right) = 0.$

b) $x^2+2xy-y^2+(y^2+2xy-x^2)y' = 0$, $\mu(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2}$

Solució. Identifiquem:

$P(x,y) = x^2+2xy-y^2 = (x+y)^2 - 2y^2$
$Q(x,y) = y^2+2xy-x^2 = (x+y)^2 - 2x^2$

$P_y(x,y) = x^2+2xy-y^2 \neq Q_x(x,y) = y^2+2xy-x^2$,

per tant NO és una EDO exacta. Introduïm

$$\tilde{P}(x,y) := \mu(x,y)\cdot P(x,y) = 1 - 2\frac{y^2}{(x+y)^2}$$

$$\tilde{Q}(x,y) := \mu(x,y)\cdot Q(x,y) = 1 - 2\frac{x^2}{(x+y)^2}$$

$$\tilde{P}_y(x,y) = -\frac{(x+y)^2 4y - 2(x+y)2y^2}{(x+y)^4} = -\frac{2y\,(x+y)\cdot(2x+2y-2y)}{(x+y)^4} \underset{x+y\neq 0}{=} -\frac{4xy}{(x+y)^3}$$

$$\tilde{Q}_x(x,y) = -\frac{(x+y)^2 4x - 4x^2(x+y)}{(x+y)^4} = -\frac{4x(x+y)\cdot(x+y-x)}{(x+y)^4} \underset{x+y\neq 0}{=} -\frac{4xy}{(x+y)^3}$$

Per tant: $\tilde{P}_y = \tilde{Q}_x \ \forall (x,y)$, amb $y\neq -x$.

Remarca. Notem que la recta $y=-x$ és solució de l'EDO. En efecte:

$$x^2+2xy-y^2-2xy+x^2 = 2x^2-2y^2 = 2(x+y)(x-y) \underset{y=\pm x}{=} 0.$$

Llavors busquem $U = U(x,y)$ t.q. $U_x(x,y) = \tilde{P}(x,y)$ i $U_y(x,y) = \tilde{Q}(x,y)$. Així:

$$U_x(x,y) = 1 - \frac{2y^2}{(x+y)^2} \Rightarrow U(x,y) = x + \frac{2y^2}{x+y} + \varphi(y)$$

$$U_y(x,y) = -\frac{2y^2}{(x+y)^2} + \frac{4y}{x+y} + \varphi'(y) = \frac{-2y^2+4y(x+y)}{(x+y)^2} + \varphi'(y) = \frac{2y^2+4xy}{(x+y)^2} + \varphi'(y)$$

$$= 1 - \frac{2x^2}{(x+y)^2} \iff \varphi'(y) = 1 - \frac{2(x^2+2xy+y^2)}{(x+y)^2} = 1-2 = -1$$

Agafem $\varphi(y) = -y$. Aleshores tenim una família de solucions implícites de la forma

$$U(x,y) = x + \frac{2y^2}{x+y} - y = c, \quad c\in\mathbb{R}$$

o, equivalentment:

$$\boxed{x^2+y^2 = c\,(x+y),\ c\in\mathbb{R} \text{ ct. arbitrària (lliure)}}$$

A les quals hem d'afegir la solució singular $y(x) = -x$

31. (Factors integrants depenent de x). Resoleu les següents equacions sabent que admeten un factor integrant que només depèn de x.

a) $+y^2/2 + 2ye^x + (y+e^x)y' = 0$.

b) $x+y^2-2xyy' = 0$.

Solució.

a) $y^2/2 + 2ye^x + (y+e^x)y' = 0$.

$P(x,y) = y^2/2 + 2ye^x : P_y(x,y) = y+2e^x$
$Q(x,y) = y+e^x : \quad Q_x(x,y) = e^x$

$P_y(x,y) \neq Q_x(x,y) \Rightarrow$ l'EDO no és exacta.

En canvi admet un factor integrant que depèn només de x. En efecte:

$$K = \frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{y+2e^x - e^x}{y+e^x} = 1 \text{, d'on podem agafar: } \mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^x \text{ com fi.}$$

Llavors definim: $\tilde{P}(x,y) = \frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x}$; $\tilde{Q}(x,y) = ye^x + e^{2x}$ i veiem que:

$$\tilde{P}_y(x,y) = ye^x + 2e^{2x} = \tilde{Q}_x(x,y) \Rightarrow \tilde{P}(x,y) + \tilde{Q}(x,y)y' = 0 \text{ EDO exacta.}$$

Busquem doncs $U = U(x,y)$ t.q.: $U_x = \tilde{P}$ i $U_y = \tilde{Q}$. Així:

$$U_x(x,y) = \frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x} \Rightarrow U(x,y) = \frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + \varphi(y)$$

i a continuació imposem la 2ª condició sobre U, i.e: $U_y(x,y) = ye^x + e^{2x} + \varphi'(y) =$
$= ye^x + e^{2x} \Rightarrow \varphi'(y) = 0$. Veiem que podem agafar $\varphi(y) \equiv 0$.

