4 Sèries

En els problemes 1-5 usen el mètode d'inducció per provar el resultat de l'enunciat

1. Proveu que $1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$, $n\geq 1$.

Solució. Veiem que és cert per $n=1$: "$1^3=1^3$". Suposem-ho cert per $n=p\geq 1$ i comprovem que també és cert per $n=p+1$. En efecte:

$$1^3+2^3+\dots+p^3+(p+1)^3=(1+2+\dots+p)^3+(p+1)^3\overset{(*)}{=}\left[\frac{p(p+1)}{2}\right]^2+(p+1)^3$$
$$=\frac{p^2(p+1)^2}{4}+(p+1)^3=\frac{(p+1)^2}{4}\left[p^2+4p+4\right]=\left[\frac{(p+1)(p+2)}{2}\right]^2$$
$$=(1+2+3+\dots+p+p+1)^2$$

(*) Fem servir que la suma dels n primers nombres naturals és:

$$1+2+\dots+n=\frac{(n+1)n}{2}$$

En efecte: $$(n+1)^2-1^2=\sum_{i=1}^{n}(i+1)^2-\sum_{i=1}^{n}i^2=\sum_{i=1}^{n}(\cancel{i^2}+2i+\cancel{1}-\cancel{i^2})=2\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}1$$
$$=2\sum_{i=1}^{n}i+n\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}i=1+2+\dots+n=\frac{(n+1)^2-1-n}{2}=\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

2. Proveu que per a tot $n\geq 1$: $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\dots+n\cdot n!=(n+1)!-1$

Solució. Cert per $n=1$: $1\cdot 1!=(1+1)!-1$ (OK).

Suposem-ho cert per $n=p\geq 1$ i mirem si ho és també per $n=p+1$,

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\dots+p\cdot p!+(p+1)\cdot(p+1)!=(p+1)!-1+(p+1)(p+1)!=(p+1)!(1+p+1)!-1$$
$$=(p+2)(p+1)!-1=(p+2)!-1,$$

(donde hemos aplicado la hipótesis de inducción en la primera igualdad). Per tant $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\dots+n\cdot n!=(n+1)!-1$ es satisfà per tot $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$.

3. Proveu que

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x},\ \text{per a } n\geq 1,\ x\neq 1.$$

Solució.

Cert per $n=1$; $x\neq 1$. En efecte: $(1+x)(1+x^2)\cdot\frac{1-x}{1-x}=\frac{(1-x^2)(1+x^2)}{1-x}$, $x\neq 1$

Suposem-ho cert per $n=p\geq 1$ i $x\neq 1$ i comprovem si també es verifica per $n=p+1$ i $x\neq 1$.

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^p})(1+x^{2^{p+1}}) = \frac{1-x^{2^{p+1}}}{1-x}\cdot(1+x^{2^{p+1}}) = \frac{1-x^{2^{p+2}}}{1-x},\ x\neq 1.$$

Per tant $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ per tot $n\in\mathbb{N}$ i $x\neq 1$.

4. Proveu que $1\cdot 5+2\cdot 5^2+\cdots+n\cdot 5^n = \dfrac{5+(4n-1)\cdot 5^{n+1}}{16}$, per a $n\geq 1$.

Solució:

Veiem que és cert per $n=1$. En efecte: $1\cdot 5 = \dfrac{5+(4-1)\cdot 5^2}{16} = \dfrac{5+3\cdot 5^2}{16} = \dfrac{5\cdot(1+3\cdot 5)}{16}$.

Suposem-ho cert per $n=p\geq 1$ i comprovem si també es satisfà per $n=p+1$:

$$1\cdot 5+2\cdot 5^2+\cdots+p\cdot 5^p+(p+1)\cdot 5^{p+1} \underset{\text{Apliquem la hipòtesi d'inducció}}{=} \frac{5+(4p-1)\cdot 5^{p+1}}{16}+(p+1)\cdot 5^{p+1}$$

$$= \frac{5+(4p-1)\cdot 5^{p+1}+16(p+1)\cdot 5^{p+1}}{16} = \frac{5+5^{p+1}(4p-1+16p+16)}{16} = \frac{5+5^{p+1}(20p+15)}{16}$$

$$= \frac{5+(4(p+1)-1)\cdot 5^{p+2}}{16}$$

Aleshores:

$$1\cdot 5+2\cdot 5^2+\cdots+n\cdot 5^n = \frac{5+(4n-1)\cdot 5^{n+1}}{16}, \text{ per tot } n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$$

5. Proveu que, per tot $n\geq 0$, $11^{n+2}+12^{2n+1}$ és divisible per 133.

Solució:

- Cert per $n=0$: $11^2+12 = 121+12 = \boxed{133}$
- Suposem-ho cert per $n=p\geq 0$ i comprovem si també es satisfà pel següent, ie, per $n=p+1$. Així:

$$11^{p+3}+12^{2p+3} = 11\cdot 11^{p+2}+12^2\cdot 12^{2p+1} = 11\cdot 11^{p+2}+(1+11)^2\cdot 12^{2p+1}$$

$$= 11\cdot 11^{p+2}+(1+2\cdot 11+11^2)\,12^{2p+1}$$

$$= 11\cdot 11^{p+2}+11\cdot 12^{2p+1}+(1+11+11^2)\cdot 12^{2p+1}$$

$$= \underbrace{11\cdot(11^{p+2}+12^{2p+1})}_{\substack{\text{divisible per 133}\\\text{(hipòtesi d'inducció)}}}+\underbrace{133\cdot 12^{2p+1}}_{\substack{\text{divisible}\\\text{per 133}}} \equiv \text{divisible per 133.}$$

Llavors: $11^{n+2}+12^{2n+1}$ és divisible per 133 per tot $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}=\{0,1,2,3,\dots\}$.

6| En les successions (a) i (b) escriviu els 5 primers termes, i en les successions (c) i (d) doneu una fórmula per al terme general.

(a) $a_1 = 3, \; a_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2}\right) a_n$

$n=1: \; a_2 = \frac{1+1}{2} a_1 = a_1 = 3,$

$n=2: \; a_3 = \frac{2+1}{2} a_2 = 3/2\, a_2 = 9/2,$

$n=3: \; a_4 = \frac{3+1}{2} a_3 = 2a_3 = 9,$

$n=4: \; a_5 = \frac{4+1}{2} a_4 = 5/2\, a_4 = 45/2,$

$n=5: \; a_6 = \frac{5+1}{2} a_5 = 3a_5 = 135/2.$

(b) $a_1 = 6, \; a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n^2$

$n=1: \; a_2 = \frac{1}{3} a_1^2 = \frac{1}{3} 36 = 12,$

$n=2: \; a_3 = \frac{1}{3} a_2^2 = \frac{1}{3} 12^2 = \frac{12}{3} \cdot 12 = 4 \cdot 12 = 48,$

$n=3: \; a_4 = \frac{1}{3} a_3^2 = \frac{1}{3} 48^2 = \frac{48}{3} \cdot 48 = 16 \cdot 48 = 768,$

$n=4: \; a_5 = \frac{1}{3} a_4^2 = \frac{1}{3} 768^2 = 196608,$

$n=5: \; a_6 = \frac{1}{3} a_5^2 = \frac{1}{3} 196608^2 = 12884901888.$

c) $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 8, a_4 = 11,$

Solución: $a_n = 3n - 1, \; n = 1, 2, 3, \dots$

d) $a_1 = 1, a_2 = -3/2, a_3 = 9/4, a_4 = -\frac{27}{8}, \dots$

Solución: $a_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, \; n = 1, 2, 3, \dots$

7| Determinar el límit, cas d'existir, les successions següents

(a) $a_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$. Solució: $\lim_n a_n = 2.$

(b) $b_n = \cos 2/n$. Solució: $\lim_n b_n = \lim_n \cos\left(\frac{2}{n}\right) = 1,$

(c) $c_n = \frac{n^p}{e^n}, p > 0$. Solució: $\lim_n c_n = e^{\lim_n (p \ln n - n)} = e^{\lim_n n\left(p \frac{\ln n}{n} - 1\right)}$

$= e^{-\infty} = 0$. Remarca: recordem que $\lim_n \frac{\ln n}{n} = 0$

d) $d_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(2n)^n}$

Solución: $0 < d_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(2n)^n} = \underbrace{\left(\dfrac{3}{2n}\cdot\dfrac{5}{2n}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\right)}_{\leq 1\ \forall n\in\mathbb{N}}\cdot\dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{2n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Per tant $\lim_n d_n = 0$. (lema "de l'entrepà").

