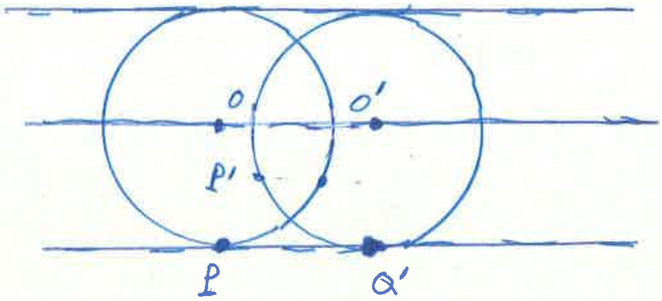
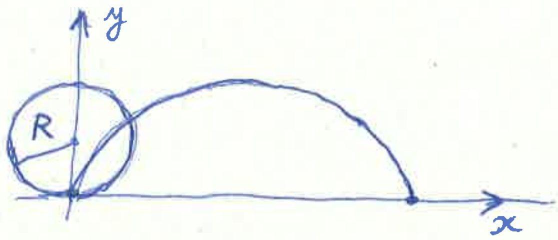
① (Cicloide) Longitud del arco de cicloide $\sigma(t) = (R(t-\sin t), R(1-\cos t))$



$x(t) = Rt - R\sin t = R(t-\sin t)$
$y(t) = R - R\cos t = R(1-\cos t),\ t\in[0,2\pi]$



$$Long(C) = \int_a^b \|\sigma'(t)\|\,dt$$

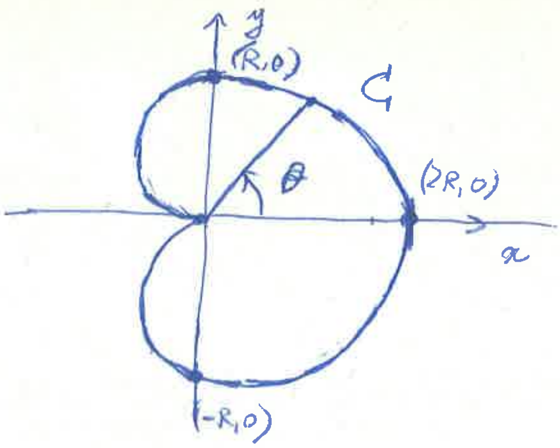
$$= 2R\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt \overset{(\&)}{=} 2R\int_0^{2\pi}\left|\sin \tfrac{t}{2}\right| dt = 2R\int_0^{2\pi}\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)dt$$

$$= 4R\left[-\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)\right]_{t=0}^{t=\pi} = \boxed{8R}\ \Delta$$

(&) $x'(t) = R(1-\cos t) \Rightarrow x'(t) = R^2(1-2\cos t+\cos^2 t)$
$y'(t) = R\sin t \Rightarrow y'(t) = R^2\sin^2 t$

$x'(t)^2 + y'(t)^2 = R^2(2-2\cos t) = 2R^2(1-\cos t) = 4R^2\sin^2 \tfrac{t}{2}$

⑥ (Masa cardioide). Masa de la cardioide definida en polars per $r = R(1+\cos\theta)$ si la densitat en cada punto es proporcional a la raíz cuadrada de la distancia al origen, siendo K la constante de proporcionalidad



$r = R(1+\cos\theta)$

$\rho(x,y) = K(x^2+y^2)^{1/4} = K r^{1/2},\ K>0$

$x(\theta) = r(\theta)\cos\theta$
$y(\theta) = r(\theta)\sin\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi$

$x'(\theta) = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta$
$y'(\theta) = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta$

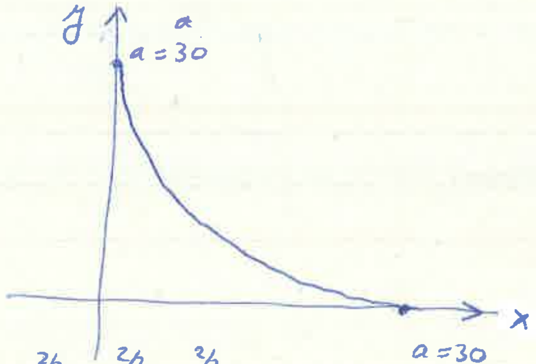
$(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2 = r(\theta)^2+r'(\theta)^2,\ dl = \sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\,d\theta = \sqrt{R^2\sin^2\theta+R^2+2R\cos\theta+R^2\cos^2\theta}\,d\theta$

$= 2^{1/2}R\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta$

d'où $\text{Long}(C) = \int_C \rho\, dl = \int_0^{2\pi} 2^{\frac12} K R^{\frac32}(1+\cos\theta)\, d\theta = 2^{\frac12} K R^{\frac32}\left(\int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta\right)$

$= \boxed{2^{\frac32}\pi K R^{\frac32}}$ Δ

9 (Valla) Área y altura media de una valla cuya base es el cuarto de astroide parametrizado por: $\sigma(t) = (30\cos^3 t, 30\sin^3 t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, y cuya altura está dada por la función $h(x,y) = 1 + y/3$.



$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

S. $dl = \|\sigma'(t)\|\, dt = 90\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t}\; dt$

$= 90\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t)}\; dt$

$= 90\,|\sin t \cos t|$

$\text{Long}(C) = \int_C dl = \int_a^b \|\sigma'(t)\|\, dt$

$= 90\int_0^{\pi/2} |\sin t \cos t|\, dt = 90\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\, dt = 45\left[\sin^2 t\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}$

$= \boxed{45}$

Área de la Valla $= \int_C h\, dl = \int_a^b (h\circ\sigma)(t)\, \overbrace{\|\sigma'(t)\|\, dt}^{dl} = 90\int_0^{\pi/2}\left(1 + \frac{30}{3}\sin^3 t\right)|\sin t\cos t|\, dt$

$= 90\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\, dt}_{\frac12} + 900\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t\, dt}_{\frac{900}{5}\left[\sin^5 t\right]_0^{\pi/2}} = 45 + 180 = \boxed{225}$

Altura promedio: $\bar{h} = \frac{1}{\text{Long}(C)}\int_C h\, dl = \frac{225}{45} = \boxed{5}$ Δ.

(11) Circulación del campo $\vec{F}(x,y,z) = (z,x,y)$ a lo largo de la curva C parametrizada por:

$$\sigma(t) = (t, t^2, t^3), \quad 0 \le t \le 1.$$

Solución

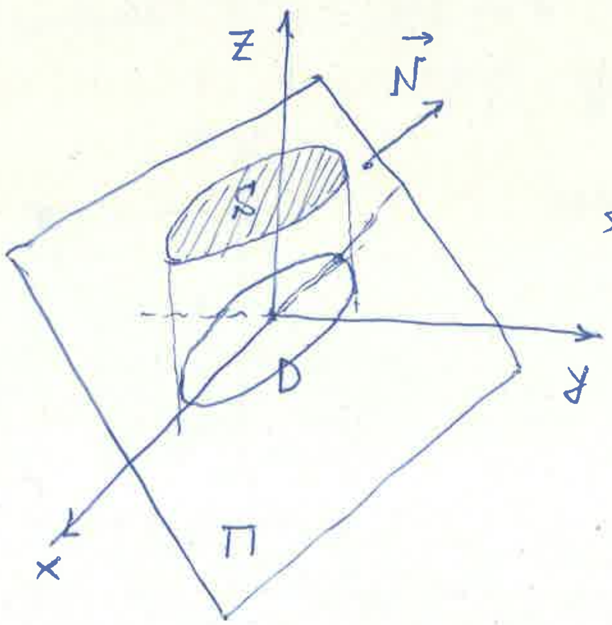
$\vec{F}(x,y,z) = (z,x,y)$, $C = \sigma(I)$, $I = [0,1]$, con $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, t^2, t^3)$.

$$\int_C \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = \int_\sigma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_0^1 \big(z(t)\,x'(t) + x(t)\,y'(t) + y(t)\,z'(t) \big)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^3 \cdot 1 + t \cdot 2t + t^2 \cdot 3t^2 \right) dt = \int_0^1 \left(t^3 + 2t^2 + 3t^4 \right) dt$$

$$= \left[\frac{t^4}{4} + \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{5}t^5 \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{15+40+36}{60} = \boxed{\frac{91}{60}}$$

(13) (Porción Plano) Área de la superficie S contenida en el plano $\Pi \equiv$ $\equiv x+y+z = 1$ sobre la elipse $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \le 1\}$.