b) $x + y^2 - 2xyy' = 0$

Identifiquem: $P(x,y) = x + y^2$, $Q(x,y) = -2xy$: $P_y(x,y) = 2y \neq -2y = Q_x(x,y)$
$\Rightarrow$ L'EDO <u>no</u> és exacta. En canvi admet un fi que depèn només de x:

$$K = \frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2y+2y}{-2xy} = -\frac{2}{x} \text{, Llavors: } \mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2} \text{ és un fi.}$$

Comprovem-ho! Definim:

$\tilde{P}(x,y) := \mu P(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}$, $\tilde{Q}(x,y) = \mu Q(x,y) = -\frac{2y}{x}$. Resulta doncs que:

$$\tilde{P}_y(x,y) = \frac{2y}{x^2} = \tilde{Q}_x(x,y) \Rightarrow \tilde{P}(x,y) + \tilde{Q}(x,y)y' = 0 \text{ EDO exacta.}$$

Com abans busquem $U = U(x,y)$ t.q.: $U_x = \tilde{P}$ i $U_y = \tilde{Q}$.

$$U_x(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2} \Rightarrow U(x,y) = \ln|x| - \frac{y^2}{x} + \varphi(y)$$

i de la 2ª condició: $U_y(x,y) = -\frac{2y}{x} + \varphi'(y) = -\frac{2y}{x} \Leftrightarrow \varphi'(y) = 0$,
d'on es veu que podem agafar $\varphi(y) = 0$.

Així doncs tenim una família de solucions implícites de l'EDO.

$$\boxed{U(x,y) = \ln|x| - \frac{y^2}{x} = c,\ c \in \mathbb{R},\ c \text{ ctnt. arbitrària}}$$

32. (Factors integrants depenent de y) Resoleu les següents equacions sabent que admeten un factor integrant que només depèn de y

a) $\underbrace{2xy^4e^y + 2xy^3 + y}_{P(x,y)} + \underbrace{(x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)}_{Q(x,y)}y' = 0$

Solució:

$$P_y(x,y) = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1 \neq Q_x(x,y) = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3$$

Per tant veiem que l'EDO no és exacta. En canvi admet un fi que depèn només de y. En efecte:

$$K = \frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{2xy^4e^y - 2xy^2 - 3 - 8xy^3e^y - 2xy^4e^y - 6xy^2 - 1}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y}$$

$$= -4 \cdot \frac{2xy^3e^y + 2xy^2 + 1}{y\left(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1\right)} = -\frac{4}{y}$$

Llavors podem agafar com fi: $\mu(y) = e^{\int -\frac{4}{y}dy} = \frac{1}{y^4}$. Aleshores definim:

$$\tilde{P}(x,y) := \mu(x,y)\,P(x,y) = 2xe^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3}$$

$$\tilde{Q}(x,y) := \mu(x,y)\,Q(x,y) = x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}$$

Llavors: $\tilde{P}_y(x,y) = 2xe^y - 2\frac{x}{y^2} - \frac{3}{y^4} = \tilde{Q}_x(x,y) \Rightarrow \tilde{P}(x,y) + \tilde{Q}(x,y)y'$ EDO exacta.

$$U_x(x,y) = 2xe^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3} \Longrightarrow U(x,y) = x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + \varphi(y)$$

$$U_y(x,y) = x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} + \varphi'(y) = x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} \Longleftrightarrow \varphi'(y) = 0.$$

Agafem $\varphi(y) = 0$ i escrivim la família de solucions en forma implícita

$$\boxed{x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c,\ c \in \mathbb{R} \text{ ctnt arbitrària}}$$

Remarca. Notem que, en dividir per y^4 hem perdut la solució constant $y(x) \equiv 0$.

b) $2xy^2-3y^3+(7-3xy^2)y'=0$

Solució. Introduïm: $P(x,y)=2xy^2-3y^3$, $Q(x,y)=7-3xy^2$. Tenim:

$P_y(x,y)=4xy-9y^2\neq Q_x(x,y)=-3y^2 \Rightarrow$ l'EDO NO és exacta.

Admet però un fi que depèn només de y

$$K=\frac{Q_x(x,y)-P_y(x,y)}{P(x,y)}=\frac{-3y^2-4xy+9y^2}{2xy^2-3y^3}=\frac{6y^2-4xy}{2xy^2-3y^3}=-2\;\frac{2xy-3y^2}{y(2xy-3y^2)}=-\frac{2}{y}$$

Llavors $\mu(y)=e^{\int-\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln|y|}=\frac{1}{y^2}$.