Alternativament. Es comprova, per inducció que:

i) $(2n-2)!!\,(2n-1)!! = (2n-1)!$ per tot $n\in\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$

· En efecte: per $n=1$: $0!!\,1!! = 1!$

· Suposem-ho cert per $n=p>1$ i comprovem si també es satisfà per $n=p+1$:

$(2p)!!\,(2p+1)!! = (2p+1)(2p)(2p-2)!!\,(2p-1)!! =$ Apliquem la hipòtesi d'inducció...

$= (2p+1)\,2p\,(2p-1)! = (2p+1)!$

Llavors $(2n-2)!!\,(2n-1)!! = (2n-1)!$ per tot $n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$

ii) $(2n)!! = 2^n n!$ per tot $n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$

· Per $n=1$: $2!! = 2^1\cdot 1$

· Suposem-ho cert per $n=p>1$ i comprovem si ho és també per $n=p+1$

$(2p+2)!! = (2p+2)(2p)!! \underset{\text{Apliquem la hipòtesi d'inducció}}{=} 2(p+1)2^p p! = 2^{p+1}(p+1)!$

Llavors: $(2n)!! = 2^n n!$ per tot $n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$.

D'aquesta manera:

$$d_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(2n)^n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)^n} = \frac{(2n-2)!!\,(2n-1)!!}{(2n-2)!!\,(2n)^n} = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!\,(2n)^n}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{n-1}\,2n\,(n-1)!\,(2n)^n} = \frac{(2n)!}{2^n\, n!\,(2n)^n} = \left\{\begin{array}{l}\text{Fórmula de Stirling:}\\ n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{4\pi n}\,\left(2n/e\right)^{2n}}{2^n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n(2n)^n}\cdot\frac{1+O\left(\frac{1}{2n}\right)}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{e^n}\cdot\frac{1+O\left(\frac{1}{2n}\right)}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Aleshores:

$$\lim_n d_n = \lim_n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(2n)^n} = \lim_n \frac{\sqrt{2}}{e^n}\cdot\frac{1+O(\frac{1}{2n})}{1+O(\frac{1}{n})} = 0. \ \square$$

☒ Encara una altra manera:

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{(2n+2)^{n+1}}\cdot\frac{(2n)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1 \ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Llavors tenim una successió monòtona decreixent i acotada inferiorment per zero; per tant és convergent. Signi; $l = \lim_n d_n$ el seu límit. Tenim:

$$d_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n d_n$$

i prenent límits a tots dos costats de la igualtat:

$$l = \lim_n d_{n+1} = \lim_n \underbrace{\frac{2n+1}{2n+2}}_{\downarrow\ 1}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n}_{\downarrow\ 1/e}\underbrace{d_n}_{\downarrow\ l} = \frac{l}{e} \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{e}\right)l = \frac{e-1}{e}l = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{l = \lim_n d_n = 0}$$

☒ ...i encara una altra: de $\lim_n \frac{d_{n+1}}{d_n} = 0 \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{d_n} = 0$ i llavors

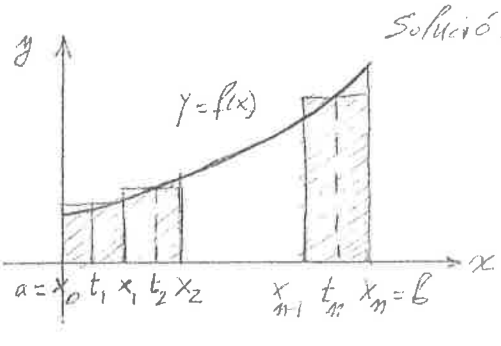
$$\lim_n d_n = \lim_n \left(\sqrt[n]{d_n}\right)^n = 0^\infty = \boxed{0}$$

e) $e_n = \frac{\ln n^3}{2n}$. Solució: $\lim_n e_n = \lim_n \frac{\ln n^3}{2n} = \lim_n \frac{3\ln n}{2n} = 0.$

f) $f_n = \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$. Solució: $\lim_n f_n = \lim_n \frac{\cos(n\pi)}{n^2} = \lim_n \frac{(-1)^n}{n^2} = 0.$

8| Calculeu $\lim_n \frac{\sqrt[n]{e}+\cdots+\sqrt[n]{e^n}}{n}$. (Indicació: interpreteu aquest límit com una suma de Riemann d'una integral adequada).

Solució.



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_n \sum_{k=1}^n f(t_k)\,\Delta x_k$$

amb $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$

En el nostre cas, agafem: $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = e^x$,

$t_k = x_k = k/n$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = 1/n$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Alesbores:

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{e}+\cdots+\sqrt[n]{e^n}}{n} = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \underset{f(t_k)}{e^{k/n}} \underset{\Delta x_k}{\frac{1}{n}} = \int_0^1 e^x dx = \boxed{e}.$$

9| Siguin $a_0 > b_0 > 0$. Considerem $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$, la mitjana aritmètica; $b_1 = \sqrt{a_0 b_0}$, la mitjana geomètrica i definim les successions

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$$

(a) Utilitzeu la inducció per provar que $a_n > a_{n-1} > b_{n+1} > b_n$

(b) Raoneu que ambdues successions són convergents i que tenen el mateix límit

Solució.

(a) Cert per $n=1$: $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2} \underset{0<b_0<a_0}{<} \frac{2a_0}{2} = a_0$; d'altra banda, tenim:

$$a_0 > b_0 > 0 \implies \sqrt{a_0} > \sqrt{b_0} > 0 \implies \sqrt{a_0} - \sqrt{b_0} > 0 \implies$$

$$0 < (\sqrt{a_0}-\sqrt{b_0})^2 = a_0 + b_0 - 2\sqrt{a_0 b_0} \implies b_1 = \sqrt{a_0 b_0} < \frac{a_0+b_0}{2} = a_1$$

i també:

$$a_0 > b_0 > 0 \implies a_0 b_0 > b_0^2 \implies b_1 = \sqrt{a_0 b_0} > \sqrt{b_0^2} \underset{b_0>0}{=} b_0.$$

Per tant, veiem que és cert per $n=0$, ie: $a_0 > a_1 > b_1 > b_0$.