Solució (Veure exemple 16 dels apunts)

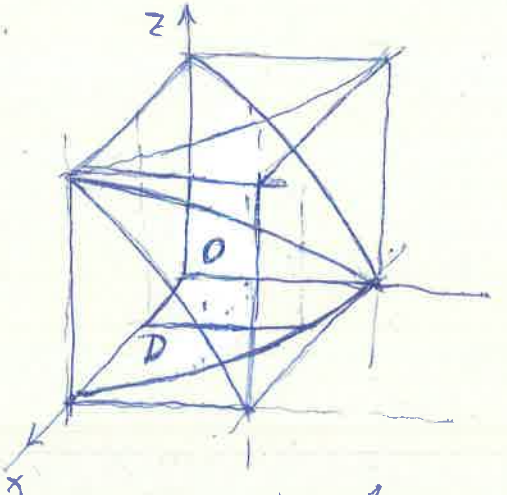
Normal unitària al plà $\vec{N} = \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$

Sigui α és l'angle que forma el vector normal al plà amb l'eix Z:

$$\cos\alpha = \frac{|\langle \vec{N}, \vec{k} \rangle|}{\|\vec{N}\| \cdot \|\vec{k}\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Àrea } S = \frac{\text{Àrea}(D)}{\cos\alpha} = \sqrt{3}\,\pi\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\pi}$$

15 (Sólido de Steinmetz: Wikipedia i MathWorld) Área y Volumen de la intersección de dos cilindros de radio R cuyos ejes se cortan perpendicularmente.



Sòlid de Steinitz al 1er octant.

$$W = \{x^2+y^2 \le R^2\} \cap \{y^2+z^2 \le R^2\}$$

$0 \le z \le \sqrt{R^2-y^2}$, $0 \le x \le \sqrt{R^2-y^2}$, $0 \le y \le R$. (1er octant).

Per simetria, el volum total és 8 vegades el volum sobre un octant (veure figura)

$$Vol(W) = \int_W dxdydz = 8\int_0^R dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} dx \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} dz = 8\int_0^R (R^2-y^2)\,dy$$

$$= 8\cdot\left[R^2y - \frac{y^3}{3}\right]_{x=0}^{x=R} = 8\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \boxed{\frac{16}{3}R^3}$$

Remarca 1. També, pel principi de Cavalieri; fem un tall per $y=$ ctnt $0 \le y \le R$, tenim $0 \le z \le \sqrt{R^2-y^2}$, $0 \le x \le \sqrt{R^2-y^2}$, d'on $S(y) = R^2-y^2$ i aleshores:

$$Volum(W) = 8\int_0^R S(y)\,dy = 8\int_0^R (R^2-y^2)\,dy = \frac{16}{3}R^3.$$

Remarca 2. Potser és més natural considerar

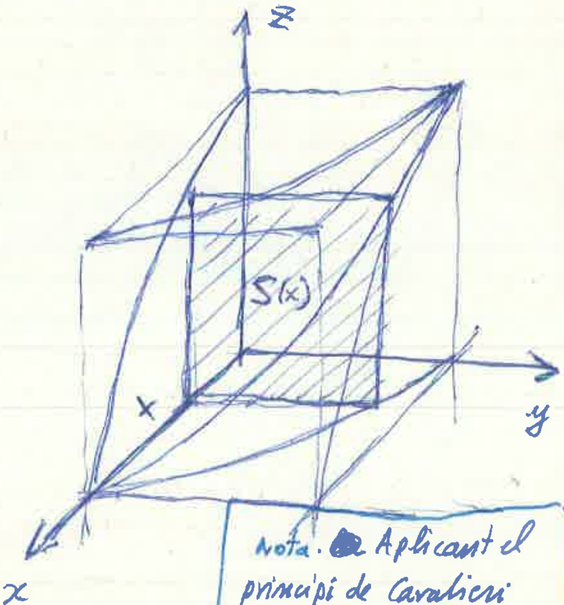
$$W = \{x^2+y^2 \le R^2\} \cap \{x^2+z^2 \le R^2\}.$$

Llavors, en el 1er octant:

$0 \le z \le \sqrt{R^2-x^2}$,

$0 \le y \le \sqrt{R^2-x^2}$,

$0 \le x \le R$.



$$Vol(W) = \int_W dxdydz = 8\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dz$$

$$= 8\int_0^R (R^2-x^2)\,dx = 8\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=R} = \boxed{\frac{16}{3}R^3}$$

Nota. Aplicant el principi de Cavalieri

$$Vol(W) = \int_0^R S(x)\,dx = \int_0^R (R^2-x^2)\,dx = \boxed{\frac{16}{3}R^3}.$$

Càlcul de l'Àrea. $S = \partial W$ (fem servir la figura de la Remarca 2).
Trobarem l'àrea de la gràfica de $z(x,y)=\sqrt{R^2-x^2}$ sobre $D: x^2+y^2 \leq R^2; \; x \geq 0, y \geq 0$; que serà (per simetria) $\frac{1}{16}$ de l'area total. Considerarem la parametrització:

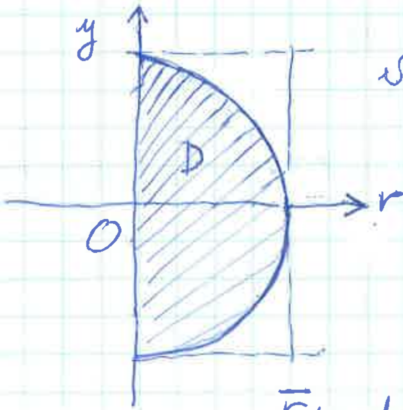
$$\varphi(x,y) = (x,y,z(x,y)) = \left(x,y,\sqrt{R^2-x^2}\right), \quad (x,y) \in D = \{x^2+y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$dS = \|\varphi_x \wedge \varphi_y\| \, dx\,dy = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$\text{Àrea}(S) = 16 \int_D \|\varphi_x \wedge \varphi_y\| \, dx\,dy = 16R \int_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2}} = 16R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy$$

$$= 16R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2} = 16R \int_0^R dx = \boxed{16R^2}. \; \Delta$$

16 (Centros geométricos por Guldin) Calcular el centro geométrico de la semicircunferencia y el semicírculo de radio R.



Solució. $G = \{(r,z) \in \mathbb{R}^2 : r^2+z^2=R^2, r \geq 0\}$,
$D = \{(r,z) \in \mathbb{R}^2 : r^2+z^2 \leq R^2, r \geq 0\}$.