Introduïm $\tilde{P}(x,y):=\mu(y)P(x,y)=2x-3y$, $\tilde{Q}(x,y):=\frac{7}{y^2}-3x$. Aleshores:

$\tilde{P}_y(x,y)=-3=\tilde{Q}_x(x,y) \Rightarrow \tilde{P}(x,y)+\tilde{Q}(x,y)y'=2x-3y+\left(\frac{7}{y^2}-3x\right)y'=0$ EDO exacta

Busquem doncs $U=U(x,y)$ t.q.: $U_x(x,y)=\tilde{P}(x,y)$, $U_y(x,y)=\tilde{Q}(x,y)$:

$$U_x(x,y)=2x-3y \Rightarrow U(x,y)=x^2-3xy+\varphi(y).$$

Imposant la 2ª condició: $U_y(x,y)=-3x+\varphi'(y)=\frac{7}{y^2}-3x \Leftrightarrow \varphi'(y)=\frac{7}{y^2}$,

podem agafar $\varphi(y)=-\frac{7}{y}$ i llavors tenim una família de solucions en forma implícita:

$$\boxed{x^2-3xy-\frac{7}{y}=C,\quad C\in\mathbb{R} \text{ ctnt. arbitrària (lliure)}}$$

Remarca. Com a l'apartat anterior hem perdut —en dividir per y— la solució constant $y(x)\equiv 0$ de l'EDO original.

33. (Compostos granulars) Aboquem un compost soluble granulat esfèricament en un tanc d'aigua. Quan les condicions de temperatura i concentració varien poc, és raonable suposar que la massa de cada gra es dissol amb una taxa de variació proporcional a la seva superfície. Sigui $K>0$ la constant de proporcionalitat, ρ la densitat del compost i r_0 el radi inicial. Sigui $r(t)$ el radi dels grans del compost en l'instant t. El PVI que modela el problema és

$$\frac{dr}{dt} = -K/\rho, \quad r(0) = r_0$$

Resoleu aquest PVI. Quant temps triga aquest compost en dissoldre?

Solució.

$$\frac{d}{dt}\left[\rho \frac{4}{3}\pi r^3\right] = -K 4\pi r^2 \Leftrightarrow \rho \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt} = -K 4\pi r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{K}{\rho}, \quad r(0) = r_0.$$

Solució del PVI: $r(t) - r(0) = -\frac{K}{\rho} t \Leftrightarrow \boxed{r(t) = r_0 - \frac{K}{\rho} t}$

Temps que triga el compost en dissoldre: $t = \tau$: $r(\tau) = r_0 - \frac{K}{\rho}\tau = 0 \Leftrightarrow \boxed{\tau = \frac{\rho r_0}{K}}$

34. (Màquina Llevaneus) Està nevant amb regularitat. A les dotze surt una màquina llevaneus que avança 2 Km en la primera hora i 1 Km en la segona. A quina hora ha començat a nevar?

Indicació: Suposeu que la quantitat de neu treta per la màquina per unitat de temps és uniforme i donada per una constant de proporcionalitat $Q>0$ i justifiqueu els punts següents

(i) L'alçada de la neu és $h(t) = K(t - t_0)$, on $K>0$ és una constant de proporcionalitat i t_0 és l'hora en què ha començat a nevar;

(ii) si $x(t)$ és la distància recorreguda per la màquina en l'instant t, amb $x(0)=0$, raoneu que $h(t)\big(x(t+\Delta t) - x(t)\big) + O(\Delta t^2) = Q\cdot\Delta t$.

(iii) $x(t)$ verifica l'EDO $h(t)x'(t) = Q$.

Solució

(i) Neva amb regularitat, per tant l'alçada de la capa de neu es pot pensar que és proporcional al temps que està nevant: $h(t) = K(t-t_0)$, on K és la constant de proporcionalitat.

(ii) Quantitat de neu treta en l'interval Δt

$$M(t+\Delta t) - M(t) = h(t)\cdot\big(x(t+\Delta t) - x(t)\big) + O\left[(\Delta t)^2\right] = Q\cdot \Delta t + O\left[(\Delta t)^2\right]$$

(iii) Dividint per Δt i prenent límit $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{M(t+\Delta t)-M(t)}{\Delta t} = h(t) \lim_{\Delta t\to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = h(t)\cdot x'(t) =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \left[Q + O(\Delta t)\right] = Q, \text{ d'on: } h(t)x'(t) = Q$$

Llavors l'EDO resulta:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Q/K}{t-t_0},$$

amb $x(12) = 0$, $x(13) = 2$, $x(14) = 3$.

