ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES (EDPs)

1. (Cambio de variable dependiente). Probar que el cambio de variables transforma la EDP no lineal de segundo orden $W_t = W_{xx} + (W_x)^2$ en una ecuación 1D homogénea

$$u_t = W_t e^W$$
$$u_x = W_x e^W$$
$$u_{xx} = W_{xx} e^W + (W_x)^2 e^W$$

Luego: $u_t = W_t e^W = e^W(W_{xx} + (W_x)^2) = u_{xx}$ $\square$

2. (Una propiedad de "disipación" de calor 1D). Sea $u(x,t)$ una solución del PVI:

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} && x\in(0,\pi) \quad t>0\\ &u(x,0) = f(x) && x\in(0,\pi)\\ &u(0,t) = 0 && t>0\\ &u(\pi,t) = 0 && t>0 \end{aligned}$$

Probar que la función $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,t)\,dx$ nunca es creciente ¿Cuándo es constante? ¿Y cuándo estrictamente decreciente? Interpretar físicamente el resultado.

Solución: $E'(t) = \frac{1}{2}\int_0^L 2u(x,t)\,u_t(x,t)\,dx = \frac{K^2}{2}\int_0^L 2u(x,t)\,u_{xx}(x,t)\,dx$

$$= K^2 u(x,t)\,u_x(x,t)\Big|_{x=0}^{x=L} - K^2\int_0^L (u_x(x,t))^2 dx = K^2\underbrace{\big(u(L,t)\cdot u_x(L,t) - u(0,t)u_x(0,t)\big)}_{=0}$$

$$-K^2\int_0^L (u_x(x,t))^2 dx = -K^2\int_0^L (u_x(x,t))^2 dx \leq 0 \quad \forall t>0$$

Por tanto $E(t)$ nunca es creciente. Sea $t=t_0>0$ t.q. $E'(t_0)=0 \iff u_x(x,t_0)=0$ $\forall x\in(0,L)$, de donde $u(x,t_0) = A(t_0)$. Como $u(0,t_0) = 0 = u(L,t_0)$, por continuidad $A(t_0) = \lim_{x\to 0} u(x,t_0) = u(0,t_0) = 0$ y $u(x,t_0)=0$ $\forall x\in(0,L)$. Esto implica que $E(t_0)=0$; pero $E'(t)\leq 0$ y $E(t)\geq 0$ $\forall t>0$. De aquí se sigue que $E(t)=0 \ \forall t \geq 0$ y entonces $u(x,t)=V(x)=0 \ \forall t \geq t_0$. "Es decir, la función $E(t)$ es estrictamente decreciente, excepto cuando estamos en el equilibrio térmico del problema: $V(x) \equiv 0$" (Ver solución en los enunciados). En este caso el equilibrio térmico del problema (steady state) corresponde a temperatura constante igual a cero $V(x) \equiv 0$.

La temperatura se mantiene fijada a cero en los extremos y el calor puede fluir libremente éste se distribuye de manera que la temperatura tiende a cero en toda la barra. $\square$

3 (Conservación de la energía en Ondas 1D). Dada una solución $u(x,t)$ de la ecuación $\rho u_{tt} = \tau u_{xx}$, definimos su <u>densidad de energía</u> y su <u>flujo de energía</u> como las funciones

$$e(x,t) = \frac{\rho u_t^2(x,t)}{2} + \frac{\tau u_x^2(x,t)}{2}, \quad f(x,t) = -\tau u_t(x,t)\, u_x(x,t),$$

respectivamente. Probar que $e_t + f_x = 0$.

a) Sea $u(x,t)$ una solución del PVI con condiciones de Neumann homogéneas

$$\begin{aligned}
&\rho u_{tt} = \tau u_{xx} && 0<x<L, \quad t\in\mathbb{R}\\
&u(x,0) = f(x) && 0<x<L\\
&u_t(x,0) = g(x) && 0<x<L\\
&u_x(0,t) = 0 && t\in\mathbb{R}\\
&u_x(L,t) = 0 && t\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Probar que la energía total de la cuerda vibrante:

$$E(t) := \int_0^L e(x,t)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L \rho u_t^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L \tau u_x^2(x,t)\,dx$$

es constante.

b) Encontrar otras condiciones de frontera, que no sean las de Neumann homogéneas, que también conserven la energía.

c) Expresar la energía inicial en función de la posición y velocidades iniciales.

Solución.

a) $e_t + f_x = \rho u_t(x,t)\, u_{tt}(x,t) + \tau u_x(x,t)\, u_{xt}(x,t) - \tau u_{tx}(x,t)\, u_x(x,t)$
$- \tau u_t(x,t)\, u_{xx}(x,t) = u_t(x,t)\left(\rho u_{tt}(x,t) - \tau u_{xx}(x,t)\right) = 0.$

$\left(\begin{array}{l} u_{xt} = u_{tx} \\ \text{per ex. si } u \in C^2 \end{array} \right)$

$$E'(t) = \int_0^L e_t(x,t)\,dx \overset{(a)}{=} -\int_0^L f_x(x,t)\,dx = f(0,t) - f(L,t) = \tau u_t(L,t)\overset{=0}{u_x(L,t)} - \tau u_t(0,t)\overset{=0}{u_x(0,t)} = 0$$

b) Condiciones de Dirichlet constantes $u(0,t) = c_1$, $u(L,t) = c_2$, lo que implica $u_t(0,t) = 0 = u_t(L,t)$.

Condiciones periódicas:

$$u(0,t) = u(L,t) \implies u_t(0,t) = u_t(L,t)$$
$$u_x(0,t) = u_x(L,t)$$

c) $$E(0) = \frac{1}{2}\int_0^L \rho\, u_t^2(x,0)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L \tau\, u_x^2(x,0)\,dx$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\int_0^L \rho\, g^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L \tau\left(f'(x)\right)^2 dx$$

$(*)$ $u_x(x,0) = f'(x)$

4) (Cuerda vibrante infinita bajo la acción de una fuerza externa) Resolver el PVI

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & x \in \mathbb{R},\quad t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

con $F(x,t) = (t^2+2)\sin x$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = 4$ y $c = 1$. Probar que la solución obtenida __no__ es igual a la superposición de dos ondas viajando en sentidos opuestos a velocidad $c = 1$.