- $\text{Àrea}(S) = 2\pi \, \text{dist}(CG(G), z) \cdot \text{Long}\, G$

$$\bar{r} := \text{dist}(CG(G), z) := \frac{1}{2\pi \,\text{Long}(G)} \text{Àrea}(S) = \frac{4\pi R^2}{2\pi \cdot \pi R} = \boxed{\frac{2R}{\pi}}$$

D'altra banda, per simetria $\bar{z}=0$. Aleshores $\underline{CG(G) = \left(\frac{2R}{\pi}, 0\right)}$.

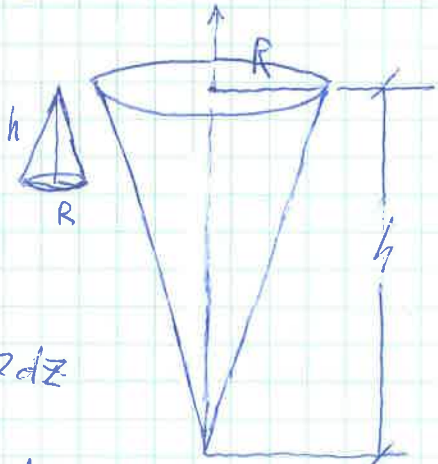
- $\text{Vol}(D) = 2\pi \, \text{dist}(CG(D), z) \cdot \text{Àrea}(D)$, anomenem $\bar{r} := \text{dist}(CG(D), z)$

$$\bar{r} := \text{dist}(CG(D), z) = \frac{4/3\, \pi R^3}{2\pi \cdot \pi R^2/2} = \boxed{\frac{4R}{3\pi}}$$

Com abans la coordenada z del CG de D, $\bar{z}$, és, per simetria $\bar{z}=0$. Llavors
$$CG(D) = \left(\frac{4R}{3\pi}, 0\right).$$

20 (Cargas en un cono). Carga total en la cara lateral de un cono de altura h y radio R si la densidad de carga es proporcional a la distancia a la base, siendo $K>0$ la ctnt de proporcionalidad.

Solució.



$$(x,y,z) = K|h-z| \ , \ K>0 \text{ ctat.}$$

$$\varphi(\theta,z) = \left(\tfrac{R}{h} z\cos\theta, \tfrac{R}{h} z\sin\theta, z\right),$$

$$(\theta,z) \in D = [0,2\pi]\times[0,h]$$

$$dS = \|\varphi_\theta \wedge \varphi_z\| \, d\theta\, dz = \tfrac{R}{h}|z|\sqrt{1-R^2/h^2}\, d\theta\, dz$$

$$Q = \int_S e\, dS = \int_D K|h-z| \tfrac{R}{h}|z| \sqrt{1+R^2/h^2}\, d\theta\, dz$$

$$= K\tfrac{R}{h}\sqrt{1+R^2/h^2}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^h |h-z||z|\, dz\right)$$

$$\underset{0\le z\le h}{=} K\tfrac{R}{h}\sqrt{1+R^2/h^2}\, 2\pi \int_0^h (h-z)z\, dz$$

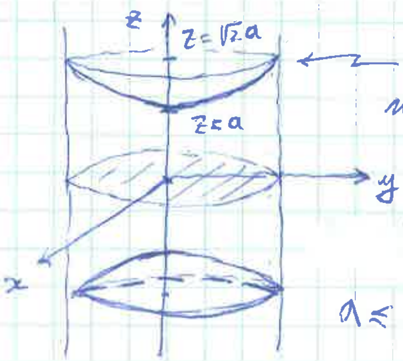
$$= 2\pi K\sqrt{1+R^2/h^2}\left[h\tfrac{z^2}{2}-\tfrac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{z=h} = 2\pi K\tfrac{R}{h}\sqrt{1+R^2/h^2}\left(\tfrac{h^3}{2}-\tfrac{h^3}{3}\right)$$

$$= \boxed{\tfrac{1}{3}\pi K R h\sqrt{h^2+R^2}} \ . \ \Delta$$

21 (Cargas en un hiperboloide de dos hojas). Carga total en la superficie

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^2 = x^2+y^2+a^2, \ a\le z\le a\sqrt{2}\},$$

si la densitat de carga es $e(x,y,z) = Kz$, con $K>0$.



$a \le z \le a\sqrt{2}$
només la "fulla" de dalt

$$Q = \int_S e\, dS = \int_D K z(x,y)\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\, dx\, dy$$

$$a \le z^2 = x^2+y^2+a^2 \le 2a \iff D:\ x^2+y^2 \le a^2.$$

Parametrització

$$\varphi(x,y)=(x,y,z(x,y))=(x,y,x^2+y^2+a^2),\ (x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le R^2\}$$

$$dS=\|\varphi_x\wedge\varphi_y\|\,dx\,dy=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2+a^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2+a^2}}\,dx\,dy$$

$$=\sqrt{\frac{a^2+2x^2+2y^2}{a^2+x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$0\le z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+a^2}$$

$$Q=\int_S \rho\,dS=\int_D K\,z(x,y)\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,dx\,dy$$

$$=\int_D K\sqrt{x^2+y^2+a^2}\cdot\sqrt{\frac{a^2+2(x^2+y^2)}{a^2+x^2+y^2}}\,dx\,dy=K\int_D\sqrt{a^2+2(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

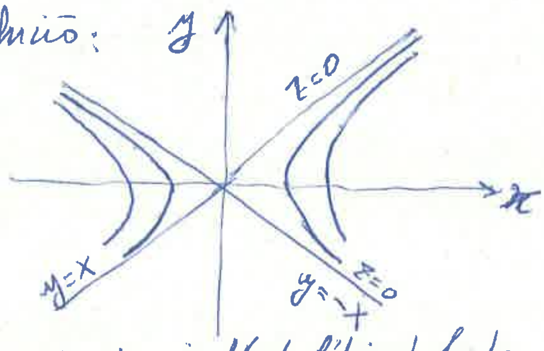
$$=\{\text{Polars: } D^*=[0,2\pi]\times[0,a]\}=K\int_{D^*} r\sqrt{a^2+2r^2}\,d\theta\,dr$$

$$=K\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\cdot\left(\int_0^a r\sqrt{a^2+2r^2}\,dr\right)=2K\pi\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\left[(a^2+2r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{r=a}$$

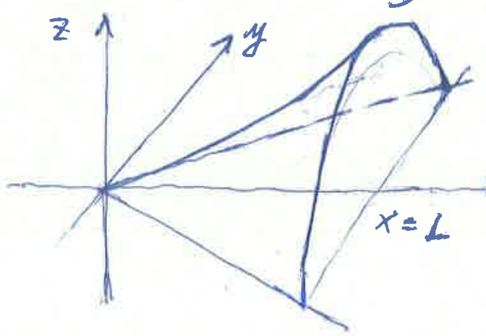
$$=\frac{K\pi}{3}a^3\left(3\sqrt{3}-1\right)=\boxed{\pi\left(\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)Ka^3}\ .\Delta$$

27 (Flujo a través de un paraboloide hiperbólico) Flujo del campo $v(x,y,z)=(x,y,z)$ a través de la porción S del paraboloide $P\equiv z=h(x^2-y^2)/L^2$ cortada por los tres planos $\Pi_1\equiv x=0$, $\Pi_2\equiv x=L$ y $\Pi_3\equiv z=0$ orientada según el vector $\vec{n}=(0,0,1)$ en el punto $O=(0,0,0)$.

Solució:



Corbes de nivell de l'hiperboloide.



Solució.

$\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$

$P \equiv z = \frac{h}{L^2}(x^2-y^2)$, $\Pi_1 \equiv x=0$, $\Pi_2 \equiv x=L$, $\Pi_3 \equiv z=0$

orientada segons: $\hat{k} = (0,0,1)$ en $O=(0,0,0)$.

