

# EDOs (Problemas)

①

8) (SLs homogéneas a coeficientes constantes). Calcular una matriz fundamental y la solución general de los sistemas lineales  $\vec{x}' = A\vec{x}$

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

$$p(t) = \det(A - tI_2) = \begin{vmatrix} 1-t & 3 \\ -2 & -4-t \end{vmatrix} = t^2 - (\text{Tr}A)t + \det A = t^2 + 3t + 2 = (t+1)(t+2)$$

VAPs      VEPs

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{Nuc}(A + I_2) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [\vec{v}_1 = (3, -2)^T]$$

$$\lambda_2 = -2 \quad \text{Nuc}(A + 2I_2) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [\vec{v}_2 = (1, -1)^T]$$

Por tanto; una matriz fundamental es  $X(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-t} & e^{-2t} \\ -2e^{-t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}$ . La solución general viene dada pues, por:

$$\vec{x}_h(t) = X(t)\vec{c} = \begin{pmatrix} 3e^{-t} & e^{-2t} \\ -2e^{-t} & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \\ -2c_1 e^{-t} - c_2 e^{-2t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  arbitrarios (libres).

b)  $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $p(t) = t^2 - (\text{Tr}A)t + \det A = t^2 + 2t + 5$ ;  $\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$

VAPs complejos conjugados de la forma  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$

Sea pues:  $w = u + iv$  VEP simple de  $A \in M_n(\mathbb{R})$  asociado al VAP  $\lambda = \alpha + i\beta$ , donde  $u, v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ . Entonces  $\bar{w} = u - iv$  es una VEP simple de  $A \in M_n(\mathbb{R})$  correspondiente al VAP  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ .

En efecto  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Si  $Aw = \lambda w \Leftrightarrow A\bar{w} = \bar{\lambda}\bar{w}$ .

$$\text{Entonces } x_+(t) = e^{\lambda t} w = e^{(\alpha+i\beta)t} (u+iv) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) (u+iv)$$

$$= e^{\alpha t} (\cos(\beta t) u - \sin(\beta t) v + i (\sin(\beta t) u + \cos(\beta t) v))$$

$$= e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \vec{u} - \sin(\beta t) \vec{v}) + i e^{\alpha t} (\sin(\beta t) \vec{u} + \cos(\beta t) \vec{v}), t \in \mathbb{R}$$

$$x_-(t) = e^{\bar{\lambda} t} \bar{w} = e^{(\alpha-i\beta)t} (u-iv) = \dots$$

$$= e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \vec{u} - \sin(\beta t) \vec{v}) - i e^{\alpha t} (\sin(\beta t) \vec{u} + \cos(\beta t) \vec{v}) t \in \mathbb{R}$$

Si buscamos soluciones reales, tomamos:

$$x_1(t) = \frac{1}{2} (x_+(t) + x_-(t)) = \operatorname{Re}(x_+(t)) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \vec{u} - \sin(\beta t) \vec{v})$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2i} (x_+(t) - x_-(t)) = \operatorname{Im}(x_+(t)) = e^{\alpha t} (\sin(\beta t) \vec{u} + \cos(\beta t) \vec{v}).$$

Remarca: estas 2 soluciones,  $x_1(t), x_2(t)$  son li. Ejercicio: comprobarlo!

Entonces:  $\vec{X}(t) = (x_1(t) \ x_2(t))$  es una matriz fundamental del sistema.

Volviendo a nuestro ejemplo ( $\alpha = -1, \beta = 2$ ), tenemos:

$$\operatorname{Nuc}(A - (-1+2i)I_2) = \operatorname{Nuc} \begin{pmatrix} -2-2i & -4 \\ 2 & 2-2i \end{pmatrix} = [\vec{w} = (-2, 1+i)^T] = [\vec{w} = (-2, 1+i)^T = (-2, 1)^T + i(0, 1)^T],$$

de donde  $\vec{u} = (-2, 1)^T, \vec{v} = (0, 1)^T$ . Tenemos 2 soluciones li:

$$x_1(t) = e^{-t} \left( \cos(2t) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^{-t} \begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ \cos(2t) - \sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$x_2(t) = e^{-t} \left( \sin(2t) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^{-t} \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ \sin(2t) + \cos(2t) \end{pmatrix}$$

Matriz Fundamental:

$$X(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -2\cos(2t) & -2\sin(2t) \\ \cos(2t) - \sin(2t) & \sin(2t) + \cos(2t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Remarca:  $\nearrow$  Cambio de base.  
 $X(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$   
 $\hookrightarrow$  contracción  $\hookrightarrow$  giro

La solución general viene dada por  $\vec{x}(t) = X(t) \vec{c}$ ,  $\vec{c} = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$  con  $c_1, c_2$  arbitrarias (libres).

$$x(t) = X(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -2c_1 \cos(2t) - 2c_2 \sin(2t) \\ c_1 (\cos(2t) - \sin(2t)) + c_2 (\sin(2t) + \cos(2t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$c_1, c_2$  arbitrarios ( $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  libres).

e)  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ :  $p(t) = t^2 - (\operatorname{Tr} A)t + \det A = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$

Por tanto  $\lambda = -1$  VAP doble (multiplicidad 2)

Buscamos una base de Jordano

$$\vec{u} \in \operatorname{Nuc}(A + I_2)^2 \setminus \operatorname{Nuc}(A + I_2) = \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Nuc}(A + I_2) = \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Nuc} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Escogemos, por ejemplo,  $\vec{u} = (4, 0)^T$ . Entonces el 2º vector de la base viene dado por:

$$\vec{v} = (A + I_2) \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\vec{x}_1(t) = e^{\lambda t} \vec{v} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2(t) = e^{\Delta t} (\vec{u} + t\vec{v}) = e^{-t} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+t \\ t \end{pmatrix}$$

Son dos soluciones li. En efecto  $W(0) = \det(\vec{x}_1(0) \ \vec{x}_2(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ . (obviamente, ya que  $\vec{x}_1(0) = \vec{v}$  y  $\vec{x}_2(0) = \vec{u}$  son vectores de la correspondiente base de Jordan de la matriz  $A$ ). Así tenemos una matriz fundamental del sistema:

$$X(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

La solución general  $\vec{x}_h(t)$  viene dada por:

$$\vec{x}_h(t) = X(t) \vec{c} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} c_1 + c_2(1+t) \\ c_1 + c_2 t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  arbitrarios (libres).

9) (Existencia de soluciones acotadas). Calcular la solución del PVI

$$\vec{x}' = A \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¿Tiene el sistema  $\vec{x}' = A \vec{x}$  alguna solución  $\vec{x}(t)$  acotada para todo  $t \in \mathbb{R}$ ?

Solución.

$$\text{VAPs de } A: p(t) = \det(A - tI_3) = -(2+t)(t-1)^2$$

Así pues  $\lambda_1 = -2$  es un VAP de multiplicidad 1

$\lambda_2 = 1$  es un VAP doble (multiplicidad 2)

$$\lambda_1 = -2, \text{Nuc}(A + 2I_3) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = [\vec{v}_1 = (1, 0, 0)^T].$$

(4)

$\lambda_2 = 1$ : buscamos los vectores de la base de Jordan:

$$\text{rang}(A - I_3) = \text{rang} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \dim \text{Nuc}(A - I_3) = 2.$$

Entonces tenemos 2 VEPs  $\vec{v}_i$  asociados al VAP  $\lambda_2 = 1$ . Podemos tomar, por ejemplo

$$\vec{v}_2 = (1, 1, 0)^T, \vec{v}_3 = (0, 0, 1)^T.$$

Por tanto la matriz  $A$  tiene una base de VEPs  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ , el primero asociado a  $\lambda_1 = -2$  y los dos últimos asociados a  $\lambda_2 = 1$ .

Tenemos pues un Conjunto Fundamental de soluciones dado por:

$$\vec{x}_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y una matriz fundamental de soluciones,

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

$$\text{Solución general } \vec{x}_h(t) = X(t) \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} + c_2 e^t \\ c_2 e^t \\ c_3 e^t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

cte. arbitrarias (libres).

Vemos que, aparte de la solución trivial  $\vec{x}(t) \equiv \vec{0}$  no hay ninguna solución acotada para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Solución del PVI:

$$\vec{x}_h(0) = X(0) \vec{c} = \vec{x}_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 1.$$

Luego la solución del PVI dado resulta:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} + 2e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Variació de paràmetres (o de constants). Veure Apunts pàg. 8

$$\text{SLNH: } \vec{x}' = A(t) \vec{x} + \vec{b}(t)$$

$$\text{SLH Associat: } \vec{x}' = A(t) \vec{x}$$

Solució general del SLNH:

$$\vec{x}_g(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t),$$

on:  $\vec{x}_h(t)$ : és la solució del SLH Associat:  $\vec{x}' = A(t) \vec{x}$

$\vec{x}_p(t)$ : és una solució qualsevol del SLNH.

Si coneixem un (FS del SLH associat; llavors podem trobar  $x_p(t)$  amb l'anomenat Mètode de Variació de Paràmetres (o de Variació de les Constants):

$x_h(t) = X(t) \vec{c}$ , on  $X(t)$  Matriu Fonamental,  $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$  vector amb components arbitràries (lliures). Busquem  $\vec{x}_p(t)$  de la forma  $\vec{x}_p(t) = X(t) \vec{u}(t)$

(Ansatz):

$$\vec{x}_p'(t) = X'(t) \vec{u}(t) + X(t) \vec{u}'(t) = A(t) X(t) \vec{u}(t) + X(t) \vec{u}'(t) = A(t) X(t) \vec{u}(t) + \vec{b}(t).$$

Llavors:  $\vec{u}'(t) = X(t)^{-1} \vec{b}(t)$ , i:

$$\vec{x}_p(t) = X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s) \vec{b}(s) ds, \text{ on } t_0 \in I \text{ qualsevol. } (*)$$

Aleshores la solució general del SLNH s'escriu:

$$\vec{x}_g(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t) = X(t) \vec{c} + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s) \vec{b}(s) ds$$

$\vec{c} \in \mathbb{R}^n$  lliure i  $t_0 \in I$  qualsevol.

10) Variación de constantes. Resolver los sistemas no homogéneos

$$\vec{x}' = A x + \vec{b}(t), \text{ donde:}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} -t & 2 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix} = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2): \text{VAPs } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  d'on podem agafar com VEP:  $\vec{v}_1 = (2, 1)^T$

$\lambda_2 = 2: \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  " " " " "  $\vec{v}_2 = (1, 1)^T$

llavors:  $X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix}$  és una matriu fonamental del SLH associat  $\vec{X}' = A\vec{X}$ .  
Aleshores, podem aplicar (\*) per tenir una solució particular del sistema no homogèni

$\vec{X}_p(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \int_{t_0=0}^t (\dots)^{-1} \begin{pmatrix} e^s \\ -e^s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3e^{-s} \end{pmatrix} ds = (*)$

$\begin{pmatrix} 2e^s & e^{2s} \\ e^s & e^{2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^s \\ e^{-s} \end{pmatrix}$ .  
Cramer:  $\Delta = \begin{vmatrix} 2e^s & e^{2s} \\ e^s & e^{2s} \end{vmatrix} = 2e^{3s} - e^{3s} = e^{3s}$   
 $\Delta_1 = \begin{vmatrix} e^s & e^{2s} \\ -e^s & e^{2s} \end{vmatrix} = 2e^{3s}$ ,  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2e^s & e^s \\ e^s & -e^s \end{vmatrix} = -3e^s$

d'on:  $u_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2e^{3s}}{e^{3s}} = 2$ ,  $u_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{3e^{2s}}{e^{3s}} = -3e^{-s}$ .

$(*) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 3e^{-t}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t+3 \\ 2t+3 \end{pmatrix} e^t + X(t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

llavors podem agafar  $\vec{X}_p(t) = \begin{pmatrix} 4t+3 \\ 2t+3 \end{pmatrix} e^t$ . Aleshores la solució del sistema lineal no homogèni s'escriu:

$x_g(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 3+4t \\ 3+2t \end{pmatrix} e^t, t \in \mathbb{R};$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  lliures.

c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$

$P_A(t) = t^2 - (\text{tr} A)t + \det A = t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1$  d'on VAPs  $\lambda_{\pm} = 1 \pm i$  ( $\alpha=1, \beta=1 > 0$ )

Aleshores els VEPs associats són:

$(A - (1+i)I)W = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Solució  $a = ib, b \in \mathbb{R}$  lliure.

Podem agafar  $b=1$  i llavors:  $\vec{w} = (i, 1)^T = (0, 1)^T + i(1, 0)^T, \bar{\vec{w}} = (0, 1)^T - i(1, 0)^T$ .

Per tant:

$\vec{x}_1(t) = e^t \left( \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

$\vec{x}_2(t) = e^t \left( \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

d'on tenim que  $X(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$  és una Matriu Fonamental del SLH associat  $\vec{x}' = A\vec{x}$ . Notem que, en aquest cas  $X(0) = Id$  i el sistema és autònom. Aleshores  $X'(t) = X(-t)$ . Apliquem la fórmula de variació de les constants (\*) per obtenir una solució particular del SLNH:

$$\begin{aligned} \vec{x}_p(t) &= X(t) \int e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix} dt = X(t) \int \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= e^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notem que sempre podem agafar una primitiva qualsevol, ja que  $X(t) \begin{pmatrix} v_1(t) + c_1 \\ v_2(t) + c_2 \end{pmatrix} = X(t) \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} + X(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  i aquest últim terme,  $X(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ , és solució del sistema homogeni associat. Llavors la solució general s'escriu:

$$\vec{x}_g(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^t + t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ i } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ arbitraris (línies)}$$

a)  $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$P_A(t) = t^2 - (\text{tr } A)t + \det A = t^2 - t = t(t-1)$ , d'on:

VAPs      VEPs  
 $\lambda_1 = 0 \quad \text{Nuc}(A - 0 \cdot I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = [v_1 = (1, 1)^T]$   
 $\lambda_2 = 1 \quad \text{Nuc}(A - 1 \cdot I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = [v_2 = (3, 2)^T]$

Matriu Fonamental:  $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}$ .

Solució particular del SLNH (apliquem la fórmula de variació de paràmetres (\*)):

$$x_p(t) = X(t) \int X^{-1}(t) \vec{b}(t) dt = X(t) \int \begin{pmatrix} 11 \\ 5e^{-t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11t \\ -5e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11t - 15 \\ 11t - 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{vmatrix} = -e^t, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3e^t \\ -1 & 2e^t \end{vmatrix} = 11e^t, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\xi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -11, \quad \xi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 5e^{-t}.$$

I tensim, per la solució general:

$$x_g(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11t-15 \\ 11t-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 e^t + 11t - 15 \\ c_1 + 2c_2 e^t + 11t - 10 \end{pmatrix},$$

$t \in \mathbb{R}$  i amb  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  arbitraris (lliures).

11) (Sl com término no homogéneo). Resolver el sistema  $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}$ ,  
donde  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

S. Solució del sistema homogeni associat  $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$ :

$$P_A(t) = t^2 - (\text{tr}A)t + \det A = t^2 - 1 = (t-1)(t+1), \text{ factorizado cuando } t \neq 0.$$

VAPs VEs.

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{Nuc}(A-I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = [\vec{v}_1 = (2, 1)^T]$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \text{Nuc}(A+I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = [\vec{v}_2 = (0, 1)^T]$$

Matrín fonamentat del sistema homogeni associat  $X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & 0 \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix}$ .

Busquem una solució particular constant del sistema, i.e., de la forma  $\vec{x}(t) = \vec{q}$ ,  
amb  $\vec{q} \in \mathbb{R}$  dtnt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \vec{x}_p(t)$$

Alshores, la solució general del sistema no homogeni s'escriu com:

$$x_g(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & 0 \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 e^t \\ c_1 e^t + c_2 e^{-t} + 1 \end{pmatrix},$$

$t \in \mathbb{R}$  i amb  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  arbitraris (lliures).



## Problemas a Valores Iniciales (PVI)

$$A: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M_m(\mathbb{R}), \quad I \subset \mathbb{R} \text{ intervalo}$$

$$b: I \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$A, b$  continuas. Consideramos el PVI:

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t)$$

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0,$$

con  $t_0 \in I$ ,  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$  dados.

Sea  $X(t)$  una Matriz Fundamental del SLH asociado  $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$

$$\iff X'(t) = A(t)X(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

La solución general del sistema (método de variación de las constantes)

viene dada por:

$$\vec{x}_g(t) = X(t)\vec{c} + X(t) \int_{\vec{z}}^t X^{-1}(s)\vec{b}(s)ds, \quad \vec{z} \in I, \quad \vec{c} \in \mathbb{R}^m \text{ arbitrario.}$$

De acuerdo con el Teorema de existencia y unicidad, esta solución está definida para todo  $I$ ,

$$\vec{z} = t_0: \vec{x}(t_0) = X(t_0)\vec{c} + X(t_0) \int_{t_0}^{t_0} \dots = \vec{x}_0 \iff \vec{c} = X(t_0)^{-1}\vec{x}_0$$

Luego la solución del PVI viene dada por:

$$\boxed{\vec{x}(t) = X(t)X(t_0)^{-1}\vec{x}_0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s)\vec{b}(s)ds,} \quad (1)$$

definida para todo  $t \in I$ .

Proposición. Sea  $X(t)$  Matriz Fundamental de  $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$  ( $\iff X'(t) = A(t)X(t)$ )

Sea  $S$  una matriz ND singular ( $\det S \neq 0$ ) cualquiera.

Entonces:  $Y(t) = X(t)S$  también es una Matriz Fundamental.

Demostración:  $Y'(t) = X'(t)S = A(t)X(t)S = A(t)Y(t)$ ,

y, por otra parte  $\det Y(t) = \det(X(t)S) = \det X(t) \cdot \det S \neq 0 \quad \forall t \in I$ .

Podemos pues, dado un instante  $t_0 \in I$ , considerar la Matriz Fundamental  $Y(t) = X(t)X(t_0)^{-1}$ , que es la denominada Matriz Principal del sistema en  $t=t_0$ . Notemos que  $Y(t_0) = I_m$  (matriz unidad  $m \times m$ ). Con esta definición podemos escribir la solución (\*) del PVI como:

$$\vec{x}(t) = Y(t)\vec{x}_0 + Y(t) \int_{t_0}^t Y(s)^{-1} b(s) ds,$$

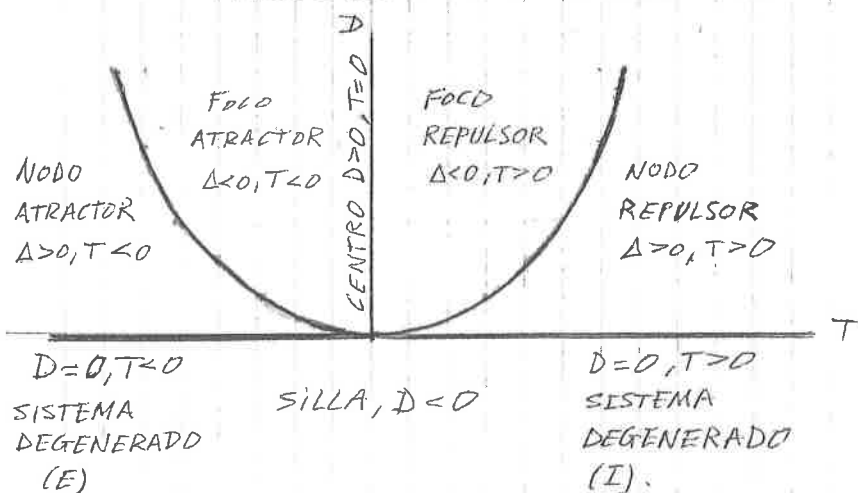
definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

## Estabilidad de los SL a coeficientes constantes

Proposición [Apuntes de la Asignatura (Rafael Ramírez's notes)] (Criterio traza-determinante para SLs 2D a coeficientes constantes).

$A \in M_2(\mathbb{R})$ . Consideramos el sistema  $\vec{x}' = A\vec{x}$ . Definimos  $T := \text{Traza } A$ ,  $D := \det A$ ,  $\Delta := T^2 - 4D$ . Entonces el sistema es:

- Una silla (I) si y sólo si  $D < 0$ .
- Un centro (E pero no AE) si y sólo si  $T = 0$  y  $D > 0$ .
- Un foco si y sólo si  $T \neq 0$  y  $\Delta < 0$ .
  - El foco es repulsor cuando  $T > 0$ .
  - El foco es atractor cuando  $T < 0$ .
- Un nodo si y sólo si  $D > 0$  y  $\Delta \geq 0$ 
  - El nodo es repulsor cuando  $T > 0$ .
  - El nodo es atractor cuando  $T < 0$ .
  - Además, el nodo es impropio si y sólo si  $\Delta = 0$  y la matriz  $A$  no es diagonal
- Degenerado, cuando  $D = 0$ . Un sistema degenerado es
  - I cuando  $T > 0$ .
  - E (pero no AE cuando  $T < 0$ )
  - Puede ser E ó I cuando  $T = 0$ .



Demostración: ver Apuntes de la Asignatura página 11.

14) (Croquis de SIs). Dibujar un croquis aproximado de los siguientes sistemas lineales y decir si expanden, contraen o preservan área. Si existen direcciones de entrada y/o salida, dibujarlas con precisión. Si existe más de una dirección de entrada/salida, determinar la más rápida. Si las trayectorias giran, dilucidar el sentido del giro. Si existe una recta de puntos de equilibrio, calcularla con precisión.

a)  $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $p(t) = \det(A-tI) = t^2 - 6t + 8$ , de donde  $\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$

VAPs VEPs

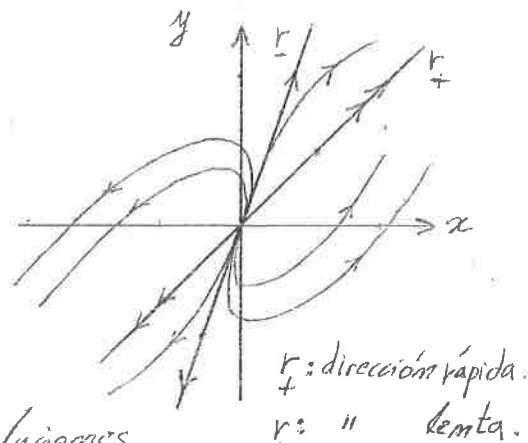
$\lambda_1 = 4$   $\text{Nuc}(A-4I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = [\vec{v}_1 = (1, 1)^T]$

$\lambda_2 = 2$   $\text{Nuc}(A-2I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = [\vec{v}_2 = (1, 3)^T]$

$x(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^{2t} \left( c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

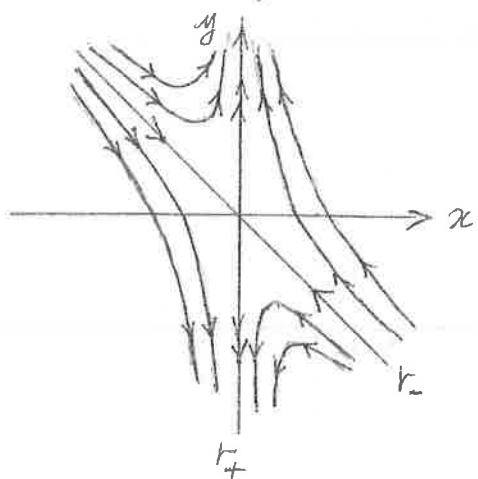
Por tanto:  $x(t) \sim c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ , cuando  $t \rightarrow -\infty$ ; las soluciones

salen tangenciales a la dirección lenta. Vemos también que  $\text{Tr}A = 5+1=6 > 0$ : Expande Área



$v_+$ : dirección rápida.  
 $v_-$ : " lenta.

b)  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ;  $p(t) = t^2 - t - 2$ ;  $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$ , de donde:



VAPs VEPs

$\lambda_1 = -1$   $\text{Nuc}(A+I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = [\vec{v}_1 = (1, -1)^T]$

$\lambda_2 = 2$   $\text{Nuc}(A-2I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = [\vec{v}_2 = (0, 1)^T]$

$v_+$ : recta de salida:  $v_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x=0\}$ .