Solución. Aplicamos la fórmula de d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy + \frac{1}{2c}\int_0^t ds \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y,s)\,dy$$

$c=1$
$f(x)=\sin x$
$g(x)\equiv 1$
$F(x,t)=(t^2+2)\sin x$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin(x+t)+\sin(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 1\,dy + \frac{1}{2}\int_0^t (s^2+2)\,ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} \sin y\,dy$$

$$= \sin x\cos t + t + \frac{1}{2}\int_0^t (s^2+2)\left(\cos(x-t+s)-\cos(x+t-s)\right) ds$$

Calculamos la integral:

$$\frac{1}{2}\int_0^t (s^2+2)\left(\cos(x-t+s)-\cos(x+t-s)\right) ds = \sin x\int_0^t (s^2+2)\sin(t-s)\,ds =$$

$$\cos(x-t+s)-\cos(x+t-s) = \cos x\cos(t-s)+\sin x\sin(t-s) - \cos x\cos(t-s)+\sin x\sin(t-s) = 2\sin x\sin(t-s)$$

$$\underset{\text{partes}}{=} \left\{\begin{matrix} u=s^2+2 \,:\, u'=2s \\ v'=\sin(t-s) \,:\, v=\cos(t-s)\end{matrix}\right\} = \sin x\left[(s^2+2)\cos(t-s)\Big|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t -2s\cos(t-s)\,ds\right]$$

$$\underset{\text{parts}}{=} \left\{\begin{matrix} u=2s \,:\, u'=2 \\ v'=-\cos(t-s) \,:\, v=\sin(t-s)\end{matrix}\right\} = \sin x\left[t^2+2-2\cos t + \left[2s\sin(t-s)\right]_{s=0}^{s=t} - \int_0^t 2\sin(t-s)\,ds\right] = \sin x\cdot\left(t^2+2-2\cos t-2+2\cos t\right) = t^2\sin x$$

Entonces:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+t)+\sin(x-t)\right] + t + t^2\sin x$$

Esta solución no es la superposición de dos ondas desplazándose en sentidos opuestos a velocidad $c=1$

Como se indica en las soluciones, supongamos que existen $p,q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.q. $u(x,t)=p(x+t)+q(x-t)$. Veremos que se llega a una contradicción. En efecto, primero tenemos, por las ci para $t=0$:

$$u(x,0) = p(x)+q(x) = \sin x$$

$$u_t(x,0) = p'(x)-q'(x) = 1$$

de donde:
$$\left.\begin{aligned} p'(x)+q'(x) &= \cos x \\ p'(x)-q'(x) &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} p'(x) &= \tfrac{1}{2}(1+\cos x) \Longrightarrow p(x) = \tfrac{1}{2}(x+\sin x+\alpha) \\ q'(x) &= \tfrac{1}{2}(\cos x-1) \Longrightarrow q(x) = \tfrac{1}{2}(\sin x - x+\beta) \end{aligned}$$

$$p(x)+q(x) = x/2 + \tfrac{1}{2}\sin x + \alpha/2 + \tfrac{1}{2}\sin x - x/2 + \beta/2 = \sin x \iff \alpha = -\beta,$$

Luego:
$$p(x) = \tfrac{1}{2}(x+\sin x) + \alpha/2, \quad q(x) = \tfrac{1}{2}(\sin x - x) - \alpha/2,$$

para alguna constante $\alpha \in \mathbb{R}$. Pero entonces:

$$p(x+t)+q(x-t) = \tfrac{1}{2}\left(x+t+\sin(x+t)+\sin(x-t)-x+t\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\sin(x+t)+\sin(x-t)\right)+t$$
$$\neq u(x,t) = \tfrac{1}{2}\left(\sin(x+t)+\sin(x-t)\right)+t+t^2\sin x.$$

Contradicción! $\square$

5) (Homogeneizar EDP) Queremos resolver el PVI,

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = \sin t + \cos x && x\in\mathbb{R} \quad t\in\mathbb{R} \\ &u(x,0) = 0 && x\in\mathbb{R} \\ &u_t(x,0) = 0 && x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

a) Resolver el problema aplicando directamente la fórmula de D'Alembert.

b) Encontrar una solución particular $z(t)$ que no dependa de la posición, de la ecuación $u_{tt}-u_{xx} = \sin t$. Encontrar una solución particular $w(x)$, que no dependa del tiempo, de la ecuación $u_{tt}-u_{xx} = \cos x$.

c) Probar que el cambio $v(x,t) = u(x,t) - w(x) - z(t)$ transforma el PVI original en el PVI:
$$\begin{aligned} &v_{tt}-v_{xx} = 0 && x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R} \\ &v(x,0) = f(x) && x\in\mathbb{R} \\ &v_t(x,0) = g(x) && x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Calcular las funciones f y g

d) Resolver el nuevo PVI y, a continuación, recuperar la solución del PVI original

Solución.

a) Aplicamos la formula de d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy + \frac{1}{2c}\int_0^t ds \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y,s)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} (\sin s + \cos y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^t ds \left(y\sin s + \sin y\right)\Big|_{y=x-t+s}^{y=x+t-s}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t ds \left((x+t-s)\sin s + \sin(x+t-s) - (x-t+s)\sin s - \sin(x-t+s)\right)$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\Big[-2t\cos(s) + 2s\cos(s) - 2\sin(s) + \cos(x+t-s) + \cos(x-t+s)\Big]_{s=0}^{s=t}$$

$$= -2t\cos t + 2t\cos t - \sin t + \cos x + t \underbrace{-\cos(x+t) - \cos(x-t)}_{\overset{\shortparallel}{-2\cos x\cos t}}$$

$$= t - \sin t + (1-\cos t)\cos x$$

(*) $2t\sin s - 2s\sin(s) + \sin(x+t-s) - \sin(x-t+s)$
$\int s\sin(s)\,ds = -s\cos(s) + \sin(s)$ (Integració per parts)

Es decir:

$$\boxed{u(x,t) = t - \sin t + (1-\cos t)\cos x, \quad x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}}$$

b) $Z(t) = -\sin t$ (en efecto: $Z'(t) = -\cos t \Rightarrow Z''(t) = \sin t$)

