AC1-1

Nom: Temps: 20 min

Àlgebra Lineal (Grup 31) — Avaluació Continuada – 06/10/2011

Important: cal assenyalar la solució (a), (b), (c), (d) ó (e) i *justificar-la* fent els càlculs a l'espai a sota de l'enunciat. Si una resposta no està ben justificada **no** es considerarà correcta.

1. *(1 Punt)*. Determineu per quins valors $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és divisible per $(t+1)^2$ el polinomi

$$P(t) = \alpha t^4 + \beta t^3 + 1.$$

(a) $\alpha = 3,\ \beta = 4$. (b) $\alpha = 1,\ \beta = 2$. (c) $\alpha = 2,\ \beta = 1$. (d) $\alpha = 4, \beta = 3$.
(e) Cap de les anteriors.

Resposta: (a) (Test abril 2011)

Cal que $t=-1$ sigui una arrel de multiplicitat com a mínim 2 de $P(t)$. Així hem d'imposar: $\left.\begin{array}{l} P(-1) = \alpha-\beta+1 = 0 \\ P'(-1) = -4\alpha+3\beta = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{Sol.}}{\Longrightarrow} \alpha = 3, \beta = 4$. Llavors $t=-1$ és una arrel de multiplicitat exactament 2, ja que $P''(-1) = 12\alpha - 6\beta \overset{\substack{\alpha=3 \\ \beta=4}}{=} 36-24 = 12 \neq 0$.

Alternativament:

$$\begin{array}{c|ccccc} & \alpha & \beta & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -\alpha & \alpha-\beta & -\alpha+\beta & \alpha-\beta \\ \hline & \alpha & -\alpha+\beta & \alpha-\beta & -\alpha+\beta & \boxed{\alpha-\beta+1=0} \\ -1 & & -\alpha & 2\alpha-\beta & -3\alpha+2\beta & \\ \hline & \alpha & -2\alpha+\beta & 3\alpha-2\beta & \boxed{-4\alpha+3\beta=0} & \end{array}$$

i com abans, arribem al sistema: $\left.\begin{array}{l} \alpha-\beta+1 = 0 \\ -4\alpha+3\beta = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{Sol.}}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l} \alpha = 3 \\ \beta = 4 \end{array}\right\}$

Resposta (a).

2. *(1 Punt)*. Sigui $z \in \mathbb{C}$ l'arrel sisena de -1 que té negatives tant la part real com la imaginària. Assenyaleu el valor de z^4.

(a) $\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. (b) $\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$. (c) $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. (d) $\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}$. (e) Cap de les anteriors.

Resposta: (c) (Test novembre 2010)

$z_k = \sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{e^{i\pi}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right)}$ amb $k = 0,1,2,3,4,5$. Clarament, l'arrel que té negatives tant la part real com la imaginària correspon a $k=3$ perquè l'argument principal de z_3, $\arg z_3 = \pi/6 + \pi = 30° + 180° = 210°$ és un angle del 3er quadrant. Així:

$$z := z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} \Longrightarrow z^4 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+4\pi\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\pi - \tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \tfrac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$ Resposta (c).

AC1-2.

Nom: Temps: 20 min

Àlgebra Lineal (Grup 31) **Avaluació Continuada – 06/10/2011**

Important: cal assenyalar la solució (a), (b), (c), (d) ó (e) i *justificar-la* fent els càlculs a l'espai a sota de l'enunciat. Si una resposta no està ben justificada **no** es considerarà correcta.

1. *(1 Punt).* Estudieu el sistema: $\begin{cases} \mathrm{i}x + y - z &= \mathrm{i} \\ x + \mathrm{i}y - \mathrm{i}z &= 1 \\ x + y - z &= 1 \end{cases}$

(a) És compatible indeterminat d'ordre 1. (b) És incompatible.
(c) És compatible indeterminat d'ordre 2. (d) És compatible determinat.
(e) Cap de les anteriors.

Resposta: (a) (Test abril 2011)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 1 & -1 & i \\ 1 & i & -i & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ i & 1 & -1 & i \\ 1 & i & -i & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{f_3' = f_3 - f_1 \\ f_2' = f_2 - i f_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-i & -1+i & 0 \\ 0 & i-1 & 1-i & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_3'' = f_3' + f_2'}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-i & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

d'on rang B = rang A = 2 < 3 = nombre d'incògnites
Per tant el sistema és compatible indeterminat amb ordre d'indeterminació 3-2 = 1. Resposta (a)

2. *(1 Punt).* Sigui $z \in \mathbb{C}$ l'arrel sisena de -1 que té negatives tant la part real com la imaginària. Assenyaleu el valor de z^4.