Parametrització: $\varphi(x,y) = \left(x, y, \frac{h}{L^2}(x^2-y^2)\right)$, amb $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le |y| \le x \le L \equiv D$

$$d\vec{S} = (\varphi_x \wedge \varphi_y)\,dxdy = (-z_x, -z_y, 1)\,dxdy = \left(-2\frac{h}{L^2}x, \frac{2h}{L^2}y, 1\right)dxdy$$

Verem que $(\varphi_x \wedge \varphi_y)(0,0,0) = (0,0,1) = \hat{k}$: parametrització orientada positivament.

$$\int_S \langle \vec{r}, d\vec{S}\rangle = \int_D \left(-\frac{2h}{L^2}x^2 + \frac{2h}{L^2}y^2 + \frac{h}{L^2}(x^2-y^2)\right)dxdy = -\frac{h}{L^2}\int_D (x^2-y^2)\,dxdy$$

$$= -\frac{h}{L^2}\int_0^L dx \int_{-x}^{x} (x^2-y^2)\,dy = -\frac{h}{L^2}\int_0^L dx \left(x^2y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=-x}^{y=x}$$

$$= -\frac{h}{L^2}\int_0^L \left(x^3 - \frac{x^3}{3} + x^3 - \frac{x^3}{3}\right)dx = -\frac{h}{L^2}\int_0^L x^3\,dx = -\frac{h}{3L^2}L^4 = \boxed{-\frac{1}{3}hL^2}$$ Δ

$\boxed{28}$ (Flujo saliendo de un sólido de revolución) Flujo del campo $F(x,y,z) = (2x^2, 3y^2, z^2)$ a través de la frontera del sólido

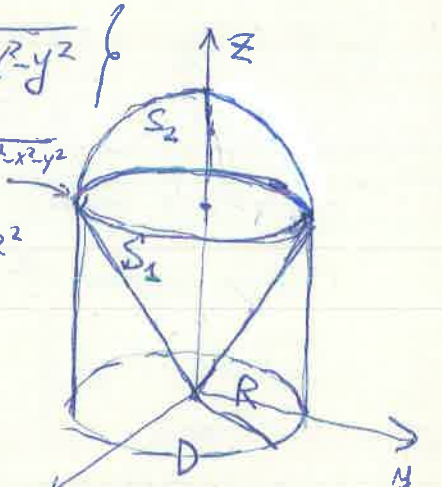
$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2R^2-x^2-y^2}\right\}$$

orientada según la normal exterior.

Solució:

$S = \partial W$.

$$\oint_{S=\partial W} \langle F, d\vec{S}\rangle = \overbrace{\int_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle}^{I_1} + \overbrace{\int_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle}^{I_2}$$



$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2R^2-x^2-y^2}$ d'on: $x^2+y^2 = R^2$

I_1: Parametritzem com la gràfica de la funció $z(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

$\varphi(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$, $(x,y) \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}$ Disc

$d\vec{S} = (\varphi_x \wedge \varphi_y)\,dxdy = \dots = (-z_x, -z_y, \boxed{1})\,dxdy$

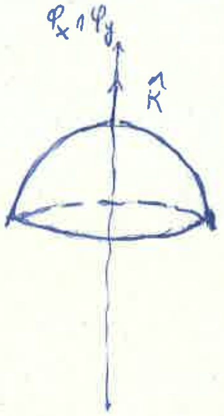
$z_1 = \sqrt{x^2+y^2} = r$
$z_2 = \sqrt{2R^2-x^2-y^2} = \sqrt{2R^2-r^2}$
$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r^2 = x^2+y^2 = R^2$
per tant, S_1, S_2 estan parametritzades sobre el disc D.

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\quad \varphi_x \wedge \varphi_y = (-z_x, -z_y, 1) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

Si mirem, per exemple, el 1er quadrant, on $x, y \geq 0$, veiem que $\varphi_x \wedge \varphi_y$ entra cap a l'interior de W. Per tant $\varphi_x \wedge \varphi_y$ 'apunta' cap a l'interior de W. Per tant $\varphi_x \wedge \varphi_y$ dóna orientació negativa

$$\int_{S_1^-} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = -\int_D \left[\frac{2x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{3y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x^2+y^2)\right] dx\,dy = \left\{\text{Polars. } D^* = [0,2\pi]\times[0,R]\right\}$$

$$= \int_{D^*} \left(2r^2\cos^3\theta + 3r^2\sin^3\theta - r^2\right) r\,d\theta\,dr$$



$$= -2\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\,d\theta\right)}_{=0}\left(\int_0^R r^3\,dr\right) - 3\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\,d\theta\right)}_{=0}\left(\int_0^R r^3\,dr\right) + \overbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)}^{=2\pi}\overbrace{\left(\int_0^R r^3\,dr\right)}^{=R^4/4}$$

$$= \frac{\pi R^4}{2}\ ;\qquad \int_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle := \int_{S_1^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = -\int_{S_1^-} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \boxed{-\frac{\pi R^4}{2}}$$

S_2: $\varphi(x,y) = \left(x, y, \overbrace{\sqrt{2R^2-x^2-y^2}}^{z(x,y)}\right)$, $(x,y) \in D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}$.

$$d\vec{S} = (\varphi_x \wedge \varphi_y)\,dx\,dy = (-z_x, -z_y, 1)\,dx\,dy = \left(\frac{+x}{\sqrt{2R^2-x^2-y^2}}, \frac{+y}{\sqrt{2R^2-x^2-y^2}}, 1\right)dx\,dy$$

↳ orientació positiva.

$$\int_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_D \left(\frac{2x^3}{\sqrt{2R^2-x^2-y^2}} + \frac{3y^3}{\sqrt{2R^2-x^2-y^2}} + 2R^2-x^2-y^2\right) dx\,dy = \left\{\text{Polars } D^* = [0,2\pi]\times[0,R]\right\}$$

$$= \int_{D^*} \left(\frac{2r^3\cos^3\theta}{\sqrt{2R^2-r^2}} + \frac{3r^3\sin^3\theta}{\sqrt{2R^2-r^2}} + 2R^2 - r^2\right) r\,dr$$

$$= 2\overbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\,d\theta\right)}^{=0}\cdot\left(\int_0^R \frac{r^4}{\sqrt{2R^2-r^2}}\,dr\right) + 3\overbrace{\left(\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\,d\theta\right)}^{=0}\cdot\left(\int_0^R \frac{r^4}{\sqrt{2R^2-r^2}}\,dr\right)$$

$$+ \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\cdot\left(\int_0^R (2R^2-r^2)\,r\,dr\right) = 2\pi\cdot\frac{3R^4}{4} = \frac{3\pi R^4}{4}$$

Finalment: $\displaystyle\oint_{S=\partial W} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle + \int_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = -\frac{\pi}{2}R^4 + \frac{3\pi}{2}R^4 = \boxed{\pi R^4}$

29 (Campos provinientes de potencial escalar) Calcular las siguientes circulaciones:

a) Campo $\vec{F}(x,y,z) = (2xy+z^3, x^2, 3xz^2)$ a lo largo de la hélice parametrizada por $\sigma(t) = (\cos t^2, \sin t^2, t^2)$, $0 \le t \le \sqrt{\pi}$

b) Campo $\vec{F}(x,y,z) = (e^y, xe^y, 2z)$, a lo largo de la curva parametrizada por:
$\sigma(t) = \left(1 + t\int_1^t e^{u^2}du, t, t^2\right)$, $0 \le t \le 1$.