$W(\,) = \cos x$ (" " $W'(x) = -\sin x \Rightarrow W''(x) = -\cos x \Rightarrow -W''(x) = \cos x$)

c) Suponiendo que $u = u(x,t)$ es solución del PVI original:

$$V_{tt} - V_{xx} = u_{tt} - Z''(t) - u_{xx} + W''(x) = u_{tt} - u_{xx} - (Z''(t) - W''(x))$$

$$= \sin t + \cos x - \sin t - \cos x = 0$$

$$V(x,0) = u(x,0) - W(x) - Z(0) = 0 - \cos x =: f(x)$$

$$V_t(x,0) = u_t(x,0) - Z'(0) = 1 := g(x)$$

Entonces: $V_{tt} - V_{xx} = 0,\ x\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R};\ V(x,0) = -\cos x,\ x\in\mathbb{R};\ V_t(x,0) = 1,\ x\in\mathbb{R};$ (&)

e identificamos $f(x) := -\cos x$, $g(x) \equiv 1$

d) Aplicando la fórmula de d'Alembert al PVI (&) se obtiene:

$$V(x,t) = \frac{1}{2}\left(-\cos(x+t) - \cos(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 1\,dy,$$

y deshaciendo el cambio de función

$$u(x,t) = V(x,t) + W(x) + Z(t) = -\cos x \cos t + t + \cos x - \sin t$$
$$= t - \sin t + (1-\cos t)\cos x, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$$

recuperamos la solución anterior.

6. (Calor 1D con condiciones de frontera mixtas). Sea $u(x,t)$ una solución del PVI

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in (0,\pi) \quad t>0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = 0 & t>0 \\ u(\pi,t) = 0 & t>0 \end{cases}$$

a) Encontrar una expresión de la derivada de la función

$$T(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u(x,t)\,dx$$

que sólo dependa de $u_x(0,t)$.

b) Calcular la solución $u(x,t)$ cuando la temperatura inicial es $f(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos x$

Indicación: podéis usar la fórmula trigonométrica $2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

c) Probar que la función $T(t)$ obtenida para $f(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos x$ tiene un mínimo global en el instante $t_* = (\ln 3)/2$ y tiende a cero cuando $t \to +\infty$

Solución

a) $$T'(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u_t(x,t)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u_{xx}(x,t)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x(x,t)\right)dx = \frac{1}{\pi}\Big[u_x(x,t)\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(u_x(\pi,t) - u_x(0,t)\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = -\frac{1}{\pi}u_x(0,t)$$

b) Separación de variables: buscamos una solución del problema homogéneo de la forma: $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$; de donde:

i) A partir de la EDP: $X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \iff \dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}$ ctant.

ii) A partir de las condiciones homogéneas:

$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,\ t>0 \implies X(0) = 0$

$u_x(\pi,t) = X'(\pi)T(t) = 0,\ t>0 \implies X'(\pi) = 0$

y resultan los problemas asociados a $X(x)$ y $T(t)$, respectivamente:

$$\left.\begin{array}{l} X'' = \lambda X \\ X(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{array}\right\} (a) \qquad T' = \lambda T. \ (b)$$

El PVF asociado a $X(x)$ corresponde al caso 3 de la proposición de la página 8 de los apuntes de este tema, con $L = \pi$. Entonces los VAPs y las FUPs son respectivamente:

$$\left.\begin{array}{l} \text{VAPs: } \lambda_n = -\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \\ X_n(x) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \end{array}\right\} \text{ para } n = 0,1,2,3,\ldots$$

A continuación, resolvemos el problema asociado a $T(t)$ para $\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$

$$T'(t) = -\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 T(t); \quad T_n(t) = e^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 t},$$

Los modos normales son pues $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 t}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$, para $n = 0,1,2,3,\ldots$; con lo cual la serie:

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} c_n u_n(x,t) = \sum_{n\geq 0} c_n X_n(x)T_n(t) = \sum_{n\geq 0} c_n e^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 t}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$$

con $c_n \in \mathbb{R}$ arbitrarios $(n = 0,1,2,3,\ldots)$ es solución formal del problema homogéneo. Para obtener la solución del problema a valores frontera original, imponemos la condición no homogénea $u(x,0) = f(x)$, lo que nos fijará los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$

$$u(x,0) = \sum_{n\geq 0} c_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) = c_0 \sin\tfrac{x}{2} + c_1 \sin\left(\tfrac{3x}{2}\right) + c_2 \sin\left(\tfrac{5x}{2}\right) + \dots$$

$$= 2\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos x = -\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{3x}{2}\right) \qquad (4)$$

Donde hemos usado que $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$, con $a = x/2$, $b = x$.

De esta última ecuación, podemos identificar las amplitudes: $c_0 = -1$, $c_1 = 1$, $c_k = 0 \ \forall\, k \geq 2$ $(k = 2, 3, \dots)$

Luego:

$$\boxed{u(x,t) = -e^{-t/4}\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) + e^{-\frac{9}{4}t}\sin\left(\tfrac{3x}{2}\right), \quad x\in(0,\pi),\ t>0}$$

c) El promedio $T(t)$ para la solución obtenida resulta:

$$T(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi u(x,t)\,dx = -\frac{1}{\pi}e^{-t/4}\int_0^\pi \sin\left(\tfrac{x}{2}\right)dx + \frac{1}{\pi}e^{-\frac{9}{4}t}\int_0^\pi \sin\left(\tfrac{3x}{2}\right)dx$$

$$\overset{(*)}{=} -\frac{2}{\pi}e^{-t/4} + \frac{2}{3\pi}e^{-\frac{9}{4}t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} (*) \quad & \int_0^\pi \sin\left(\tfrac{x}{2}\right)dx = -2\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\Big|_0^\pi = 2 \\ & \int_0^\pi \sin\left(\tfrac{3x}{2}\right)dx = -\tfrac{2}{3}\cos\left(\tfrac{3x}{2}\right)\Big|_0^\pi = \tfrac{2}{3} \end{aligned}}$$

$$T'(t) = \frac{1}{2\pi}e^{-t/4} - \frac{3}{2\pi}e^{-\frac{9}{4}t} = \frac{1}{2\pi}e^{-t/4}\left(1 - 3e^{-2t}\right)$$