(a) $\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. (b) $\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$. (c) $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. (d) $\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}$. (e) Cap de les anteriors.

Resposta: (Test novembre 2010)

Fet a la pàgina AC1-1.

AC1-3

Nom: Temps: 20 min

Àlgebra Lineal (Grup 31) **Avaluació Continuada – 06/10/2011**

Important: cal assenyalar la solució (a), (b), (c), (d) ó (e) i *justificar-la* fent els càlculs a l'espai a sota de l'enunciat. Si una resposta no està ben justificada **no** es considerarà correcta.

1. *(1 Punt).* Sigui $z \in \mathbb{C}$ l'arrel sisena de -1 que té negatives tant la part real com la imaginària. Assenyaleu el valor de z^4.

   (a) $\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. (b) $\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$. (c) $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. (d) $\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}$. (e) Cap de les anteriors.

   Resposta: (Test novembre 2010)

Fet a la pàgina AC1-1

2. *(1 Punt).* Discutiu en funció dels valors de $\alpha \in \mathbb{R}$ el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$

   (a) $\operatorname{rang} A = 2$ si $\alpha = 1$; $\operatorname{rang} A = 3$ altrament.

   (b) $\operatorname{rang} A = 3$ per tot $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (c) $\operatorname{rang} A = 2$ si $\alpha = 0$; $\operatorname{rang} A = 3$ altrament.

   (d) $\operatorname{rang} A = 2$ si $\alpha = -1$; $\operatorname{rang} A = 3$ altrament.

   (e) Cap de les anteriors.

   Resposta: (d) (Test abril 2011)

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \underset{f_2' = f_2 - \alpha f_1}{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -\alpha^2 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \underset{f_3' = f_3 - \alpha f_2'}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & 1+\alpha^3 \end{pmatrix}$$

Llavors: $\operatorname{rang} A = 2 \Leftrightarrow \alpha = -1$ i $\operatorname{rang} A = 3$ altrament.

Resposta (d).

AC1-4

Nom: Temps: 20 min

Àlgebra Lineal (Grup 31) **Avaluació Continuada – 06/10/2011**

Important: cal assenyalar la solució (a), (b), (c), (d) ó (e) i *justificar-la* fent els càlculs a l'espai a sota de l'enunciat. Si una resposta no està ben justificada **no** es considerarà correcta.

1. *(1 Punt).* Sigui $z \in \mathbb{C}$ l'arrel sisena de -1 que té negatives tant la part real com la imaginària. Assenyaleu el valor de z^4.

   (a) $\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. (b) $\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$. (c) $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. (d) $\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}$. (e) Cap de les anteriors.

   Resposta: (Test novembre 2010)

Fet a la pàgina AC1-1

2. *(1 Punt).* Si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, assenyaleu el valor del determinant $\begin{vmatrix} a-\alpha & b-\beta & c-\gamma \\ 2a & 2b & 2c \\ \alpha+1 & \beta+1 & \gamma+1 \end{vmatrix}$.

   (a) -2Δ. (b) Δ. (c) Δ^2. (d) 2Δ. (e) Cap de les anteriors.

   Resposta: (Test novembre 2010)

$$\begin{vmatrix} a-\alpha & b-\beta & c-\gamma \\ 2a & 2b & 2c \\ \alpha+1 & \beta+1 & \gamma+1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a-\alpha & b-\beta & c-\gamma \\ a & b & c \\ \alpha+1 & \beta+1 & \gamma+1 \end{vmatrix} \underset{f_1 \leftrightarrow f_2}{=} -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-\alpha & b-\beta & c-\gamma \\ \alpha+1 & \beta+1 & \gamma+1 \end{vmatrix} \underset{f_2' = f_2 - f_1}{=} -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \\ \alpha+1 & \beta+1 & \gamma+1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{f_3' = f_3 + f_2'}{=} -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\Delta \text{ - Resposta (d)}$$

Alternativament:

$$\begin{vmatrix} \dots \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \underbrace{\begin{vmatrix} -\alpha & -\beta & -\gamma \\ 2a & 2b & 2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\parallel \\ 2\Delta}} + \underbrace{\begin{vmatrix} -\alpha & -\beta & -\gamma \\ 2a & 2b & 2c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}}_{\substack{\parallel \\ 0}} = 2\Delta \cdot \text{Resp. (d)}.$$