Solución. Tots dos camps són conservatius per tant es poden expressar com gradient d'un potencial.

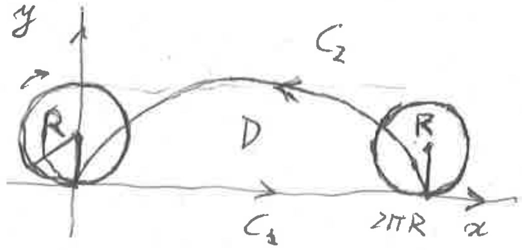
a) Si $f(x,y,z) := x^2y + xz^3$, llavors:
$$\vec{F}(x,y,z) = \text{grad} f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)) = (2xy+z^3, x^2, 3xz^2)$$

Per tant:
$$\int_{C=\sigma([0,\sqrt{\pi}])} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = f(\sigma(\sqrt{\pi})) - f(\sigma(0)) = f(-1,0,\pi) - f(1,0,0) = -\pi^3 - 0 = \boxed{-\pi^3}$$

b) Si $f(x,y,z) = xe^y + z^2$, llavors
$$\vec{F}(x,y,z) = \text{grad} f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)) = (e^y, xe^y, 2z)$$

Aleshores:
$$\int_{C=\sigma([0,1])} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = f(1,1,1) - f(1,0,0) = e+1-1 = \boxed{e}$$

30. (Área de la cicloide). Probar, usando Green, que el área comprendida entre el eje horizontal y el arco de cicloide de radio R (ver problema 1) es el triple del área del círculo de radio R.



$\sigma_2(t) = \left(R(t-\sin t), R(1-\cos t)\right)$, $0 \le t \le 2\pi$

$\sigma_1(t) = (t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi R$

$$\text{Área}(D) = \int_a^b x(t)\,y'(t)\,dt$$

$$= -\underbrace{\int_0^{2\pi} R^2(t-\sin t)\sin t\,dt}_{\int_{C_2} x\,dy} + \underbrace{\int_0^{2\pi R} t\cdot 0\,dt}_{\int_{C_1} x\,dy}$$

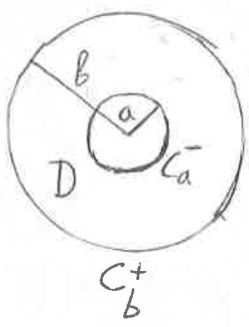
ull, canviem el signe

$$\overset{(\&)}{=} 2\pi R^2 + \pi R^2 = \boxed{3\pi R^2} \quad \triangle$$

(&) $\displaystyle\int_0^{2\pi} t\sin t\,dt = -t\cos t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos t\,dt = -2\pi$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt = \pi$$

33. (Dominio plano no simplemente conexo) Verificar que el teorema de Green con el campo $\vec{F}(x,y) = (2x^3 - y^3, x^3+y^3)$ y la corona $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a^2 \le x^2+y^2 \le b^2\}$



$\partial D = C_b^+ \cup C_a^-$;

Sigui: $C_R = \{x^2+y^2=R^2\}$ i l'orientem en sentit anti-horari:

Parametrització: $x(\theta) = R\cos\theta$, $y(\theta) = R\sin\theta$,

$$\int_{C_R = C_R^+} \langle \vec{F}, \ \rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\left(-2R^4\cos^3\theta\sin\theta + R^4\sin^4\theta + R^4\cos^4\theta + R^4\sin^3\theta\cos\theta\right)d\theta$$

$$= R^4\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)\,d\theta + \underbrace{R^4\int_{-\pi}^{\pi}\left(-2R^4\cos^3\theta\sin\theta + R^4\sin^3\theta\cos\theta\right)d\theta}_{0}$$

$$\overset{(\&)}{=} \frac{3\pi}{2}R^4.$$

$\left(\int_{-\pi}^{\pi}(\text{funció senar}\ldots)\,d\theta = 0\right)$

(&):

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = (\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2(2\theta) = 1 - \frac{1-\cos(4\theta)}{4} = \frac{3+\cos 4\theta}{4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{3+\cos(4\theta)}{4}\,d\theta = \tfrac{3}{2}\pi$$

Aleshores:

$$\int_{\partial D} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = \underbrace{\int_{C_b^+} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle}_{\frac{3\pi}{2} b^2} + \underbrace{\int_{C_a^-} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle}_{-\int_{C_a^+} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle} = \boxed{\frac{3\pi}{2}(b^2 - a^2)}.$$

D'altra banda:

$$\int_D \langle \text{rot} F, \hat{k} \rangle \, dx\,dy = \int_D (Q_x - P_y)\, dx\,dy = \int_D 3(x^2+y^2)\, dx\,dy = \left\{ \begin{array}{l} \text{canvi a polars:} \\ D^* = [0,2\pi]\times[a,b] \end{array} \right\}$$

$$Q(x,y) = x^3 + y^3 \to Q_x = 3x^2$$
$$P(x,y) = 2x^3 - y^3 \to P_y = -3y^2$$

$$= 3\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_a^b r^3 dr\right) = 6\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=a}^{r=b} = \boxed{\frac{3\pi}{2}(b^4 - a^4)}$$

(i queda comprovat que: $\oint_{C=\partial D} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = \int_D \langle \text{rot}\vec{F}, \hat{k} \rangle dx\,dy$)

35) Un dominio plano con tres agujeros. Sea G la frontera del dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ obtenido al quitar tres discos de radio 1 con centros en $(-3,0)$, $(0,0)$ y $(3,0)$ del disco de radio 10 centrado en $(1,0)$. Calcular la circulación

$$\int_G \underbrace{\left(y + x^3\cos(x^2)\right)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{\left(e^{y^2} + 2x\right)}_{Q(x,y)} dy$$

Orientando la mayor circunferencia de G en sentido horario y las tres menores en sentido

Solución:

Si $C^+ = \partial D$ está orientada según el vector $\hat{k}$, la orientación que pide el enunciado es la de C^-. Entonces; aplicando el Teorema de Stokes:

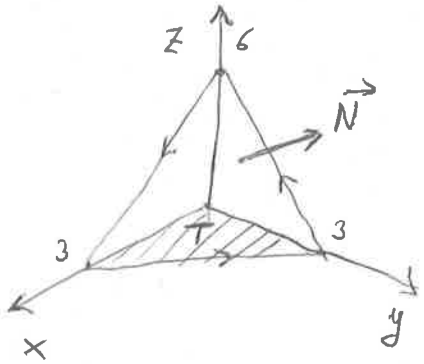
$$\int_{C^-} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = -\int_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = -\int_D (Q_x - P_y)\, dx\,dy \overset{(*)}{=} -\int_D dx\,dy$$

$$= -\left(\underbrace{\int_{D_{10}} dx\,dy}_{\text{Área del disco de radio 10}} - 3 \underbrace{\int_{D_1} dx\,dy}_{\text{Área del disco de radio 1}} \right) = -(100\pi - 3\pi) = -97\pi$$

(*) $P(x,y) = y + x^3\cos(x^2)$: $P_y(x,y) = 1$
$Q(x,y) = e^{y^2} + 2x$: $Q_x(x,y) = 2$

36 (Stokes en un triángulo) Circulación $\oint_{C} -y^2dx + zdy + xdz$ siendo C el triangulo formado al intersecar el plano $\Pi \equiv 2x+2y+z=6$ con los tres ejes de coordenadas orientado según el vector normal unitario. $N(x,y,z) = \frac{(2,2,1)}{\sqrt{9}}$

Solució.