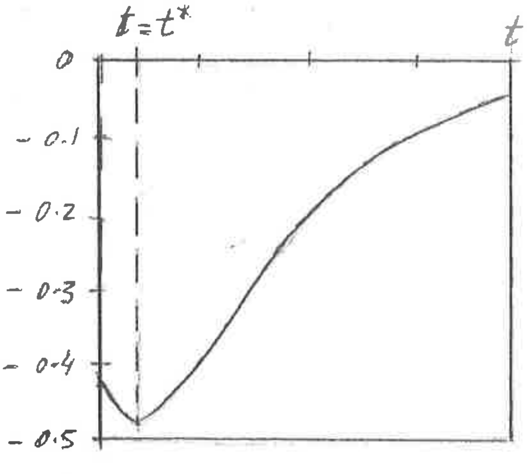
$$T'(t) < 0 \iff 3e^{-2t} > 1 \iff e^{-2t} > \frac{1}{3} \iff t < \frac{\ln 3}{2}$$

$$T'(t) > 0 \iff t > \frac{\ln 3}{2}$$

Por tanto la temperatura promedio tiene un <u>mínimo absoluto</u> en $t = t_* = \frac{\ln 3}{2} \approx 0.54931$

$$T(t_*) = -\frac{2}{\pi}e^{-\frac{1}{8}\ln 3} + \frac{2}{3\pi}e^{-\frac{9}{8}\ln 3} = -\frac{2}{\pi}3^{-\frac{1}{8}} + \frac{2}{3\pi}3^{-\frac{9}{8}} = -\frac{2}{\pi}3^{-\frac{1}{8}} + \frac{2}{3\pi}3^{-1}3^{-\frac{1}{8}}$$

$$= -\frac{2}{\pi}3^{-\frac{1}{8}}\left(1 - \frac{1}{9}\right) = -\frac{16}{9\pi}3^{-\frac{1}{8}}$$



(Ver figura). Por último,

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{2}{\pi}e^{-t/4} + \frac{2}{3\pi}e^{-\frac{9}{4}t}\right) = 0.$$

7. (d'Alembert vs. separación de variables). Queremos comparar dos métodos diferentes para resolver PVI de ondas 1D con condiciones de frontera de tipo Dirichlet homogéneas

a) Calcular, aplicando la fórmula de D'Alembert, la solución del PVI

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

cuando la posición inicial viene dada por la función $f(x) = 2\sin x$ y la cuerda está inicialmente en reposo. Comprobar que la solución obtenida cumple las condiciones

$$u(0,t) = 0, \qquad u(x,t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Continuando con una cuerda **inicialmente** en reposo, ¿qué propiedades debe tener la posición inicial $f(x)$ para poder asegurar que la solución del PVI obtenida mediante la fórmula de d'Alembert cumple esas dos condiciones de frontera de tipo Dirichlet?

b) Calcular, aplicando el método de separación de variables, la solución del PVI

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in (0,\pi) \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,\pi) \\ u_t(x,0) = 0 & x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

cuando la posición inicial viene dada por la función $f(x) = 2\sin x$.

c) Comprobar que las soluciones obtenidas en los apartados anteriores coinciden.

Solución.

a) $$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy = \frac{1}{2}\left(2\sin(x+ct) + 2\sin(x-ct)\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} 0\,dy = \sin(x+ct) + \sin(x-ct) = \sin x\cos(ct) + \cos x\sin(ct)$$

$$+ \sin x\cos(ct) - \cos x\sin(ct)$$

$= 2\sin x \cos(ct)$. Luego $\boxed{u(x,t) = 2\sin x \cos(ct),\ t\in\mathbb{R} \quad (*)}$

$u(0,t) = 2\sin 0\cdot\cos(ct) = 0$, $u(\pi,t) = 2\sin\pi\cdot\cos(ct) = 0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$

Vemos, pues que la solución obtenida cumple las condiciones: $u(0,t)=0$, $u(\pi,t)=0$ $\forall t\in\mathbb{R}$.

Por otra parte,

$u(0,t) = \frac{1}{2}\left(f(ct)+f(-ct)\right) = 0$ $\quad$ f ha de ser una función impar

$u(\pi,t) = \frac{1}{2}\left(f(\pi+ct)+f(\pi-ct)\right) = 0 \iff f(\pi+ct) = -f(\pi-ct) = f(ct-\pi)$

$= f(\pi+ct-2\pi)$: además tiene que ser 2π-periódica

Luego, para que $u(x,t)$ satisfaga las dos condiciones de contorno de tipo Dirichlet f tiene que ser impar y 2π periódica.

b) Aplicamos separación de variables

$u(x,t) = X(x)T(t)$:

$$T''(t)X(x) = c^2T(t)X''(x) \iff \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \lambda\in\mathbb{R} \text{ ctnt.}$$

De la condición inicial homogénea: $u_t(x,0) = X(x)T'(0) = 0,\ x\in(0,\pi) \Rightarrow T'(0)=0^{(*)}$

y " las condiciones de frontera homogéneas; $u(0,t) = X(0)T(t) = 0,\ t\in\mathbb{R} \Rightarrow X(0)=0$

$u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0,\ t\in\mathbb{R} \Rightarrow X(\pi)=0$

obtenemos los problemas asociados a $X(x)$ y $T(t)$; respectivamente:

$$\left.\begin{array}{l} X''=\lambda X, \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{array}\right\}$$ PVF de 2º orden lineal homogéneo. Corresponde al caso 1 de la Proposición de la página 8 de los Apuntes con $L=\pi$

VAPs: $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = -n^2$ $\quad n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$

FUPs: $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sin(nx)$

$$\left.\begin{array}{l} T''=\lambda c^2 T \\ T'(0)=0 \end{array}\right\}$$ Si resolvemos el problema asociado a $T(t)$ correspondiente a los VAPs del problema asociado a $X(x)$:

(*) Descartamos la solución $X(x)\equiv 0$.