Aleshores:

$$\left.\begin{aligned} x(13)-x(12) &= \frac{Q}{K} \ln \frac{13-t_0}{12-t_0} = 2 \\ x(14)-x(12) &= \frac{Q}{K} \ln \frac{14-t_0}{12-t_0} = 3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\ln \frac{13-t_0}{12-t_0}}{\ln \frac{14-t_0}{12-t_0}} = 2/3$$

$$\Longleftrightarrow \ln\left(\frac{13-t_0}{12-t_0}\right)^3 = \ln\left(\frac{14-t_0}{12-t_0}\right)^2 \underset{\tau = 12-t_0>0}{\Longleftrightarrow} \left(\frac{\tau+1}{\tau}\right)^3 = \left(\frac{\tau+2}{\tau}\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow (\tau+1)^3 = \tau(\tau+2)^2 \Longleftrightarrow \tau^2+\tau-1 = 0$$

$$\text{d'on: } \tau = \frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} & (\text{NO, ja que } \tau = 12-t_0 > 0) \\[2ex] \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$$

Així doncs l'hora d'inici de la nevada fou $t_0 = 12-\tau = 12 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$= \frac{25-\sqrt{5}}{2} = 11{,}381\,966\,011\,2501\ldots \simeq 11^h\,23^m.$$

35. (Llei de Torricelli) Tenim un dipòsit d'alçada h_0 completament ple d'aigua amb un petit forat d'àrea a situat al fons. Sigui $h(t)$ l'alçada de l'aigua restant en l'instant t. Sigui $A(t)$ l'àrea de la superfície que forma l'aigua en l'instant t. La llei de Torricelli diu que el PVI que modela el problema és

$$A(t)\,\frac{dh}{dt}(t) = -a\sqrt{2gh(t)}\,, \qquad h(0)=h_0$$

on g denota l'acceleració del camp gravitatori.

a) Resoleu el PVI que correspon a un dipòsit cilíndric vertical d'alçada h_0 i radi r_0. Sigui $A_0 = \pi r_0^2$ l'àrea de la base del cilindre. Comproveu que el dipòsit triga

$$t_* = \frac{A_0}{a}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

unitats de temps a buidar-se. Quina proporció d'aigua queda en el dipòsit quan només ha passat la meitat del temps necessari per buidar-se?

b) Resoleu el PVI que correspon a un dipòsit cònic vertical invertit d'alçada h_0 i radi r_0. Sigui $A_0 = \pi r_0^2$ l'àrea de la "base" del con. Comproveu que el dipòsit triga

$$t_* = \frac{A_0}{5a}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

unitats de temps a buidar-se. Quina proporció d'aigua queda en el dipòsit quan només ha passat la meitat del temps necessari per buidar-se? (Indicació: El volum d'un con d'alçada h i radi r és $V = \pi r^2 h/3$)

Solució

(a) $A(t) = A_0 = \pi r_0^2$

$$\pi r_0^2 \frac{dh}{dt} = -a\sqrt{h}\cdot\sqrt{2g}, \text{ d'on: } \int_{h_0}^{h} \frac{du}{2\sqrt{u}} = -\frac{a\sqrt{2g}}{2\pi r_0^2}\int_0^t dz \Leftrightarrow \sqrt{h}-\sqrt{h_0} = -\frac{a\sqrt{2g}}{2\pi r_0^2}t$$

$$\Leftrightarrow h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{a\sqrt{2g}}{2\pi r_0^2}\right)^2 \text{ ó } \boxed{h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{a\sqrt{2g}}{2A_0}t\right)^2}$$

Busquem $t = t_*$: $h(t_*) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{a\sqrt{2g}}{2A_0}t_*\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{t_* = \frac{A_0}{a}\sqrt{\frac{2h}{g}}}$

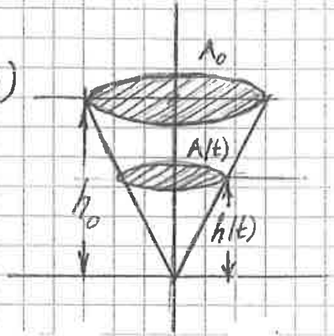
$$h(t_*/2) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{a\sqrt{2g}}{2A_0}\cdot\frac{A_0}{2a}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 = \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_0}/2\right)^2 = h_0/4.$$

Pertant:

$$\frac{V(t_*/2)}{V(0)} = \frac{A(t_*/2)\,h(t_*/2)}{A_0 h_0} = \frac{A_0 \, h_0/4}{A_0 h_0} = \frac{1}{4}$$

Remarca. Notem que $A(t) = \pi r_0^2 = A_0 \ \forall t$ já que el dipòsit és cilíndric.