Suposem ara que és cert per $n = p > 0$, ie, suposem que es satisfà:

$$a_p > a_{p+1} > b_{p+1} > b_p > 0$$

(hipòtesi d'inducció) i hem de provar que llavors es verifica per l'enter següent, ie, per $n = p+1$:

$$a_{p+2} = \frac{a_{p+1}+b_{p+1}}{2} \underset{\substack{b_{p+1}<a_{p+1} \\ \text{(per hipòtesi d'inducció)}}}{<} \frac{2a_{p+1}}{2} = a_{p+1}. \quad (*)$$

D'altra banda:

$$a_{p+1} > b_{p+1} > 0 \text{ (per hipòtesi d'inducció)} \implies \sqrt{a_{p+1}} > \sqrt{b_{p+1}} > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{a_{p+1}} - \sqrt{b_{p+1}} > 0 \Rightarrow 0 < \left(\sqrt{a_{p+1}} - \sqrt{b_{p+1}}\right)^2 = a_{p+1} + b_{p+1} - 2\sqrt{a_{p+1}b_{p+1}}$$

$$\Rightarrow b_{p+2} = \sqrt{a_{p+1}b_{p+1}} < \frac{a_{p+1}+b_{p+1}}{2} = a_{p+2} \quad (**)$$

I també; de:

$$a_{p+1} > b_{p+1} > 0 \text{ (hipòtesi d'inducció)} \Rightarrow b_{p+1}a_{p+1} > b_{p+1}^2 > 0$$

$$\Rightarrow b_{p+2} = \sqrt{b_{p+1}a_{p+1}} > \sqrt{b_{p+1}^2} \underset{\substack{b_{p+1}>0 \\ \text{(per hipòtesi d'inducció)}}}{=} b_{p+1} \quad (***)$$

Llavors, de (*), (**) i (***) i de la hipòtesi d'inducció:

$$\underbrace{a_p > a_{p+1}}_{\text{per hipòtesi d'inducció}} \underset{(*)}{>} a_{p+2} \underset{(**)}{>} b_{p+2} \underset{(***)}{>} b_{p+1} \overset{\text{per hipòtesi d'inducció}}{>} 0$$

Aleshores queda provat, per inducció, que:

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n, \text{ per tot } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0,1,2,\dots\}$$

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ és monòtona decreixent i està acotada inferiorment, per exemple, per $b_0 > 0$

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ és monòtona creixent i està acotada superiorment, per exemple, per $a_0 > 0$.

Llavors ambdues successions són convergents. Sigui:

$A = \lim_n a_n$, amb $A > 0$, ja que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ està acotada inferiorment per $b_0 > 0$

$B = \lim_n b_n$, amb $B > 0$, ja que $b_0 > 0$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ és monòtona creixent.

Prenent límits a les fórmules que defineixen a_n i b_n:

$$A = \lim_n a_n = \lim_n \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} = \frac{A+B}{2} \Leftrightarrow A = B$$

$$B = \lim_n b_n = \lim_n \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} = \sqrt{AB} = \sqrt{B^2} = |B| = B \quad (B>0).$$

Aleshores:

$$A = \lim_n a_n = \lim_n b_n = B$$

Les dues successions són convergents i tendeixen cap al mateix límit.

SÈRIES NUMÈRIQUES

16. Estudieu la convergència de les sèries

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$: Solució: $\displaystyle\lim_n \left(1+\frac{1}{2^n}\right) = 1$: la sèrie és <u>divergent</u>, ja que el terme general no tendeix cap a zero.

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$. Solució: $\displaystyle\lim_n \frac{n}{\ln n} = +\infty$: el terme general <u>no</u> tendeix cap a zero, per tant la sèrie és <u>divergent</u>.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$: Solució: $\displaystyle 0 \leq \frac{\arctan n}{n^2+1} \leq \frac{\pi/2}{n^2+1} \leq \frac{\pi/2}{n^2}$ per tot $n = 1, 2, 3, \ldots$

i com que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ és convergent, llavors la sèrie estudiada també és convergent (criteri de comparació per majorització).

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

Solució:

- Si $p<0$: $\displaystyle\lim_n n\,\frac{1}{n(\ln n)^p} = \lim_n \frac{1}{(\ln n)^p} = +\infty$, i com que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ és divergent, llavors la sèrie $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ és divergent per $p<0$.
- Si $p=0$: la sèrie es redueix a $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n}$, que és divergent (sèrie harmònica).
- Si $p>0$, considerem la funció $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^p}$, que és monòtona decreixent a l'interval $(2,+\infty)$, ja que: $f'(x) = -\dfrac{p+\ln x}{x^2(\ln x)^{p+1}} < 0 \;\forall x>2$. Considerem la integral

• $p \neq 1$: $$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{M\to+\infty}\int_2^M \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\right]_{x=2}^{x=M}$$
$$= \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{(\ln M)^{1-p}}{1-p} - \frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}\right] = \begin{cases} +\infty, \text{ si } p<1 \\ \dfrac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}}, \text{ si } p>1\end{cases}$$

• $p=1$: $$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{M\to+\infty}\Big[\ln(\ln x)\Big]_{x=2}^{x=M} = \lim_{M\to+\infty}\Big[\ln(\ln M) - \ln(\ln 2)\Big] = +\infty$$

Aleshores: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ convergent $\iff p>1$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{(n+1)^2}$ Solució: $\lim_n \frac{(-1)^{n+1} n^2}{(n+2)^2}$ $\nexists$ (per exemple el límit de la sub-successió parella $\lim_n a_{2n} = \lim_n \frac{-(2n)^2}{(2n+2)^2} = -1$ no coincideix amb el límit de la sub-successió senar: $\lim_n a_{2n-1} = \lim_n \frac{(2n-1)^2}{(2n+1)^2} = 1$). Així doncs la sèrie <u>no és convergent</u>

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$.

Solució: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ i aquesta sèrie és convergent ($a_n = 1/n^2$ és monòtona decreixent, positiva i tendeix cap a zero i la sèrie es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, per tant el <u>Criteri de Leibnitz sobre sèries alternades</u> garanteix la convergencia)

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n 3^n}$. Solució: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1) 3^{n+1}} \cdot \frac{n 3^n}{n!} = \frac{n}{3} \to +\infty > 1$. Per tant la sèrie és divergent.

(h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{4n}}{(2n+1)!}$: Solució: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{4n+4}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{2^{4n}} = \frac{2^4}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{16}{(2n+3)(2n+2)} \to 0 < 1$

Per tant la sèrie <u>és absolutament convergent i, per tant, convergent</u>. Remarca: en aquest cas es pot aplicar també el Criteri de Leibnitz sobre sèries alternades: la sèries és de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$, amb $b_1 > b_2 > \dots > b_n > b_{n+1} > \dots$ ja que $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{16}{(2n+3)(2n+2)} < 1 \ \forall n = 1, 2, 3, \dots$ i amb $b_n > 0 \ \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots$; i $\lim_n b_n = 0$.

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$: Solució. La sèrie és convergent. Apliquem el criteri de Leibnitz sobre sèries alternades: La sèrie és de la forma $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$, amb $a_n = \frac{1}{(\ln n)}$ de manera que:

<u>i)</u> $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\ln n)^n}{(\ln(n+1))^n} = \frac{1}{\ln(n+1)} \cdot \left[\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^n < \frac{1}{\ln(n+1)} < 1 \ \forall n = 2, 3, \dots$;

On hem fet servir que $\ln x$ és una funció monòtona creixent. Per tant, $(a_n)_{n \geq 2}$ és monòtona decreixent.

ii] $\lim_n a_n = \lim_n \frac{1}{(\ln n)^n} = 0$

iii] $a_n = \frac{1}{(\ln n)^n} > 0 \ \forall n = 2, 3, 4, \ldots$

Per tant els termes de la successió $(a_n)_{n\geq 2}$ són positius, la successió és monòtona decreixent i convergeix cap a zero. Aleshores es pot aplicar el Criteri de Leibnitz sobre sèries alternades per concloure la convergència de la sèrie.

Solució:

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^n$: $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \frac{n-1}{n^2} = 0 < 1$. Aleshores la sèrie és <u>convergent</u>

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n!}$ Solució: $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{3^n}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^{n-1}} = \lim_n \frac{3}{n+1} = 0 < 1$, d'on tenim que la sèrie és <u>convergent</u>.

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, on $a_{n+1} = \frac{\sin n + 1}{\sqrt{n}} a_n$, $a_1 = 1$

Solució: tenim que $a_n > 0 \ \forall n$, ja que $|\sin n| < 1 \iff -1 < \sin n < 1$. D'altra banda:

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{1 + \sin n}{\sqrt{n}} = 0 < 1,$$

i llavors la sèrie és <u>convergent</u>.