$$T'' = -c^2 n^2 T \qquad n=1,2,3,\dots$$
$$T'(0)=0$$

$T(t) = c_1 \cos(nct) + c_2 \sin(nct)$

$T'(0) = c_2 nc = 0$, con $c>0$ $n=1,2,3,\dots \Leftrightarrow c_2=0$

Luego $T(t) = c_1\cos(nct)$, $c_1 \in \mathbb{R}$ arbitrario. Para escribir los modos normales podemos tomar $c_1 = 1$ y entonces definimos: $T_n(t) = \cos(nct)$, $n=1,2,3,\dots$

De esta manera los <u>modos normales</u> vendran dados por $\boxed{u_n(x,t) = \operatorname{sen}(nx)\cos(nct)}$ $n=1,2,3,\dots$ La superposición de estos modos normales con amplitudes arbitrarias:

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} a_n u_n(x,t) = \sum_{n\geq 1} a_n X_n(x)\, T_n(t) = \sum_{n\geq 1} a_n \sin(nx)\cos(nct)$$

es la solución formal de la parte homogénea del problema. Para determinar las amplitudes $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ imponemos la condición no homogénea

$$u(x,0) = a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + \dots + a_n \sin(nx) + \dots = 2\sin x \Leftrightarrow a_1 = 2,\ a_k = 0\ \forall k \geq 2.$$

Entonces la solución del problema a valores frontera resulta:

$$\boxed{u(x,t) = \sin x \cos(ct),\ x\in(0,\pi),\ t\in\mathbb{R}} \qquad (\&)$$

c) Vemos, pues que (&) coincide con la solución (x) del apartado (b)

8) (Calor 1D con condiciones de frontera periódicas). Consideramos el problema dado por

$$\begin{array}{lll} u_t = k^2 u_{xx} & x\in(-L,L) & t>0 \\ u(x,0) = f(x) & x\in(-L,L) & \\ u(-L,t) = u(L,t) & & t>0 \\ u_x(-L,t) = u_x(L,t) & & t>0 \end{array}$$

a) Dada una solución del PVI, calcular la derivada de la función

$$T(t) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} u(x,t)\,dx$$

b) Encontrar los equilibrios térmicos del problema. Es decir, las temperaturas que cumplen la EDP y las condiciones de frontera, pero que no dependen del tiempo.

c) Calcular $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$ en función de $f(x)$.

Indicación: suponiendo que conocemos el desarrollo de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

de la temperatura inicial en el intervalo $[-L,L]$, imponer directamente que la serie formal

$$u(x,t) = \alpha_0(t)/2 + \sum_{n=1} \alpha_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \beta_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

cumpla el PVI, sin seguir el método de separación de variables al pie de la letra.

d) Interpretar físicamente los resultados obtenidos ¿Se tiende más rápidamente al límite anterior cuando la longitud L del alambre es grande o pequeña? ¿Y se tiende más rápidamente cuando la constante k^2 es grande o pequeña? ¿Y se tiende más rápidamente cuando el índice n del modo normal es grande o pequeño?

Solución.

a) $$T'(t) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} u_t(x,t)\,dx = \frac{k^2}{2L}\int_{-L}^{L} u_{xx}(x,t)\,dx = \frac{k^2}{2L}\int_{-L}^{L}\frac{\partial}{\partial x}\big(u_x(x,t)\big)\,dx =$$

$$= \frac{k^2}{2L}\Big[u_x(x,t)\Big]_{x=-L}^{x=L} = \frac{k^2}{2L}\big(u_x(L,t) - u_x(-L,t)\big) = 0.$$

b) $u(x,t) = V(x)$

$k^2 V_{xx}(x) = 0$ d'on: $V(x) = ax + b$, $V(-L) = -aL + b = aL + b = V(L) \Leftrightarrow 2aL = 0$. de donde $a = 0$. De la otra condicion de contorno periódica: $V_x(-L) = a = V_x(L)$ y vemos pues que $\underline{V(x) = b \in \mathbb{R} \text{ libre (arbitrario)}}$, luego los equilibrios térmicos son temperaturas constantes.

c) $$u_t(x,t) = \frac{\alpha_0'(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n'(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \beta_n'(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)\left(\frac{kn\pi}{L}\right)^2\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \beta_n(t)\left(\frac{kn\pi}{L}\right)^2\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

d'on:

$$\alpha_0'(t) = 0,\ \alpha_0(0) = a_0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0(t) = a_0$$

$$\alpha_n'(t) = -\left(\frac{Kn\pi}{L}\right)^2 \alpha_n(t),\ \alpha_n(0) = a_n \quad \Rightarrow \quad \alpha_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{Kn\pi}{L}\right)^2 t},\ n = 1,2,3,\ldots$$

$$\beta_n'(t) = -\left(\frac{Kn\pi}{L}\right)^2 \beta_n(t),\ \beta_n(0) = b_n \quad \Rightarrow \quad \beta_n(t) = b_n e^{-\left(\frac{Kn\pi}{L}\right)^2 t},\ n = 1,2,3,\ldots$$

Luego:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{Kn\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n e^{-\left(\frac{Kn\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{Kn\pi}{L}\right)^2 t} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right].$$

El límite buscado es pues:

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\,dx}$$

d) El calor que entra por un extremo sale por el otro el flujo de calor se compensa debido a la periodicidad en u_x, con lo cual la temperatura promedio se mantiene constante (ver apartado a).

El calor tiende a distribuirse uniformemente y, en el límite (equilibrio térmico) se alcanza una temperatura constante igual al promedio de la temperatura inicial.