$v_-$ : recta de entrada:  $v_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x+y=0\}$ .

En este caso la dirección rápida (la que corresponde con valor absoluto mayor) es la dirección de salida; mientras que la dirección de entrada es la dirección lenta.

Por otro lado  $\text{Tr}A = -1+2 = 1 > 0$ : el sistema expande área.

c)  $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $p_C(t) = t^2 - 2t + 5$ ,  $\lambda_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$ ,  $\text{Re}(\lambda_{\pm}) > 0$  Foco repulsiu (I)

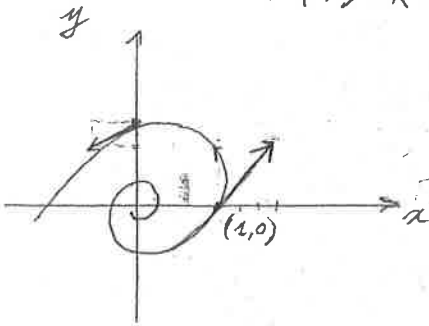
$\lambda_+ = 1 + 2i$ :  $(C - \lambda_+ I)W = \begin{pmatrix} 2-2i & -2 \\ 4 & -2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-i)a - b = 0 \\ 2a - (1+i)b = 0 \end{cases}$

Solució:  $b = (1-i)a$ , amb  $a \in \mathbb{R}$  "lliure". Aleshores, podem agafar com VEP:

$W_+ = (1, 1-i)^T = (1, 1)^T + i(0, -1)^T$

$u = (1, 1)^T \in \mathbb{R}^2$ ,

$v = (0, -1)^T \in \mathbb{R}^2$



Solució:

$x_1(t) = e^t \left( \cos(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + \sin(2t) \end{pmatrix}$

$x_2(t) = e^t \left( \sin(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - \cos(2t) \end{pmatrix}$

$x(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ \cos(2t) + \sin(2t) & \sin(2t) - \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  amb  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$  arbitraris (lliures)

Sentit de gir:  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ : giro antihorari.

Además Traça  $C := T_C = 2 > 0 \Rightarrow$  Expande àrea.

d)  $D = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $p_D(t) = t^2 + 1$ , d'on  $\lambda_{\pm} = \pm i$   $\alpha=0$ ,  $\beta=1$ . Se trata de un centro (E pero no AE).

Busquem els VAPs:  $(D - iI)W = \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-i)a - 5b = 0 \\ a - (2+i)b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = (2+i)b$

Aleshores, podem agafar com VEP:  $W = (2+i, 1)^T = (2, 1)^T + i(1, 0)^T$ ;  $u = (2, 1)^T$ ,  $v = (1, 0)^T$

Solució:  $\vec{x}_1(t) = \cos t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

$\vec{x}_2(t) = \sin t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

Nota (\*):  $X(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t & 2\sin t + \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

$\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$  formen un CFS; per tant la solució general vindrà donada per:

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t & 2\sin t + \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(2\cos t - \sin t) + c_2(2\sin t + \cos t) \\ c_1 \cos t + c_2 \sin t \end{pmatrix}$

Por otro lado: Traça  $D = T_D = 0 \Rightarrow$  El sistema preserva àrea.

(\*) En general:

$X(t) = (x_1(t) | x_2(t)) = e^{\alpha t} \left( \cos(\beta t) \vec{u} - \sin(\beta t) \vec{v} \mid \sin(\beta t) \vec{u} + \cos(\beta t) \vec{v} \right) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$

Ecuación de las órbitas:  $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y}{2x-5y} \Leftrightarrow (x-2y)dx + (5y-2x)dy = 0$

Esta última EDO es exacta. En efecto, si  $P(x,y) = x-2y$ ,  $Q(x,y) = 5y-2x$ , entonces

$\frac{\partial P}{\partial y} = -2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$  i Buscamos las soluciones implícitas de la manera habitual:

$U_x = x-2y \Rightarrow U(x,y) = \frac{x^2}{2} - 2xy + \psi(y)$

$U_y = -2x + \psi'(y) = 5y-2x$ , i podem agafar  $\psi(y) = \frac{5}{2}y^2$

Entonces:  $U(x,y) = \frac{x^2}{2} - 2xy + \frac{5}{2}y^2 = (x,y) M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$ , con  $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Consideramos el cambio:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ , con  $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ,

$S^T S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\det S = 1$ ,  $S^T M S = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}-\sqrt{2} & \\ & \frac{3}{2}+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ , i.e.  $S$  es una rotación en el plano  $xy$  correspondiente a un ángulo  $\theta$ , con:  $\cos \theta = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ ,  $\sin \theta = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$   
 $\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8} = 22^\circ 30'$ . Por otro lado:

$\frac{x^2}{2} - 2xy + \frac{5}{2}y^2 = (x,y) M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\xi, \eta) S^T M S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\xi, \eta) \begin{pmatrix} \frac{3}{2}-\sqrt{2} & \\ & \frac{3}{2}+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$   
 $= \frac{\xi^2}{\sqrt{6+4\sqrt{2}}} + \frac{\eta^2}{\sqrt{6-4\sqrt{2}}} = c, c \in \mathbb{R}, c > 0$  arbitrario (libre).

Esta última ecuación corresponde a una familia uniparamétrica de elipses, de semiejes  $a = \sqrt{(6+4\sqrt{2})c}$  y  $b = \sqrt{(6-4\sqrt{2})c}$ ,  $c \in \mathbb{R}, c > 0$  arbitrario; y de manera que el semieje mayor forma un ángulo de  $22^\circ 30'$  con el eje  $x$ . Las trayectorias del sistema recorren pues estas órbitas (ver figura)

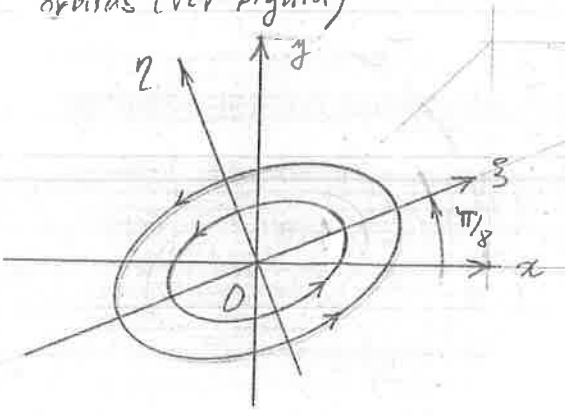
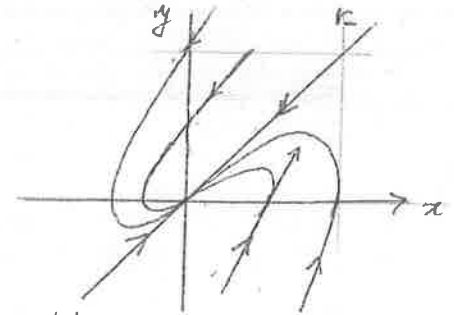


Figura 14d.

La matriz  $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ; de donde  $b = -5 < 0$  y  $c = 1 > 0$ . Estas son ambas condiciones suficientes para concluir que el sentido de giro es antihorario (ver problema 15).  $\square$



Sentido de giro: Figura 14e

e)  $E = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ ;  $P_E(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9$ ;  $\lambda_{\pm} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = -3$

VAP amb multiplicitat 2, negativa y la matriz  $E$  mo es diagonal; luego se trata de un modo impropio atractor (ver figura 14e). VEP:  $\text{Nuc}(A+3I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = [v = (1,1)^T]$

$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$   
 $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}$

f)  $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ :  $\det F = 0$ . Sistema degenerat:  $p_F(t) = t^2 - t = t(t-1)$ :  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$

$\lambda_1 = 0$ :  $\text{Nuc } F = [v_1 = (0, 1)^T]$

$\lambda_2 = 1$ :  $\text{Nuc}(F - I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = [v_2 = (1, 1)^T]$

La recta  $x=0$  és una recta de punts d'equilibri, que són (I). Calculem la solució:

$\dot{x} = x \Rightarrow x(t) = a e^t$

$\dot{y} = x \Rightarrow y(t) = a e^t + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  constants arbitràries.

Elavors la solució que passa pel punt  $(x_0, y_0)$  és:  $x(t) = x_0 e^t$ ,  $y(t) = x_0 e^t + y_0 - x_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$

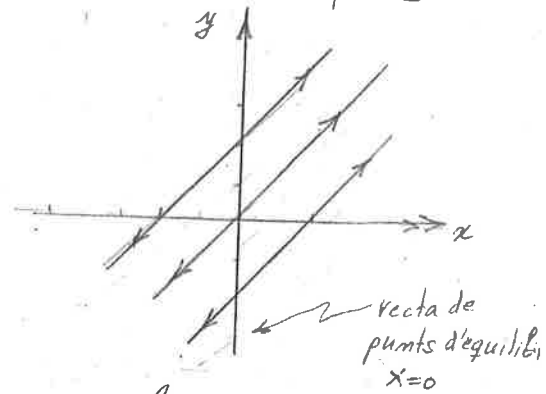


Figura 14f

19. (Otro diagrama de bifurcaciones). Determinar el diagrama de bifurcaciones correspondiente a la estabilidad y clasificación del sistema lineal asociado a la matriz

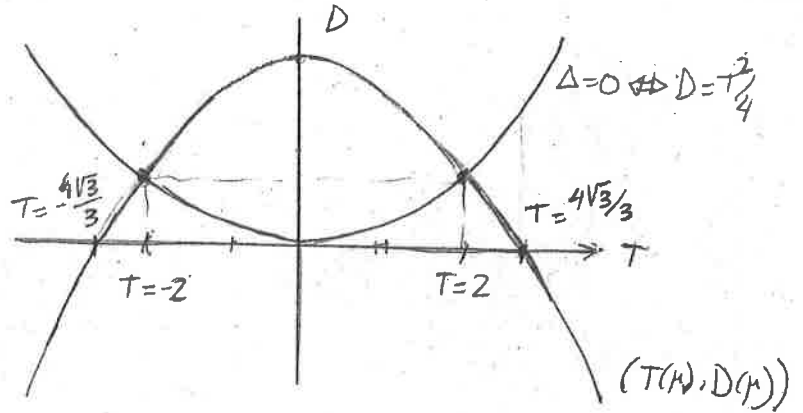
$A = \begin{pmatrix} 0 & 4-3\mu^2 \\ -1 & 2\mu \end{pmatrix}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Solució

$D(\mu) := \det A(\mu) = 4 - 3\mu^2$

$T(\mu) := \text{Tr } A(\mu) = 2\mu$

d'on:  $D(\mu) = 4 - 3 \cdot \left(\frac{T(\mu)}{2}\right)^2$   
 $= 4 - \frac{3}{4} T^2(\mu)$

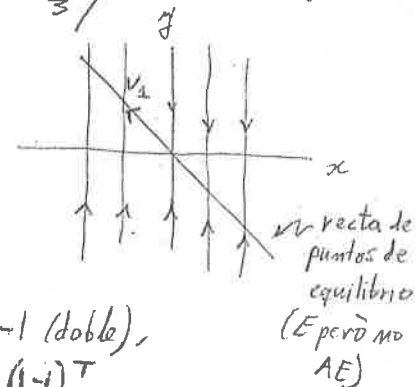


escriurem os:  $D = \frac{3}{4} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - T\right) \left(\frac{4}{\sqrt{3}} + T\right)$  i per tant:

$T(\mu) = 2\mu < -\frac{4\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \mu < -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ : SELLA (I)

$T(\mu) = 2\mu = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \mu = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ :  $A \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -\frac{4\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$   $\det A = 0$  sistema degenerado

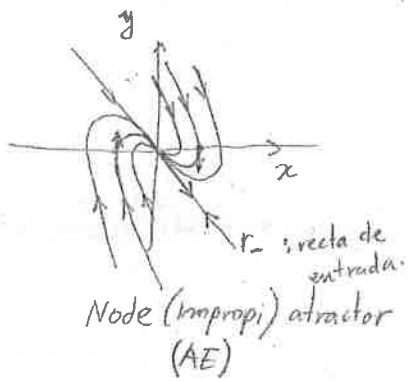
VAPs:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -\frac{4\sqrt{3}}{2}$   
 VEPs:  $v_1 = \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, 1\right)^T$ ,  $v_2 = (0, 1)^T$



$-\frac{4\sqrt{3}}{3} < T(\mu) = 2\mu < -2 \Leftrightarrow -\frac{2\sqrt{3}}{3} < \mu < -2$  NODE (PROPI) AE.

$T(\mu) = 2\mu = -2 \Leftrightarrow \mu = -1$ :  $A(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  VAPs:  $\lambda = -1$  (doble), VEP:  $v = (1, -1)^T$

per tant (como la matriz NO es diagonal) y el VAP doble es negativo

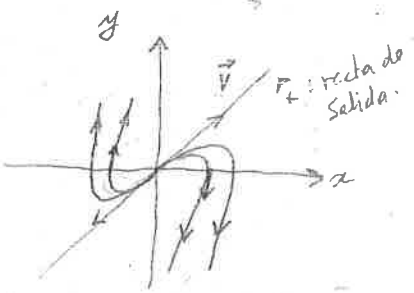


$$A(-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A(-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A(-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \dots$$

- $-2 < T(\mu) = 2\mu < 0 \iff -1 < \mu < 0$  : FOCUS ATRACTOR (AE)
- $T(\mu) = 2\mu = 0 \iff \mu = 0$  : CENTRE (E però no AE)
- $0 < T(\mu) = 2\mu < 2 \iff 0 < \mu < 1$  : FOCO REPULSOR (I)
- $T(\mu) = 2\mu = 2 \iff \mu = 1$  :  $A(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  VAF:  $\lambda = 1$  (doble)  
VEP:  $v = (1, 1)^T$

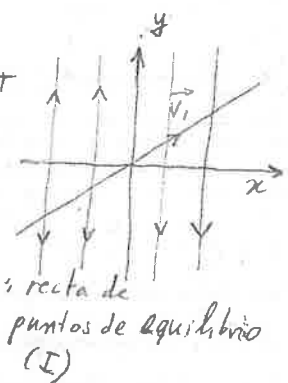


VAF doble (multiplicitat 2), positiu y matriu no diagonal, Per tant se trata de un node (impropi) repulsor (I).  
Ver figura

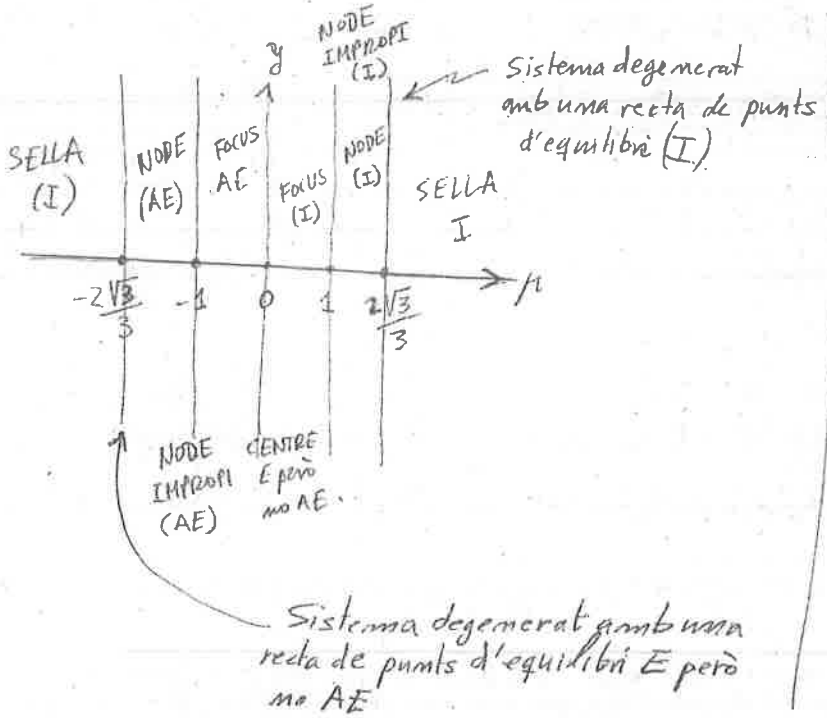
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $2 < T(\mu) = 2\mu < \frac{4\sqrt{3}}{3} \iff 1 < \mu < \frac{2\sqrt{3}}{3}$  : NODO REPULSOR (I)

- $T(\mu) = 2\mu = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  :  $A(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$  ;  $\lambda_1 = 0, v_1 = (\frac{4\sqrt{3}}{3}, 1)^T$   
 $\lambda_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}, v_2 = (0, 1)^T$   
 $\det A = 0$  ; Sistema degenerat



- $T(\mu) = 2\mu > \frac{4\sqrt{3}}{3} \iff \mu = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  : SELLA (I).



Veiem ds canvis d'estabilitat es produeixen per:

$$\mu = -2\sqrt{3}/3 \text{ i } \mu = 0.$$



20. (Estudio de un SL 3D con VAs reales) Calcular la solución general y dibujar el croquis detallado del sistema lineal

$$\begin{aligned} x' &= -2x + y + z \\ y' &= -y + 4z \\ z' &= z \end{aligned}$$

Solución:

VAs	VEPs
$\lambda_1 = -2$	$\text{Nuc}(A + 2I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\vec{v}_1 = (1, 0, 0)^T]$
$\lambda_2 = -1$	$\text{Nuc}(A + I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\vec{v}_2 = (-1, 1, 0)^T]$
$\lambda_3 = 1$	$\text{Nuc}(A - I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\vec{v}_3 = (1, 2, 1)^T]$

Conjunto Fundamental de Soluciones:

$$\vec{x}_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

rectas de entrada:

$$r_1 \equiv \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y=0, z=0 \}, r_2 \equiv \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0, z=0 \}$$

rectas de salida:

$$r_3 \equiv \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x-z=0, y-z=0 \}$$

Solución general:

$$x(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-t} + c_3 e^t \\ c_2 e^{-t} + 2c_3 e^t \\ c_3 e^t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

con:  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  ctes. arbitrarias (libres).

Retrato de fase: z



Figura. Sólo se representa el croquis de las trayectorias en el plano (x,y).

Planos Invariantes:

- $\Pi_1 \equiv \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z=0 \}$ : Corresponde a un modo propio atractor con rectas de entrada  $r_1, r_2$
- $\Pi_2 \equiv \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -y+z=0 \}$ : Corresponde a una silla con rectas de entrada y salida  $r_1$  y  $r_3$  respect.

- $\Pi_3 \equiv \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-3z \}$ : Silla con rectas de entrada u salida  $r_2$  u  $r_3$  respect.

21. (Croquis de un SI con VAPs complejos) Dibujar un croquis del sistema asociado a la matriz (18)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Indicación: Los VAPs de esta matriz son  $\lambda_{1,2} = \pm i$  y  $\lambda_3 = 2$ .

Solución

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2+1)$$

de donde los VAPs resultan  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_{2,3} = \pm i$

VEPs

$$\lambda_1 = 2: \text{Nuc}(A - 2I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= [\vec{V}_1 = (0, 1, -1)^T]$$

$$\lambda_2 = i: \text{Nuc}(A - iI) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1-i & -1 \\ -1 & -1 & 1-i \end{pmatrix} = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1-i & -1 \\ 0 & -2+i & 2-i \end{pmatrix} = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1-i/2 & -1+i/2 \\ 0 & -2+i & 2-i \end{pmatrix}$$

$$= \text{Nuc} \begin{pmatrix} -i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1-i/2 & -1+i/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\vec{W} = (i, -1, -1)^T = \underbrace{(0, -1, -1)^T}_{\vec{u}} + i \underbrace{(1, 0, 0)^T}_{\vec{v}}]$$

$$\vec{x}_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2(t) = \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \vec{x}_3(t) = \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

Solución general

$$\vec{x}_g(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \sin t + c_3 \cos t \\ c_1 e^{2t} - c_2 \cos t - c_3 \sin t \\ -c_1 e^{2t} - c_2 \cos t - c_3 \sin t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  arbitrarios (Núms)

Sentit de gir de les solucions:

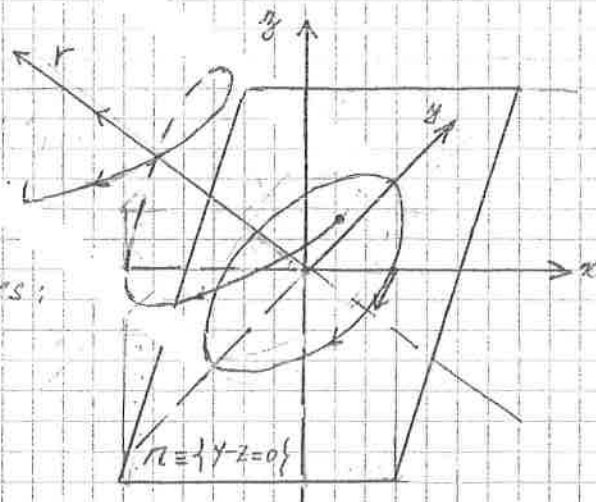
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos un plano de giros invariables:

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y - z = 0\},$$

y una recta de salida:

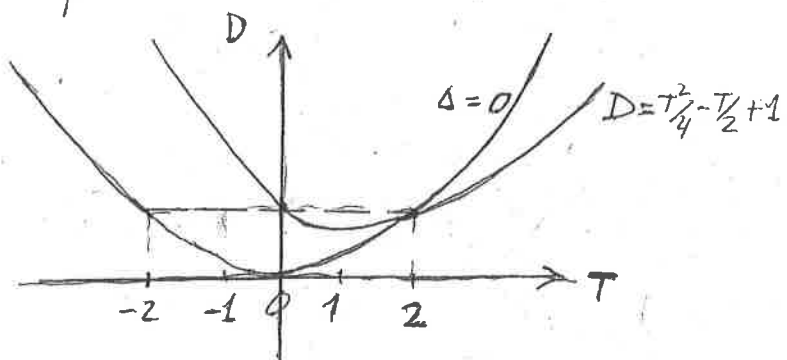
$$r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0, y + z = 0\}$$



18. (Un diagrama de bifurcaciones) Determinar el diagrama de bifurcaciones correspondiente a la estabilidad y clasificación del sistema lineal asociado a la matriz

$A = \begin{pmatrix} \mu & \mu-1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$ ;  $T(\mu) = 2\mu$   
 $D(\mu) = \mu^2 - \mu + 1 = (\mu - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(T-1)^2 + \frac{3}{4}$       i'on:  $D(T) = \frac{T^2}{4} - \frac{T}{2} + 1$

$\frac{1}{4}(T-1)^2 + \frac{3}{4} = \frac{T^2}{4} - \frac{T}{2} + 1 = \frac{T^2}{4} \Leftrightarrow T=2, D=1$  (punt de tall entre  $(T(\mu), D(\mu))$  i la paràbola  $\Delta = T^2 - 4D = 0$  del diagrama d'estabilitat al pla  $(T, D)$ ).