SÈRIES DE POTÈNCIES

11. Troben l'interval de convergència de les sdps següents:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n$ solució: $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}\cdot|x| = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{4^n}}\cdot|x| = \frac{|x|}{4} < 1$

$\iff |x| < 4.$

El radi de convergència és $R=4$. En $x=\pm 4$ la sèrie numèrica corresponent és: $\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n$.

- Per $x=4$: $S_N = \sum_{n=0}^{N} 1^n = 1+1+\dots+1 = N+1 \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 1$ Divergent.
- Per $x=-4$: $S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n = 1-1+1-1+\dots+(-1)^N = \begin{cases} 1, & \text{si } N \text{ parell} \\ 0, & \text{si } N \text{ senar} \end{cases}$

Successió de sumes parcials:
$S_0 = 1$
$S_1 = 1-1 = 0$
$S_2 = 1-1+1 = 1$
$\vdots$
$S_{2p} = 1$
$S_{2p+1} = 0$

La successió de sumes parcials és oscil·lant (no convergeix), per tant la sèrie numèrica $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ tampoc no convergeix.

Així doncs l'interval de convergència és: $I = (-4,4)$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (2n)!\left(\frac{x}{3}\right)^n$

Solució: $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}|x| = \lim_n \frac{(2n+2)!}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{(2n)!}|x| = \lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)}{3}|x| = +\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Llavors la sèrie només és convergent en $x=0$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}$. Solució: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n-1}}{3^n} = 3\left(\sum_{u=0}^{\infty} \frac{u^n}{3^n}\right)\circ(x-3)$.

Tenim que $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}\cdot|u| = \lim_n \sqrt[n]{1/3^n}\,|u| = |u|/3$

Aleshores $\frac{1}{3}|u| = \frac{1}{3}|x-3| < 1 \iff -3 < x-3 < 3 \iff 0 < x < 6$.

Llavors la sèrie és convergent a l'interval $(0,6)$. Mirem si ho és també als extrems:

$x=0$: $-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$: No convergent (Veure apartat (a))

$x=6$: $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} 1$: Divergent (Veure apartat (a))

L'interval de convergència resulta doncs $I=(0,6)$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 3\cdots(n+1)}{n!}x^n$ Solució: $= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$

$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = \lim_n \frac{n+2}{n+1}|x| = |x|$: aleshores la sèrie es convergent per $|x|<1$. Per $x=\pm 1$, el terme general de la corresponent sèrie numèrica no tendeix cap a zero; per tant no és convergent en cap d'aquests dos punts (ni en $x=1$, ni en $x=-1$) i el seu interval de convergència es l'interval obert $I=(-1,1)$.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!!}(x-c)^n$. Solució: $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!!}u^n\right)\circ(x-c)$

$\lim_n\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||u| = \lim_n \frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\frac{(2n-1)!!}{n!}|u| = \lim_n \frac{n+1}{2n+1}|\cdot| = \frac{|u|}{2}$

La sdp és convergent per $|u|=|x-c|<2 \iff -2+c<x<2+c$

En els extrems tenim les sèries numèriques:

- Per $x=c-2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n-1)!!}\cdot 2^n$

- Per $x=2+c$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!!}2^n$

Els termes generals d'aquestes sèries no tendeixen cap a zero. En efecte, sigui:

$$a_n = \frac{n!}{(2n-1)!!}2^n = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \underbrace{\frac{2n}{2n-1}}_{>1}\cdot\underbrace{\frac{2n-2}{2n-3}}_{>1}\cdots\underbrace{\frac{4}{3}}_{>1}\cdot\frac{2}{1} > 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Veure problema 7, apartat d)

Per tant, si existeix el límit de a_n, aquest no pot ser 0, ja que tots els seus termes són >2. De fet aquesta successió és monòtona creixent, ja que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{n!}\cdot\frac{2^{n+1}}{2^n} = 2\,\frac{n+1}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1 \quad \forall\, n\in\mathbb{N},$$

d'on: $a_{n+1} > a_n$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$. I, com que tots els termes són positius ($a_n>0$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$) aquesta successió no pot tendir (cas que tingués límit) cap a zero.

De fet:

$$a_n = \frac{2^n n!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2\cdot n}{2n-1} = e^{\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n}{2n-1}\right)}$$

$$= e^{\ln 2-\ln 1+\ln 4-\ln 3+\cdots+\ln(2n)-\ln(2n-1)} \qquad (*)$$

Aplicant el Teorema del Valor Mitjà:

$$\ln 2-\ln 1 = \frac{1}{\alpha_1} > \frac{1}{2},\ \text{ja que: } 1<\alpha_1<2,\ \text{d'on: } \frac{1}{\alpha_1}>\frac{1}{2}$$

$$\ln 4-\ln 3 = \frac{1}{\alpha_2} > \frac{1}{4},\ \text{" "} \ : 3<\alpha_2<4,\ \text{d'on: } \frac{1}{\alpha_2}>\frac{1}{4}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\ln(2n)-\ln(2n-1) = \frac{1}{\alpha_n} > \frac{1}{2n},\ \text{" "} \ : 2n-1<\alpha_n<2n,\ \text{d'on: } \frac{1}{\alpha_n}>\frac{1}{2n}$$

Aleshores:

$$\ln 2-\ln 1+\ln 4-\ln 3+\cdots+\ln(2n)-\ln(2n-1) > \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

i així:

$$\lim_n a_n = e^{\lim_n\left(\ln 2-\ln 1+\ln 4-\ln 3+\cdots+\ln(2n)-\ln(2n-1)\right)} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

Alternativament: recordem, del Problema 1, apartat d); $(2n-2)!!\,(2n-1)!! = (2n-1)!$, per $n=1,2,3,\ldots$ i $2^n n! = (2n)!!$, per $n=0,1,2,3,\ldots$ i a més vam introduir la Fórmula de Stirling:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left[1+O\left(\tfrac{1}{n}\right)\right]$$

Llavors:

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{2^n n!}{(2n-1)!!} = \lim_n \frac{2^n n!\,(2n-2)!!}{(2n-1)!!\,(2n-2)!!} = \lim_n \frac{2^n n!\,2^{n-1}(n-1)!\,2n}{(2n-1)!\,2n}$$

$$= \lim_n \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \lim_n \frac{2^{2n}\, 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\left[1+O\left(\frac{1}{2n}\right)\right]} = \lim_n \sqrt{\pi n}\,\frac{\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\left[1+O\left(\frac{1}{2n}\right)\right]}$$

$$= \boxed{+\infty}$$

Llavors, com ja hem apuntat abans, les sèries numèriques $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{(2n-1)!!}2^n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)}2^n$ són divergents i, en conseqüència, l'interval de convergència de la sèrie de potències es l'interval $I=(c-2,c+2)$.

(h) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)\,x^n$

Solució. $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = \lim_n \frac{n+2}{n+1}|x| = |x| < 1 \iff x\in(-1,1)$.

Llavors la sèrie de potències és convergent per $|x|<1$. Per $x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)$ i per $x=-1$: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)$. És clar que els termes generals d'aquestes sèries numèriques no tendeixen cap a zero; per tant la sdp no és convergent en cap d'aquests dos punts. L'interval de convergència és doncs l'interval obert $I=(-1,1)$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n}\right)\circ x^3$ Solució:

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||u| = \lim_n \frac{n}{n+1}|u| = |u|.$$

Llavors la sèrie es convergent per per $|u|=|x|^3<1 \iff |x|<1$

Per $x=1$, la sèrie numèrica corresponent resulta: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, que és la sèrie harmònica, i per tant divergeix.