Los modos normales son $u_n(x,t) = e^{-\left(\frac{K\pi}{L}\right)^2 t} \cdot \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$

Entonces debido al factor exponencial:

- Se tiende más rápidamente al límite cuando L es pequeña ($\frac{Kn\pi}{L}$ se hace mayor y el signo delante del exponente es negativo.
- Por la misma razón se tenderá al equilibrio más rápidamente cuanto mayor sea la K^2.
- Igualmente, cuanto mayor sea el índice n del modo normal

9) (Cuerda vibrante con fricción y extremos fijados). Tenemos una cuerda de longitud L, de densidad lineal constante ρ, sometida a una tensión constante τ que se mueve en un medio con coeficiente de fricción μ y cuyos extremos estan fijados de forma que $u(0,t) = 0 = u(L,t)$. La cuerda se suelta desde una posición inicial $f(x)$ en un estado de reposo. Suponemos que no actúan fuerzas externas sobre la cuerda.

a) Escribir las ecuaciones que modelan la vibración de la cuerda

b) Calcular la vibración de la cuerda cuando no hay fricción, suponiendo que el desarrollo de Fourier de la temperatura inicial es $f(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Aplicar el resultado al caso $L=\pi$ y $f(x) = \sin^3 x$

c) Calcular la vibración de la cuerda cuando existe una pequeña fricción: $0<\mu<<1$. Comprobar que, si hay fricción, la cuerda tiende al equilibrio elástico cuando $t\to+\infty$

d) ¿Qué pasa cuando $\mu\to 0^+$? Interpretar físicamente la relación entre las frecuencias de vibración de la cuerda y su longitud L

Solución

a) La velocidad inicial es $g(x)=0$, dado que la cuerda está en reposo. Las ecuaciones del problema resultan pues:

$$\left.\begin{array}{lll}
\rho u_{tt} = \tau u_{xx} - \mu u_t & 0<x<L & t>0 \\
u(x,0) = f(x) & 0<x<L & \\
u_t(x,0) = 0 & 0<x<L & \\
u(0,t) = 0 & & t>0 \\
u(L,t) = 0 & & t>0
\end{array}\right\} \quad (1)$$

b) Para $\mu = 0$, las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$\left.\begin{array}{lll} \rho u_{tt} = \tau u_{xx} & 0<x<L & t\in\mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) & 0<x<L & \\ u_t(x,0) = 0 & 0<x<L & \\ u(0,t) = 0 & & t\in\mathbb{R} \\ u(L,t) = 0 & & t\in\mathbb{R} \end{array}\right\} (1').$$

Aplicamos separación de variables al problema homogéneo: $\left\{\begin{array}{lll} \rho u_{tt} = \tau u_{xx} & 0<x<L & \\ u_t(x,0) = 0 & 0<x<L & \\ u(0,t) = 0 & & t\in\mathbb{R} \\ u(L,t) = 0 & & t\in\mathbb{R}\end{array}\right. (1'')$

$u(x,t) = X(x)T(t)$:

$$u_t(x,0) = X(x)T'(0) = 0 \ , \ 0<x<L \Rightarrow T'(0)=0 \quad (\text{descartamos } X(x)\equiv 0)$$

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \ t\in\mathbb{R} \Rightarrow X(0)=0 \quad (\quad \text{"} \quad T(t)\equiv 0)$$

$$u(L,t) = X(L)T(t) = 0, \ t\in\mathbb{R} \Rightarrow X(L)=0 \quad (\quad \text{"} \quad T(t)\equiv 0)$$

Por otro lado, al sustituir en la EDP se obtiene:

$$\rho T''(t)X(x) = \tau T(t)X''(x) \iff \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \lambda \in\mathbb{R} \text{ ctnt}$$

donde hemos definido $c^2 := \tau/\rho$. De esta manera llegamos a los dos problemas homogéneos —uno asociado a $X(x)$, el otro asociado a $T(t)$— siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{array}\right\} (2) \qquad \left.\begin{array}{l} T''(t) = \lambda c^2 T(t) \\ T'(0) = 0 \end{array}\right\} (3)$$

(2) Es uno de los PVF lineal, de 2º orden y homogéneo, que aparecían en la Proposición de la página 8 de los Apuntes. Recordemos que los VAPs y las FUPs correspondientes a este caso eran, respectivamente:

$$\begin{array}{l} \text{VAPs}: \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\ \text{FUPs}: X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{array} \quad \text{para } n=1,2,3,\dots$$

A continuación resolvemos el problema asociado a $T(t)$ tomando como λ los VAPs del problema asociado a $X(x)$:

$$T(t) = d_1\cos\left(\frac{nc\pi}{L}t\right) + d_2\sin\left(\frac{nc\pi}{L}t\right)$$

$$T'(0) = d_2\frac{nc\pi}{L} = 0 \iff d_2 = 0 \text{ y } d_1\in\mathbb{R} \text{ queda libre.}$$

Podemos tomar $d_1 = 1$ y entonces $T_n(t) = \sin\left(\frac{nc\pi}{L}t\right)$, $n=1,2,3,\dots$

De esta manera tenemos los modos normales siguientes

$$u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) = \cos(\omega_n t)\,\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{para } n = 1,2,3,\dots$$

donde hemos definido $\omega_n := \frac{nc\pi}{L}$ para $n = 1,2,3,\dots$

Sabemos que la solución formal del problema homogéneo (1'') viene dada por la superposición de modos normales:

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} c_n u_n(x,t) = \sum_{n\geq 1} c_n X_n(x)\,T(t) = \sum_{n\geq 1} c_n \cos(\omega_n t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Para determinar las amplitudes $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ imponemos la condición inicial (no homogénea) del problema (1), suponiendo que $f(x)$ tiene un desarrollo de Fourier de la forma $f(x) = \sum_{n\geq 1} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$:

$$u(x,0) = \sum_{n\geq 1} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

donde $c_n = b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$, son los coeficientes del desarrollo de Fourier en senos de $f: [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$.

En el caso $L = \pi$, $f(x) = \sin^3 x$, podemos obtener el desarrollo de Fourier de $\sin^3 x$ a partir de la fórmula de Euler:

$$f(x) = \sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

Comparando los dos desarrollos obtenemos: $c_1 = 3/4$, $c_2 = 0$, $c_3 = -1/4$, $c_k = 0\ \forall k \geq 4$ y la solución resulta pues:

$$\boxed{u(x,t) = \tfrac{3}{4}\cos(ct)\sin x - \tfrac{1}{4}\cos(3ct)\sin(3x), \quad 0 < x < L,\ t \in \mathbb{R}}$$

ii) $\mu > 0$. Volvemos a aplicar separación de variables en el correspondiente problema homogéneo.

i) Sustituyendo en la EDP:

$$\rho u_{tt} - \tau u_{xx} + \mu u_t = \rho T''(t)X(x) - \tau T(t)X''(x) + \mu T'(t)X(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tau X'' T(t) = \left(\rho T''(t) + \mu T'(t)\right) X(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\rho T''(t) + \mu T'(t)}{T(t)} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ ctnt.}$$

ii) Imponiendo las condiciones homogéneas sobre $u(x,t) = X(x)T(t)$ se obtienen, como en el apartado anterior la condición inicial $T'(0)=0$ sobre la función $T(t)$ y las condiciones en los extremos $X(0) = X(L) = 0$ para la función $X(x)$.