Veurem doncs que

- $T = 2\mu < 0 \Leftrightarrow \mu < 0$ : el sistema és un Focus Atractor (AE)
- $T = 2\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$ : " " " " Centre. (E però no AE)
- $0 < T = 2\mu < 2 \Leftrightarrow 0 < \mu < 1$ : el sistema és un Focus Repulsor (I)
- $T = 2\mu = 2 \Leftrightarrow \mu = 1$  i en aquest cas  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ : matriu NO diagonal amb VAP  $\lambda = 1$  de multiplicitat 2. Per tant el sistema és un Node impropri repulsor (I)
- $T = 2\mu > 2 \Leftrightarrow \mu > 1$ : el sistema és un node propi repulsor (I)

Diagrama de bifurcacions:

FOCUS TRACTOR (AE)	FOCUS REPULSOR (I)	NODE PROPI REPULSOR (I)
$T < 0$	$T > 0$	$T = 2\mu > 2 (> 0)$
$D = \frac{1}{4}(T-1)^2 + \frac{3}{4} > 0$	$D > 0$	$D > 0$
$\Delta = T^2 - 4D(T)$ $= T^2 - T^2 + 2T - 4$ $= 2T - 4 < 0$	$\Delta = 2T - 4 < 0$	$\Delta = T^2 - 4D(T)$ $= 2T - 4 > 0$
	$T = 0$ $D = 1 > 0$ CENTRE. (E però no AE)	$T = 2 > 0$ $D = 1 > 0$ $\Delta = 0$ amb $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ NODE IMPROPI REPULSOR.

22. Croquis SL 2D con un parámetro. Consideremos el sistema lineal  $\vec{x}' = A\vec{x}$ , (20)  
donde

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Calcular su estabilidad y clasificarlo en función de  $\mu$ .
- Dibujar un croquis de sus trayectorias en el plano  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  para cada uno de los siguientes valores del parámetro:  $\mu = 0$ ,  $\mu = 1$  y  $\mu = 2$ .
  - En uno de los tres casos anteriores hay una recta de entrada y otra de salida. En ese caso, ¿Es posible que una trayectoria que empieza en el primer cuadrante llegue al tercer cuadrante? ¿Por qué?
  - En otro caso todas las trayectorias son periódicas, pero ¿de qué período?
  - En el caso restante el sistema es degenerado, pero ¿es inestable? ¿Por qué?

Solución

a)  $T(\mu) = 0$

$$D(\mu) = 1 - \mu^2$$

Llevos término un centro por  $-1 < \mu < 1$ , una silla por  $|\mu| > 1$  i és degenerat per  $\mu = \pm 1$ .  
Miremos aquest últim cas,

$\mu = 1$ : agafem  $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \text{Nuc} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Per exemple:  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Llevos el CFS ve donat per:  $\vec{x}_1(t) = \vec{u} + t\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -t \end{pmatrix}$

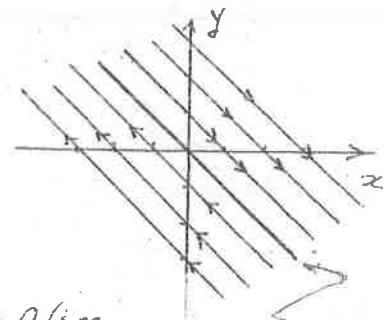
$$\vec{x}_2(t) = \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si busquem la solució que passa pel punt  $(x_0, y_0)$  en l'instant  $t = 0$ :

$$\vec{x}_y(t) = c_1 \vec{x}_1(t) + c_2 \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} c_1 t + c_1 + c_2 \\ -c_1 t - c_2 \end{pmatrix}; \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 = x_0 + y_0 \\ c_2 = -y_0 \end{matrix}$$

aquesta resulta:  $x(t) = (x_0 + y_0)t + x_0$   
 $y(t) = -(x_0 + y_0)t + y_0$

i les òrbites corresponents són:  $y = -x + y_0 + x_0$   
(Veure figura).



$r$ : recta de punts d'equilibri  
 $r = \{y = -x\}$

El sistema és inestable (I) ja que tenim un VAP = 0 (i per tant amb part real zero) no semi-simple (veure el Teorema corresponent als apunts, pàg. 10).

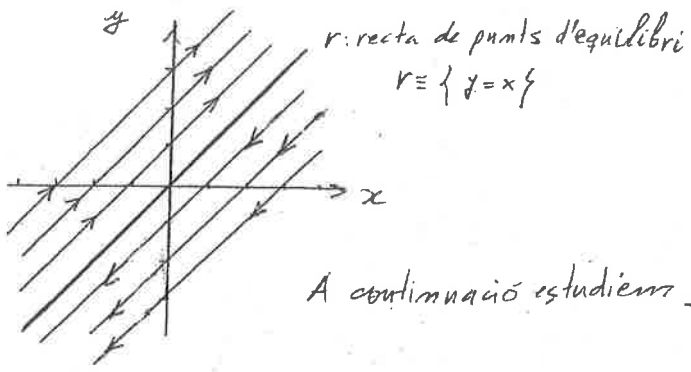
$\mu = -1$ :  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . També tenim un VAP = 0 (i per tant, amb part real zero) no semi-simple, llavors el sistema corresponent a aquest valor del paràmetre és inestable. (I)

La solució que passa pel punt  $(x_0, y_0)$  en l'instant  $t=0$  ve donada per:

$$x(t) = (y_0 - x_0)t + x_0$$

$$y(t) = (y_0 - x_0)t + y_0$$

con lo que la equació de la òrbita correspondiente resulta  $y = x + y_0 - x_0$  (ver figura)



A continuació estudiem els centres:  $|\mu| < 1$ :

$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix}$  amb  $|\mu| < 1$ . Els VAPs són de la forma  $\lambda_{\pm} = \pm i \sqrt{1-\mu^2}$  ( $\alpha=0, \beta=\sqrt{1-\mu^2} > 0$ )

$$\lambda_+ = i \sqrt{1-\mu^2}: \text{Nac} \begin{pmatrix} \mu - i \sqrt{1-\mu^2} & 1 \\ -1 & -\mu - i \sqrt{1-\mu^2} \end{pmatrix} = [ \vec{w} = (1, -\mu + i \sqrt{1-\mu^2})^T ] = [ \vec{u} + i \vec{v} = (1, -\mu)^T + i(0, \sqrt{1-\mu^2})^T ]$$

Un conjunt fonamental de solucions:

$$\vec{x}_1(t) = \cos(\sqrt{1-\mu^2}t) \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu \end{pmatrix} - \sin(\sqrt{1-\mu^2}t) \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1-\mu^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{1-\mu^2}t) \\ -\mu \cos(\sqrt{1-\mu^2}t) - \sqrt{1-\mu^2} \sin(\sqrt{1-\mu^2}t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2(t) = \sin(\sqrt{1-\mu^2}t) \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu \end{pmatrix} + \cos(\sqrt{1-\mu^2}t) \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1-\mu^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{1-\mu^2}t) \\ -\mu \sin(\sqrt{1-\mu^2}t) + \sqrt{1-\mu^2} \cos(\sqrt{1-\mu^2}t) \end{pmatrix}$$

Solució general

$$x_g(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos(\sqrt{1-\mu^2}t) + c_2 \sin(\sqrt{1-\mu^2}t) \\ -\mu(c_1 \cos(\sqrt{1-\mu^2}t) - c_2 \sin(\sqrt{1-\mu^2}t)) - \sqrt{1-\mu^2}(c_1 \sin(\sqrt{1-\mu^2}t) - c_2 \cos(\sqrt{1-\mu^2}t)) \end{pmatrix}$$

Remarquem que el període de les solucions és:  $p = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\mu^2}}$ . A continuació estudiarem l'equació de les òrbites:  $\frac{dy}{dx} = \frac{-x-\mu y}{\mu x+y} \Leftrightarrow (x+\mu y)dx + (\mu x+y)dy = 0$  i que és una EDO exacta.

En efecte: si  $P(x,y) = x + \mu y$  i  $Q(x,y) = \mu x + y$ :  $\frac{\partial P}{\partial y} = \mu = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . Llavors les òrbites vindran donades per la família de solucions implícites:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x + \mu y \Leftrightarrow U(x,y) = \frac{x^2}{2} + \mu xy + \varphi(y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \mu x + y = \mu x + y, \Leftrightarrow \varphi'(y) = y$$

i podem agafar  $\varphi(y) = \frac{y^2}{2}$ , d'on tenim la família de solucions (expressada en forma implícita)

$$U(x,y) = x^2/2 + \mu xy + y^2/2 = 1/2 (x^2 + 2\mu xy + y^2) = 1/2 (x,y) \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Signi  $M := \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$ :  $P_M(t) = t^2 - 2t + 1 - \mu^2$ ;  $\lambda_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1 - \mu^2)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{\mu^2}}{2} = 1 \pm |\mu|$   
 $= 1 \pm |\mu|$ ,

d'on agafem com VAPs  $\lambda_1 = 1 + \mu$ ,  $\lambda_2 = 1 - \mu$  amb, recordem,  $|\mu| < 1$ .

$\lambda_1 = 1 + \mu$ :  $\text{Nuc}(M - (1 + \mu)I_2) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} = [\vec{v}_1 = (1, 1)^T / \sqrt{2}]$

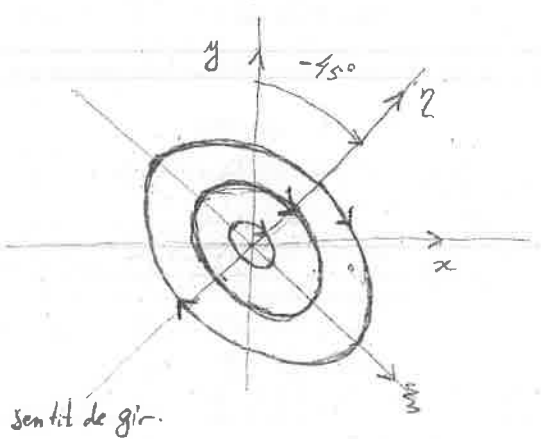
$\lambda_2 = 1 - \mu$ :  $\text{Nuc}(M - (1 - \mu)I_2) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} \mu & \mu \\ \mu & \mu \end{pmatrix} = [\vec{v}_2 = (1, -1)^T / \sqrt{2}]$

$S = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $S^T S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$  i  $\det S = 1$

Signi el canvi:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ . Llavors:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (x,y) M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} (\xi, \eta) S^T M S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{4} (\xi, \eta) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} (\xi, \eta) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \mu & 1 + \mu \\ -1 + \mu & \mu + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{4} (\xi, \eta) \begin{pmatrix} 2 - 2\mu & 0 \\ 0 & 2 + 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (1 - \mu) \xi^2 + \frac{1}{2} (1 + \mu) \eta^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad c > 0 \text{ (ja que } -1 < \mu < 1). \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \frac{\xi^2}{\frac{2c}{1-\mu}} + \frac{\eta^2}{\frac{2c}{1+\mu}} = 1$ : Veiem que les òrbites són el·lipses de semieixos  $a = \sqrt{\frac{2c}{1-\mu}}$ ,  $b = \sqrt{\frac{2c}{1+\mu}}$ ,  $c > 0$ ,  $-1 < \mu < 1$  i de manera que el semieix major de cada òrbita forma un angle  $\theta$  amb l'eix horitzontal, on  $0 = \theta \leq 2\pi$ , amb  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  d'on  $\theta = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$



D'altra banda les solucions giren en sentit horari,  
 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix}$  i  $c = -1 < 0$  (Veure problema 15).

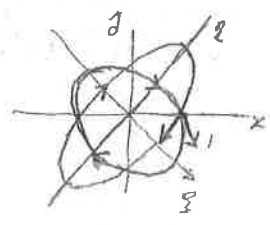
Mirem ara el comportament del sistema per  $|\mu| > 1$ .

$P_A(t) = t^2 - \mu^2 + 1$ ; d'on:  $\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{\mu^2 - 1} \in \mathbb{R}$ ; i llavors:  
 $-\sqrt{\mu^2 - 1} = \lambda_- < 0 < \lambda_+ = +\sqrt{\mu^2 - 1}$  i els corresponents VEPs són,

$\lambda_+ = \sqrt{\mu^2 - 1}$ ,  $\text{Nuc}(A - \sqrt{\mu^2 - 1}I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} \mu - \sqrt{\mu^2 - 1} & 1 \\ -1 & -\mu - \sqrt{\mu^2 - 1} \end{pmatrix}$   
 $= [\vec{v}_+ = (-1, \mu - \sqrt{\mu^2 - 1})^T]$

$\lambda_- = -\sqrt{\mu^2 - 1}$ ,  $\text{Nuc}(A + \sqrt{\mu^2 - 1}I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} \mu + \sqrt{\mu^2 - 1} & 1 \\ -1 & -\mu + \sqrt{\mu^2 - 1} \end{pmatrix}$   
 $= [\vec{v}_- = (-1, \mu + \sqrt{\mu^2 - 1})^T]$ .

$\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ -1 \end{pmatrix}$ ;  $-1 < \mu < 1$



llavors tenim el CFS següent

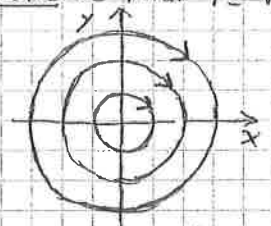
$$x_1(t) = e^{\sqrt{\mu^2-1}t} \begin{pmatrix} -1 \\ \mu - \sqrt{\mu^2-1} \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{-\sqrt{\mu^2-1}t} \begin{pmatrix} -1 \\ \mu + \sqrt{\mu^2-1} \end{pmatrix}$$

i veiem doncs que el sistema, per valors de  $\mu$  amb  $|\mu| > 1$  és una sella amb rectes d'entrada i de sortida donades respectivament per

$$r_- = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -(\mu + \sqrt{\mu^2-1})x \right\} \quad (\text{recta d'entrada})$$

$$r_+ = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -(\mu - \sqrt{\mu^2-1})x \right\} \quad (\text{recta de sortida}).$$

B)  $\mu = 0$ . D'acord amb l'apartat (a) les òrbites són el·lipsoïdes de semieixos  $a = \sqrt{\frac{2c}{1-\mu}}$  i  $b = \sqrt{\frac{2c}{1+\mu}}$ . És a dir: circumferències de radi  $r = \sqrt{2c}$ , recorregudes en sentit horari, amb període  $p = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\mu^2}}$ .



$\mu = 1$ . D'acord amb l'apartat (a), per a aquest valor del paràmetre el sistema és degenerat i en aquest cas és inestable (I). Les seves òrbites són rectes paral·leles a la recta de punts d'equilibri  $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$  (Veure figura).



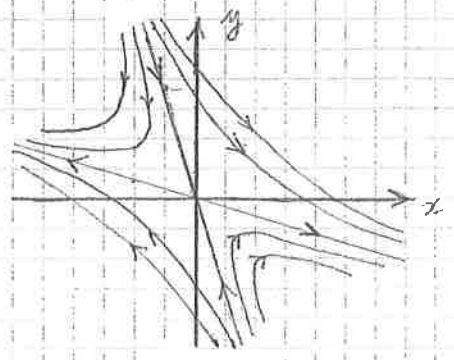
$r$ : recta de punts d'equilibri  
 $r = \{y = x\}$

$\mu = 2$ . Per a aquest valor de  $\mu$  el sistema és una sella, amb les rectes d'entrada i sortida:

$$r_- = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -(2 + \sqrt{3})x \right\} \quad \text{recta d'entrada}$$

$$r_+ = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = (\sqrt{3} - 2)x \right\} \quad \text{recta de sortida}$$

(Veure figura)







Sistemas no lineales. Ver apuntes pag.

Consideramos SNL autónomos de la forma  $\vec{x}' = F(\vec{x})$ , con  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^1$ , con  $U \subset \mathbb{R}^n$ .

Recordamos:

- El campo es tangente a cada punto de la trayectoria.
- Por cada posición inicial  $x_0 \in U$  pasa una única órbita del sistema (consecuencia del teorema de  $\exists!$ )

Estabilidad de puntos de equilibrio:  $\vec{x}_0 \in U$  es un punto de equilibrio del sistema  $\vec{x}' = F(\vec{x})$  cuando la velocidad de ese punto es cero, i.e.:  $\vec{x}_0 \in U$  punto de equilibrio de (8)  $\Leftrightarrow F(\vec{x}_0) = 0$ .

Por otro lado, si  $\vec{x}_0$  es un punto de equilibrio de (8), entonces la función constante  $\vec{x}(t) \equiv \vec{x}_0$  ( $\Leftrightarrow \vec{x}(t) = \vec{x}_0 \forall t$ ) es solución. En efecto  $\vec{x}'(t) = 0 = \vec{F}(\vec{x}(t)) = \vec{F}(\vec{x}_0)$ .

Queremos estudiar el comportamiento cercano a los puntos de equilibrio del SNL (8).

Def.  $x_0 \in U$  punto de equilibrio del SNL  $\vec{x}' = F(\vec{x})$ . Entonces  $\vec{x}_0$  es:

- Estable  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.q.  $\|x(0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_0\| < \epsilon \forall t \geq 0$
- Instable: cuando NO es estable.
- Atractor o Asintóticamente Estable (AE): cuando es estable (E) y además  $\exists \delta_0 > 0$  t.q.:  $\|x(0) - x_0\| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$ .
- Repulsor  $\Leftrightarrow$  es atractor para el sistema  $\vec{x}' = -\vec{F}(\vec{x})$ .

Estabilidad de puntos de equilibrio por linealización.

$\vec{x}_0 \in U$  punto de equilibrio del SNL  $\vec{x}' = \vec{F}(\vec{x})$ . Entonces llamamos linealización del sistema (8) en  $\vec{x}_0$  al sistema lineal  $\vec{x}' = D\vec{F}(\vec{x}_0)\vec{x}$ , donde

$D\vec{F}(\vec{x}_0) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n} := A \equiv$  matriz del sistema linealizado.

**Teorema** (Apuntes pág. 15). Si la matriz del sistema linealizado  $A = DF(\vec{x}_0)$  en el punto de equilibrio  $\vec{x}_0$ :

- ▣ Tiene algún VAP con parte real positiva, entonces  $\vec{x}_0$  es un punto de equilibrio (I) del SNL (&)
- ▣ Si todos los VAPs de  $A$  tienen parte real negativa/positiva: entonces  $\vec{x}_0$  es un punto de equilibrio atractor/repulsor del SNL (&).
- ▣ Otros casos: la linealización no decide la estabilidad

**Observación** (Ver Apuntes p. 16)

La existencia de VAPs con parte real no nula no impide que podamos decidir la estabilidad por linealización. Por ejemplo, si  $A$  corresponde a la linealización de un SNL y tiene un valor propio nulo y un valor propio positivo, entonces el punto de equilibrio es inestable.

**Teorema [Hartman-Grobman]**. Si el sistema linealizado correspondiente a un punto de equilibrio de un SNL NO tiene VAPs con parte real nula, entonces el sistema linealizado y el SNL son cualitativamente similares en un entorno del punto de equilibrio. (Apuntes pág. 16)

En el caso de un SL 2D homogéneo a coefs. cnts

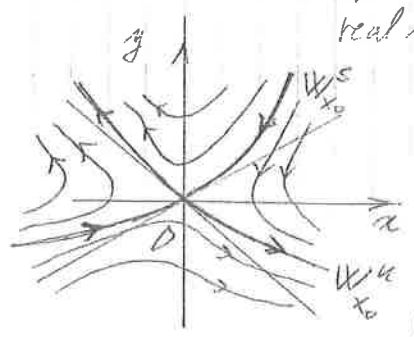
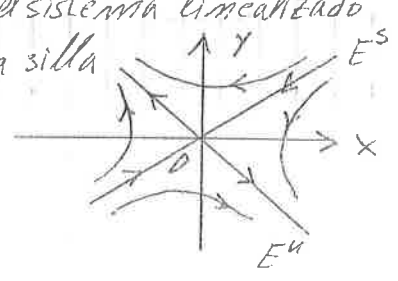
Silla ↔ Las trayectorias del SNL 2D autónomo son cualitativamente idénticas a las del SL homogéneo a coefs. constantes.

Nodo ↔

Foco ↔

Centros  
Sist. Degenerados (Vaps con parte real nula) ↔ Para  $m=1$  (sistemas 2D) estos son los únicos casos en los que la linealización no decide la estabilidad.

Por ej. Si el sistema linealizado es una silla



$W_{x_0}^s$ : Curva Invariante de entrada (tangente a  $E_{x_0}^s$ ).  
 $W_{x_0}^u$ : Curva Invariante de salida

23) (Método de linealización) Calcular los 4 puntos de equilibrio del sistema 2D cuadrático

$$x' = xy + 12$$

$$y' = x^2 + y^2 - 25$$

Estudiar por el método de linealización la estabilidad del sistema en cada punto de equilibrio. ¿En qué zonas del plano (x,y) se expanden áreas? ¿Y en cuáles se contraen?

Solución

$$\begin{aligned} xy + 12 = 0 &\iff 2xy = -24 &\iff (x+y)^2 = 1 &\iff x+y = \pm 1 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 & &x^2 + y^2 = 25 & &(x-y)^2 = 49 &\iff x-y = \pm 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A: \quad x+y &= 1 \\ \quad x-y &= 7 \\ \hline 2x &= 8 \iff x=4, y=-3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B: \quad x+y &= 1 \\ \quad x-y &= -7 \\ \hline 2x &= -6 \iff x=-3, y=4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C: \quad x+y &= -1 \\ \quad x-y &= 7 \\ \hline 2x &= 6 \iff x=3, y=-4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D: \quad x+y &= -1 \\ \quad x-y &= -7 \\ \hline 2x &= -8 \iff x=-4, y=3 \end{aligned}$$

De donde vemos que el sistema tiene 4 puntos de equilibrio  $A \equiv (4, -3)$ ,  $B \equiv (-3, 4)$ ,  $C \equiv (3, -4)$ ,  $D \equiv (-4, 3)$ .

Si  $\vec{F}(x,y) = (xy+12, x^2+y^2-25)^T$  es el campo de velocidades (o campo de direcciones o, simplemente, el campo), entonces, la matriz de la linealización del sistema en el punto  $(x_0, y_0)$  viene dada por:  $M = DF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} y_0 & x_0 \\ 2x_0 & 2y_0 \end{pmatrix}$ .