$F(x,y,z) = (-y^2, z, x)$, $\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y^2 & z & x \end{vmatrix} = (-1,-1,2y)$

Parametrització: $\varphi(x,y) = (x, y, 6-2x-2y)$, $(x,y) \in T = \{0 \le y \le 3-x, x \ge 0\}$

$d\vec{S} = (+2,+2,1)\,dx\,dy$: Veiem que el vector normal donat per la parametrització apunta en el mateix sentit que $\vec{N}$

Aleshores, aplicant el Teorema de Stokes:

$$\int_{C=\partial D} -y^2dz + zdy + xdz = \int_D \langle \operatorname{rot}\vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_T (-4+2y)\,dx\,dy$$

$$= 4\int_T dxdy + 2\int_0^3 dx \int_0^{3-x} y\,dy = -18 + \frac{2}{2}\int_0^3 (3-x)^2\,dx = -18 - \left[\frac{(3-x)^3}{3}\right]_{x=0}^{x=3} = -18+9 = \boxed{-9}$$

38 (Larson & Edwards, novena edición, página 1134) Verificar el teorema de Stokes con el campo $F(x,y,z) = (2z, x, y^2)$ y la porción del paraboloide circular

$$S = \{(x,y,z) \subset \mathbb{R}^3 : z = 4-x^2-y^2,\ z \ge 0\}.$$

orientada de forma que $C = \partial S$ deba recorrerse en sentido antihorario.

Solució:

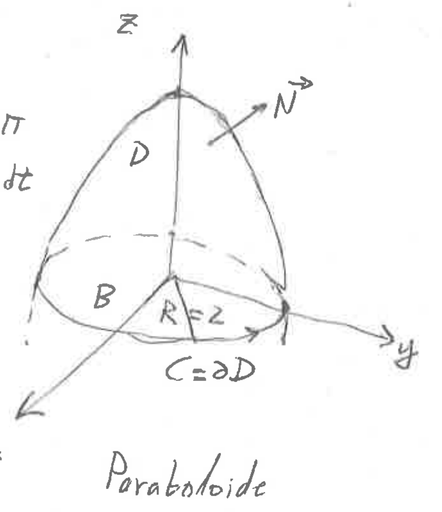
1] $I_1 = \int_{C=\partial D} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle$: Parametrització de C $\sigma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$, $-\pi \le t \le \pi$

$d\vec{l} = \sigma'(t)\,dt = (-2\sin t, 2\cos t, 0)\,dt$

$(F \circ \sigma)(t) = (0, 2\cos t, 4\sin^2 t)$

Llavors: $\int_{C=\partial D} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \langle (F\circ\sigma)(t), \sigma'(t) \rangle\,dt$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 4\cos^2 t\,dt = 4\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \boxed{4\pi}$$



Paraboloide Circular.

ii) $I_2 = \int_D \langle \mathrm{rot}\,\vec F, d\vec S\rangle$; $\mathrm{rot}\,\vec F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2z & x & y^2 \end{vmatrix} = (2y, 2, 1)$

Parametrització de la superfície: $\varphi(x,y) = (x, y, z = 4-x^2-y^2)$, $(x,y) \in B = \{x^2+y^2 \le 4\}$;
llavors $d\vec S = (2x, 2y, 1)\,dxdy$, per ex. per $x=y=0$: $d\vec S = (0,0,1)\,dxdy$ Normal cap "afora", consistent amb l'orientació de C. Llavors:

$$I_2 = \int_D \langle \mathrm{rot}\,\vec F, d\vec S\rangle = \int_B \langle (2y,2,1),(2x,2y,1)\rangle\, dxdy = 4\overbrace{\int_B xy\,dxdy}^{=0\ (\text{per simetria})} + 4\overbrace{\int_B y\,dxdy}^{=0\ (\text{id})} +$$

$$+ \int_B 1\,dxdy = \boxed{4\pi}$$

Per tant el Teorema de Stokes queda comprovat, i

$$\int_{C=\partial D} \langle \vec F, d\vec l\rangle = 4\pi = \int_D \langle \mathrm{rot}\,\vec F, dS\rangle. \ \Delta$$

39 (Flujo saliendo de un cubo). Flujo del campo $\vec F(x,y,z) = (4xz, -y^2, yz)$ a través de la frontera del cubo unidad $W = [0,1]^3$ orientada según la normal exterior

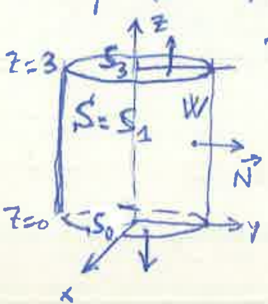
Solución. Aplicant el Teorema de la divergència.

$$\oint_{S=\partial W} \langle \vec F, d\vec S\rangle = \int_W \mathrm{div}\,\vec F\, dxdydz = \int_W (4z-2y+y)\,dxdydz = \int_W (4z-y)\,dxdydz$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \underbrace{\left(\int_0^1 dx\right)}_{=1}\underbrace{\left(\int_0^1 dy\right)}_{=1}\underbrace{\left(\int_0^1 4z\,dz\right)}_{=[2z^2]_0^1 = 2} - \underbrace{\left(\int_0^1 dx\right)}_{=1}\underbrace{\left(\int_0^1 y\,dy\right)}_{=[y^2/2]_0^1 = 1/2}\underbrace{\left(\int_0^1 dz\right)}_{=1}$$

$$= 2 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}. \ \Delta$$

41 (Tapando un cilindro [1]). Flujo del campo $F(x,y,z) = (4x, -2y^2, z^2)$ a través de la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4,\ 0 \le z \le 3\}$



$\partial W = S^+ \cup S_0^+ \cup S_3^+$, sn $\int_{S_2^+} \langle \vec F ds\rangle$, $\int_{S_3^+} \langle \vec F, d\vec S\rangle$ són els fluxos a través de les tapes

$$\int_{S=S^+} \langle \vec F, d\vec S\rangle = \int_W \mathrm{div}\,\vec F\, dxdydz - \int_{S_0} \langle \vec F\, d\vec S\rangle - \int_{S_3} \langle \vec F, d\vec S\rangle$$

$$= \int_W (4-4y+2z)\,dxdydz - \int_{S_0} \langle \vec F, -\hat k\rangle dS - \int_{S_3} \langle \vec F, \hat k\rangle dS = (1)$$

$$\int_{S_0^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \underset{z=0}{=} \int_{S_0^+} \langle (4x,-2y^2,0), -\hat{k} \rangle \, dS = \int_{S_0^+} 0 \cdot dS = 0$$

$$\int_{S_3^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \underset{z=3}{=} \int_{S_3^+} \langle (4x,-2y^2,9), \hat{k} \rangle \, dS = \int_{S_3^+} 9 \, dS = 9 \int_{S_3^+} dS = 36\pi$$

$$\int_W (4-4y+2z) \, dxdydz \overset{(*)}{=} 4\int_W dxdydz - 4 \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta \, d\theta\right)}_{=0} \left(\int_0^2 r^2 dr\right)\left(\int_0^3 dz\right) + 2 \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right)}_{=2\pi} \underbrace{\left(\int_0^2 r\,dr\right)}_{=2} \underbrace{\left(\int_0^3 z\,dz\right)}_{=9/2}$$

(*) Canvi a cilíndriques:

$W^* = [-\pi,\pi] \times [0,2] \times [0,3]$

$$= 48\pi + 36 = 84\pi.$$

Aleshores:

$$\int_{S=S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = 84\pi - 36\pi = \boxed{48\pi}$$