De esta manera llegamos a un PVF y a un PVI homogéneos asociadas a $X(x)$ y $T(t)$ respectivamente:

$$\left.\begin{array}{c} X'' = \lambda X \\ X(0) = X(L) = 0 \end{array}\right\} (2') \qquad \left.\begin{array}{c} \rho T'' + \mu T' = \lambda \tau T \\ T'(0) = 0 \end{array}\right\} (3')$$

Observamos que el PVF (2') asociado a $X(x)$ es el mismo que aparecía en el apartado anterior. Entonces los VAPs son $\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, y las FUPs $X(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

A continuación resolvemos el PVI (3') asociado a $T(t)$ para los VAPs del problema (2'). Esto es, para $\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

- El polinomio característico de la EDO lineal homogénea de 2º orden a coef. constantes $\rho T'' + \mu T' + \tau \frac{n^2\pi^2}{L^2} T = 0$ es: $p(m) = \rho m^2 + \mu m + \tau \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ y entonces las raíces características resultan:

$$m = m_\pm = -\frac{\mu}{2\rho} \pm \sqrt{\mu^2/4\rho^2 - \frac{\tau}{\rho}\frac{n^2\pi^2}{L^2}} = -\mu/2\rho \pm \sqrt{\mu^2/4\rho^2 - c^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}},$$

Donde hemos definido: $c^2 := \tau/\rho$.

- De acuerdo con el enunciado, la fricción es pequeña $0 < \mu \ll 1$. En particular podemos suponer que $0 < \mu < 2\sqrt{\tau\rho}\,\pi/L$, y entonces:

$$\frac{\mu^2}{4\rho^2} < \frac{\tau}{\rho}\frac{\pi^2}{L^2} = c^2\frac{\pi^2}{L^2} \leq c^2\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \text{para } n = 1,2,3,\dots$$

Bajo esta hipótesis las raíces características son complejas conjugadas:

$$m = m_\pm = -\frac{\mu}{2\rho} \pm i\sqrt{\frac{c^2n^2\pi^2}{L^2} - \frac{\mu^2}{4\rho^2}} = -k \pm i\sqrt{\omega_n^2 - k^2} = -k \pm i\nu_n, \quad n = 1,2,3,\dots$$

donde se ha definido $\underline{k := \mu/2\rho,\ \omega_n := c^2n^2\pi^2/L^2,\ \nu_n := \sqrt{\omega_n^2 - k^2}}$ para $n = 1,2,3,\dots$

En particular las ν_n serán las frecuencias de los correspondientes modos de vibración (ver fórmula 4).

Por tanto tanto, la solución de la EDO bajo las condiciones descritas y con las definiciones que se han introducido resulta:

$$T_n(t) = e^{-kt}\left(c_1\cos(\nu_n t) + c_2\sin(\nu_n t)\right), \quad n = 1,2,3,\dots$$

y de la condición inicial homogénea $T'(0) = 0$ se sigue:

$$T_n'(0) = -c_1 k + c_2\nu_n = 0 \iff c_1 = c_2\frac{\nu_n}{k},\ c_2 \in \mathbb{R} \text{ libre}.$$

Luego:

$$T_n(t) = c_2 e^{-kt}\left(\frac{\nu_n}{k}\cos(\nu_n t) + \sin(\nu_n t)\right), \quad n = 1,2,3,\dots$$

Para escribir los modos normales podemos tomar $c_2 = 1$, con lo que estos vienen dados por:

$$u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) = e^{-kt}\left(\frac{\nu_n}{k}\cos(\nu_n t) + \sin(\nu_n t)\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad (4)$$

para $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$

La solución del problema homogéneo, ie, de:

$$\begin{aligned} &\rho u_{tt} = \tau u_{xx} - \mu u_t \\ &u_t(x,0) = 0 \\ &u(0,t) = 0 \\ &u(L,t) = 0 \end{aligned}$$

Viene dada por la superposición normales (4) con amplitudes arbit.

Esta solución formal la escribimos como una serie:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x)\, T_n(t)$$

$$= e^{-kt} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{\nu_n}{k} \cos(\nu_n t) + \sin(\nu_n t) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \qquad (\&)$$

Para determinar los coeficientes (las amplitudes) c_n imponemos la ci no homogénea $u(x,0) = f(x)$ del problema original (1) suponiendo que $f(x)$ tiene un desarrollo de Fourier en senos $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$; esto es:

$$u(x,0) = \sum c_n \frac{\nu_n}{k} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = f(x),$$

con:

$$b_n := c_n \frac{\nu_n}{k} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx,$$

para $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$; luego $c_n = b_n \frac{k}{\nu_n}$. Finalmente, la solución del problema inicial es la serie:

$$u(x,t) = e^{-kt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\nu_n} \left(k \sin(\nu_n t) + \nu_n \cos(\nu_n t) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

de donde vemos que, debido al factor e^{-kt} esta vibración tiende a cero cuando $t \to +\infty$: $\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = 0 \ \forall x \in [0,L]$.

d) Cuando $\mu \to 0^+$, $k \to 0$, $\nu_n \to \omega_n = \frac{cn\pi}{L}$. Entonces:

- $u(x,t)$ tiende a la vibración que hemos obtenido en el apartado anterior cuando se suponía que no había fricción
- $\nu_n = \sqrt{\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} - \frac{\mu^2}{4\rho^2}}$: Vemos que las frecuencias de vibración de la cuerda(1) es más alta cuanto más corta es su longitud, cuanto mayor sea su densidad ρ, cuanto más tensa esté (cuanto mayor sea τ) y cuanto más alto sea el índice de el modo de vibración n.