A continuación estudiamos la estabilidad del sistema linealizado (SL) en los puntos de equilibrio A, B, C y D

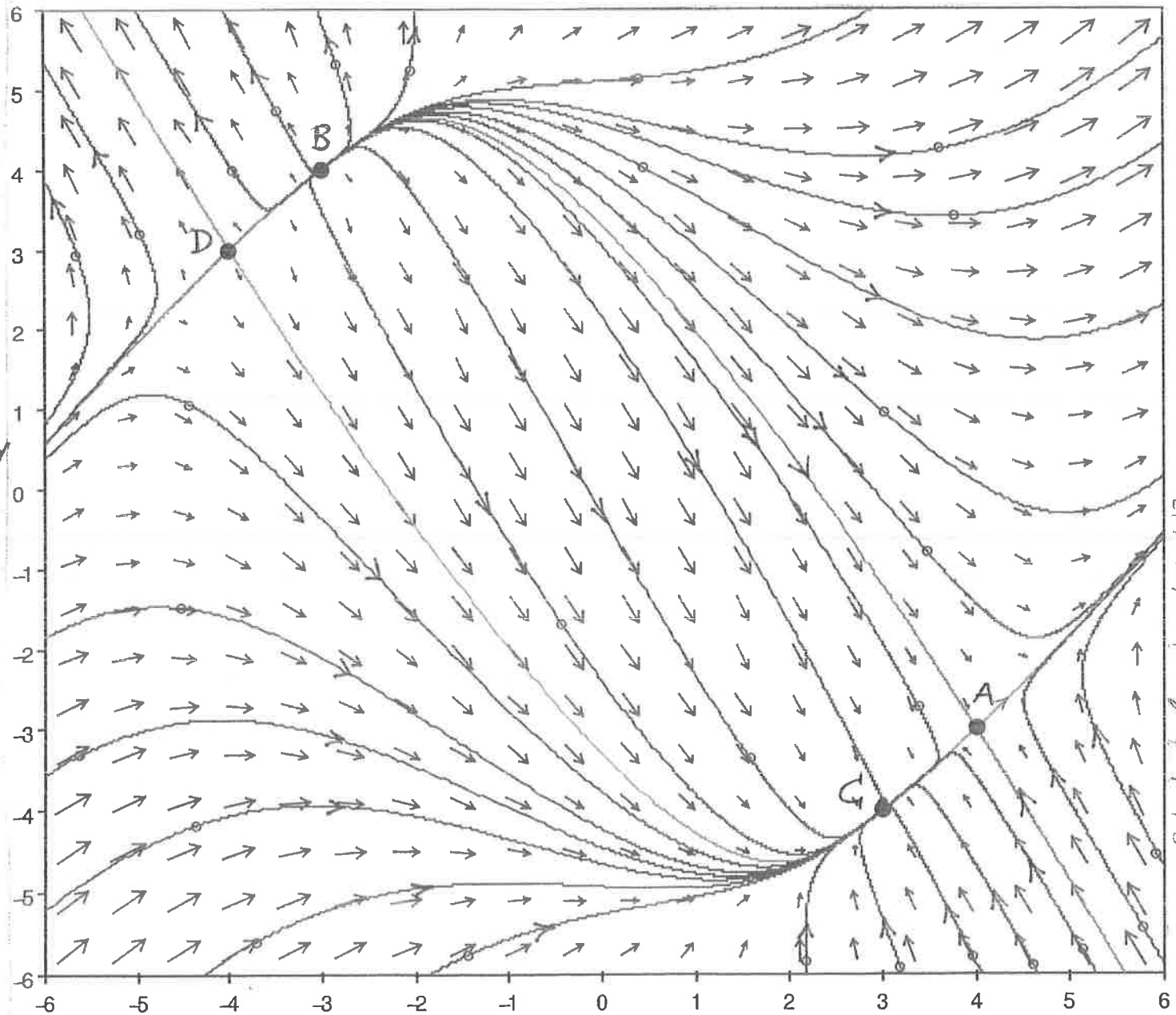
■  $A \equiv (4, -3)$ ,  $M = DF(4, -3) = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ ,  $\det M = 18 - 32 = -14 < 0$ , El sistema linealizado (SL) es una silla y entonces el punto de equilibrio  $A \equiv (4, -3)$  es una silla moimed con curvas invariantes de entrada y de salida (ver comentario sobre el Teorema

de Hartmann-Grobman (pág 16 de los Apuntes de la Asignatura). Por tanto el punto  $A \equiv (4, -3)$  es un punto de equilibrio inestable (I) del SNL original.

■  $B \equiv (-3, 4)$ :  $M = DF(-3, 4) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ ,  $\det M = 32 - 18 = 14 > 0$ ,  $\text{Tr} M = 12 > 0$ ,  $\Delta = (\text{Tr} M)^2 - 4 \det M = 144 - 56 = 88 > 0$ . El SL es un modo repulsor, luego  $B \equiv (-3, 4)$  es un punto de equilibrio repulsor (I) del SNL.

■  $C \equiv (3, -4)$ :  $M = DF(3, -4) = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$ ,  $\det M = 32 - 18 = 14$ ,  $\text{Tr} M = -12$ ,  $\Delta = 144 - 56 = 88 > 0$ . Entonces el SL es un modo atractor y, por tanto  $C \equiv (3, -4)$  es un punto de equilibrio atractor (AE) del SNL.

■  $D \equiv (-4, 3)$ :  $M = DF(-4, 3) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $\det M = 18 - 32 = -14 < 0$ ; el SL es una silla. Entonces el punto  $D \equiv (-4, 3)$  es una silla no lineal (I) del SNL.



Retrato de fases de  $x' = xy + 12$   
 $y' = x^2 + y^2 - 2.5$

Expansión y contracción en el plano de fase:

$$\text{div } \vec{F}(x,y) = \text{div}(xy+12, x^2+y^2-25) = y+2y = 3y; \text{ luego:}$$

- El área se contrae en  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$  (semiplano inferior)
  - El área se expande en  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  (semiplano superior)
- (Ver el Teorema de la página 19 de los Apuntes de la Asignatura).

28. (Sistema de Lorenz: Wikipedia y Youtube). Consideramos el sistema de Lorenz

$$\begin{aligned} x_1' &= \sigma(x_2 - x_1) \\ x_2' &= x_1(\rho - x_3) - x_2 \\ x_3' &= x_1x_2 - \beta x_3 \end{aligned}$$

donde  $\sigma, \rho, \beta > 0$  son parámetros del sistema. Para simplificar supondremos que  $\rho > 1$ .

- Calcular sus tres puntos de equilibrio
- Estudiar la estabilidad del sistema de Lorenz entorno al origen
- ¿Qué aspecto tienen sus trayectorias cerca del origen?
- Este sistema ¿expande o contrae volúmenes?

Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sigma(x_2 - x_1) &= 0 \iff x_2 = x_1 \\ x_1(\rho - x_3) - x_2 &= 0 \iff \rho x_1 - x_1 x_3 - x_1 = x_1(\rho - x_3 - 1) = 0 \iff x_1 = 0 = x_2 \\ & \qquad \qquad \qquad x_3 = \rho - 1 \\ x_1 x_2 - \beta x_3 &= x_1^2 - \beta x_3 = 0 \iff x_1 = \pm \sqrt{\beta x_3} = x_2 \end{aligned}$$

El sistema, aparte del origen  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$  tiene también los 3 puntos de equilibrio siguientes

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= (\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1) \\ (x_1, x_2, x_3) &= (-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1) \\ (x_1, x_2, x_3) &= (0, 0, \rho-1), \text{ con } \rho > 1. \end{aligned}$$

b) Matriz del sistema linealizado en un entorno del punto  $(x_1, x_2, x_3) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$

$$M = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - x_3^0 & -1 & -x_1^0 \\ x_2^0 & x_2^0 & -\beta \end{pmatrix}$$

$$\text{En } (x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0, 0, 0):$$

$$M = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

El polinomio característico para este punto, resulta pues:  $p(t) = [t^2 + (1+\sigma)t + \sigma(1-\rho)](t+\beta)$ ; de donde los correspondientes VAPs son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma(\rho-1)}}{2}, \quad \lambda_3 = -\beta$$

$\lambda_1 = \lambda_+ > 0$ ,  $\lambda_2 = \lambda_-$ ,  $\lambda_3 < 0$  el origen es inestable pero no repulsor

c) El origen es una silla no lineal. Dos de las direcciones propias son de entrada y una es de salida. Estas direcciones son tangentes a las respectivas curvas invariantes. En particular una de estas curvas invariantes coincide con el eje  $x_3$ . Esto es,  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 = 0 = x_2$  es una curva invariante de entrada.

$$d) \vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (\sigma(x_2 - x_1), x_2(\rho - x_3) - x_2, x_1 x_2 - \beta x_3)^T$$

$\text{div } \vec{F}(x_1, x_2, x_3) = -1 - \sigma - \beta < 0 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$  El sistema contrae volúmenes en todo  $\mathbb{R}^3$ .

# Método de Liapunov (Ver Apuntes de la asignatura p17)

Definición.  $\vec{x}' = \vec{F}(\vec{x})$  SNL dado. Definimos la

Derivada temporal de la función  $V$  respecto a un campo  $\vec{F}$  como: <sup>(1)</sup>

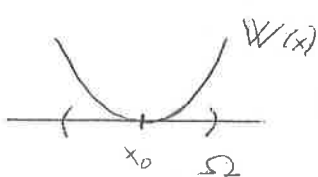
$$W(x) = (L_F V)(x) := \langle \nabla V(x), \vec{F}(x) \rangle$$

Diremos que  $V(x)$  es una cantidad conservada del SNL  $\vec{x}' = \vec{F}(\vec{x})$ , cuando su derivada temporal es idénticamente cero  $W(x) \equiv 0$  ( $\Leftrightarrow W(x) = 0 \forall x \in U$ ). Podemos escribir también  $L_F V = \langle \nabla V, \vec{F} \rangle = 0$ .

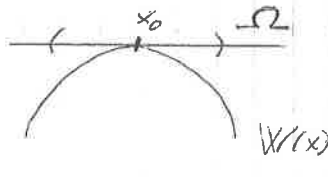
Si  $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))^T$  es una trayectoria del sistema  $\vec{x}' = \vec{F}(\vec{x})$ , entonces la derivada de la función  $t \mapsto V(x(t))$  en el instante  $t$  es precisamente  $W(\vec{x}(t)) = (L_F V)(\vec{x}(t))$ . En efecto, basta con aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} V(\vec{x}(t)) = DV(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}'(t) = \langle \nabla V(\vec{x}(t)), \vec{F}(\vec{x}(t)) \rangle = W(\vec{x}(t))$$

Definición (ver Apuntes).  $W: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U = \bar{U}$  es semi-definida positiva (negativa) en un punto  $x_0$  cuando tiene un mínimo/máximo local en ese punto y además  $W(x_0) = 0$ . Diremos que es definida positiva (negativa) cuando este mínimo/máximo local es estricto.



$W$  (semi) definida positiva.



$W$  (semi) definida negativa.

Notemos que si  $W$  tiene un mínimo (máximo) local en  $x_0$ , entonces existe un entorno  $\Omega \subseteq U$  de  $x_0$  donde  $W(x) \geq 0$  ( $W(x) \leq 0$ ) para todo  $x \in \Omega$ . Este mínimo/máximo

<sup>(1)</sup> Aquí  $\nabla$  denota el operador gradiente. Esto es  $\nabla V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)^T = \text{Grad} V$

Máximo local es estricto si las desigualdades son estrictas (ver más abajo):

Así pues:

- ▣  $W$  semidefinida positiva en  $x_0 \in U$  cuando  $W(x_0) = 0$  y existe un entorno  $\Omega$  de  $x_0$ ,  $x_0 \in \Omega \subseteq U$  t.q.  $W(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$ .
- ▣  $W$  semidefinida negativa en  $x_0 \in U$  cuando ...  $W(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega$
- ▣  $W$  definida positiva en  $x_0 \in U$  cuando ...  $W(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus \{x_0\}$
- ▣  $W$  definida negativa en  $x_0 \in U$  cuando ...  $W(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus \{x_0\}$

Ejemplo

$W(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2$  definida positiva en  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ .

$W(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2$  No es definida positiva en  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$  pero sí que es semidefinida positiva en el origen ( $W(0, x_2, 0) = 0 \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}$ ). Por lo tanto en todo entorno de  $(0, 0, 0)$  existen puntos diferentes del origen donde la función vale cero, luego NO es definida positiva pero sí semidefinida positiva.

Teorema de Liapunov (Ver apuntes de la asignatura)

$x_0$  punto de equilibrio del sistema  $\vec{x}' = F(\vec{x})$ ,

$V$  función que tiene un mínimo local estricto en  $x_0$  y sea  $W(x) = \langle \nabla V(\vec{x}), \vec{F}(\vec{x}) \rangle$  su derivada temporal. Entonces:

1.  $W(x)$  definida positiva/negativa en  $x_0$ , entonces  $x_0$  es atractor/repulsor.
2.  $W(x)$  semidefinida negativa en  $x_0$ , entonces  $x_0$  es un punto de equilibrio estable (E)
3.  $W(x)$  semidefinida positiva en  $x_0$  entonces  $x_0$  no es atractor.
4.  $W(x)$  semidefinida positiva/negativa en  $x_0$  y ninguna trayectoria (salvo la trayectoria constante  $\vec{x}(t) \equiv \vec{x}_0$ ) está contenida en el conjunto de nivel  $\{\vec{x} \in U : W(x) = 0\}$ , entonces el punto  $x_0$  es repulsor/atractor.
5. Si  $W(x) \equiv 0$ , entonces el punto de equilibrio  $x_0$  es estable pero no asintóticamente estable.



Definición. Los puntos de equilibrio de los SNL 2D con cantidades conservadas t.g. sus sistemas linealizados son centros, se denominan centros no lineales.

'Todas las trayectorias de los SNL 2D cercanas a un centro no lineal son soluciones periódicas; esto es, 'giran' formando curvas cerradas' (sus órbitas son curvas cerradas). Sabemos que los VALs del sistema linealizado entorno a un centro no lineal son  $\lambda = \pm i\beta, (\beta > 0)$ . Entonces, es posible demostrar que el periodo de las soluciones del SNL tiende a  $2\pi/\beta$  cuando nos acercamos al punto de equilibrio. (Ver apuntes de la asignatura).

Evolución del volumen.

$$\vec{F}: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \mathbb{C}^1, x = (x_1, \dots, x_m), \vec{F} = (f_1, \dots, f_m).$$

Revisemos que definíamos la divergencia del campo vectorial  $\vec{F}$ ,  $\text{div } \vec{F}$ , como:

$$\text{div } \vec{F}(t, \vec{x}) = \sum_{r=1}^m \frac{\partial f_r}{\partial x_r}(t, \vec{x}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, \vec{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(t, \vec{x}) + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(t, \vec{x}).$$

Teorema. En los instantes  $t$  y posiciones  $\vec{x}$  donde el campo tiene divergencia positiva, nula o negativa, el SNL  $\vec{x}' = F(t, \vec{x})$  expande, preserva o contrae (localmente) el volumen respectivamente.

Corolario.  $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo autónomo 2D cuya divergencia nunca es nula, entonces el sistema autónomo  $\vec{x}' = F(\vec{x})$  no puede tener ninguna solución periódica no constante que encierre un dominio contenido en el abierto  $U$ . (Ver apuntes de la asignatura donde, además, se da la demostración).

27) (Estabilidad de una EDO de segundo orden). Consideramos la ecuación

$$x'' + (\mu + 3x^2)x' + x = 0, \quad \mu \geq 0$$

a) Probar que si definimos  $y = x' + \mu x + x^3$ , entonces la ecuación se transforma en el sistema

$$\begin{aligned} x' &= y - \mu x - x^3 \\ y' &= -x \end{aligned}$$

b) Determinar, cuando sea posible, la estabilidad del sistema en el origen por el método de linealización

c) Usando la función  $V(x,y) = (x^2+y^2)/2$ , estudiar la estabilidad del sistema en el origen por el método de Liapunov para  $\mu = 0$ .

d) ¿Qué se puede decir sobre la ecuación original?

Solución.

a)  $x'' + (\mu + 3x^2)x' + x = -\frac{d}{dx}(x' + \mu x + x^3) + x = 0 \iff y' = -x$

donde hemos definido  $y = x' + \mu x + x^3 \iff x' = y - \mu x + x^3$ . Obtenemos de esta manera la 2ª y la 1ª ecuación del sistema respectivamente.

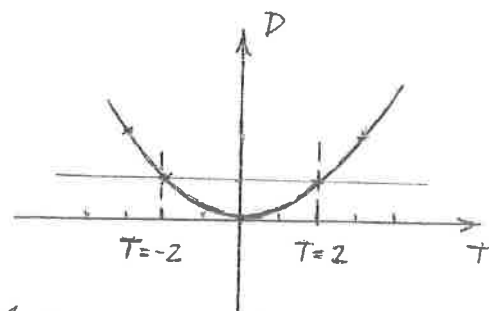
b) Linealización en  $(x,y) = (0,0)$ :

$$\begin{aligned} x' &= -\mu x + y \\ y' &= -x \end{aligned} \implies A_\mu = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad p(\lambda) = \lambda^2 + \mu\lambda + 1$$

$$D = \text{Det } A_\mu = 1 > 0 \quad \forall \mu$$

$$T = \text{Tr } A_\mu = -\mu$$

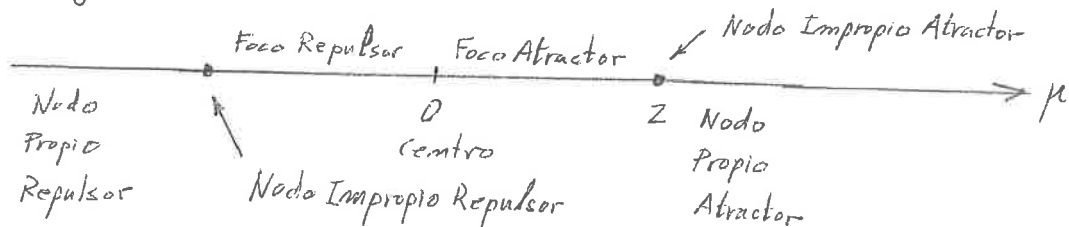
$$\Delta = T^2 - 4D = \mu^2 - 4$$



Por tanto:

- Si  $\mu < -2$  entonces  $D > 0$ ,  $T = -\mu > 0$ ,  $\Delta = \mu^2 - 4 > 0$ : el SL es un modo propio repulsor (I).
- Si  $\mu = -2$ , entonces  $A_{\mu=-2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , matriz con VAP  $\lambda = 1 > 0$  doble (multiplicidad 2) y la matriz no diagonaliza, luego el SL es un modo impropio repulsor (inestable).
- Si  $-2 < \mu < 0$ , entonces  $D > 0$ ,  $T > 0$ ,  $\Delta < 0$ . El SL es un foco repulsor (I).
- Si  $\mu = 0$ , entonces  $D > 0$ ,  $T = 0$ ,  $\Delta < 0$ . El SL es un centro (E pero no AE).
- Si  $0 < \mu < 2$ , entonces  $D > 0$ ,  $T < 0$ ,  $\Delta < 0$ . El SL es un foco atractor (AE).
- Si  $\mu = 2$ , entonces  $A_{\mu=2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , matriz con VAP  $\lambda = -1$  doble (multiplicidad 2) y la matriz no diagonaliza. Luego el SL es un modo impropio atractor.
- Si  $\mu > 2$ , entonces  $D > 0$ ,  $T < 0$ ,  $\Delta > 0$  y el SL es un modo propio atractor (AE).

Diagrama de bifurcación del sistema linealizado en un entorno de  $(x,y) = (0,0)$ .



El SNL es atractor para  $\mu > 0$  y repulsor para  $\mu < 0$ , mientras que la linealización no decide la estabilidad para  $\mu = 0$ .

c) Para  $\mu = 0$ , el sistema se reduce a  $\begin{cases} x' = y - x^3 \\ y' = -x \end{cases}$ ,  $\vec{F}(x,y) := \begin{pmatrix} y - x^3 \\ -x \end{pmatrix}$

$V(x,y) = (x^2 + y^2)/2$  tiene un mínimo absoluto en  $(x,y) = (0,0)$ ,  $\nabla V(x,y) = (x,y)^T$  y  $W(x,y) = (L_{\vec{F}} V)(x,y) = \langle \nabla V(x,y), \vec{F}(x,y) \rangle = (x,y) \cdot \begin{pmatrix} y - x^3 \\ -x \end{pmatrix} = xy - xy - x^4 = -x^4 \leq 0$  para todo  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ . Por otra parte  $x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Esto es la función  $W(x,y)$  se anula sobre el eje  $y$ , i.e. sobre la recta  $\{x=0\}$ , pero  $\vec{F}|_{\{x=0\}} = \begin{pmatrix} y - x^3 \\ -x \end{pmatrix}|_{x=0} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \{x=0\}$  es decir, el campo  $\vec{F}$  es transversal a la recta  $\{x=0\}$ , luego —salvo, obviamente, la solución constante  $(x(t), y(t)) \equiv (0,0)$ —, no hay ninguna solución contenida en el conjunto  $W(x,y) = 0$ . Por tanto  $(x,y) = (0,0)$  es un punto de equilibrio atractor del SNL <sup>(1)</sup>

d) (Ver soluciones en los enunciados). Para  $\mu \geq 0$  el sistema es atractor y el  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (0,0)$  'para toda trayectoria que comience suficientemente cerca del origen' (recordemos que el estudio de los puntos de equilibrio de los SNL es local), luego si consideramos la EDO de 2º ordena tendremos  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ , para toda solución  $x(t)$  con  $x(0) = x_0$  y  $x'(0) = x'_0$  suficientemente próximas a  $x=0=x'$ . Análogamente para  $\mu < 0$ .

<sup>1)</sup> Ver Teorema de Liapunov, punto 4, pág. 18 de los Apuntes de la Asignatura

24) (Método de Liapunov). Usando la función  $V(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ , estudiar la estabilidad entorno al origen de los sistemas siguientes

$$a) \begin{cases} x' = y - 3x^3 \\ y' = -x - 7y^3 \end{cases}, \quad \vec{F}(x,y) = (y - 3x^3, -x - 7y^3)^T, \quad \nabla V(x,y) = (x,y)^T$$

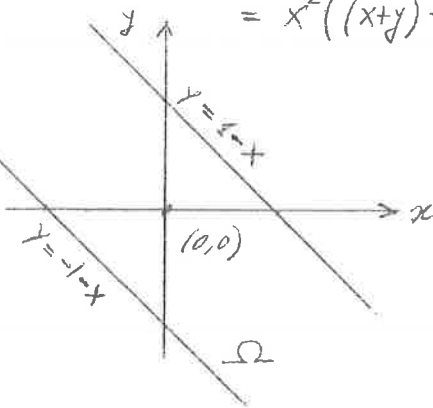
$$W(x,y) = (L_{\vec{F}}V)(x,y) = \langle \nabla V(x,y), \vec{F}(x,y) \rangle = (x,y) \cdot \begin{pmatrix} y - 3x^3 \\ -x - 7y^3 \end{pmatrix} = xy - 3x^4 - xy - 7y^4 \\ = -3x^4 - 7y^4, \text{ definida negativa en } (x,y) = (0,0). \text{ Por tanto el origen es} \\ \text{un punto de equilibrio atractor del SNL.}$$

Reimarcas: notamos que el sistema linealizado en  $(x,y) = (0,0)$  es un centro y por tanto la linealización no decide la estabilidad en este punto de equilibrio

$$b) \begin{cases} x' = -x + (x+y)^2 x \\ y' = -y^3 + (x+y)^2 y^3 \end{cases}, \quad \vec{F}(x,y) = (-x + (x+y)^2 x, -y^3 + (x+y)^2 y^3)^T$$

En este caso, el sistema linealizado entorno al origen es un sistema degenerado. Entonces la linealización no decide la estabilidad en el punto de equilibrio.

$$W(x,y) = (L_{\vec{F}}V)(x,y) = (x,y) \cdot \begin{pmatrix} -x + (x+y)^2 x \\ -y^3 + (x+y)^2 y^3 \end{pmatrix} = -x^2 + (x+y)^2 x^2 - y^4 + (x+y)^2 y^4 \\ = x^2((x+y)^2 - 1) + y^4((x+y)^2 - 1) = ((x+y)^2 - 1)(x^2 + y^4) < 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega \setminus \{(0,0)\}$$



Como que  $\Omega$  es un entorno del origen (ver figura),  $W$  es definida negativa en  $(x,y) = (0,0)$ . Entonces este punto es un punto de equilibrio atractor (y por tanto AE) del SNL.