(b)



$$A(t) = \pi r^2(t), \quad r(t) = \frac{h(t)}{h_0}\sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$$
$$A_0 = \pi r_0^2$$

Llavors $A(t) = \pi r^2(t) = \pi r^2(t) = \cancel{\pi}\,\frac{h^2(t)}{h_0^2}\cdot\frac{A_0}{\cancel{\pi}} = \left(\frac{h(t)}{h_0}\right)^2 A_0$

Aplicant la llei de Torricelli en aquest cas:

$$A_0\left(\frac{h(t)}{h_0}\right)^2 \frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2g}\,h^{1/2} \Leftrightarrow h^{3/2}\frac{dh}{dt} = -\frac{a h_0^2}{A_0}\sqrt{2g}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5}h^{5/2} - \frac{2}{5}h_0^{5/2} = -\frac{a h_0^2\sqrt{2g}}{A_0}\,t$$

d'on:
$$\boxed{h(t) = \left(h_0^{5/2} - \frac{5a h_0^2\sqrt{2g}}{2A_0}t\right)^{2/5}}$$

Busquem:

$$t = t_*: \ h(t_*) = \left(h_0^{5/2} - \frac{5a h_0^2\sqrt{2g}}{2A_0}\,t_*\right)^{2/5} = 0 \Leftrightarrow \boxed{t_* = \frac{A_0}{5a}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}}$$

Llavors:
$$h(t_*/2) = \left(h_0^{5/2} - \frac{5a h_0^2\sqrt{2g}}{2A_0}\cdot\frac{A_0}{10a}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\right)^{2/5} = \left(h_0^{5/2} - \frac{h_0^{5/2}}{2}\right)^{2/5}$$
$$= \frac{h_0}{\sqrt[5]{4}}.$$

i aleshores:

$$\frac{V(t_*/2)}{V(0)} = \frac{\frac{1}{3}A(t_*/2)\,h(t_*/2)}{\frac{1}{3}A_0 h_0} = \frac{\frac{1}{3}\left[\frac{h(t_*/2)}{h_0}\right]^2 A_0\,h(t_*/2)}{\frac{1}{3}A_0 h_0} = \frac{h^3(t_*/2)}{h_0^3}$$

$$= \frac{h_0^3}{h_0^3\sqrt[5]{2^6}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt[5]{2}}}$$

36. (Velocitat terminal). Un paracaigudista amb una massa de m quilograms es llança al buit i sofreix una acceleració gravitatòria constant de g metres per segon quadrat. Suposem que la força de fricció que frena la caiguda és proporcional al quadrat de la velocitat, amb una constant de proporcionalitat $k>0$. Sigui $v(t)$ la velocitat de caiguda (en metres per segon) en l'instant t. El PVI que modela el problema és

$$v' = g - \frac{k}{m} v^2, \qquad v(0) = 0$$

Resoleu aquest PVI i comproveu que $v(t)$ és una funció creixent tal que $\lim_{t\to+\infty} v(t) = v_*$ on la quantitat v_* s'anomena velocitat terminal. Calculeu v_*.

Indicació: trobeu una descomposició en fraccions simples de la forma

$$\frac{1}{g - kv^2/m} = \frac{A}{v+v_*} + \frac{B}{v-v_*}.$$

Solució. A partir de la 2ª Llei de Newton:

$$mv' = mg - kv^2, \text{ amb la ci } v(0)=0 \iff v' = -\frac{k}{m}\left(v^2 - \frac{mg}{k}\right) \text{ amb ci } v(0)=0.$$

Apliquem EDO en variables separables:

$$-\frac{k}{m}t + \beta = \int \frac{dv}{v^2 - \frac{mg}{k}} = \frac{1}{2\alpha}\int \frac{dv}{v-\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\int\frac{dv}{v+\alpha} = \frac{1}{2\alpha}\ln\left|\frac{v-\alpha}{v+\alpha}\right|$$

ctnt. d'integració

definim: $\alpha := \sqrt{\frac{mg}{k}}$

Aleshores: $$\frac{v-\alpha}{v+\alpha} = C e^{-\frac{2k\alpha}{m}t}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ ctnt.}$$

Imposem la ci $v(0)=0$ i llavors $C=-1$, per tant

$$-v+\alpha = (v+\alpha)\exp(\cdots) \iff (1+\exp(\cdots))v = \alpha(1-\exp(\cdots))$$

d'on la solució buscada és (*):

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \times \frac{1-\exp\left(-2\sqrt{kg/m}\,t\right)}{1+\exp\left(-2\sqrt{kg/m}\,t\right)}$$

(*) $2\frac{k\alpha}{m} = 2k\sqrt{mg/k} = 2\sqrt{\frac{gk}{m}}$

Definim: $b := 2\sqrt{\frac{gk}{m}}$ i llavors $V(t) = \alpha \frac{1-e^{-bt}}{1+e^{-bt}}$. Aleshores:

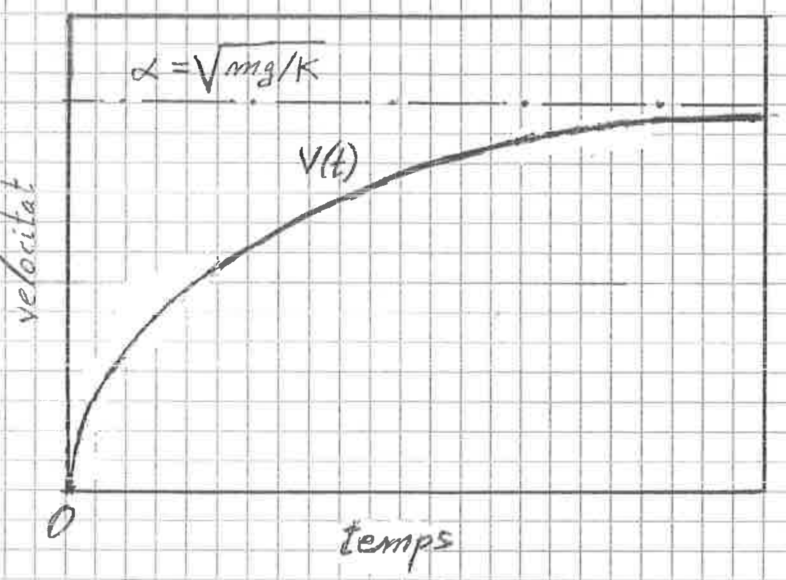
$$V'(t) = \alpha \frac{(1+e^{-bt})be^{-bt} + (1-e^{-bt})be^{-bt}}{(1+e^{-bt})^2} = \alpha \frac{2be^{-bt}}{(1+e^{-bt})^2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

per tant f és monòtona creixent en tot $\mathbb{R}$. A més:

$$V''(t) = 2\alpha b \frac{-(1+e^{-bt})^2 be^{-bt} + 2(1+e^{-bt})be^{-2bt}}{(1+e^{-bt})^4} = -2\alpha b^2(1+e^{-bt})e^{-bt}\frac{1+e^{-bt}-2e^{-bt}}{(1+e^{-bt})^4}$$

$$= -2\alpha b^2 e^{-bt}(1+e^{-bt})\frac{1-e^{-bt}}{(1+e^{-bt})^4} = -2\alpha b e^{-2bt}\frac{e^{bt}-e^{-bt}}{e^{-2bt}(1+e^{bt})^2(1+e^{-bt})^2} < 0$$

$\forall t > 0$. Llavors $V(t)$ és còncava en $(0,+\infty)$. El gràfic de $V(t)$, per $t>0$ té l'aspecte següent:



Finalment, calculem la velocitat terminal prenent límit quan $t \to +\infty$:

$$V_* = \lim_{t\to+\infty} V(t) = \lim_{t\to+\infty} \alpha \frac{1-e^{-bt}}{1+e^{-bt}} \underset{b>0}{=} \alpha = \sqrt{\frac{mg}{K}}.$$

37. (Desintegració radioactiva). El procés de desintegració d'una substància radioactiva ve regit per l'equació diferencial lineal

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N ,$$

on $N = N(t)$ és la quantitat d'àtoms que hi ha en l'instant t i $\lambda > 0$ és una constant de proporcionalitat que rep el nom de <u>constant de desintegració</u>. <u>La semivida o període de semidesintegració</u>[1] de la substància es defineix com el temps que triga en desintegrar-se la meitat dels àtoms d'una mostra inicial N_0. Si suposem coneguts els valors $N_1 = N(t_1)$ i $N_2 = N(t_2)$, demostreu que la semivida ve don per la fórmula

$$s = \frac{(t_2 - t_1)\ln 2}{\ln(N_1/N_2)}$$

Solució.

Signi N_0 el nombre dels àtoms de la mostra en l'instant inicial ie, $N(0) = N_0$. Llavors $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$. Si

$$\left.\begin{aligned} N(t_1) &= N_0\, e^{\lambda t_1} = N_1 \\ N(t_2) &= N_0\, e^{\lambda t_2} = N_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow e^{\lambda(t_2 - t_1)} = \frac{N_2}{N_2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln(N_2/N_1)}{t_2 - t_1}$$

Busquem $t = s$ tq: $N(s) = N_0 e^{s\frac{\ln(N_2/N_1)}{t_2 - t_1}} = \frac{N_0}{2}$, d'on aïllant s:

$$s = -\frac{(t_2 - t_1)\ln 2}{\ln(N_2/N_1)}.$$

38 (Datació per carboni-14). Una mostra de carbó de la cova de Lascaux (França) que havia estat habitada, donava una mitjana, en 1950, de 0'97 desintegració de carboni-14 (^{14}C) per minut i gram, mentre que per a arbres vius es mesuraven 6'68. Estimeu la data en què foren fetes les pintures de la cova de Lascaux

[1] No s'ha de confondre amb la <u>vida mitjana</u>; són termes relacionats però diferents.

sabent que la semivida del ^{14}C és de 5730 ± 40 anys. (Per a una planta viva la raó, la raó d'ingestió de ^{14}C equilibra la desintegració de ^{14}C.)