Per $x=-1$, la sèrie numèrica corresponent és $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, que es la sèrie harmònica alternada, la qual és convergent

Així doncs l'interval de convergència és $I=[-1,1)$.

12. Proven que la funció representada per la sèrie de potències corresponent satisfà l'equació diferencial que l'acompanya.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $y''+y=0$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$, $y''-xy'-y=0$

Solució.

(a) $\displaystyle S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Derivant:

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n\, x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Aleshores, substituint a l'EDO:

$$S''(x)+S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1+1)}{(2n)!} x^{2n+1} = 0$$

$\forall x$ del disc de convergència de la sèrie. Nota: de fet es comprova que la sèrie convergeix per tot $x \in \mathbb{R}$: sèrie entera.

(b) Derivant terme a terme la sèrie:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!},\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n x^{2n-1}}{2^n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^{n-1}(n-1)!},$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\,x^{2n-2}}{2^{n-1}(n-1)!}$$

i a continuació substituint en l'EDO $y''-xy'-y=0$:

$$S''(x)-xS'(x)-S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)x^{2n-2}}{2^{n-1}(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{n-1}(n-1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{n-1}(n-1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

$$= \cancel{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!} x^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{n-1}(n-1)!} - 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}\left(2n+1-2n-1\right) = 0,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. Nota com a l'apartat anterior és comprova que la sdp és convergent en tota la recta real.

13. Considerem la successió de Fibonacci

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

(a) Proveu la desigualtat $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 2$.

(b) Apliqueu l'apartat anterior per determinar el radi de convergència de la sèrie $\sum a_n x^{n-1}$

(c) Proveu que si $f(x)$ és la suma de la sèrie de (b), aleshores

$$f(x) - x f(x) - x^2 f(x) = 1$$

i deduïu que
$$f(x) = \frac{-1}{x^2+x-1}$$

(d) Utilitzeu la descomposició en fraccions simples per deduir un altre desenvolupament en sèrie de $f(x)$ i deduïu que

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

(a) Proveu per inducció que

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és una sèrie de termes positius

ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és monòtona creixent, i.e. $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

i) $a_1 = a_2 = 1 > 0$. Suposem-ho cert per $2 \leq p \leq n$. Llavors: $a_{p+1} = \underbrace{a_p}_{>0} + \underbrace{a_{p-1}}_{>0} > 0$
i per tant $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. hip. d'ind. (i)

ii) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} > a_n \ \forall n \geq 2$, ja que hem demostrat que $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
D'altra banda $a_2 = a_1 = 1$ per tant $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Aleshores: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq 1+1 = 2 \quad \forall\ n \geq 2$, i obviament val també per $n=1$: $\frac{a_2}{a_1} = 1 \leq 2$.

b) $\frac{a_2}{a_1} = 1 \Rightarrow a_2 = a_1 = 1$, $\frac{a_3}{a_2} \leq 2 \Rightarrow a_3 \leq 2a_2 = 2a_1 = 2$, $\frac{a_4}{a_3} \leq 2 \Rightarrow a_4 \leq 2a_3 = 2^2$,

$a_5/a_4 \leq 2 \Rightarrow a_5 \leq 2a_4 \leq 2^3$,

i es demostra, per inducció, que: $a_n \leq 2^{n-2}$ per $n = 2,3,4,\ldots$ Aleshores la sèrie:

$$\sum_{n\geq 1} a_n |x|^{n-1} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1}|x|^n = |x| + \sum_{n\geq 1} a_{n+1}|x|^n,$$

està majorada per la sèrie $\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} 2^n |x|^n$, ja que $0 < a_{n+1} \leq 2^{n-1}$ per tot $n \geq 1$. D'altra banda la sèrie $\sum_{n\geq 1} 2^n |x|^n$ és convergent per $|x| < \frac{1}{2}$. D'aquí es dedueix que el radi de convergència de $\sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1}$, R, és $R \geq \frac{1}{2}$.

c) Si $f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1}$

$$f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1} - \sum_{n\geq 1} a_n x^n - \sum_{n\geq 1} a_n x^{n+1}$$

$$= \sum_{n\geq 0} a_{n+1} x^n - \sum_{n\geq 1} a_n x^n - \sum_{n\geq 2} a_{n-1} x^n$$

$$= a_1 - \underbrace{(a_2 - a_1)}_{\substack{0 \\ a_2 = a_1 = 1}} x + \sum_{n\geq 2} \underbrace{(a_{n+1} - a_n - a_{n-1})}_{0} x^n = a_1$$

Els a_n són els termes de la successió de Fibonacci la qual, ve donada per la recurrència:

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, per $n \geq 2$,

amb $a_1 = a_2 = 1$.

Aleshores $f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = -f(x)(1 - x - x^2) = 1$, dón:

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1},$$

per $x \in (-R, R)$, amb $R \geq \frac{1}{2}$.

d) $x^2+x-1=(x-x_+)(x-x_-)$, on $x_\pm = \frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$,

$$f(x) = \frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{A}{x-x_+} + \frac{B}{x-x_-} = \frac{-1/\sqrt{5}}{x-x_+} + \frac{1/\sqrt{5}}{x-x_-} = \frac{1/\sqrt{5}}{x_+(1-x/x_+)} - \frac{1/\sqrt{5}}{x_-(1-\frac{x}{x_-})} = (*)$$

$$(x-x_-)A + (x-x_+)B = -1$$

$x=x_-$: $(x_- - x_+)B = -1 \Rightarrow B = \frac{1}{x_+-x_-} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$x=x_+$: $(x_+-x_-)A = -1 \Rightarrow A = \frac{-1}{x_+-x_-} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

$$(*) = \frac{1}{x_+\sqrt{5}}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{x_+}\right)^n - \frac{1}{x_-\sqrt{5}}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{x_-}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1/\sqrt{5}}{x_+^{n+1}} - \frac{1/\sqrt{5}}{x_-^{n+1}}\right)x^n$$

$$= \sum_{n\geq 1}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_+^n} - \frac{1}{x_-^n}\right)}_{a_n} x^{n-1},$$

amb un radi de convergència $r \geq \min\left(\frac{1}{|x_+|}, \frac{1}{|x_-|}\right)$, essent:

$$1/x_+ = \frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

$$1/x_- = \frac{-2}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Aleshores:

$$f(x) = \frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{-1/\sqrt{5}}{x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + \frac{1/\sqrt{5}}{x+\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

$$= \sum_{n\geq 1}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}_{a_n} x^{n-1},$$

amb $r \geq \min\left(\frac{1}{|x_+|}, \frac{1}{|x_-|}\right) = \min\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

De fet, el radi de convergència és $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ que és la distància a la singularitat més propera de $f(x) = \frac{1}{x^2+x-1}$. Comprovem-ho:

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} = \lim_n \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Per tant el radi de convergència és:

$$r = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

14. Troben una sèrie de potències per a cadascuna de les funcions següents centrada en el punt que s'especifica.

(a) $f(x) = \dfrac{5}{2x-3}$, $x=-3$.

Solució. $$f(x) = \frac{5}{2(x+3)-9} = \frac{5/9}{\frac{2}{9}(x+3)-1} = \frac{-5/9}{1-\frac{2}{9}(x+3)} = -\frac{5}{9}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{9}\right)^n (x+3)^n$$
$$= \sum -\frac{5}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^n (x+3)^n.$$

(b) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+2x-3}$, $x=0$.