Figura:  $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x+y < 1\}$ : banda de amplitud  $\sqrt{2}$  que contiene el origen en el que  $W = L_{\vec{F}}V$  es definida negativa.

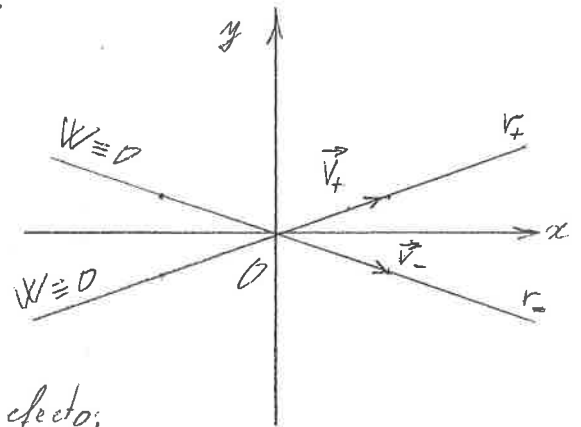
$$c) \begin{cases} x' = -x^3 + 4xy^2 \\ y' = -4y^3 \end{cases}, \quad \vec{F}(x,y) = (-x^3 + 4xy^2, -4y^3)^T$$

Notemos que el sistema linealizado en  $(x,y) = (0,0)$  es un sistema degenerado y entonces la linealización no decide la estabilidad.

$$W(x,y) = (L_{\vec{F}}V)(x,y) = (x,y) \cdot \begin{pmatrix} -x^3 + 4xy^2 \\ -y^3 \end{pmatrix} = -x^4 + 4x^2y^2 - 4y^4 = -(x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4) = -(x^2 - 2y^2)^2$$

Esta función es semidefinida negativa en  $(x,y) = (0,0)$ .  $W(x,y) \equiv 0$  sobre las rectas  $r_{\pm} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm \sqrt{2}/2 x\}$ . Entonces

(i) Como que  $W(x,y)$  es semidefinida negativa en  $(x,y) = (0,0)$ , este punto es un punto de equilibrio estable (E) del SNL.



(ii) El campo es transversal a las rectas

$r_{\pm}$  sobre las que se anula la función  $W$ . En efecto:

$$\vec{F}(x, \pm \frac{x}{\sqrt{2}}) \cdot \vec{v}_{\pm} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x^3 & \mp \sqrt{2}x^3 & 0 \\ 1 & \pm \sqrt{2}/2 & 0 \end{vmatrix} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} x^3 \hat{k} \neq 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Entonces  $\vec{F}|_{\cap W(x,y) \equiv 0}$ , de donde deducimos que (aparte de la solución constante  $(x(t), y(t)) \equiv (0,0)$  no hay ninguna otra trayectoria contenida en el conjunto de nivel  $W(x,y) \equiv 0$ . Entonces, el punto de equilibrio  $(x,y) = (0,0)$  es un punto de equilibrio atractor del SNL (Ver el punto 4 del Teorema de Liapunov, en la página 18 de los Apuntes)

d)  $x' = 2x^3 - 2y^3$   
 $y' = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3$

El sistema linealizado en el punto  $(x,y) = (0,0)$  es un sistema degenerado y por tanto la linealización no decide la estabilidad

$$W(x,y) = (L_{\vec{F}}V)(x,y) = \langle \nabla V(x,y), \vec{F}(x,y) \rangle = (x,y) \cdot \begin{pmatrix} 2x^3 - 2y^3 \\ 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3 \end{pmatrix} = 2x^4 - 2xy^3 + 2xy^3 + 4x^2y^2 + 2y^4 = 2(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) = 2(x^2 + y^2)^2$$

Entonces  $W(x,y)$  es definida positiva en  $(x,y) = (0,0)$ . Así pues este punto es un punto de equilibrio repulsor del SNL.

¿Se puede determinar por linealización la estabilidad en torno al origen en algún apartado?

Resp. En ninguno de ellos. En el apartado a) el sistema linealizado en torno al origen es un centro. En todos los otros apartados la linealización en torno al origen da lugar a sistemas degenerados.

25) (Ajustando la función de Liapunov). Estudiar la estabilidad en torno al origen del sistema

$$x' = xy^2 + \mu x^3$$

$$y' = -2x^2y + \mu y^3$$

Indicación: usar una función del tipo  $V(x,y) = ax^2 + by^2$

Solución. La linealización en torno al origen  $(x,y) = (0,0)$  produce un SL degenerado cuya matriz es la matriz nula:  $M = DF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  para todo valor de  $\mu \in \mathbb{R}$ . Así pues, la linealización no decide la estabilidad del sistema en el origen.

Consideramos  $V(x,y) = ax^2 + by^2$ . Supondremos, para que  $V$  tenga un mínimo local estricto en  $(x,y) = (0,0)$ , entonces:

$$W(x,y) = (L_{\vec{F}}V)(x,y) = \langle \nabla V(x,y), \vec{F}(x,y) \rangle = (2ax, 2by) \cdot \begin{pmatrix} xy^2 + \mu x^3 \\ -2x^2y + \mu y^3 \end{pmatrix}$$

$$= 2ax^2y^2 + 2\mu x^4 - 4bx^2y^2 + 2b\mu y^4 = 2(a-2b)x^2y^2 + 2\mu(ax^4 + by^4)$$

$$\stackrel{(*)}{=} 2\mu(2x^4 + y^4)$$

Tomamos:

$$b = a/2$$

Por ejemplo:

$$a=2 \Rightarrow b=1.$$

(\*) Nota.: si ajustamos  $a, b > 0$  de manera que el término con coeficiente  $(a-2b)$  sea  $D$ , entonces  $W$  estará definida (positiva, negativa) o  $\equiv 0$  dependiendo del valor de  $\mu$ .

Así, tenemos:

- Si  $\mu > 0$ :  $W(x,y)$  definida positiva en  $(0,0)$ , luego  $(x,y)=(0,0)$  es un punto de equilibrio repulsor del SNL.
- Si  $\mu < 0$ :  $W(x,y)$  definida negativa en  $(0,0)$ , luego  $(x,y)=(0,0)$  es un punto de equilibrio atractor del SNL.
- Si  $\mu = 0$ :  $W(x,y) \equiv 0$ :  $V(x,y)$  es una cantidad conservada (una "integral primera") del sistema, por tanto  $(x,y)=(0,0)$  es un punto de equilibrio estable (E) pero no (AE).

26) (Linealización + Liapunov) El origen es un punto de equilibrio del sistema no lineal

$$\begin{aligned}x' &= y + \alpha x^3 \\y' &= -\frac{x}{4} + \mu y + 2\alpha y^5\end{aligned}$$

- a) Calcular y clasificar el sistema linealizado en torno al origen en función de los parámetros
- b) Estudiar, cuando  $\mu \neq 0$ , la estabilidad del sistema no lineal por el método de linealización.
- c) Estudiar, suponiendo  $\mu = 0$ , la estabilidad del SNL por el método de Liapunov usando una función de la forma  $V(x,y) = ax^2 + by^2$

Solución.

(a) La matriz de la linealización del sistema en torno al origen es:

$$M = D\vec{F}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \mu \end{pmatrix}. \text{ Nota: vemos que la linealización no depende de } \alpha.$$

De donde:  $T := \text{Tr} M = \mu$ ,  $D := \det M = \frac{1}{4} > 0$ ,  $\Delta = T^2 - 4D = \mu^2 - 1$ . Entonces:

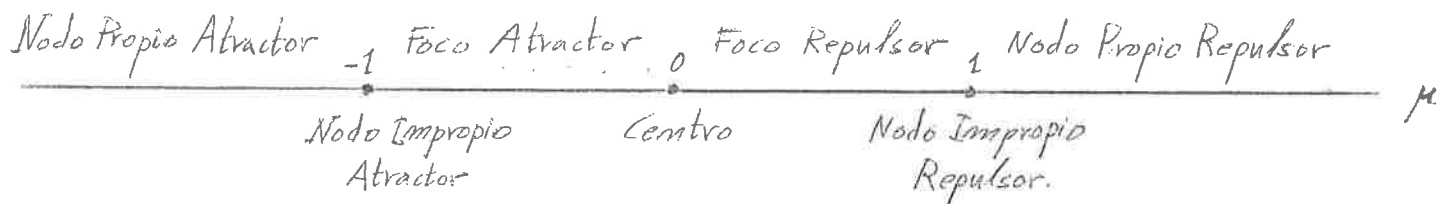
• Si  $\mu < -1$ ,  $T < 0$ ,  $D > 0$ ,  $\Delta > 0$ . El SL es un modo propio atractor (AE)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

• Si  $\mu = -1$ ,  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$ . Matriz  $2 \times 2$  con VAP  $\lambda = -\frac{1}{2}$  doble (multiplicidad 2)

y no diagonal. Por tanto el sistema es un modo impropio atractor (AE) del SL  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

- $-1 < \mu < 0$ :  $T < 0, D > 0, \Delta < 0$ . El SL es un foco atractor (AE)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\mu = 0$ :  $T = 0, D > 0, \Delta < 0$ . El SL es un centro (E) pero no (AE)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .
- $0 < \mu < +1$ :  $T > 0, D > 0, \Delta < 0$ . El SL es un foco repulsor (I)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .
- $\mu = 1, M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ : Matriz  $2 \times 2$  con VAP:  $\lambda = 1/2$  doble (multiplicidad 2) y no diagonal. Por tanto el sistema es un modo impropio repulsor (I) del SL  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .
- $\mu > 1$ :  $T > 0, D > 0, \Delta > 0$ . El SL es un modo propio repulsor (I)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

Diagrama de Bifurcación del SL:



Como que l'estabilitat del sistema linealitzat en  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  no depèn del paràmetre  $\alpha$ , aquest diagrama de bifurcacions és vàlid per  $\alpha \in \mathbb{R}$  qualsevol.

- b) A partir de la clasificació del sistema linealitzado en torno al origen obtenida en el apartado a), se deduce que el SNL
- b.1.- Es atractor cuando  $\mu < 0$  para cualquier valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$
  - b.2.- Es repulsor (I) cuando  $\mu > 0$  para cualquier valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
  - b.3.- La linealización no decide la estabilidad cuando  $\mu = 0$  para ningún valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$

c) Para  $\mu = 0$  el SNL resulta

$$\begin{aligned} x' &= y + \alpha x^3 \\ y' &= -x/4 + 2\alpha y^5 \end{aligned}$$

Consideramos  $V(x,y) = ax^2 + by^2$  con  $a, b > 0$ , de manera que  $V$  tenga un mínimo local estricto en  $(x,y) = (0,0)$ . Entonces:

$$W(x,y) = (L_F \vec{V})_{(x,y)} = (2ax, 2by) \cdot \begin{pmatrix} y + \alpha x^3 \\ -x/4 + 2\alpha y^5 \end{pmatrix} = 2axy + 2\alpha \alpha x^4 - b/2 xy + 4b\alpha y^4 =$$



$$= 2(a - \frac{b}{4})xy + 2\alpha(ax^4 + 2by^4).$$

De aquí, vemos que tomando  $b=4a$  el 1er término en la suma de la última igualdad desaparece y  $W$  será definida positiva, negativa o idénticamente cero, dependiendo del valor de  $\alpha$ :  $W(x,y) = 2a\alpha(x^4 + 2y^4)$ ,  $a > 0$ . Aún podemos tomar, por ejemplo  $a=1$  y así:

$$W(x,y) = 2\alpha(x^4 + 2y^4).$$

Esta función es definida positiva en  $(x,y)=(0,0)$  cuando  $\alpha > 0$  y el origen es un punto de equilibrio repulsor del SNL; es definida negativa en  $(x,y)=(0,0)$  cuando  $\alpha < 0$ , con lo que el origen es un punto de equilibrio atractor del SNL. Finalmente, cuando  $\alpha = 0$  el origen es un centro no lineal, ya que el sistema es 2D, la linealización en torno al origen corresponde a un centro y tiene una cantidad conservada (una integral primera). Ver la Definición en los Apuntes de la Asignatura página 18.

31) (Liapunov en un SNL 3D) El origen es un punto de equilibrio del sistema

$$x_1' = \mu x_1^3 - 2x_2 + x_2 x_3$$

$$x_2' = \mu x_2^3 + x_1 - x_1 x_3$$

$$x_3' = \mu x_3^3 + x_1 x_2$$

siendo  $\mu$  un parámetro real.

- Estudiar, si es posible, la estabilidad del origen por el método de linealización
- Estudiar la estabilidad del origen por Liapunov usando una función de

la forma

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2}{2}$$

para algunos valores apropiados de  $c_1, c_2, c_3$

- Sea  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  la solución que se obtiene con la condición inicial

$$x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 2, \quad x_3(0) = 1.$$

¿Para qué valores de  $\mu$  es decreciente la función  $x_2(t)$  en  $t=0$ ? ¿Y para cuáles es creciente? ¿Para qué valores de  $\mu$  tiene un mínimo local estricto la función  $x_2(t)$  en  $t=0$ ? ¿Y para cuáles tiene un máximo local estricto?

Solución.

a) Linealización: la matriz del sistema linealizado en el origen resulta

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores propios correspondientes son  $p(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} -t & -2 \\ 1 & -t \\ & -t \end{vmatrix} = -t(t^2 + 2)$   
 VAPs  $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{2}$ .

Por tanto no es posible estudiar la estabilidad del origen por linealización en torno a este punto: todos los VAPs tienen parte real 0.

b)  $V(x_1, x_2, x_3) = \frac{c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2}{2}$ .  $V(0,0,0) = 0$  y  $V$  tiene un mínimo local estricto en el origen si tomamos  $c_1, c_2, c_3 > 0$ .

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, x_3) &= (L_{\vec{F}} V)(x_1, x_2, x_3) = \langle \nabla V(x_1, x_2, x_3), \vec{F}(x_1, x_2, x_3) \rangle \\ &= (c_1 x_1, c_2 x_2, c_3 x_3) \cdot \begin{pmatrix} \mu x_1^3 - 2x_2 + x_2 x_3 \\ \mu x_2^3 + x_1 - x_1 x_3 \\ \mu x_3^3 + x_1 x_2 \end{pmatrix} \\ &= \mu c_1 x_1^4 - 2c_2 x_1 x_2 + c_1 x_1 x_2 x_3 \\ &\quad + \mu c_2 x_2^4 + c_2 x_1 x_2 - c_2 x_1 x_2 x_3 \\ &\quad + \mu c_3 x_3^4 + c_3 x_1 x_2 x_3 \\ &= \mu (c_1 x_1^4 + c_2 x_2^4 + c_3 x_3^4) + (c_2 - 2c_1) x_1 x_2 + (c_1 - c_2 + c_3) x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

Ajustamos:

$$c_2 = 2c_1, \quad c_1 - c_2 + c_3 = 0, \quad \text{de donde } c_2 = 2c_1, \quad c_3 = c_1, \quad c_1 > 0.$$

con lo que:

$$W(x_1, x_2, x_3) = \mu c_1 (x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4) \quad \text{con } c_1 > 0.$$

Aún podemos fijar, por ejemplo,  $c_1 = 1$  y entonces:

$$W(x_1, x_2, x_3) = \mu (x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4)$$

que es:

• Definida positiva en  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$  para  $\mu > 0$  y el origen es un punto de equilibrio repulsor del SNL.

• Definida negativa en  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$  para  $\mu < 0$  y el origen es un punto de equilibrio atractor del SNL.

• Para  $\mu = 0$ :  $W(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . El origen es un punto de equilibrio E pero no AE.  $V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$  es una cantidad conservada. Sea  $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  una solución diferente de  $\vec{x}(t) \equiv 0$ . Entonces  $V(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \frac{1}{2}(x_1^2(t) + 2x_2^2(t) + x_3^2(t)) = V(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = V_0 > 0$ .

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2(t)}{\sqrt{2V_0}^2} + \frac{x_2^2(t)}{\sqrt{V_0}^2} + \frac{x_3^2(t)}{\sqrt{2V_0}^2} = 1.$$

Es decir, las soluciones se encuentran sobre elipsoides centrados en el origen. Por tanto este punto de equilibrio es E pero no AE.

c)  $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ ,  $x_1(0) = -1$ ,  $x_2(0) = 2$ ,  $x_3(0) = 1$ .

$$x_2'(0) = \mu x_2^3(0) + x_1(0) - x_1(0)x_3(0) = 8\mu - 1 + 1 = 8\mu$$

Luego  $x_2(t)$  es:

• Creciente en  $t=0$  para  $\mu > 0$

• Decreciente en  $t=0$  para  $\mu < 0$

$$x_2''(t) = 3\mu x_2^2(t)x_2'(t) + x_1'(t) - x_1'(t)x_3(t) - x_1(t)x_3'(t)$$

$$x_2''(0) = 3\mu x_2^2(0)x_2'(0) + x_1'(0) - x_1'(0)x_3(0) - x_1(0)x_3'(0) = 64\mu^2 + \mu - 2.$$

Para  $\mu = 0$ ,  $x_2'(0) = 0$ ,  $x_2''(0) = -2 < 0$ , luego  $x_2(t)$  tiene un máximo local estricto en  $t=0$  cuando  $\mu = 0$ .

30) (Un centro no lineal) El punto (1,1) es un punto de equilibrio del sistema

$$x' = x(1-y)$$

$$y' = y(x-1)$$

- a) Clasificar el sistema linealizado correspondiente ¿La linealización decide la estabilidad?
- b) Probar que la función  $V(x,y) = x+y - \ln(xy)$  tiene un mínimo local estricto en (1,1) y calcular su derivada temporal.
- c) ¿Cómo se comportan las trayectorias cercanas al punto (1,1)?
- d) ¿En qué zonas del plano (x,y) se expanden áreas? ¿Y en cuáles se contraen?

Soluciones.

a)  $DF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1-y_0 & x_0 \\ y_0 & -1+x_0 \end{pmatrix}$ ;  $M = DF(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Los VAPs correspondientes

son  $\lambda_{\pm} = \pm i$  ( $\alpha=0, \beta=1>0$ ). Entonces el SL es un centro. Las órbitas del sistema linealizado son curvas cerradas alrededor del origen (punto de equilibrio de la linealización) que corresponden a soluciones periódicas de periodo  $\frac{2\pi}{\beta} = 2\pi$  y que se recorren en sentido horario (ver problema 2).

En los SNL 2D autónomos, los únicos casos en los que la linealización no decide la estabilidad (ver Apuntes de la Asignatura pág. 16) son aquellos en los que el SL corresponde a un sistema degenerado o a un centro, como es el caso que nos ocupa. Por tanto no podemos decidir la estabilidad del punto de equilibrio  $(x,y) = (1,1)$  por linealización.

b)  $V(x,y) = x+y - \ln(xy)$ . Esta función tiene un mínimo local estricto en  $(x,y) = (1,1)$ . En efecto:

$$\nabla V(x,y) = (1-\frac{y}{x}, 1-\frac{x}{y})^T; \nabla V(1,1) = (0,0); D^2V(1,1) = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix}$$

$D^2V(1,1)$ : matriz definida positiva. Entonces  $V$  tiene un mínimo local estricto en  $(x,y) = (1,1)$ .

Luego.

$$W(x,y) = (L_{\vec{F}} V)(x,y) = \langle \nabla V(x,y), \vec{F}(x,y) \rangle = \left(1 - \frac{1}{x}, 1 - \frac{1}{y}\right) \cdot \begin{pmatrix} x - xy \\ yx - y \end{pmatrix}$$

$$= x - xy - 1 + y + xy - y - x + 1 = 0 \quad \forall (x,y) : xy \neq 0.$$

c)  $W(x,y) \equiv 0$  localmente en  $(x,y) = (1,1)$ . Llavors  $V(x,y)$  es una cantidad conservada del campo  $\vec{F}$ . Como por otro lado, la linealización en este punto corresponde a un centro, tenemos que el punto de equilibrio  $(x,y) = (1,1)$  es un centro no lineal del SNL 2D dado. (Ver apuntes de la asignatura, la Definición de la página 18).

En un entorno de  $(x,y) = (1,1)$  las trayectorias del SNL giran alrededor de este punto en el mismo sentido que las trayectorias del sistema linealizado (esto es, en sentido horario) y son periódicas con un periodo que tiende a  $p = \frac{2\pi}{|\text{Im} \lambda_{\pm}|} = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi$ , a medida que consideramos trayectorias más cercanas al punto  $(x,y) = (1,1)$ .

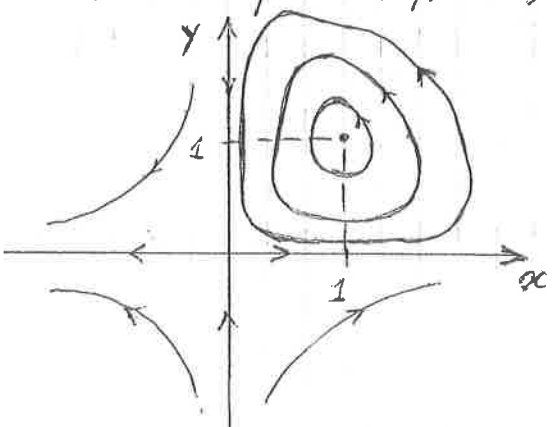


Figura. Centro no lineal en el punto (1,1)  
Silla no lineal en el punto (0,0)

d) Divergencia

$$\text{div } F = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 1 - y - 1 + x = x - y$$

Luego las áreas se expanden en el semiplano  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$  y se contraen en el semiplano  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$ . (Ver Apuntes de la Asignatura, el Teorema de la página 19).

42. (Péndulo con fricción: Wikipedia Applet 1 y Applet 2). Tenemos un péndulo de longitud  $l$  del que cuelga una masa  $m$  bajo un campo gravitatorio de intensidad  $g$ . Sea  $K$  el coeficiente de fricción proporcional a la velocidad

a) Justificar que la ecuación que modela el movimiento del péndulo es:

$$\theta'' + m^{-1}K\theta' + l^{-1}g \sin \theta = 0$$

donde  $\theta(t)$  es el ángulo formado por el péndulo con la vertical inferior

¿Qué datos se necesitan para tener un PVI?

b) Escribir esta ecuación como un sistema no lineal 2D de primer orden, introduciendo la velocidad angular  $\omega = \theta'$ .

c) Estudiar, si es posible, la estabilidad de las dos posiciones de equilibrio del péndulo por el método de linealización.