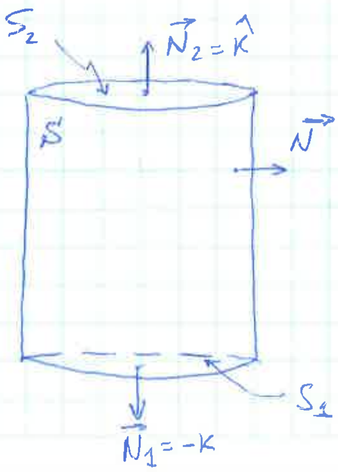
42. ("Tapando" un cilindro [2]). Consideremos la porción de cilindro dada por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=4, \ 0 \le z \le 5\}$$

a) Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (2x, y, 3z)$ a través de la superficie S orientada según el vector normal unitario $\vec{N}(x,y,z) = (x/2, y/2, 0)$

b) Calcular la circulación del campo $\vec{F}$ a lo largo de la frontera ∂S orientada según el mismo vector normal.

c) Calcular la circulación del campo $\vec{F}$ a lo largo de cada componente conexa de la frontera ∂S orientadas según el mismo vector normal



$\partial W = S \cup S_0 \cup S_1$

$$\int_{\partial W} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle + \int_{S_0} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle + \int_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

$$\underset{\text{Teor de la divergència}}{=} \int_W \operatorname{div} \vec{F} \, dxdydz$$

$$\int_W \operatorname{div} \vec{F}\, dx\,dy\,dz = 6 \int_W dx\,dy\,dz = 6 \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = \underline{120\pi}$$ (6 x Vol del cilindre)

$\vec{F}(x,y,z) = (2x, y, 3z) \to \operatorname{div} \vec{F} = 2+1+3 = 6$

$$\int_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_{S_1} \langle \vec{F}, \vec{N_1} \rangle dS = 0.$$

sobre S_1: $\langle \vec{F}, \vec{N_1} \rangle = \langle (2x, y, 0), (0,0,-1) \rangle = \underline{0}$ (la component normal del flux és zero sobre S_1)

$S_1 = \{ x^2+y^2=4, z=0 \}$

$$\int_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_{S_2} \langle \vec{F}, \vec{N_2} \rangle dS = 15 \int_{S_2} dS = 15 \times \pi \times 4 = \underline{60\pi}$$

sobre S_2: $\langle \vec{F}, \vec{N_2} \rangle = \langle (2x, y, 15), (0,0,1) \rangle = 15 =: F_{N_2}$

La component normal del Flux és constant sobre S_2

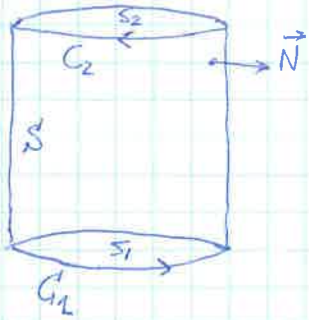
$S_2 = \{ x^2+y^2=4, z=5 \}$

Aleshores:

$$\int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_W \operatorname{div} \vec{F}\, dx\,dy\,dz - \int_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle - \int_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

$$= 120\pi - 0 - 60\pi = 60\pi$$

b) $\partial S = C_1 \cup C_2$. Pel teorema de Stokes:



$$\int_{\partial S} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = \int_S \langle \operatorname{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2x & y & 3z \end{vmatrix} = 0$$ ($\vec{F}$ és irrotacional)

c) Sea $C_a = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=4, z=a \}$, $C_a = \partial S_a$ con $S_a = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4, z=a \}$

Por Stokes: $$\int_{C_a = \partial S_a} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = \int_{S_a} \langle \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\operatorname{rot} \vec{F}}, dS \rangle = 0,$$

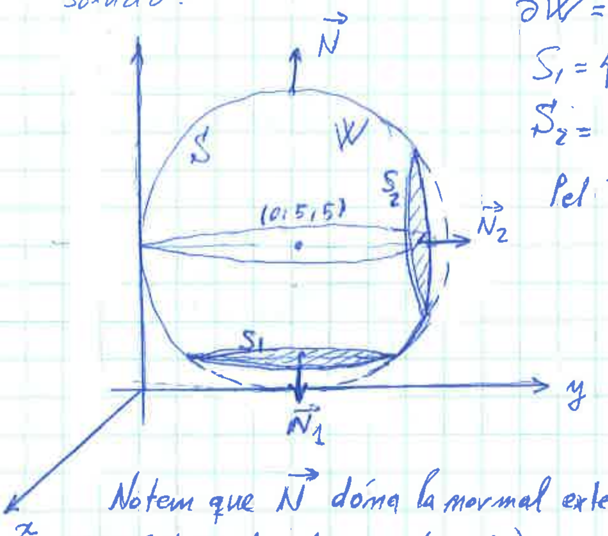
$$\oint_{C_1^+} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = \int_{S_1} \langle \operatorname{rot} \vec{F}, dS \rangle = 0, \quad \oint_{C_2^-} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = -\oint_{C_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = -\int_{S_2} \langle \operatorname{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle = 0$$

43) ("Tapando" una porción de esfera) Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z)=(-x,0,x+z)$ a través de la porción de esfera dada por

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+(y-5)^2+(z-5)^2=25,\ y\leq 9,\ z\geq 1\}$$

orientada según el vector normal unitario $\vec{N}(x,y,z)=(x,y-5,z-5)$

Solució:



$\partial W=S\cup S_1\cup S_2$, amb

$S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+(y-5)^2\leq 9,\ z=1\}$,

$S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+(z-5)^2\leq 9,\ y=9\}$

Pel Teorema de la divergència:

$$\int_{\partial W}\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=\int_S\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle+\int_{S_1}\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle+\int_{S_2}\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=\int_W \operatorname{div}\vec{F}\,dxdydz \quad (1)$$

Notem que $\vec{N}$ dóna la normal exterior. En efecte, si l'avaluem a $(0,5,10)$: $\vec{N}(0,5,10)=(0,0,10)$, que apunta cap 'enfora' de la superfície S.

D'altra banda:

$\vec{N}_1=(0,0,-1)$

$\vec{N}_2=(0,1,0)$

Notem 1er que $\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)=-1+1=0$ ($\vec{F}$ és solenoidal) Aleshores $\int_W \operatorname{div}\vec{F}\,dxdydz=\underline{0}$

- Sobre S_1:

$\langle\vec{F},\vec{N}_1\rangle=\langle(-x,0,x+1),(0,0,-1)\rangle$

$=-(x+1)=:F_{N_1}$ Component normal al camp sobre la superfície S_1

Alashores:

$$\int_{S_1}\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=\int_{S_1}F_{N_1}\,dS=-\int_{S_1}(x+1)\,dS=\left\{\begin{array}{l}\text{Polars } x=r\cos\theta,\ y=5+r\sin\theta,\ z=1\\ (\theta,r)\in S_1^*=[-\pi,\pi]\times[0,3]\end{array}\right\}$$

$$=-\int_{S_1^*}(r\cos\theta+1)\,r\,dr\,d\theta=-\left(\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\right)\cdot\left(\int_0^3 r\,dr\right)-\underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\,d\theta\right)}_{=0}\cdot\left(\int_0^3 r^2\,dr\right)$$