Solució. $$f(x) = \frac{4x}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} = \frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-1} = (\&)$$

$x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$:

$(x-1)A + (x+3)B = 4x$; $x=1$: $4B = 4 \Rightarrow B=1$

$x=-3$: $-4A = -12 \Rightarrow A=3$

$$(\&) = \frac{1}{1+x/3} - \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^n - \sum_{n\geq 0} x^n = \sum_{n\geq 0}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1\right]x^n$$

El radi de convergència és: $r \geq \min\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \frac{1}{3}$. De fet, si la sèrie és $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, tenim $a_{2n} = \frac{1}{3^{2n}} - 1$, $a_{2n+1} = -\frac{1}{3^{2n+1}} - 1$. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \lim_n \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = e^{\lim_n \frac{1}{2n}\ln\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)} = 1, \\ \cdot\ \lim_n \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = e^{\lim_n \frac{1}{2n+1}\ln\left(1+\frac{1}{3^{2n+1}}\right)} = 1. \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

D'on tenim que el radi de convergència és $r=1$.

c) $f(x) = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^2} = 1 + \dfrac{3x-1}{(1-x)^2} = 1 + \dfrac{3x-3+2}{(1-x)^2} = 1 - \dfrac{3}{1-x} + \dfrac{2}{(1-x)^2}$

$$\overset{(*)}{=} 1 - 3\sum_{n\geq 0} x^n + 2\sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$$

$$= 1 - 3\sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0} 2(n+1)x^n$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 0}(2n-1)x^n = \cancel{1} - \cancel{1} + \boxed{\sum_{n\geq 1}(2n-1)x^n}$$

on el radi del desenvolupament és $r=1$:

(*) $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right) = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

solució:

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n} = \boxed{\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1}(-1)^k \frac{(2n-1)!!}{2^{3n+1}\, n!} x^{2n}}$

$\binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1$, $\binom{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$, $\binom{-\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!} = \dfrac{-1\cdot(-3)}{2!\,2^2} = \dfrac{3\cdot 1}{2!\,2^2}$,

$\binom{-\frac{1}{2}}{3} = \dfrac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!} = \dfrac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!} = (-1)^3\dfrac{5\cdot 3\cdot 1}{3!\,2^3}, \dots\dots, \underset{\text{(inducció)}}{\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \dfrac{(2k-1)!}{2^k k!}}$,

per $k = 1, 2, 3, \dots$

On es comprova (exercici) que el radi de convergència de la sèrie de potències és $r = \frac{1}{2}$

e) $f(x) = \sqrt[4]{1+x} =$

Solució:

$f(x) = \sqrt[4]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{4}}{n}x^n = \boxed{1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{(4n-5)(4n-9)(4n-13)\cdots 11\cdot 7\cdot 3\cdot 1}{4^n\, n!}x^n}$

$\binom{\frac{1}{4}}{0} = 1$, $\binom{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$, $\binom{\frac{1}{4}}{2} = \dfrac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)}{2!} = \dfrac{-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{2!} = \dfrac{-3\cdot 1}{4^2\, 2!}$,

$\binom{\frac{1}{4}}{3} = \dfrac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)}{3!} = \dfrac{7\cdot 3\cdot 1}{3!\,4^3}$, $\binom{\frac{1}{4}}{4} = \dfrac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)(\frac{1}{4}-3)}{4!} = \dfrac{\frac{1}{4}(-\frac{3}{4})(-\frac{7}{4})(-\frac{11}{4})}{4!}$

$= -\dfrac{11\cdot 7\cdot 3\cdot 1}{4!\,2^4}, \dots\dots\dots, \overset{\text{inducció}}{\binom{\frac{1}{4}}{n} = \dfrac{(4n-5)(4n-9)\cdots 11\cdot 7\cdot 3\cdot 1}{4^n\, n!}(-1)^{n+1}}, \; n\geq 1$

On es comprova (exercici) que el radi de convergència de la sèrie és $r=1$.

15. Troben la sèrie de McLaurin per a cadascuna de les funcions

(a) $f(x) = \ln(1+x)$

Solució.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \Big(\sum_{n\geq 0} (-1)^n t^n\Big) dt = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{t=x}$$

$$= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \ |x|<1$$

La sèrie de potències es convergent a l'interval $[-1,1]$ i d'altra banda,

$$\lim_{x\to 1^+} \ln(1+x) = \ln 2,$$

aleshores, aplicant el Teorema d'Abel,

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \text{ per } -1 < x \leq 1$$

a més: $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

Solució:

(b) $f(x) = \cos x^{3/2} = (\cos t) \circ x^{3/2} = \Big(\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}\Big) \circ x^{3/2} = \boxed{\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{3n}}{(2n)!}, \ x\in\mathbb{R}}$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$$
$$= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

(c) $f(x) = \cos^2 x$.

Solució. $f(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$

$$= 1 + \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \ x\in\mathbb{R}$$

(d) $f(x) = \sinh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n!}\big(1+(-1)^n\big) x^n$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ x\in\mathbb{R}$$

(e) $f(x) = e^{-3x} = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}\right)\circ(-3x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{3^n}{n!} x^n, \quad x\in\mathbb{R}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

Solució.

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{x(2n+1)!} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots$$

$x\in\mathbb{R}$.

16. Troben el desenvolupament en sdp de la funció $f(x) = \arcsin x$ en un entorn de 0 partir de la igualtat

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Solució.

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n\geq 0} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n t^{2n} = 1 + \sum_{n\geq 1} (-1)^{2n} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} t^{2n} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} t^{2n}$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1, \quad \binom{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}, \quad \binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!} = \frac{3\cdot 1}{2^2\cdot 2!}, \quad \binom{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{2^3\cdot 3!} = -\frac{5\cdot 3\cdot 1}{2^3\cdot 3!},$$

$$\dots, \binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$(2n-2)!! = 2^{n-1}(n-1)!$

$(2n)!! = 2^n n!$

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-2)!!(2n-1)!!}{(2n-2)!!\,(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \sum_{n\geq 1} \frac{2n(2n-1)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= x + \sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1\leq x\leq 1$$

17. Utilitzen una sèrie de potències per aproximar el valor de la integral amb un error menor que 10^{-4}

a) $\int_0^1 e^{-x^3} dx$

Solució.

$$\int_0^1 e^{-x^3} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!}\right) dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{3n}\, dt = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(3n+1)}$$

$n:\ \frac{1}{n!(3n+1)} < 10^{-4} \iff n!(3n+1) > 10^4$. Veiem que per $n=5$: $5!\cdot 16 = 1920 < 10^4$

" " " $n=6$: $6!\cdot 19 = 13680 > 10^4$

Aleshores:

$$I = \int_0^1 e^{-x^3}dx \simeq 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2!\cdot 7} - \frac{1}{3!\cdot 10} + \frac{1}{4!\cdot 13} - \frac{1}{5!\cdot 16} = \frac{141077}{174720} = \underbrace{0.8074}_{\text{4 xifres decimals correctes.}}461996\ldots$$

Si ho calculem amb Octave, amb la funció quadl.

```
>> Int = quadl(exp(-x.^3), 0, 1, eps);
>> format long;
>> Int
Int = 0.807511182139671
```

D'on tenim un error $< 0.00007 \; (< 10^{-4})$

> Remarca. Aquí fem servir la propietat següent de les sèries alternades:
> Signi $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$, amb $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ t.q.
> (i) $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$
> (ii) $a_{n+1} \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$
> (iii) $a_n \to 0$
> Aleshores $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ és convergent i, a més:
> $$\left| \sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n \right| \leq a_{N+1}$$

(b) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$

Solució.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right) dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}.$$ Busquem n t.q. $\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!} < 10^{-4} \Leftrightarrow n : (2n+1)(2n+1)! > 10^4$

gran 1 (dos termes, $n=0, n=1$), $n=2$: $5\cdot 5! = 600 < 10.000$

gran 2 (tres termes, $n=0, n=1, n=2$), $n=3$: $7\cdot 7! = 35.800 > 10.000$

Aleshores

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \simeq 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} = \underbrace{0.9461}_{\text{xifres decimals correctes.}}1111\;1111111$$