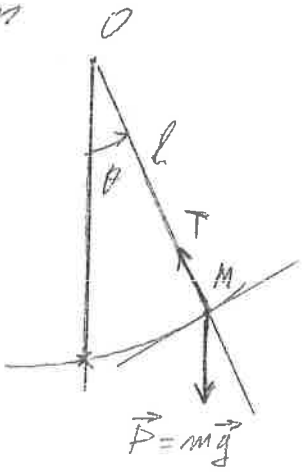
d) Comprobar que la energía mecánica total

$$V(\theta, \omega) = \frac{m}{2} l^2 \omega^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

no crece a lo largo de las trayectorias ¿A lo largo de qué trayectorias se mantiene constante la energía?

e) Probar que el péndulo con fricción no tiene ninguna trayectoria periódica no constante.

Solución



a) II<sup>a</sup> ley de Newton: componente en la dirección tangencial (Ver figura).

$$m \cdot \ddot{\theta} = -mgsin\theta - K\dot{\theta}$$

El PVI viene fijado por I de:

$$\theta(0) = \theta_0 \quad ; \text{ángulo inicial}$$

$$\omega(0) = \theta'(0) = \omega_0 \quad ; \text{velocidad angular inicial.}$$

Figura. Fuerzas sobre la masa del péndulo

$$b) \dot{\theta}' = \omega$$

$$\dot{\omega}' = -\frac{k}{m} \omega - \frac{g}{l} \sin \theta$$

c) Posiciones de equilibrio

$$\omega = 0$$

$$\sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta_m = m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

Los puntos de equilibrio son pues  $(\theta, \omega) = (m\pi, 0)$ , con  $m \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ .

La matriz del sistema linealizado en torno a cada uno de estos puntos viene dada por:

$$M_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos \theta_m & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \underset{\substack{\theta_m = m\pi \\ m \in \mathbb{Z}}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} (-1)^{m+1} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}, m \in \mathbb{Z}$$

De donde:

$$T_m := \text{Tr} M_m = -\frac{k}{m} < 0, D_m := \det M_m = \frac{g}{l} (-1)^m, \Delta_m = \frac{k^2}{m^2} - 4 \frac{g}{l} (-1)^m$$

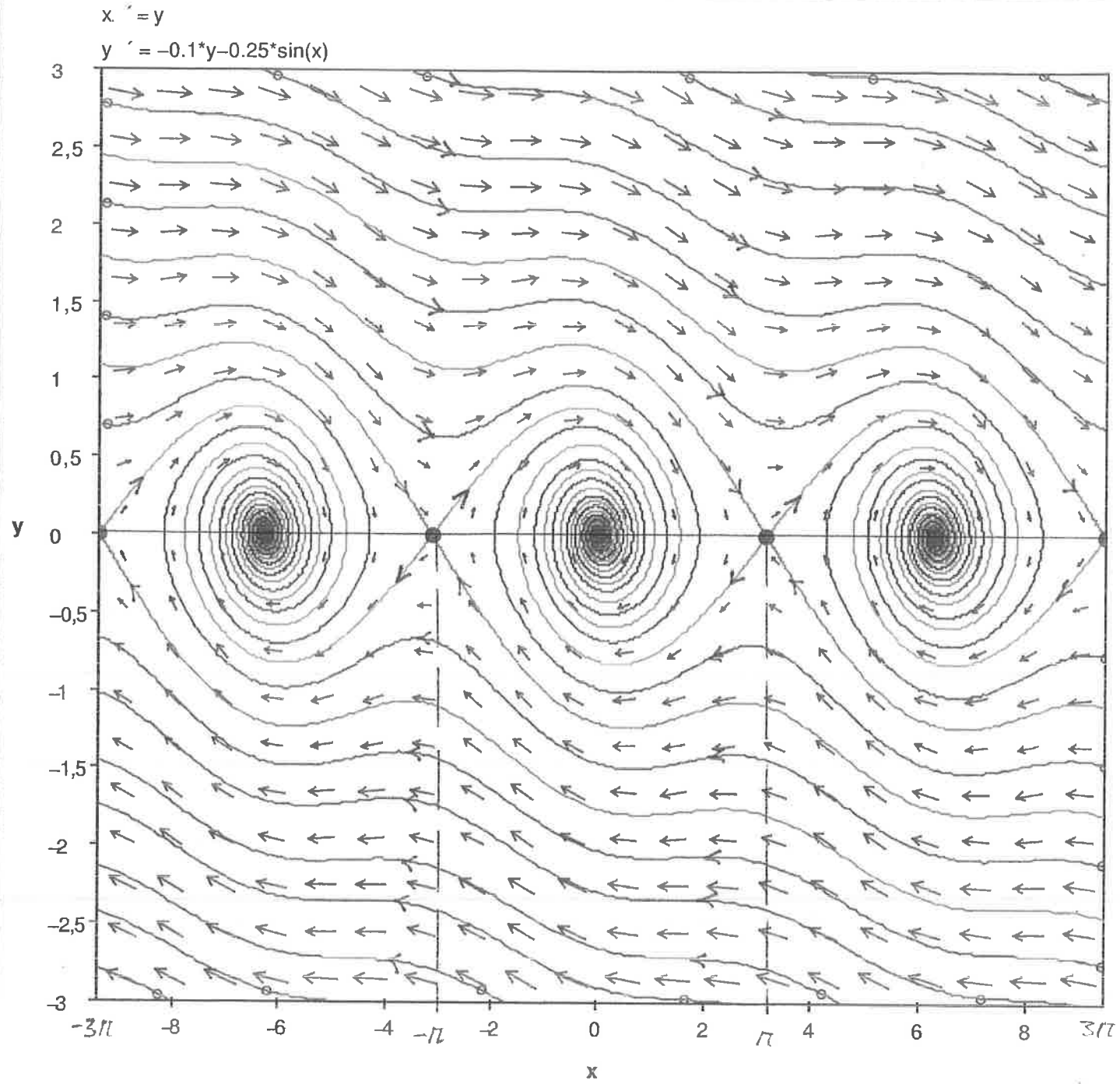
■ Cuando  $m$  es impar,  $m = 2p+1$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ :  $(\theta_m, \omega_m) = (\theta_{2p+1}, \omega_{2p+1}) = ((2p+1)\pi, 0)$ ; resulta  $D_m = D_{2p+1} = \frac{g}{l} (-1)^{2p+1} = -\frac{g}{l} < 0$ , y por tanto estos puntos de equilibrio son sillars del SL, que corresponden a sillars del SNL con sus correspondientes curvas de entrada y salida.

■ Cuando  $m$  es par,  $m = 2p$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  entonces tenemos los puntos de equilibrio  $(\theta_m, \omega_m) = (\theta_{2p}, \omega_{2p}) = (2p\pi, 0)$ , de donde  $D_m = D_{2p} = \frac{g}{l} > 0$ ;  $T_m = T_{2p} = -\frac{k}{m} < 0$ ;  $\Delta_m = \Delta_{2p} = \frac{k^2}{m^2} - 4 \frac{g}{l}$ . Si suponemos que el coeficiente de fricción es pequeño, en particular, si suponemos que  $0 < k < 2m\sqrt{\frac{g}{l}}$ , entonces  $\Delta_{2p} < 0 \forall p \in \mathbb{Z}$  y los puntos de equilibrio son focos atractores. Las soluciones giran alrededor de estos puntos de equilibrio en sentido horario (ver problema 15).

Por tanto, el péndulo con fricción es inestable en la posición de equilibrio superior, representada por los puntos del plano de fase  $(\theta_m, \omega_m) = (\theta_{2p+1}, \omega_{2p+1}) = ((2p+1)\pi, 0)$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ; y asintóticamente estable en la posición de equilibrio inferior

ferior, representada en el plano de fase por los puntos  $(\theta_m, \omega_m) = (\theta_{2p}, \omega_{2p}) = (2p\pi, 0)$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ .

Si además suponemos que la fricción es pequeña, de manera que el coeficiente de fricción  $K$  satisface  $0 < K < 2m\sqrt{g/l}$ , entonces el retrato de fases es el que aparece en la figura.



$d) V(\theta, \omega) = \frac{m_0}{2} l^2 \omega^2 + mgl(1 - \cos\theta)$   
 $L_{\vec{F}}V = \langle \nabla V, \vec{F} \rangle = (mgl \sin\theta, m l^2 \omega) \cdot \begin{pmatrix} \omega \\ -\frac{K}{m} \omega - g/l \sin\theta \end{pmatrix} = -K l \omega^2 \leq 0$   
 La derivada temporal se anula si y sólo si  $\omega = 0$ , luego la energía sólo se mantiene constante en los puntos de equilibrio  
 $e) \text{div } \vec{F}(\theta, \omega) = -K/m < 0 \Rightarrow$  No hay órbitas periódicas ni ctes.



43. (Campos conservativos con un grado de libertad). Tenemos una partícula de masa uno que se desplaza sin fricción sobre una recta bajo la acción de una fuerza conservativa  $F(x)$ . Decimos que esta fuerza proviene de un potencial  $U(x)$  cuando

$$F(x) = - \frac{dU}{dx}(x).$$

Según la IIª Ley de Newton, la partícula cumple la EDO de segundo orden  $x'' = F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Escribir esta EDO de segundo orden como un sistema no lineal 2D de primer orden, introduciendo la velocidad lineal  $v = x'$ .

b) La energía (cinética más potencial) de la partícula es igual a

$$E(x, v) = \frac{v^2}{2} + U(x).$$

Calcular la derivada respecto al tiempo de la energía. ¿Qué relación existe entre las soluciones del sistema y las curvas de nivel de la energía? ¿Qué relación existe entre la gráfica del potencial y el croquis del sistema? Deducir que, si en algún momento la partícula tiene energía  $E_0$ , entonces su energía potencial nunca supera el valor  $E_0$ .

c) Probar que  $(x_*, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema cuando  $x_*$  es un punto crítico del potencial; es decir, cuando  $\frac{dU}{dx}(x_*) = 0$ . Probar que, además,  $(x_*, 0)$  es un punto de equilibrio inestable/centro no lineal cuando  $\frac{d^2U}{dx^2}(x_*)$  es positiva/negativa.

d) Consideramos la fuerza que proviene del potencial  $U(x) = (x^2 - 1)^2$ . Calcular las posiciones de equilibrio y la estabilidad de cada una. Dibujar un croquis de las trayectorias. ¿Puede escapar la partícula a más o menos infinito? ¿Para qué valores de la energía existen soluciones acotadas?

e) Idem con la fuerza que proviene del potencial  $U(x) = x^3/3 - x^2/2$ .

a)  $x' = v$   
 $v' = F(x)$        $\vec{X}(x, v) = (v, F(x))^T$

b)  $E(x, v) = v^2/2 + U(x)$

$L_{\vec{X}} E = \langle \nabla E, \vec{X} \rangle = \left( \frac{dU}{dx}(x), v \right) \cdot \begin{pmatrix} v \\ F(x) \end{pmatrix} = U'(x)v + F(x)v$   
 $= U'(x)v - U'(x)v = 0.$

Las soluciones del sistema se encuentran sobre las curvas de nivel de la energía, ie, si:

$C(E_0) = \{ (x, v) \in \mathbb{R}^2; E(x, v) = E_0 \} = \{ (x, v) \in \mathbb{R}^2, v = \pm 2\sqrt{E_0 - U(x)} \}$

Así, la partícula sólo puede acceder a las posiciones en las que  $U(x) \leq E_0$ . El signo  $\pm$  en la fórmula  $v = \pm 2\sqrt{E_0 - U(x)}$  indica que las órbitas en el plano de fase  $(x, v)$  son simétricas respecto del eje horizontal (recta  $v=0$ ).  $x' > 0$  en el semiplano  $\{v > 0\}$ , por tanto la partícula se mueve hacia la derecha en esta región. Por contra  $x' < 0$  en el semiplano  $\{v < 0\}$ , luego la partícula se mueve hacia la izquierda en el semiplano inferior.

La energía potencial nunca supera el valor de la energía mecánica total del sistema. En efecto:

$E_0 = E(x(t_0), v(t_0)) = v^2(t)/2 + U(x(t)) = E(x(t), v(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$   
 $\Leftrightarrow U(x(t)) = E_0 - v^2(t)/2 \leq E_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

c)  $(x, v) = (x_*, v_*)$  es un punto de equilibrio

$\Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x' = v_* = 0 \\ v' = F(x_*) = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow U'(x_*) = 0, v_* = 0$

La matriz del sistema linealizado en  $(x, v) = (x_*, v_*) = (x_*, 0)$ , es:

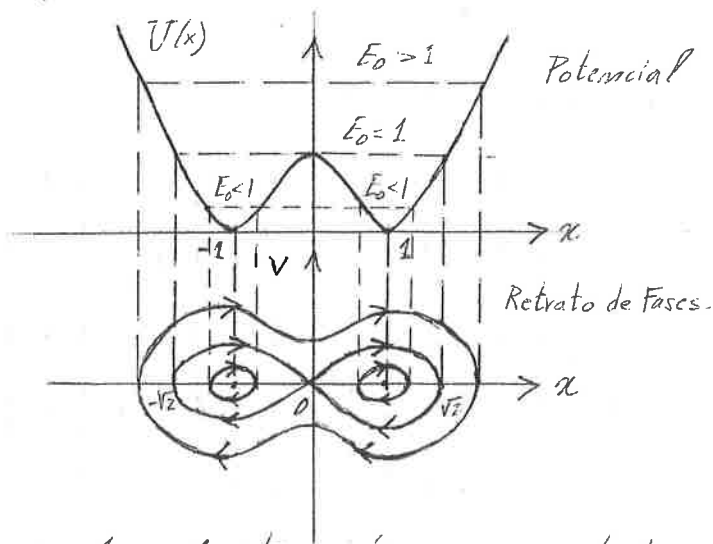
$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{d^2U}{dx^2}(x_*) & 0 \end{pmatrix}$ , de donde  $T := \text{Tr} M = 0$ ,  $D := \det M = \frac{d^2U}{dx^2}(x_*)$ .

■ Si  $U''(x_*) < 0$ , entonces  $\det M < 0$  y el SL es una silla. Entonces el punto de equilibrio  $(x, v) = (x_*, 0)$  es un punto de equilibrio inestable del SNL.

que corresponde a una silla no lineal con sus respectivas curvas de entrada y de salida

Si  $U''(x_*) > 0$ , entonces  $\det M > 0$  y como  $\text{Tr} M = 0$  el SL es un centro. Como el SNL es un sistema 2D con una cantidad conservada (la energía  $E(x,v)$ ) en  $(x,v) = (x_*, 0)$  resulta que el punto  $(x,v) = (x_*, 0)$  corresponde a un centro no lineal. Las trayectorias próximas al punto de equilibrio son órbitas periódicas que giran en sentido horario (ver problema 15) alrededor del punto de equilibrio y cuyos periodos tienden a  $2\pi / \sqrt{U''(x_*)}$  a medida que se tiende al punto de equilibrio.

d)  $U(x) = (x^2 - 1)^2$   
 $U'(x) = 2(x^2 - 1) \cdot 2x = 0 \iff x = 0, x = \pm 1$   
 $U(0) = 1, U(\pm 1) = 0$   
 $U''(x) = 12x^2 - 4$   
 $U''(0) = -4 < 0, U''(\pm 1) = 8 > 0$



El potencial tiene un máximo en  $x = 0$ , luego el sistema tiene un punto de equilibrio inestable en  $(x,v) = (0,0)$  que corresponde a una silla no lineal. En cambio en los puntos  $x = \pm 1$  el sistema tiene dos mínimos, con lo que el sistema tiene dos puntos de equilibrio estable en  $(x,v) = (\pm 1, 0)$ , que corresponden a centros no lineales (ver figura).

- Si  $0 < E_0 < 1$ :  $C(E_0) = \{(x,v) \in \mathbb{R}^2 : v = \pm 2\sqrt{E_0 - (x^2 - 1)^2}, \text{ para } \sqrt{1 - \sqrt{E_0}} \leq |x| \leq \sqrt{1 + \sqrt{E_0}}\}$ , las trayectorias corresponden a 2 órbitas periódicas (ver figura) que giran en sentido horario, una alrededor del punto de equilibrio  $(x,v) = (1,0)$ , la otra alrededor del punto de equilibrio  $(x,v) = (-1,0)$ . El periodo de estas órbitas tiende a  $p = \pi/\sqrt{2}$  cuando  $E_0 \rightarrow 0^+$  ¿Por qué?
- Si  $E_0 = 1$ :  $C(E_0 = 1) = \{(x,v) \in \mathbb{R}^2 : v = \pm 2|x|\sqrt{2 - x^2}, -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$ . Esta curva contiene 2 órbitas homoclinicas que forman un lazo en forma de... (ver figura)

una de estas órbitas homoclínicas rodea el punto de equilibrio  $(x,v) = (1,0)$ ; la otra rodea el punto de equilibrio  $(x,v) = (-1,0)$  y ambas se conectan en el origen.

$$E_0 > 1, C(E_0) = \left\{ (x,v) \in \mathbb{R}^2 : v = \pm 2\sqrt{E_0 - (x^2-1)^2}, -\sqrt{1+E_0} \leq x \leq \sqrt{1+E_0} \right\}$$

Esta curva es una curva cerrada que rodea el lazo homoclínico correspondiente a  $E_0 = 1$  (ver figura)

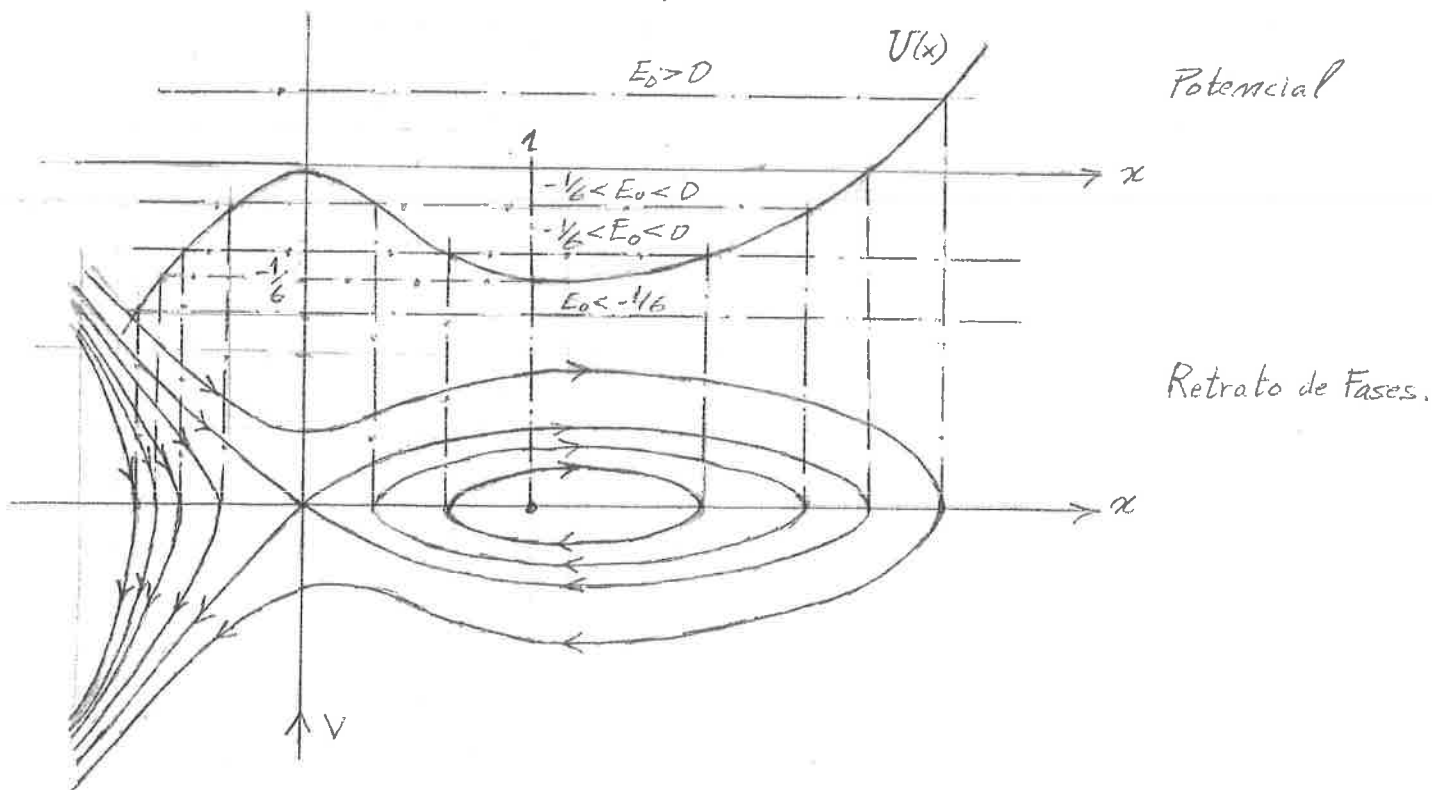
Vemos que todas las soluciones son acotadas. Ninguna partícula puede escapar a  $\pm\infty$  puesto que 'ninguna curva de nivel lo hace'. (Ver soluciones en los enunciados).

e)  $U(x) = x^3/3 - x^2/2$

$$U'(x) = x^2 - x = x(x-1) = 0 \iff x=0, x=1$$

$$U''(x) = 2x - 1 : U''(0) = -1 < 0, U''(1) = 1 > 0$$

El potencial tiene un máximo en  $x=0$  donde vale  $U(0) = 0$  y un mínimo en  $x=1$ , donde vale  $U(1) = -1/6$ . Por tanto el punto  $(x,v) = (0,0)$  es un punto de equilibrio inestable que corresponde a una silla no lineal, mientras que el punto  $(x,v) = (1,0)$  es un punto de equilibrio estable que corresponde a un centro no lineal. (ver figura)



A partir de la figura observamos lo siguiente (ver las Soluciones a los Ejercicios)

- Para  $E_0 \in (-\infty, -\frac{1}{6}] \cup (0, +\infty)$ , la curva de nivel  $C(E_0)$  es una curva abierta que 'escapa' a  $-\infty$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ .
- Para  $E_0 \in (-\frac{1}{6}, 0)$ , la correspondiente  $C(E_0)$  contiene una órbita periódica que gira en sentido horario alrededor del punto de equilibrio  $(x, v) = (1, 0)$  y una órbita 'abierta' que escapa a  $-\infty$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ .
- Si  $E_0 = 0$ , la curva de nivel  $C(E_0) = C(0)$  es un lazo  $\infty$  con una auto-intersección en el punto de equilibrio inestable  $(x, v) = (0, 0)$ . La parte de la izquierda está formada por dos curvas invariantes no acotadas —una de entrada y otra de salida— que confluyen en el origen. La parte de la derecha consiste en una órbita homoclínica (bi-asintótica) al punto de equilibrio inestable  $(x, v) = (0, 0)$  rodeando el punto de equilibrio estable  $(x, v) = (1, 0)$ .

Finalmente vemos que para los niveles de energía  $E_0 \in (-\infty, -\frac{1}{6}) \cup (0, +\infty)$  todas las órbitas están no acotadas —tienden a  $-\infty$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ —, mientras que los niveles de energía  $E_0 \in [-\frac{1}{6}, 0]$  contienen una órbita acotada (en particular, periódica si  $-\frac{1}{6} < E < 0$ ) y otra no acotada que 'escapa' a  $-\infty$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

44) (Modelo depredador-presa o Lotka-Volterra). Sean  $x(t)$  e  $y(t)$  las densidades de población de dos especies aisladas de presas y depredadores. Suponemos que las interrelaciones entre estas especies cumplen los siguientes principios:

- Si no hay depredadores, la población de presas crece exponencialmente (Malthus).
- Si no hay presas, la población de depredadores decrece exponencialmente.
- El número de encuentros entre un depredador y una presa es proporcional al producto de las dos densidades.
- Cada encuentro entre depredador y presa incrementa de depredadores y disminuye la población de presas.