---

(1) En realidad las ν_n son las frecuencias de los modos de vibración.

10) (Problema 4 Enero 2010). Consideramos la ecuación de Laplace 2D con condiciones de frontera de tipo Dirichlet en el rectángulo $\Omega=(0,\pi)\times(0,2\pi)$

$$
\begin{aligned}
&u_{xx}+u_{yy}=0 && x\in(0,\pi),\; y\in(0,2\pi)\\
&u(x,0)=f(x) && x\in(0,\pi)\\
&u(x,2\pi)=0 && x\in(0,\pi)\\
&u(0,y)=0 && y\in(0,2\pi)\\
&u(\pi,y)=0 && y\in(0,2\pi)
\end{aligned}
$$

Calcular la solución formal de este problema suponiendo que el desarrollo de Fourier en senos de $f(x)$ en el intervalo $[0,\pi]$ es $f(x)=\sum_{n\geq 1} B_n \sin(nx)$

Solución

Consideramos el problema homogéneo:

$$
\begin{aligned}
&u_{xx}+u_{yy}=0 && x\in(0,\pi) \quad y\in(0,2\pi)\\
&u(x,2\pi)=0 && x\in(0,\pi)\\
&u(0,y)=0 && y\in(0,2\pi)\\
&u(\pi,y)=0 && y\in(0,2\pi)
\end{aligned}
$$

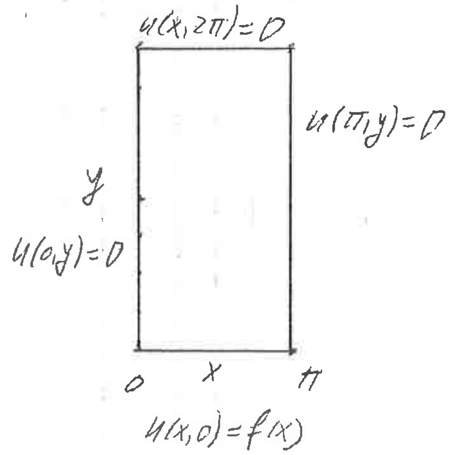


Figura. Condiciones de contorno de tipo Dirichlet.

(Ver figura) y aplicamos separación de variables:

$u(x,y)=X(x)\,Y(y)$:

$$X''(x)\,Y(y)+X(x)\,Y''(y)=0 \iff \frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda\in\mathbb{R} \text{ ctnt.}$$

$$
\begin{aligned}
u(x,2\pi)&=X(x)\,Y(2\pi)=0,\; x\in(0,\pi) \Rightarrow Y(2\pi)=0 \text{ ó } X(x)\equiv 0 \;(\text{descartamos } X(x)\equiv 0)\\
u(0,y)&=X(0)\,Y(y)=0,\; y\in(0,2\pi) \Rightarrow X(0)=0 \text{ ó } Y(y)\equiv 0 \;(\quad '' \quad Y(y)\equiv 0)\\
u(\pi,y)&=X(\pi)\,Y(y)=0,\; y\in(0,2\pi) \Rightarrow X(\pi)=0 \text{ ó } Y(y)\equiv 0 \;(\quad '' \quad Y(y)\equiv 0)
\end{aligned}
$$

$$\left.\begin{aligned} &X''=\lambda X\\ &X(0)=X(2\pi)=0\end{aligned}\right\}$$

Prop. pag 8 de los Apuntes, Caso 1, con $L=\pi$

VAPs $\lambda=\lambda_n=-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2=-n^2$ $\quad n=1,2,3,\dots$

FUPs $X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=\sin(nx)$

$$\left.\begin{array}{l} Y'' = \lambda Y \\ Y(2\pi) = 0 \end{array}\right\}$$

Buscamos la solución del problema asociado a $Y(y)$ para los VAPs del problema asociado a $X(x)$. Por tanto:

$$Y(y) = d_1 \cosh(ny) + d_2 \sinh(ny)$$

$$Y(2\pi) = d_1 \cosh(2n\pi) + d_2 \sinh(2n\pi) = 0 \Leftrightarrow d_1 = -d_2 \tanh(2n\pi)$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$; $d_2 \in \mathbb{R}$ libre. Así, las soluciones buscadas son:

$$Y_n(y) = d\,\left(\sinh(ny) - \tanh(2\pi)\cosh(ny)\right)$$

Podemos tomar $d_2 = 1$, con lo que:

$$Y_n(y) = \sinh(ny) - \tanh(2n\pi)\cosh(ny), \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

y los modos normales quedan

$$u_n(x,y) = \left(\sinh(ny) - \tanh(2n\pi)\cosh(ny)\right)\cdot \sin(nx) \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

luego la solución formal del problema homogéneo se escribe como:

$$u(x,y) = \sum_{n\geq 1} a_n u_n(x,y) = \sum_{n \geq 1} a_n X_n(x) Y_n(y)$$

$$= \sum_{n\geq 1} a_n \left(\sinh(ny) - \tanh(2n\pi)\cosh(ny)\right)\cdot \sin(nx)$$

Para fijar las amplitudes $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; imponemos la condición no homogénea $u(x,0) = f(x)$, esto es

$$u(x,0) = -\sum_{n\geq 1} a_n \tanh(2n\pi)\sin(nx) = f(x).$$

Si definimos $b_n := -a_n \tanh(2n\pi)$, entonces estos son los coeficientes del desarrollo de Fourier en senos de $f(x)$ en el intervalo $[0,\pi]$ y vienen dados por las integrales

$$b_n = -a_n \tanh(2n\pi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \text{ luego: } \boxed{a_n = \frac{-b_n}{\tanh(2n\pi)}, n = 1, 2, 3 \ldots}$$

Finalmente la solución del problema viene dada por la serie:

$$u(x,y) = \sum_{n\geq 1} a_n u_n(x,y) = \sum_{n\geq 1} a_n X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n\geq 1} a_n \left(\sinh(ny) - \tanh(2n\pi)\cosh(ny)\right)\sin(nx)$$

$$= \boxed{\sum b_n \frac{\sinh(n(2\pi - y))}{\sinh(2n\pi)}\sin(nx)}$$