Si ho calculem amb Octave, amb la funció quadl:

```
>> Int = quadl(sin(x)./x, eps, 1, eps);
>> Int
Int = 0.946083070367183
```

Entonces:

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx - \sum_{n=0}^{2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} \right| < 0.00003$$

c) $\displaystyle\int_0^{0.2}\sqrt{1+x^2}\,dx$

Solució.

$$(1+u)^{\frac12} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}u^k = 1 + u/2 + \sum_{n\geq 2}(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}u^k$$

$$\binom{1/2}{0}=1,\ \binom{1/2}{1}=\frac12,\ \binom{1/2}{2}=\frac{\frac12(\frac12-1)}{2!}=-\frac{1\cdot1}{2^2\cdot2!},\ \binom{1/2}{3}=\frac{\frac12(\frac12-1)(\frac12-2)}{3!}=\frac{1\cdot3}{2^3\cdot3!}$$

$$\binom{1/2}{4}=\frac{\frac12(\frac12-1)(\frac12-2)(\frac12-3)}{4!}=-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2^4\cdot4!}=-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^4 4!},\ \dots,\ \binom{1/2}{k}=(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!}{k!\,2^k},\ k\geq2.$$

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n\geq2}(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}x^{2n}$$

Es comprova que el radi de convergència és $r=1$ (exercici), per tant podem integrar-la terme a l'interval $[0,0.2]$:

$$\int_0^{0.2}\sqrt{1+x^2}\,dx=\left[x+\frac{x^3}{6}+\sum_{n\geq2}(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^{0.2}$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{4}{3\cdot10^3}+\underbrace{\sum_{n\geq2}(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{10^{2n+1}n!}\cdot\frac{2^{n+1}}{2n+1}}$$

Sèrie alternada de la forma:

$$\sum_{n\geq1}(-1)^n b_n,\quad b_1=\frac{2}{10},\quad b_n=\frac{(2n-3)!!}{10^{2n+1}n!}\cdot\frac{2^{n+1}}{2n+1}\quad n\geq2$$

de manera que:

i) $b_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}$,

ii) $\lim_n b_n=0$, obviament. Per què?

iii) $b_{n+1}\leq b_n\ \forall n\in\mathbb{N}$. En efecte

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)}\cdot\frac{1}{25}<1\quad\forall n\geq1$$

$$\text{i}\quad b_1=\frac{4}{3\cdot10^3}<b_2=\frac45\cdot10^{-5}$$

Aleshores:

$$\left|\sum_{k\geq1}\cdots-\sum_{k=1}^{n}\cdots\right|<b_{n+1},\ \text{per } n\geq1$$

De fet tenim que $b_2 = 8\cdot 10^{-6} < 10^{-4}$; per tant és suficient agafar els dos primers termes de la sèrie; així:

xifres decimals correctes.

$$I = \int_0^{0.2} \sqrt{1+x^2}\,dx \approx \frac{2}{10} + \frac{4}{3\cdot 10^3} = 0'2013333\ldots,$$

de manera que l'error comès és: $\left| I - \left(\frac{2}{10} + \frac{4}{3\cdot 10^3}\right)\right| \leq 8\cdot 10^{-6}$

19. Considerem una funció creixent $f:[1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

(a) Proveu que $f(1)+\cdots+f(n-1) < \int_1^n f(x)\,dx < f(2)+\cdots+f(n)$.

(b) Signi $f(x) = \ln x$, proveu les desigualtats ?

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$$

(c) Deduïu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Solució

(a) Com que f és creixent, tenim $f(i) < \int_i^{i+1} f(x)\,dx < f(i+1)$, $i=1,2,\ldots,n-1$.

Aleshores sumant des de $i=1$, fins a $n-1$:

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1) < \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)dx$$

$$= \int_1^n f(x)\,dx < f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$$

(b) Agafem $f(x) = \ln x$. Llavors:

$$\int_1^n \ln x\,dx = n\ln n - (n-1) < \ln n! < \int_1^{n+1} f(x)\,dx = (n+1)\ln(n+1) - n$$

$$\Longrightarrow \frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} = \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}\,\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$$

Donde, en la última desigualdad hemos utilizado que $e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ és monòtona creixent, $e_1 = 2$, i $\lim_n e_n = e$, per tant $\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Queda doncs provat que:

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}, \text{ per tot } n\in\mathbb{N}.$$

(c) De la designaltat de l'apartat (b) es dedueix:

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n^{n+1}}{e^{n-1}} \Longrightarrow \frac{1}{e^{n-1}} < \frac{n!}{n^n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{e^{n-1}}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{e^{n-1}}} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{e^{n-1}}} \quad \text{per tot } n\in\mathbb{N}$$

Com que: $\lim_n \sqrt[n]{e^{n-1}} = \lim_n e^{\frac{n-1}{n}} = e^{\lim_n \frac{n-1}{n}} = 1$, $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$, aplicant el "lema de l'entrepà" resulta:

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

20. Signi $|K|<1$, la integral

$$F(\alpha,K) = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{1-K^2\sin^2 x}}$$

es coneix com integral el·líptica de primera espècie. Proveu que:

$$F(\pi/2,K) = \frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 0}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 K^{2n}$$

Solució.

Aplicant els desenvolupaments del problema 16, amb $t=K\sin x$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-K^2\sin^2 x}} = 1+\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}K^{2n}\sin^{2n}x$$

Llavors, integrant des de 0 a $\pi/2$:

$$F(\tfrac{\pi}{2},K) = \frac{\pi}{2}+\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}K^{2n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 K^{2n}$$

Ja que: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$ per $n\geq 1$.

En efecte, es pot demostrar que:

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(2p-1)!!}{(2p)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{si } n=2p,\ p=1,2,3,\dots \\[2mm] \dfrac{(2p)!!}{(2p+1)!!}, & \text{si } n=2p+1,\ p=1,2,3,\dots \end{cases}$$

(fórmules de Wallis).

En efecte, signi:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx, \text{ amb } n \geq 2 \quad \left(I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1 \right).$$

Aleshores, integrant per parts:

$$I_n = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin^{n-1} x \Rightarrow u' = (n-1)\cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos x \\ v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\}$$

$$= \underbrace{-\cos x \cdot \sin^{n-1} x \Big|_{x=0}^{x=\pi/2}}_{= 0} + \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \left(1 - \sin^2 x\right) dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$$

$$= (n-1)\, I_{n-2} - (n-1)\, I_n \iff n\, I_n = (n-1)\, I_{n-2} \iff I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2},$$

per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Es comprova d'immediat que $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ satisfà la mateixa relació de recurrència, i.e.: $J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$, $n \geq 2$; i com que: $J_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} = I_0$, $J_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 1 = I_1$ és clar que $J_n = I_n$ $\forall n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

- Signi n parell, i.e., $n = 2p$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ Llavors es prova per inducció que: $= J_{2p} = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$, per $p = 1, 2, 3, \ldots$ En efecte,
  - Per $p = 1$, $I_2 = \frac{1!!}{2!!} I_0 = \frac{\pi}{4} = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = J_2$
  - Si és cert per $p = k > 1$, $k \in \mathbb{N}$. Aleshores:

$$I_{2k+2} = \frac{2k+1}{2k+2} I_{2k} = \frac{2k+1}{2k+2} J_{2k} = \frac{(2k+1)(2k-1)!!}{(2k+2)(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$J_{2k+2} = \frac{2k+1}{2k+2} J_{2k} = \frac{2k+1}{2k+2} I_{2k} = \frac{(2k+1)(2k-1)!!}{(2k+2)(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Per tant: $I_{2k+2} = \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} = J_{2k+2}$

Aleshores $I_{2p} = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \cdot \frac{\pi}{2} = J_{2p}$, per tot $p \in \mathbb{N}$.