Entonces, el modelo que estamos considerando es el sistema 2D

$$x' = x(a - by)$$

$$y' = y(dx - c)$$

donde las cantidades  $a, b, c, d > 0$  son las constantes de proporcionalidad que representan la interacción entre las dos especies

- Calcular, clasificar y dibujar un croquis del sistema linealizado en torno al origen.
- Encontrar el otro punto de equilibrio del sistema. Calcular, clasificar y dibujar un croquis del sistema linealizado en torno a este segundo punto de equilibrio.
- Determinar, si es posible, la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema por el método de linealización.
- El primer cuadrante es el único con sentido biológico. Probar que es invariante mediante el estudio del campo de vectores sobre los ejes de coordenadas.
- Consideramos la función

$$V(x, y) = \gamma \ln x + \alpha \ln y - \delta x - \beta y$$

definida en el 1er cuadrante, donde las cantidades  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  son parámetros estrictamente positivos. Hallar los valores que deben tomar estos parámetros (en función de  $a, b, c, d$ ) para que  $V(x, y)$  sea una cantidad conservada del sistema

- Dibujar el retrato de fases global del sistema

Solución.  $\vec{F}(x, y) = (x(a - by), y(dx - c))^T$ ;  $a, b, c, d > 0$

- Linealización del sistema alrededor del punto  $(x, y) = (x_0, y_0)$ : la matriz de la linealización resulta:

$$M_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} a - by_0 & -bx_0 \\ dy_0 & -c + dx_0 \end{pmatrix}$$

Em particular, para  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ,  $M_{(0,0)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$ , de donde  $T = \text{Tr} M = a - c$ ,  $D = \det M = -ac < 0$  ya que  $a, c > 0$ . Por tanto, como  $\det M < 0$  el SL corresponde a una silla, luego el origen es una silla no lineal. Además, las rectas  $\{x=0\}$  y  $\{y=0\}$  son rectas invariantes del sistema. Em efecto:

- (i) La restricción del sistema sobre la recta  $\{x=0\}$  produce el sistema:  $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = -cy \end{cases} (c > 0)$
- (ii) La " " " " " " "  $\{y=0\}$  " " " " :  $\begin{cases} x' = ax \\ y' = 0 \end{cases} (a > 0)$

De donde se deduce que  $\{x=0\}$  es una curva invariante de entrada y  $\{y=0\}$  es una curva invariante de salida.

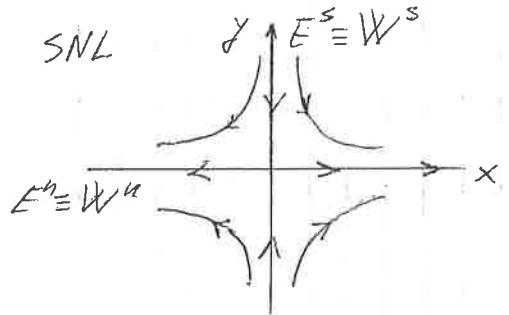


Figura. Silla no lineal en el origen  $(x,y) = (0,0)$

b)  $x(a-by) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=a/b \end{cases}$       $y(dx-c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=c/d \end{cases}$

Por tanto los dos puntos de equilibrio del sistema son  $(x,y) = (0,0)$  (el origen) y  $(x,y) = (c/d, a/b)$ .

La matriz del sistema linealizado en torno a  $(x,y) = (c/d, a/b)$  resulta  $M_{(c/d, a/b)} = \begin{pmatrix} 0 & -bc/d \\ ad/b & 0 \end{pmatrix}$ .

De donde  $T = \text{Tr} M_{(c/d, a/b)} = 0$ ,  $D = \det M_{(c/d, a/b)} = \frac{ad}{b} \cdot \frac{bc}{d} = ac > 0$ . Luego el sistema linealizado entorno al punto  $(x,y) = (c/d, a/b)$  es un centro. Las trayectorias son elipses de la

forma: 
$$\frac{x^2}{(\frac{b}{d} \sqrt{2pc/a})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2p})^2} = 1, \quad (*)$$

con  $p > 0$  libre. Estas elipses se recorren en sentido anti-horario (ver problema 15) y el periodo de estas órbitas es  $p = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}}$ .

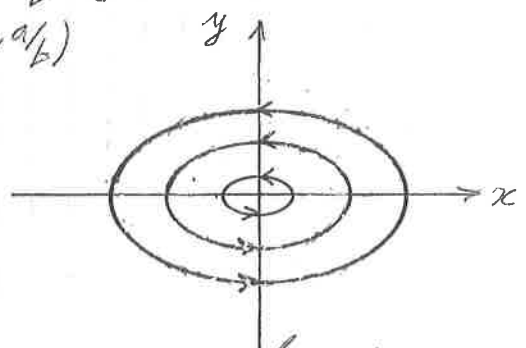


Figura. Linealización en torno a  $(x,y) = (c/d, a/b)$ . Las órbitas son elipses de la forma (\*) y se recorren en sentido anti-horario.

c) El punto de equilibrio  $(x,y) = (0,0)$  es una silla del SNL, por tanto es un punto de equilibrio inestable. En este caso particular las curvas de entrada y de salida de esta silla no lineal son las rectas  $\{x=0\}$  (eje  $y$ ) y  $\{y=0\}$  (eje  $x$ ) respectivamente

La linealización del sistema en torno al punto de equilibrio  $(x,y) = (c/d, a/b)$  produce un centro y, por tanto, no decide la estabilidad.

d) Hemos deducido en el apartado a) que las rectas  $\{x=0\}$  e  $\{y=0\}$  son curvas invariantes del sistema. Por tanto, toda solución que comienza en el 1<sup>er</sup> cuadrante permanece en el 1<sup>er</sup> cuadrante ya que, de otra manera, la órbita correspondiente atravesaría la recta  $\{x=0\}$  o  $\{y=0\}$  por algún punto de éstas y entonces por ese punto de corte pasarían 2 órbitas del sistema, lo cual, como consecuencia del Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones, es imposible en un sistema autónomo.

e)  $V(x,y) = \gamma \ln x + \alpha \ln y - \delta x - \beta y$ , definida para  $x,y > 0$  y con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  estrictamente positivos. Si queremos que  $V$  sea una cantidad conservada (una integral primera) del sistema, entonces tenemos que ajustar  $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$  — en función de  $a, b, c, d > 0$  — de manera que  $W = L_F V \equiv 0$ , i.e.:

$$\begin{aligned}
 W(x,y) &= (L_{\vec{F}} V)(x,y) = \langle \nabla V(x,y), \vec{F}(x,y) \rangle = \frac{\gamma}{x} x(a-by) + \frac{\alpha}{y} y(dx-c) \\
 &\quad - \delta x(a-by) - \beta y(dx-c) \\
 &= (a-by)(\gamma - \delta x) + (dx-c)(\alpha - \beta y) \\
 &= a\gamma - c\alpha + (-a\delta + \alpha d)x + (-b\delta + c\beta)y + (b\delta - d\beta)xy = 0
 \end{aligned}$$

para todo  $x,y > 0$ , luego:

$$\left. \begin{aligned}
 -c\alpha + a\gamma &= 0 \\
 d\alpha - a\delta &= 0 \\
 c\beta - b\delta &= 0 \\
 -d\beta + b\delta &= 0
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 &\text{Resolviendo el sistema:} \\
 &\iff \alpha = \frac{a}{d}\delta, \beta = \frac{b}{d}\delta, \gamma = \frac{c}{d}\delta \\
 &\text{con } \delta > 0 \text{ libre.}
 \end{aligned}$$



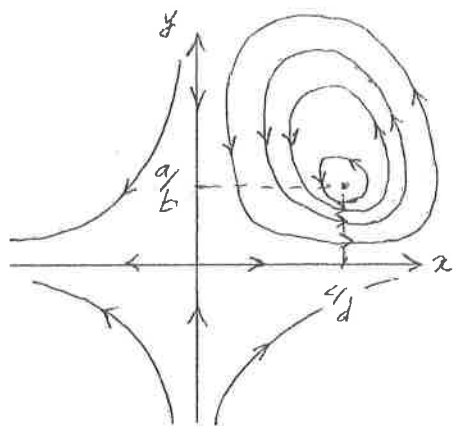


Figura: Las órbitas periódicas alrededor del punto de equilibrio (centro no lineal)  $(x,y) = (c/d, a/b)$  están contenidas en el 1<sup>er</sup> cuadrante y se recorren en sentido anti-horario. El origen  $(x,y) = (0,0)$  es una silla no lineal cuyas curvas de entrada y de salida son las rectas  $\{x=0\}$  e  $\{y=0\}$  respectivamente.

Si tomamos, por ejemplo  $\delta = d$ , entonces:  $\alpha = a$ ,  $\beta = b$ ,  $\gamma = c$  (y  $\delta = d$ ). De esta manera  $V(x,y)$  dada por:

$$V(x,y) = c \ln x + a \ln y - dx - by$$

$(x,y > 0; a,b,c,d > 0)$  es una cantidad conservada del sistema en un entorno del punto de equilibrio  $(x,y) = (c/d, a/b)$ . Como el sistema es 2D y la linealización en torno a este punto da lugar a un centro, se concluye (Definición en los Apuntes de la Asignatura, página 18) que el punto  $(x,y) = (c/d, a/b)$  es un centro no lineal. En el primer cuadrante las soluciones corresponden a trayectorias cerradas que se recorren en sentido anti-horario alrededor del punto de equilibrio  $(x,y) = (c/d, a/b)$ . El periodo de estas soluciones tiende a  $P = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}}$  a medida que se consideran trayectorias cada vez más próximas a  $(x,y) = (c/d, a/b)$ . La figura muestra el croquis (el retrato de fases) de las trayectorias del SNL.

45. (Dos especies competitivas: Modelo y Principio de exclusión). Sean  $x(t)$  e  $y(t)$  las densidades de población de dos especies aisladas que compiten por un recurso limitado. Modelamos la evolución de las poblaciones mediante un sistema no lineal 2D

$$x' = kx(1 - x/m - \alpha y)$$

$$y' = ly(1 - \beta x - y/m)$$

donde todos los parámetros que aparecen son positivos. Para simplificar los cálculos tomaremos  $k=m=\alpha=1$ ,  $l=1/2$ ,  $\beta=3/2$  y  $m=2$ , luego el sistema es

$$x' = x(1-x-y)$$

$$y' = y(2-3x-y)/4$$

- Calcular los puntos de equilibrio del sistema, clasificar los sistemas linealizados en cada uno y estudiar, si es posible, su estabilidad por el método de linealización.
- La componente  $x'$  se anula en el eje vertical y en una recta  $r$ , mientras que  $y'$  se anula en el eje horizontal y en una recta  $s$ . ¿Es posible que una trayectoria que empieza en el primer cuadrante (el único con sentido biológico), salte a otro cuadrante? Justificar la respuesta. Calcular y dibujar las rectas  $r$  y  $s$ . Estas rectas dividen el primer cuadrante en cuatro regiones. Describir el signo que tienen las cantidades  $x'$  e  $y'$  en cada una de estas cuatro regiones e interpretar biológicamente el resultado.
- Esbozar el retrato de fases del sistema. Deducir que, bajo casi cualquier condición inicial, sólo sobrevive una de las dos especies. Esto es el principio de exclusión competitiva.

### Solución

a) Puntos de equilibrio:  $x(1-x-y) = 0 \iff x=0 \text{ ó } x+y=1$   
 $y(2-3x-y)/4 = 0 \iff y=0 \text{ ó } 3x+y=2$

O:  $(x,y) = (0,0)$

A:  $x+y=1, y=0 \iff x=1, y=0$

B:  $x=0, 3x+y=2 \iff x=0, y=2$

C:  $x+y=1, 3x+y=2 \iff x=y=1/2$

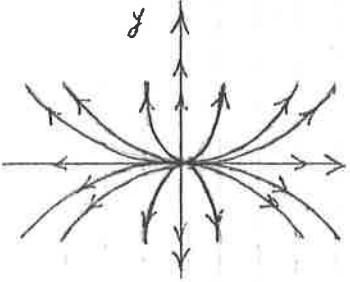
Por tanto, los 4 puntos de equilibrio son:

$O \equiv (0,0), A \equiv (1,0), B \equiv (0,2), C \equiv (1/2, 1/2)$ .

Matriz del sistema linealizado en  $(x,y) = (x_0, y_0)$ .

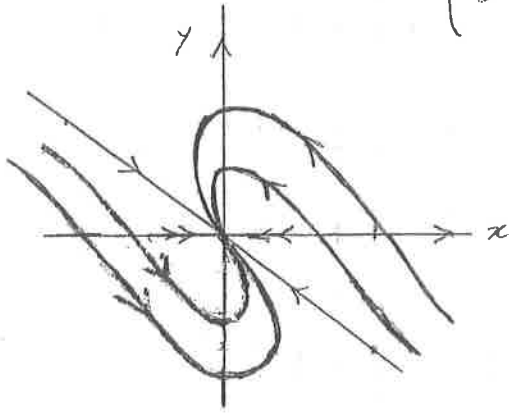
$$M = \begin{pmatrix} 1-2x_0-y_0 & -x_0 \\ -\frac{3}{4}x_0 & \frac{1}{2}-\frac{3}{4}x_0-\frac{1}{2}y_0 \end{pmatrix}$$

• En  $O \equiv (0,0), M_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$  VAPS:  $\lambda_1=1, \lambda_2=1/2$  VEPS:  $\vec{v}_1 = (1,0)^T, \vec{v}_2 = (0,1)^T$



Por tanto el SL es un modo propio repulsor, luego el punto  $O = (0,0)$  es un modo repulsor del SNL y en consecuencia un punto de equilibrio inestable.

• En  $A \equiv (1,0), M_A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}$  VAPS:  $\lambda_1=-1$  VEPS:  $\text{Nuc}(M_A+I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} = [\vec{v}_1 = (1,0)^T]$



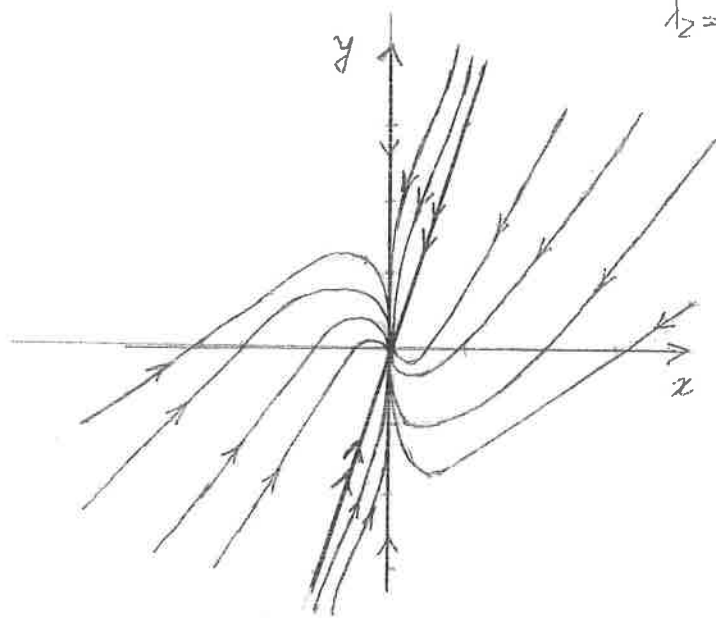
$\lambda_2=-1/4$   $\text{Nuc}(M_A+1/4 I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -3/4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [\vec{v}_2 = (4,-3)^T]$

El SL es un modo propio atractor, luego el punto de equilibrio  $A = (1,0)$  es un modo atractor del SNL y por tanto, asintóticamente estable.

• En  $B = (0, 2)$ ,  $M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$  VAPs VEPs

$\lambda_1 = -1$   $\text{Nuc}(M_B + I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \left[ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$

$\lambda_2 = -1/2$   $\text{Nuc}(M_B + 1/2 I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix} = \left[ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$



El SL es un modo propio atractor. Luego el punto  $B = (0, 2)$  es un modo atractor del SNL y por tanto, AE.

• En  $C = (1/2, 1/2)$ ,  $M_C = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -3/8 & -1/8 \end{pmatrix}$

$p(t) = t^2 - \text{Tr} M_C t + \det M_C = t^2 + 5/8 t - 1/8$ , de donde  $\lambda_{1,2} = \frac{-5/8 \pm \sqrt{25/64 + 4/8}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{57}}{16}$

VAPs	VEPs
$\lambda_1 = \frac{-5 + \sqrt{57}}{16} = 0.159$	$\vec{v}_1 = (-8, 3 + \sqrt{57})^T$
$\lambda_2 = \frac{-5 - \sqrt{57}}{16} = -0.784$	$\vec{v}_2 = (-8, 3 - \sqrt{57})^T$

El SL es una silla, luego el punto  $C = (1/2, 1/2)$  es una silla no lineal del SNL.

B)  $x'$  se anula sobre las rectas  $\{x=0\}$  (eje y) y  $r \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=1-x\}$ .

$y'$  " " " " "  $\{y=0\}$  (eje x) y  $s \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=2-3x\}$ .

Las rectas  $r$  y  $s$  están representadas en el retrato de fases del sistema (ver figura). Una trayectoria que comienza en el 1er cuadrante no puede escapar a los otros cuadrantes porque entonces 'cortaría' el eje  $x$  o el eje  $y$ ; pero, como el sistema es autónomo sabemos que, a consecuencia del Teorema de Existencia y Unicidad, si dos órbitas se tocan en un punto, entonces coinciden.

En el cuadrilátero de vértices  $O, D, C, E$   $x', y' > 0$  luego ambas poblaciones crecen (Ver el retrato de fases al final del ejercicio). En la región comprendida en el triángulo  $B, D, C$   $x' < 0, y' > 0$ , luego la segunda especie prospera y la primera decrece. En la región del plano de fases comprendida en el triángulo de vértices  $E, C, A$   $x' > 0$  e  $y' < 0$ , luego en esta zona es la primera especie la que crece y la segunda la que decrece. Por último en el dominio no acotado que se sitúa por encima de la línea quebrada  $B, C, A$  de la figura  $x' < 0$  e  $y' < 0$  y las dos especies decrecen. (Ver las soluciones que acompañan a los enunciados).

c) Retrato de fases del sistema

$$x' = x(1-x-y)$$

$$y' = y(2-3x-y)/4$$

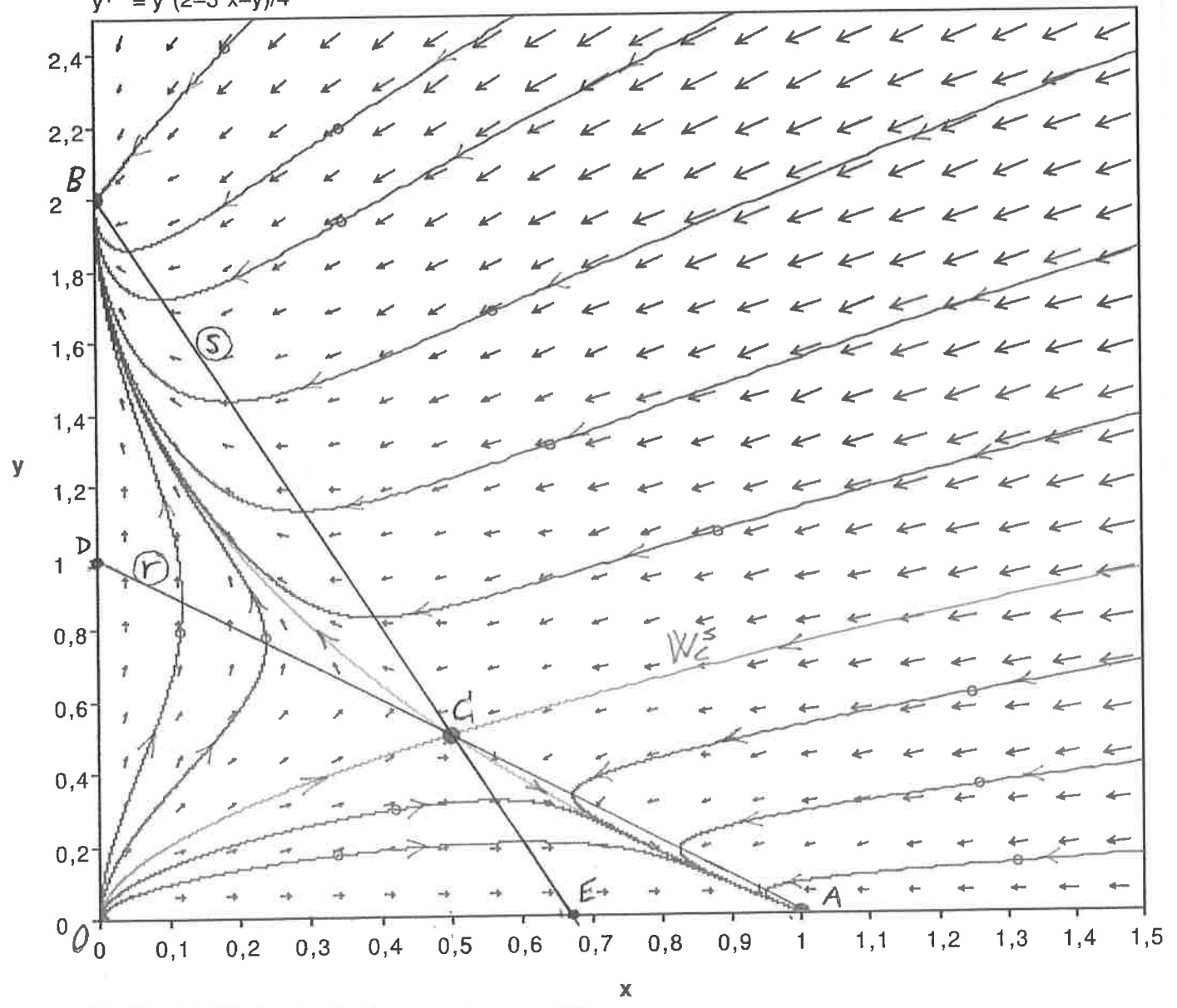


Figura: retrato de fases (croquis de las trayectorias). Vemos que todas las trayectorias que comienzan por encima de la curva invariante de entrada del punto  $G$ , la variedad estable  $W_C^s$  en la figura, describen una evolución en la que la población de la 2ª especie aumenta y la de la 1ª especie disminuye. Sucede lo contrario si se consideran condiciones iniciales en el 1º cuadrante por debajo de la curva invariante  $W_C^s$  (ver las soluciones que acompañan a los enunciados).

40. (Grandes Lagos: Wikipedia y Documentos de S. McKelvey)

Volem estudiar com evoluciona la concentració d'un contaminant en els llacs Erie i Ontario, connectats per un riu que flueix d'Eire a Ontario. Farem la hipòtesi que el contaminant es dissol uniformement a l'aigua.