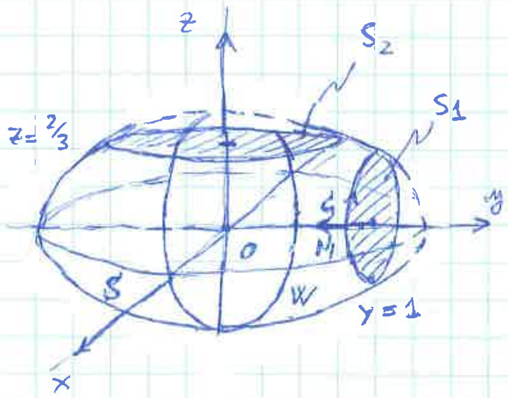
$$=\underline{-9\pi}$$

- Sobre S_2: $\langle\vec{F},\vec{N}_2\rangle=\langle(-x,0,x+z),(0,1,0)\rangle=0=:F_{N_2}$, i.e. la component normal del camp $\vec{F}$ sobre la superfície S_2 és ctnt i igual a 0. Aleshores: $\int_{S_2}\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=$

$$=\int_{S_2}\langle\vec{F},\vec{N}_2\rangle\,dS=\int_{S_2}F_{N_2}\,dS=\underline{0}.$$

Finalment, el flux buscat, d'acord amb (1) vé donat per

$$\int_S\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=\int_W \operatorname{div}\vec{F}\,dxdydz-\int_{S_1}\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle-\int_{S_2}\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=0-(-9\pi)-0=\boxed{9\pi}\ \Delta$$



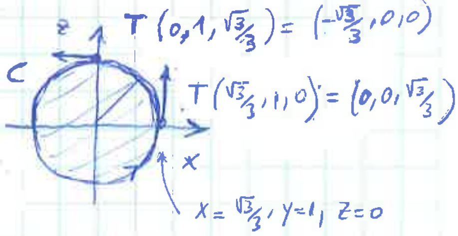
44. ("Tapando" un elipsoide). Consideraremos la porción del elipsoide dada por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2/3 + z^2 = 1,\ y \le 1, z \le 2/3\}$$

a) Calcular la circulación $\oint_C z\,dx + y\,dy - x\,dz$, siendo $C = S \cap \{y=1\}$ orientada según el vector tangente $T(x,1,z) = (-z,0,x)$.

b) Calcular el flujo $\int_S dz\,dx$ orientando S de forma compatible con la orientación anterior

a) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1/3,\ y = 1\}$ Orientación pla $y=1$



Corba C vista des de dintre. Amb la orientació donada es recorre en sentit anti-horari i el vetor $\vec{N}$ entra 'cap endins'.

la corba C és la vora de $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \le \frac{1}{3},\ y = 1\}$ orientada per $\vec{N_1} = (0,-1,0) = -\hat{j}$

d'altra banda $\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & y & -x \end{vmatrix} = 2\hat{j} = (0,2,0)$. Aleshores, podem aplicar el Teorema de Stokes:

$$\oint_{\substack{C \\ = \partial S_1}} z\,dx + y\,dy - x\,dz = \int_{S_1} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_{S_1} \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{N_1} \rangle dS = + \int_{S_1} \langle 2\hat{j}, -\hat{j} \rangle dS$$

$$= -2 \int_{S_1} dS = -2\, \text{Àrea}(S_1) = \boxed{-\frac{2\pi}{3}}$$

Exercici: calculeu-lo directament, parametritzant C.

cercle de radi $r = 1/\sqrt{3}$

frontera del cos

b) En aquest cas, el camp és $\vec{G} = (0,1,0)$ i $\partial W = S \cup S_1 \cup S_2$

$$\int_{\partial W} \langle \vec{G}, d\vec{S} \rangle = \int_S \langle \vec{G}, d\vec{S} \rangle + \int_{S_1} \langle \vec{G}, d\vec{S} \rangle + \int_{S_2} \langle \vec{G}, d\vec{S} \rangle =$$

$$= -\int_W \text{div } G\, dx\,dy\,dz$$

si ∂W orientada según el vector normal interior

En el nostre cas 1) $\text{div } G = 0$, d'on: $\int_W \text{div } G\, dx\,dy\,dz = 0$,

2) $\int_{S_1} \langle \vec{G}, d\vec{S} \rangle = \int_{S_1} \langle \vec{G}, \vec{N_1} \rangle dS = \int_{S_1} \langle \hat{j}, -\hat{j} \rangle dS = -\int_{S_1} dS = -\text{Àrea}(S) = -\frac{\pi}{3}$

3] Sobre S_2 la component del camp en la direcció normal a S_2 és 0. En efecte:

$$\langle \vec{G}, \vec{N_2} \rangle = \langle (0,1,0), (0,0,-1) \rangle = 0, \text{ d'on:}$$

$$\int_{S_2} \langle \vec{G}, d\vec{S} \rangle = \int_{S_2} \langle \vec{G}, \vec{N_2} \rangle dS = 0$$

Entonces:

$$\int_S dz\,dx = \int_S \langle \vec{G}, d\vec{S} \rangle = -\int_W \operatorname{div} G \, dx\,dy\,dz - \int_{S_1} \langle \vec{G}, d\vec{S} \rangle - \int_{S_2} \langle \vec{G}, d\vec{S} \rangle$$

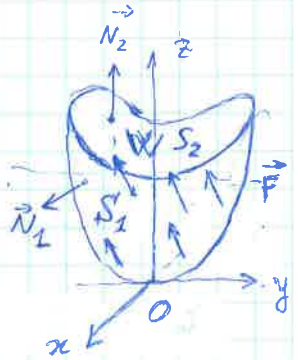
$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{3}\right) - 0 = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

On S la suposem orientada segons la normal interior. ▲

46. (Ejemplo de "tapa" no plana). Flujo del campo $F(x,y,z) \equiv (1,0,2)$ a través de la porción del paraboloide elíptico

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + 4y^2, \; z \leq 3y^2 + 1\}$$

orientada según el vector normal con componente vertical positiva.



Solució:

Parametritzem S_1, la frontera del cos 'sense tapar':

$$\varphi(x,y) = (x, y, z = x^2 + 4y^2), \; (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$x^2 + 4y^2 \leq 3y^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

Aleshores:

$$d\vec{S} = \varphi_x \wedge \varphi_y (x,y)\,dx\,dy = (-z_x, -z_y, 1)\,dx\,dy = (-2x, -8y, 1)\,dx\,dy$$

ull! Normal interior: en $x=0=y$, $z=0$ i el vector és $(0,0,1)$ apunta 'cap a dintre'

I calculem directament el flux demanat:

Volem el flux respecte la normal exterior.

$$\int_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = -\int_D \langle F \circ \varphi, \varphi_x \wedge \varphi_y \rangle dx\,dy = -\int_D (-2x + 2)\,dx\,dy =$$

$$= \{\text{Polars } D^* = [0, 2\pi] \times [0,1]\} = -2\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 r\,dr\right) + 2\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta\right)}_{=0} \cdot \left(\int_0^1 r^2\,dr\right) = \boxed{-2\pi}$$

Aplicant el Teorema de la divergència:

Alternativament podem aplicar el Teorema de la divergència. Parametritzem S_2

$$\Phi(x,y) = (x, y, z = 3y^2 + 1), \; (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Ja té el sentit de la Normal exterior

$$d\vec{S} = \phi_x \wedge \phi_y \, dx dy = (0, -6y, 1)\, dx dy.$$

Ara, pel teorema de la divergència, tindrem:

$$\int_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_{W} \underbrace{\operatorname{div} \vec{F}}_{=0} \, dx dy dz - \int_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle =$$

← El camp és ctnt.

Tenint en compte: $\partial W = S_1 \cup S_2$

$$= - \int \langle \underbrace{\vec{F} \circ \phi}_{=(1,0,2)}, \phi_x \wedge \phi_y \rangle \, dx dy = -2 \int_D dx dy = \boxed{-2\pi}. \ \blacktriangle$$

(el camp $\vec{F} = (1,0,2)$ és constant.)