- Es demostra igualment que, per n senar, $n=2p+1$, $p=1,2,3,\dots$

$$I_{2p+1} = \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} = J_{2p+1}, \text{ per tot } p\in\mathbb{N}.$$

18. Sigui $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$. Troben $\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ i deduiu que

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Solució.

Sigui $b = \tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$. Llavors $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \arctan b = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan b$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2/5}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12},\quad \tan(4\alpha) = \frac{2\tan(2\alpha)}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{5/12}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}\ (>1).$$

D'on: $b = \tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan(4\alpha) - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan(4\alpha)\cdot\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \dfrac{1}{239} \Rightarrow b = \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

Alechores:

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan b = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right), \qquad (\&)$$

com que: $\arctan x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dots + (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{2p+1} + \dots,$

per $-1\leq x\leq 1$, substituint a $(\&)$ agafant $x = \frac{1}{5}$ i $x = \frac{1}{239}$:

$$\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{16}{2n+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}}_{\text{conv. (Criteri de d'Alembert)}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{2n+1}\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}}_{\text{conv. (Criteri de d'Alembert)}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{2n+1}\left[4\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}\right] = \sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n,$$

amb $a_n := \dfrac{4}{2n+1}\left[4\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}\right]$. Tenim que:

i) $a_n > 0\ \forall n = 0,1,2,3,\dots$

ii) $\lim_n a_n = 0$

iii) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+3}\cdot\frac{4\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+3}\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{5}{239}\right)^{2n+3}\right]}{4\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{5}{239}\right)^{2n+1}\right]} \overset{(*)}{<} \frac{2n+1}{2n+3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\frac{4}{3}\underbrace{\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{5}{239}\right)^{2n+3}\right]}_{<1\ \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$$

$$< \frac{2n+1}{2n+3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{75} < 1\ \forall n = 0,1,2,3,\dots$$ Per tant $a_{n+1} < a_n\ \forall n = 0,1,2,3,\dots$

(*) $1-\frac{1}{4}\left(\frac{5}{239}\right)^{2n+1} > 1-\frac{1}{4}\ \forall n = 0,1,2,3,\dots$

Sabem, que per les sèries alternades que satisfan (i), (ii), (iii) verifiquen:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n\right| < a_{N+1},$$

Llavors:

$$\left|\pi - \sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n\right| < a_{N+1}$$

Busquem doncs $N \in \mathbb{N}$ t.q.:

$$a_{N+1} = \frac{4}{2N+3}\left[4\left(\frac{1}{5}\right)^{2N+3} - \left(\frac{1}{239}\right)^{2N+3}\right] < 10^{-4}$$

Agafant:

$N = 1$: $a_2 = 0.001023999999897411 > 10^{-4}$

$N = 2$: $a_3 = 2.925714285713 00 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$

Aleshores hi ha prou amb agafar els tres 1ers termes de la sèrie alternada per tenir una aproximació de π amb un error $< 10^{-4}$, i.e.

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n \simeq a_0 - a_1 + a_2 = 4\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{239}\right) - \frac{4}{3}\left(4\left(\frac{1}{5}\right)^3 - \left(\frac{1}{239}\right)^3\right) + \frac{4}{5}\left(4\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \left(\frac{1}{239}\right)^5\right)$$

$$= \frac{3804}{1195} - \frac{1161}{27211} + \frac{16}{15625} = \frac{28683}{9130} = \underbrace{3.1416}_{\text{xifres correctes}}210295728 4\ldots$$

Amb un error:

$$\left|\pi - \sum_{n=0}^{2}(-1)^n a_n\right| = \left|\pi - \frac{28683}{9130}\right| = 2.83757352 41947 \times 10^{-5} < 0.3 \times 10^{-4} \; (< 10^{-4})$$

21. Signi

$$J(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Determineu el radi de convergència de $J(x)$ i proveu que

$$x^2 J''(x) + x\,J(x) + x^2 J(x) = 0.$$

Solució: $J(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2\, 2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2}x^{2n},$

Derivant:

$$J'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{[(2n)!!]^2} x^{2n-1}, \quad J''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n(2n-1)}{[(2n)!!]^2} x^{2n-2}$$

substituïnt a l'expressió:

$$x^2 J''(x) + x J'(x) + x^2 J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n(2n-1)}{[(2n)!!]^2} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{[(2n)!!]^2} x^{2n}$$

$$+ \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n-2)!!]^2} x^{2n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2} \left[2n(2n-1) + 2n - (2n)^2\right] x^{2n} =$$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[(2n-2)!!]^2} x^{2n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2} \left[(2n)^2 - (2n)^2\right] x^{2n} = 0,$$

Ja que el radi de convergència de la sèrie és $r = +\infty$. En efecte:

$$J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2} x^{2n},$$

Llavors si definim $a_n := \dfrac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2}$ es té:

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x|^2 = \lim_n \frac{[(2n)!!]^2}{[(2n+2)!!]^2} |x|^2 = \lim_n \frac{|x|^2}{(2n+2)^2} = 0 < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

d'on es dedueix que el radi de convergència és $r = +\infty$

22. Trobeu una sèrie de potències $y = \sum a_n x^n$ tal que $y(0) = 3$, $y'(0) = 7$ i satisfà

$$(x^2+1)y'' = 2y.$$

Solució.

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \implies y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} \implies y''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituint a l'equació:

$$(x^2+1)y''(x) - 2y(x) = (x^2+1)\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n\geq 0} 2a_n x^n$$

$$= \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n\geq 0} 2a_n x^n$$

$$= \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n\geq 0} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n\geq 0} 2a_n x^n$$

$$= 2a_2 - 2a_0 + (6a_3 - 2a_1)x + \sum_{n\geq 2}\left\{[n(n-1)-2]a_n + (n+2)(n+1)\right\}x^n$$

$$= 2a_2 - 2a_0 + (6a_3 - 2a_1)x + \sum_{n\geq 2}\left[(n+1)(n-2)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2}\right]x^n$$

$= 0 \quad \forall x \in (-r,r)$, on r és el radi de convergència de la sèrie.

$$\iff \quad a_2 = a_0, \quad a_3 = \tfrac{1}{3}a_1, \quad a_{n+2} = -\frac{n-2}{n+2}a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2:$$

D'aquí: $a_4 = 0$ i llavors es comprova, per inducció, que $a_{2n} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$a_5 = -\frac{1}{5}a_3 = -\frac{1}{5\cdot 3}a_1, \quad a_7 = -\frac{3}{7}a_5 = +\frac{3\cdot 1}{7\cdot 5\cdot 3}a_1, \quad a_9 = -\frac{5}{9}a_7 = -\frac{5\cdot 3\cdot 1}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}a_1$$

$\ldots\ldots,$ (inducció) $\quad a_{2n+1} = (-1)^{n+1}\dfrac{(2n-3)!!}{(2n+1)!!}a_1 \quad \forall n \geq 2.$

D'altra banda; $a_0 = y(0) = 3$, $a_1 = y'(0) = 7$. Per tant la sèrie buscada és:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_0 x^2 + \tfrac{1}{3}a_1 x^3 + \sum_{n\geq 2} (-1)^{n+1} a_1 \frac{(2n-3)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$$

$$= \boxed{3 + 7x + 3x^2 + \tfrac{7}{3}x^3 + \sum_{n\geq 2} (-1)^{n+1}\frac{7(2n-3)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}, \ x \in (-r,r)}$$

Per trobar el radi de convergència de la sèrie, calculem el límit:

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x|^2 = \lim_n \frac{(2n-1)!!}{(2n+3)!!}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n-3)!!}|x|^2 = \lim_n \frac{2n-1}{2n+3}|x|^2 = |x|^2 < 1$$

$\iff |x| < 1$. Llavors el radi de convergència és $\underline{r = 1}$