(i) Siguin  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  les concentracions de contaminants als llacs Erie i Ontario respectivament, a l'instant  $t$ . Justifiquen el sistema d'equacions diferencials ordinàries següent:

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= \frac{r_1(e_1 - x_1)}{V_1}, \\ x_2' &= \frac{r_1 x_1 + (r_2 - r_1)e_2 - r_2 x_2}{V_2}, \end{aligned} \right\}$$

on:

- $V_1, V_2$  són els volums dels dos llacs, en  $\text{Km}^3$ ,
- $r_1, r_2$  són les velocitats d'entrada i sortida de l'aigua, en  $\text{Km}^3/\text{any}$  i  $r_2 > r_1$ ,
- $e_1, e_2$  són les concentracions de contaminants que entren a cada llac des de l'exterior.

(ii) Poseu  $V_1/r_1 = 2.6$ ,  $V_2/r_2 = 7.8$ ,  $r_1 = \frac{5}{6}r_2$ . Suposant que ha cessat la contaminació externa ( $e_1 = e_2 = 0$ ), trobeu una matriu fonamental del sistema i resoleu-lo amb les condicions inicials  $x_1(0) = x_1^0$ ,  $x_2(0) = x_2^0$ .

(iii) Resoleu ara el sistema amb constants  $e_1, e_2$  qualsevol, i amb les condicions inicials  $x_1(0) = x_1^0$ ,  $x_2(0) = x_2^0$ . Quin és el límit de les concentracions  $x_1(t), x_2(t)$  quan  $t \rightarrow +\infty$ ?

(iv) Torneu al cas en què no hi ha contaminació externa ( $e_1 = e_2 = 0$ ), i suposeu que inicialment la concentració de contaminant és el doble que al llac Ontario sigui el 5% de la inicial?

Indicació: pel darrer apartat heu de resoldre  $x_2(t) = 0.05 x_2^0$  en la solució de (ii). Useu solve.





— i.e., la solució general del corresponent sistema homogeni —, mentre que  $X_p(t)$  és una solució particular. Idea: com que en aquest cas el terme no homogeni és constant buscarem una solució particular constant. Així, si impossem que  $X_p(t) \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  verifiqui el sistema

(1) trobem:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = X_p'(t) = A X_p(t) + \vec{b} \implies X_p(t) \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -A^{-1} \vec{b} = \begin{pmatrix} 2/6 & 0 \\ 5/6 & 7/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1/2/6 \\ e_2/6/7/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ 5/6 e_1 + 1/6 e_2 \end{pmatrix}$$

El resultat final és doncs:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (X_h(t) + X_p(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} X_h(t) + \begin{pmatrix} e_1 \\ 5/6 e_1 + 1/6 e_2 \end{pmatrix}$$

" (equació (2))  
0

$$= \begin{pmatrix} e_1 \\ 5/6 e_1 + 1/6 e_2 \end{pmatrix}$$

(iv)  $e_1 = e_2 = 0$  (tornem al cas homogeni). La solució general  $X_h(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$  és la donada per (2)

$X_1(0) = 2X_2(0)$ : concentració inicial de contaminants al llac E doble que al llac O.

Segons (2):  $c_1 = x_1(0) = 2x_2(0) = 2(c_2 - \frac{5}{12}c_1) \implies c_1 = \frac{12}{11}c_2$ ; i per tant la solució és ara:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/11 e^{-t/2/6} \\ e^{-t/7/8} - 5/11 e^{-t/2/6} \end{pmatrix} c_2,$$

i busquem  $t = \tau$  tal que:

$$\frac{X_2(\tau)}{X_2(0)} = 0.05 \iff \frac{(e^{-\tau/7/8} - \frac{5}{11} e^{-\tau/2/6}) c_2}{(1 - \frac{5}{11}) c_2} = 0.05 \iff \frac{e^{-\tau/7/8} - \frac{5}{11} e^{-\tau/2/6}}{1 - \frac{5}{11}} = 0.05 \frac{6}{11}$$

aquesta última és l'equació que s'ha de resoldre, per exemple, amb la comanda solve del MATLAB:

$\gg f = \text{inline}(' \exp(-t/7.8) - 5 * \exp(-t/2.6) / 11 - 0.3/11, 't');$

$\gg x = \text{linspace}(0, 50, 300); y = \text{feval}(f, x);$

$\gg \text{plot}(x, y, '-');$

$\gg \text{hold on};$

[aldrà posar: ./, .\*, .^ quan faci falta (a la pràctica inline treballa com un m-file).

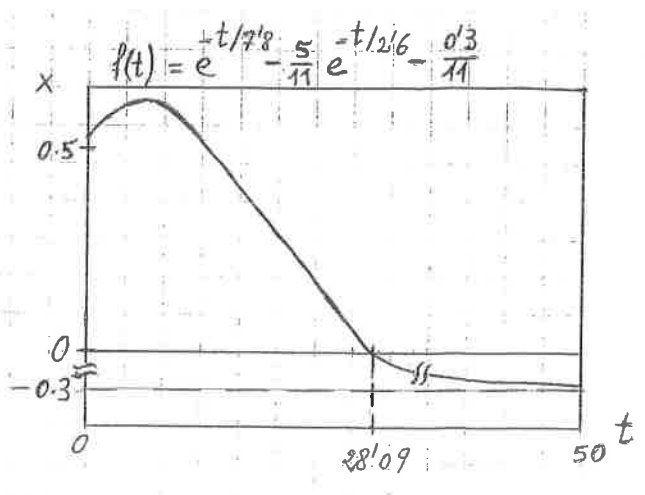
```

>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
>> title('f(x) = exp(-t/7.8) - 5 * exp(-t/2.6)/11 - 0.3/11')
>> grid on
>> [x, fx] = fzero(f, 25, optimset('TolFun', 1.e-14))

x =
    28.0919

fx =
    1.8041e-16

```



Així, el temps per a que la concentració de contaminants al llac 0 sigui el 5% de la inicial és,

$$\tau = 28'092 \text{ anys.}$$



# 47. PESCANDO PLATELMINTOS

Solución del Prof. Rafael Ramírez.

## 1. ENUNCIADO DEL PROBLEMA

Un científico tiene una muestra de líquido que contiene varias especies diferentes de "platelmintos fototrópicos" que siempre nadan en dirección a la luz más cercana. Se sabe que cada especie nada a una velocidad diferente. Para aislar y extraer la especie que nada a velocidad  $v$ , el científico coloca el líquido en un recipiente cilíndrico de cristal (una cuba) de radio  $r$ . A continuación, hace girar el recipiente con velocidad angular  $\omega > v/r$  situándolo enfrente de una única fuente luminosa. Obviamente, los platelmintos nadan en dirección a la luz, en contra del sentido de giro del líquido.

El científico espera que los platelmintos que busca se acumulen en un cierto punto  $(x_0, y_0)$  del recipiente cuando  $t \rightarrow \infty$  (el experimento se inicia con  $t = 0$ ), de modo que puedan ser extraídos de la cuba con una simple cucharilla. Queremos ver que existe ese punto de acumulación (o atractor global).

## 2. DESARROLLO DEL PROBLEMA

Trabajando en coordenadas cartesianas  $(x, y)$  y situando la fuente luminosa en el punto  $(r, 0)$ , las ecuaciones del movimiento de los platelmintos son

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = -\omega y + \frac{v(r-x)}{\sqrt{(r-x)^2 + y^2}} \\ \dot{y} = g(x, y) = \omega x - \frac{vy}{\sqrt{(r-x)^2 + y^2}} \end{cases}$$

El término  $(-\omega y, \omega x)$  proviene de la rotación en sentido anti-horario de la cuba. El término  $\frac{v(r-x, -y)}{\sqrt{(r-x)^2 + y^2}}$  representa el avance de los platelmintos hacia el punto luminoso.

El punto crítico es la solución del sistema no lineal

$$\begin{cases} \omega y_0 = \frac{v(r-x_0)}{\sqrt{(r-x_0)^2 + y_0^2}} \\ \omega x_0 = \frac{vy_0}{\sqrt{(r-x_0)^2 + y_0^2}} \end{cases}$$

Dividiendo las dos ecuaciones se obtiene que  $y_0/x_0 = (r-x_0)/y_0$ . Así pues,  $y_0^2 = x_0(r-x_0)$ . Elevando al cuadrado la primera ecuación queda  $\omega^2 y_0^2 = \frac{v^2(r-x_0)^2}{(r-x_0)^2 + y_0^2}$ . Usando que  $y_0^2 = x_0(r-x_0)$ , se deduce que

$$x_0 = v^2/\omega^2 r \quad y_0 = +\sqrt{x_0(r-x_0)} = v\sqrt{\omega^2 r^2 - v^2}/\omega^2 r.$$

La solución  $y_0 = -\sqrt{x_0(r-x_0)}$  no es válida pues la primera ecuación implica que  $y_0 > 0$ .

La estabilidad del punto  $(x_0, y_0)$  se puede determinar por el método de linealización. Sea  $A$  la matriz del sistema linealizado entorno el punto  $(x_0, y_0)$ . Calculamos las derivadas parciales

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{-y_0^2 v}{((r-x_0)^2 + y_0^2)^{3/2}} = \frac{-x_0 v}{r^{3/2} \sqrt{r-x_0}} = \frac{-v^3}{\omega r^2 \sqrt{\omega^2 r^2 - v^2}} \\ b &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\omega - \frac{(r-x_0)y_0 v}{((r-x_0)^2 + y_0^2)^{3/2}} = -\omega - \frac{v\sqrt{x_0}}{r^{3/2}} = -\omega - \frac{v^2}{\omega r^2} \\ c &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \omega - \frac{(r-x_0)y_0 v}{((r-x_0)^2 + y_0^2)^{3/2}} = \omega - \frac{v\sqrt{x_0}}{r^{3/2}} = \omega - \frac{v^2}{\omega r^2} \\ d &= \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{-(r-x_0)^2 v}{((r-x_0)^2 + y_0^2)^{3/2}} = \frac{-v\sqrt{r-x_0}}{r^{3/2}} = \frac{-v\sqrt{\omega^2 r^2 - v^2}}{\omega r^2} \end{aligned}$$

La traza, el determinante y el discriminante de la matriz  $A$  son:

$$T = a + d = -\frac{v}{\sqrt{\omega^2 r^2 - v^2}} < 0$$

$$D = ad - bc = \omega^2 > 0$$

$$\Delta = T^2 - 4D = \frac{(1 + 4\omega^2)v^2 - 4r^2\omega^4}{\omega^2 r^2 - v^2}$$

El discriminante pasa de negativo a positivo cuando  $v$  cruza el valor  $v_* = 2r\omega^2/\sqrt{1 + 4\omega^2}$ . Por tanto, el sistema linealizado es:

- Un foco estable cuando  $0 < v < v_*$ .
- Un nodo impropio estable cuando  $v = v_*$ .
- Un nodo propio estable cuando  $v_* < v < \omega r$ .

Por tanto, el punto  $(x_0, y_0)$  es un punto crítico asintóticamente estable del sistema no lineal para todos los valores de  $\omega$ ,  $r$  y  $v$  tales que  $v < \omega r$ . En particular,  $(x_0, y_0)$  es un *atractor local*: si el platelminto está suficientemente cerca, tenderá a dicho punto.

Mediante técnicas un poco más avanzadas de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias en el plano (a saber, el Teorema de Poincaré-Bendixon y el Criterio de Bendixon), se puede probar que el punto de equilibrio es un *atractor global*: todas los platelmintos tienden a dicho punto, sin importar donde estén. A grandes rasgos, basta comprobar que las trayectorias no pueden acabar en ningún otro sitio, pues sólo hay un punto de equilibrio y el sistema no tiene órbitas periódicas.

Nótese que  $(x_0, y_0)$  siempre está situado sobre la circunferencia de radio  $r/2$  y centro  $(r/2, 0)$ :

$$(x_0, y_0) \in C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - r/2)^2 + y^2 < r^2/4\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x(x - r)\}$$

Esta circunferencia no depende de las velocidades  $v$  y  $\omega$ .

A continuación, vamos a utilizar una técnica que vimos al hablar del método de Liapounov, aunque con un objetivo ligeramente diferente. Sea  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  una función que mide la distancia del punto  $(x, y)$  al centro de la cuba. Su derivada temporal  $\dot{V}(x, y) = W(x, y)$  es positiva (respectivamente, negativa) si y sólo si el punto  $(x, y)$  está dentro (respectivamente, fuera) de la circunferencia  $C$ , ya que

$$\dot{V}(x, y) = \frac{v(x(r-x) - y^2)}{\sqrt{(r-x)^2 + y^2}} = \frac{v(r^2/4 - (r/2 - x)^2 - y^2)}{\sqrt{(r-x)^2 + y^2}}$$

Esto significa que cuando el platelminto está dentro de la circunferencia  $C$  se aleja del centro de la cuba, mientras que si está fuera se acerca. En particular, el platelminto no se puede salir de la cuba (algo intuitivamente obvio, pero que es necesario comprobar para validar el modelo).

### 3. PREGUNTAS

Existen varios resultados que tratan la dependencia de soluciones de edo's respecto condiciones iniciales y parámetros del sistema. Los más importantes son los siguientes:

- Las soluciones dependen de forma continua respecto las condiciones iniciales. En nuestro caso, esto significa que dos platelmintos de la misma especie que empiezan a nadar muy juntos, siempre estarán muy juntos. Obviamente, si son de especies diferentes pueden alejarse mucho.
- Las soluciones dependen de forma continua respecto los parámetros del sistema. En nuestro caso, esto implica que dos platelmintos de especies similares (es decir, que nadan a velocidades parecidas) tienden a puntos cercanos. En términos más técnicos, diríamos que el atractor global depende continuamente de los parámetros  $\omega$  y  $v$ .

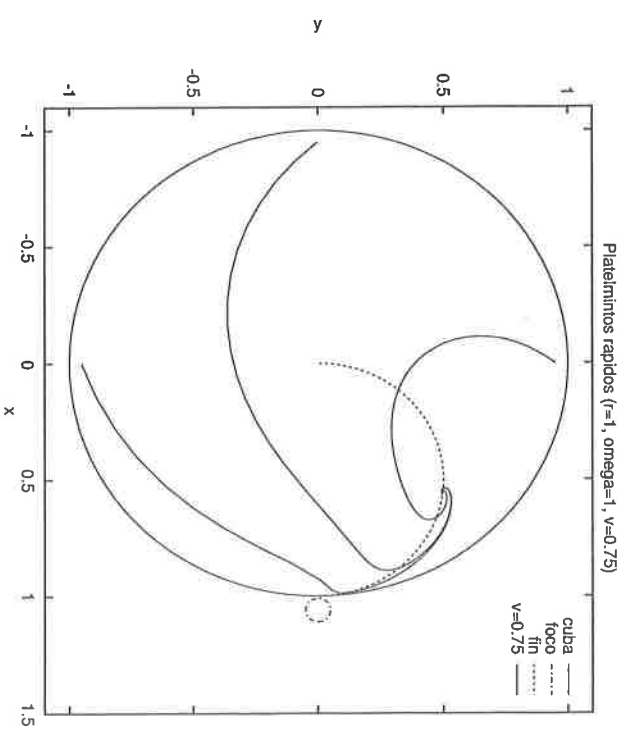
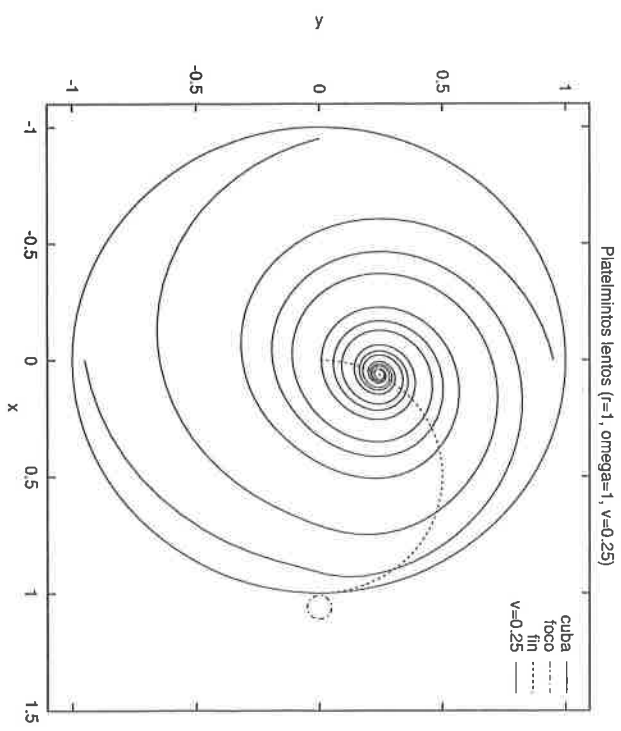
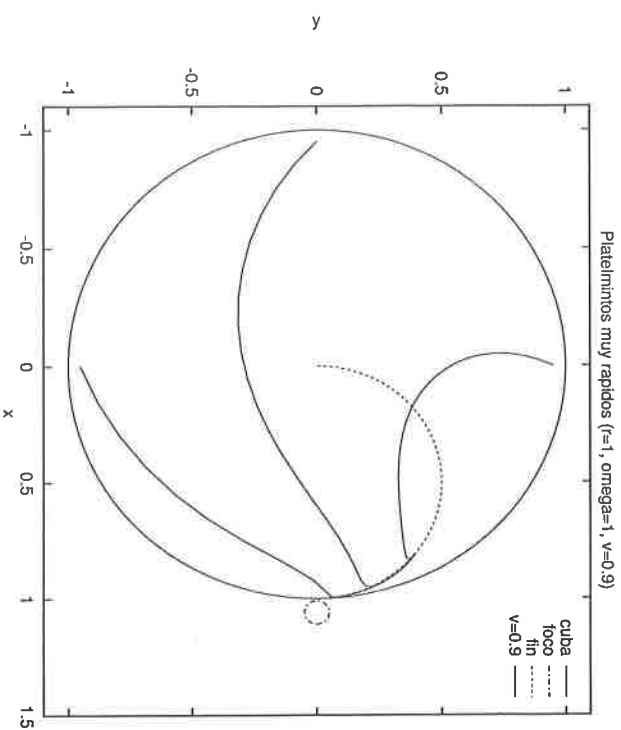
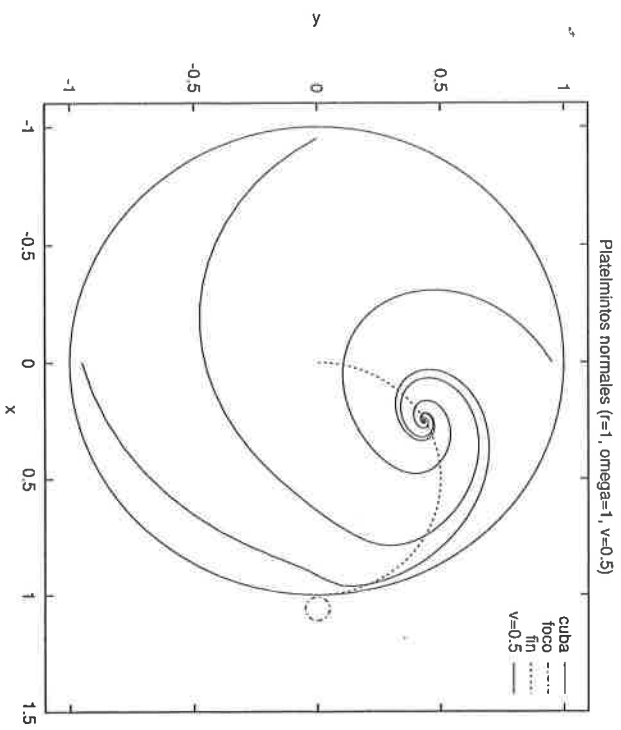
Una vez que sabemos que el atractor global  $(x_0, y_0)$  depende continuamente de los parámetros del sistema, tiene sentido que nos preguntemos a qué tiende dicho atractor cuando los platelmintos son muy rápidos:  $v \nearrow \omega r$  y cuando son muy lentos:  $v \searrow 0$ . Es decir, calculad  $\lim_{v \nearrow \omega r} (x_0, y_0)$  y  $\lim_{v \searrow 0} (x_0, y_0)$ . ¿Qué pasaría si  $v \geq \omega r$ ? La intuición física basta para encontrar las respuestas. Las fórmulas halladas reafirman la intuición.

→ Nótese que la divergencia es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-v}{\sqrt{(r-x)^2 + y^2}}$$

$< 0$  ( $> 0$ )

⇒ No hay op's





```

function [xa,ya]=platelmintos(r,omega,v,x0,y0,tf) Autor: Prof. Rafael Ramirez.
%Comprobamos que el punto dado esta dentro de la cubeta.
if (x0^2+y0^2)^(1/2)>=r
    disp('No es pot fer, ja que el punt donat es troba fora del recipient');
    xa='no existeix';
    ya='no existeix';
else
    %Con la opcion ode45 encontramos la trayectoria del platelminto (la edo esta
    %escrita en un fichero a parte llamado edo.
    [t,x]=ode45(@platelmintos_edo,[0 tf],[x0 y0],[],v,r,omega);
    %Encontramos el punto pedido por el problema, solucionando el punto critico.
    xa=v^2/(omega^2*r);
    ya=sqrt(xa*(r-xa));

    %Dibujamos el contorno de la cubeta.
    cuv=vectorize(inline(['(' num2str(r) '^2-eje^2)^(1/2)']));
    eje=linspace(-r,r,100);
    for j=1:100
        yvalor(j)=feval(cuv,eje(j));
    end
    plot(eje,yvalor,'k')
    hold all
    axis([-r-1 r+1 -r-1 r+1])
    axis equal
    axis manual
    plot(eje,-yvalor,'k')
    %Marca el punto donde se encuentra la luz.
    plot(r,0,'o')
    %Con una estrella de cinco puntas marcamos el punto donde dejamos
    %inicialmente los platelminos.
    plot(x0,y0,'p')
    %Los platelminos tienden al punto simbolizado por una x.
    plot(xa,ya,'x')
    %Con una linea se marca el trayecto que han recorrido.
    plot(x(:,1),x(:,2))
    %Asignando a la p el numero 1 le decimos al programa que todo punto del que
    %queramos saber la trayectoria y que nos lo dibuje tiene que ser
    %clicado con el boton izquierda del raton. Para finalizarlo solo nos
    %hace falta apretar una tecla cualquiera o boton que no sea el dicho.
    p=1;
    while(p==1)
        [x0,y0,p]=ginput(1);
        %Si por error clicamos fuera de la cubeta, el programa tiene que tener
        %en cuenta que desde ese punto no existe trayectoria.
        if (x0^2+y0^2)^(1/2)>=r
            else
                [t,x]=ode45(@platelmintos_edo,[0 tf],[x0 y0],[],v,r,omega);
                plot(x(:,1),x(:,2))
            end
        end
    end
    hold off
end
end

```

Fitxer: /tmp/platelmintos\_edo.m

function dx=platelmintos\_edo(t,x,v,r,omega)

% Autor: Prof. Rafael Ramirez.

dx=zeros(2,1);

$$dx(1) = (-1) * \omega * x(2) + (v * (r - x(1))) / ((r - x(1))^2 + x(2)^2)^{1/2};$$

$$dx(2) = \omega * x(1) - (v * x(2)) / ((r - x(1))^2 + x(2)^2)^{1/2};$$