Solució.

$$\left.\begin{aligned} N'(t_2=1950) &= \lambda N(t_2=1950) = 0'97 = \lambda N_2 \\ N'(t_1) &= \lambda N(t_1) = 6'68 = \lambda N_1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{6'68}{0'97}$$

on t_1 és la data en què les pintures van ser fetes. De la fórmula deduïda en l'apartat anterior:

$$\frac{(1950-t_1)\ln 2}{\ln(N_1/N_2)} = 5730 \pm 40 \iff 1950 - t_1 = (5730 \pm 40)\frac{\ln(N_1/N_2)}{\ln 2}$$

$$= (5730 \pm 40) \cdot \frac{\ln(6'68/0'97)}{\ln 2} = 15.951'1250101441 \pm 111'351\,658\,011\,477.$$

Llavors aquestes daten aproximadament del 14.000 ± 112 A.C.

39. (Llei de refredament de Newton) La llei de refredament de Newton diu que la raó del canvi de temperatura d'un cos és proporcional a la diferència de temperatura entre el cos i l'ambient:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_*)$$

on $T = T(t)$ és la temperatura del cos en l'instant t, T_* és la temperatura de l'ambient i $k > 0$ és la constant de proporcionalitat.

Sherlock Holmes i el Dr. Watson van trobar el cadàver de Sir Baskerville a mitjanit. La temperatura del cos sense vida era de $31°C$. Al cap d'una hora, la temperatura havia baixat a $30'5°C$. La temperatura habitual d'un adult viu és $36'5°C$. La temperatura durant tota la nit fou d'uns $16°C$. A quina hora fou assassinat Sir Baskerville?

Solució.

La solució de l'EDO és: $T(t) - T_* = ce^{-kt}$, on $c \in \mathbb{R}$ ctnt. arbitrària.

Imposem la c.i.: $T(t_0) = T_0$,

$$T_0 - T_* = T(t_0) - T_* = ce^{-kt_0} \iff c = (T_0 - T_*)e^{kt_0}$$

Llavors la solució del PVI corresponent és:

$$T(t) - T_* = (T_0 - T_*)e^{-k(t-t_0)} \iff T(t) = T_* + (T_0 - T_*)e^{-k(t-t_0)}$$

Sigui t_0 l'hora de l'assassinat de Sir Charles, llavors $T(t_0) = 36'5°$ (temperatura d'un adult viu), a més:

a $t = 0$ (mitjanit): $T(0) = 32°C$

a $t = 1$ (al cap d'1h): $T(1) = 30'5°C$

i la temperatura durant tota la nit fou $T_* = 16°C$. Així:

$$32 - 16 = (36'5 - 16)e^{kt_0}$$

$$30'5 - 16 = (36'5 - 16)e^{-k(1-t_0)}$$

d'on:

$$\frac{16}{14'5} = e^{\cancel{kt_0} + k - \cancel{kt_0}} \iff k = \ln\frac{16}{14'5},$$

i aleshores,

$$kt_0 = \ln\frac{16}{20'5} \implies t_0 = \frac{\ln\left(16/20'5\right)}{\ln\left(16/14'5\right)} = -2'5176\ldots$$

amb la qual cosa l'hora estimada de la mort s'estableix a les $12 - 2'5176\ldots$
$= 9'4824\ldots \simeq 9^h 29^m$.

40. (Concentració de clor) Tenim un dipòsit de V litres, inicialment ple d'aigua pura, al qual li arriba un cabdal de r litres per minut d'aigua clorada amb una concentració de e mil·lígrams de clor per litre, i del qual surt el mateix cabdal d'aigua per mantenir un volum constant dins del dipòsit. Sigui $c(t)$ la concentració (en mil·lígrams per litre) i sigui $s(t)$ la quantitat total (en mil·lígrams) de clor que hi ha al dipòsit en el minut t. Suposem que, amb un procés de mescla adequat, la concentració de clor a l'aigua que surt del dipòsit

també és igual a c(t))

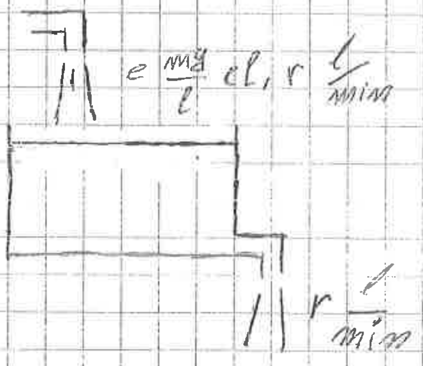
a) Escriviu la relació entre les funcions $c(t)$ i $s(t)$.

b) Escriviu i resoleu el PVI que satisfà la funció $s(t)$.

c) Calculeu el límit $\lim_{t \to +\infty} c(t)$ i interpreteu físicament el resultat.

d) A la resolució del 23 d'Abril de 1984 del Ministerio de Sanidad y Consumo de l'Estat Espanyol es fixa la concentració màxima de clor residual combinat que poden tenir les aigües potables. A Barcelona, degut al pH de la zona, la concentració màxima és 1'5 mil·lígrams per litre. Quants minuts calen per a que l'aigua del dipòsit deixi de ser potable si $V=2000$, $r=10$ i $e=2$? Ídem, quan $V=2000$, $r=10$ i $e=1$.

Solució



PVI que modelitza l'evolució de la concentració de Cl al dipòsit

$$\frac{ds}{dt} = re - \frac{s(t)}{V} r \ , \quad s(0) = 0.$$

Cl que surt del dipòsit per unitat de temps.

Cl que entra al dipòsit per unitat de temps.

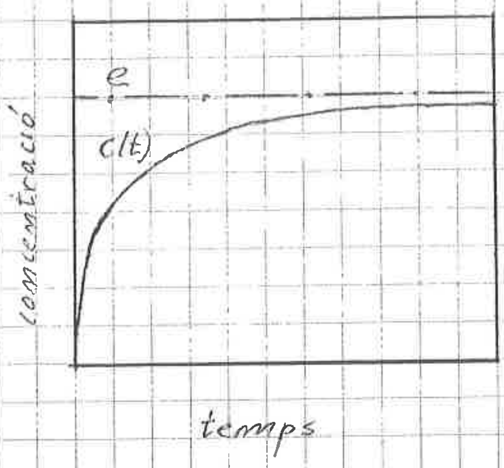
a) $c(t) = s(t)/V$

b) $\frac{ds}{dt} = re - \frac{s}{V} r = -\frac{r}{V}(s - Ve)$, $s(0)=0 \iff \frac{ds}{dt} = -\frac{r}{V}(s-Ve)$, $s(0)=0$

Solució de l'EDO: $s(t) - Ve = C_1 \exp(-\frac{r}{V}t)$, $C_1 \in \mathbb{R}$ ctnt.

ci: $s(0) - Ve = 0 - Ve = C_1$, d'on la solució del PVI és:

$$\boxed{s(t) = Ve\left(1 - \exp\left(-\frac{r}{V}t\right)\right)}$$



c) $\lim\limits_{t\to+\infty} c(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{S(t)}{V}$

$= \lim\limits_{t\to+\infty} e\left(1-\exp\left(-\frac{r}{V}t\right)\right) = e$

Quan el temps transcorregut és prou gran la concentració de clor al dipòsit és la mateixa és la mateixa que la de l'aigua clorada que s'hi aboca.

d) $V=2000,\ r=10,\ e=2$: busquem $t=t_1$: $c(t_1) = 2\left[1-\exp\left(-\frac{10}{2000}t_1\right)\right]$

$= 2\left[1-\exp\left(-\frac{t_1}{200}\right)\right] = \frac{3}{2} \iff \exp\left(-\frac{t_1}{200}\right) = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Aleshores $t_1 = 400 \ln 2 = 277'2588\,7222\,3978\ldots \cong 4^h\, 37^m\, 15^s$

$V=2000,\ r=10,\ e=1$; en aquest cas $c(t) = 1-\exp\left(-\frac{t}{200}\right) \leq 1 < 3/2 \quad \forall t>0$.

Per tant l'aigua del dipòsit és sempre 'potable'.

41. (Airbus A380). L'avió de passatgers Airbus A380 té un pes en buit de 276'8 tones, la seva càrrega típica és de 66'4 tones i pot enlairar-se amb fins 148 tones de combustible. Quan arriba a la seva velocitat de creuer (900 quilòmetres per hora), consumeix 28 quilograms de combustible per per tona de pes i hora. Sempre ha de quedar una reserva de 30 tones de combustible per a l'enlairament, l'aterratge i per seguretat. Quin és el rang de vol màxim amb la càrrega típica?

Solució. Dades de l'Airbus A380:

Pes buit	276'8 t	Càrrega màxima de combustible	148 t
Carrega útil	66'4 t	Reserva per operacions i seguretat	30 t

Consum 28 Kg/tona de pes/h en vol de creuer (900 Km/h)

$$\frac{dc}{dt} = -0'028\left(343'2 + c\right), \quad c(0) = 248 \text{ (càrrega màxima de combustible)}$$

Solució del PVI:

- Solució de l'EDO: $c(t) + 343'2 = Ae^{-0'028t}$, $A \in \mathbb{R}$ ctnt.
- Imposem la ci: $c(0) + 343'2 = 248 + 343'2 = 591'2 = A$
- Solució del PVI: $\boxed{c(t) = 591'2\, e^{-0'028t} - 343'2}$

Sigui $t = \tau$ t.q.: $c(\tau) = 591'2\, e^{-0'028\tau} - 343'2 = 30 \Leftrightarrow \tau = \frac{1}{0'028} \ln \frac{591'2}{373'2}$

$= 16'42799645217151^h$

Així l'autonomia de l'aparell a velocitat de creuer és, aprox. de: $16^h 26^m$,

i el rang de vol a aquesta mateixa velocitat resulta:

$$\boxed{R = \frac{900}{0'028} \ln \frac{591'2}{373'2} = 14.786'996 \text{ Km}}$$