1. Nombres complexos

1.1. Expresseu en forma polar:

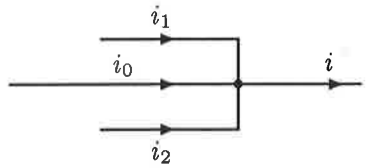
$$i^{23}-1, \quad (1+i)^3, \quad (1+\sqrt{3}i)^7, \quad \frac{(\sqrt{3}+i)^5}{(1-i)^2}, \quad \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^6}{(3-3\sqrt{3}i)^4}$$

Solució: En forma exponencial (la polar es dedueix fàcilment de l'exponencial) queda:

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}^{23}-1 &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/4}, \\
(1+\mathrm{i})^3 &= 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}, \\
\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^7 &= 128\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, \\
\frac{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^5}{(1-i)^2} &= 16\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3}, \\
\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)^6}{\left(3-3\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^{\cancel{2}\,4}} &= \boxed{\frac{4}{81}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6}.}
\end{aligned}$$

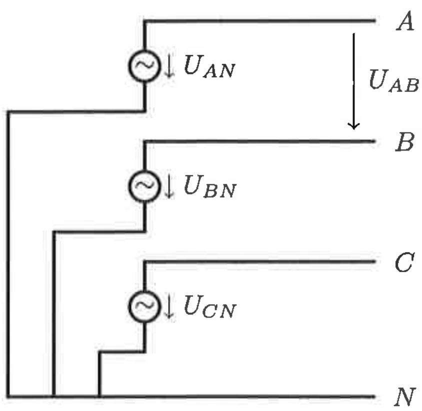
1.2. (*) Mentre que en corrents continus les magnituds elèctriques (tensió, intensitat,...) són representades per nombres reals, en corrents alterns ho són per nombres complexos de la forma $Me^{j\alpha}$. Són vàlides relacions anàlogues a les Lleis de Kirchoff, emprant l'operació suma de complexos:

(a) Calculeu el corrent $I = I_0 + I_1 + I_2$



essent $I_0 = 4, \quad I_1 = 3e^{j\pi/3}, \quad I_2 = 2e^{j\pi/4}$.

(b) Calculeu la tensió "fase/fase" $U_{AB} = U_{AN} - U_{BN}$



essent les tensions "fase/neutre" $U_{AN} = 120, \quad U_{BN} = 120e^{-j2\pi/3}$

Solució:

(a) Per sumar nombres complexes passem de forma exponencial a forma binòmica:

$$\begin{aligned} I_0 &= 4, \\ I_1 &= 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + ju\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), \\ I_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + ju\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

Sumem per separat les parts reals i les imaginàries:

$$\mathrm{Re} = 4 + \frac{3}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}, \qquad \mathrm{Im} = ju\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}.$$

En forma exponencial resulta:

$$I = 8\,\mathrm{e}^{ju\pi/6}.$$

(b) Com abans, hem de passar de la forma exponencial a la forma binòmica:

$$\begin{aligned} U_{AN} &= 120, \\ U_{BN} &= -60 - ju60\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Restem per separat les parts reals i les imaginàries:

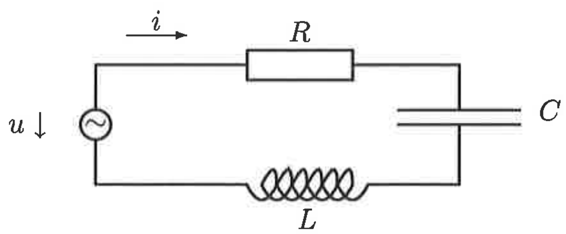
$$\mathrm{Re} = 180, \qquad \mathrm{Im} = ju60\sqrt{3}.$$

En forma exponencial resulta:

$$U_{AB} = 8\,\mathrm{e}^{ju\pi/6}.$$

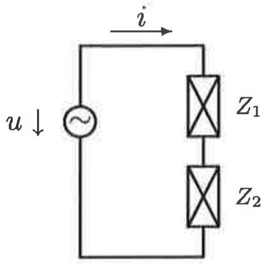
1.3. (*) En corrents alterns, la relació anàloga a la Llei d'Ohm resulta $U = ZI$, on ara les magnituds U (tensió), I (intensitat) i Z (impedància) són nombres complexos.

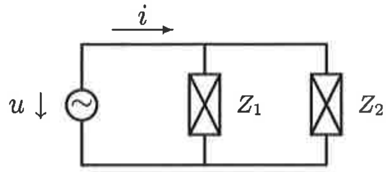
Així, per un circuit R–L–C com el de la figura, resulta $Z_{RLC} = R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)$



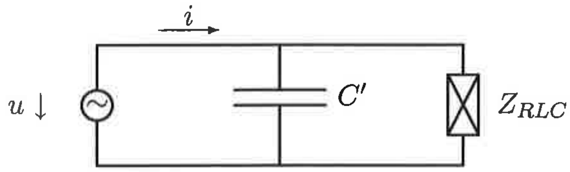
(a) Demostreu que, de forma anàloga als corrents continus, per a les connexions en sèrie i paral·lel resulta

$$Z_S = Z_1 + Z_2 \qquad\qquad \frac{1}{Z_P} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$





(b) Calculeu C' per tal que, en el circuit de la figura, resulti $U/I \in \mathbb{R}$



(*Nota*: aquesta condició és la que maximitza la potència activa en el circuit; raoneu que sempre és possible aconseguir-ho mitjançant una C' adequada, qualsevol que sigui la impedància Z inicial)

Solució:

(a) Connexió en serie (mateixa intensitat):

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = Z_1 I \\ U_2 = Z_2 I \end{array}\right\} \begin{array}{l} U = U_1 + U_2 \\ U = Z_1 I + Z_2 I \end{array}$$

$$\frac{U}{I} = Z_1 + Z_2$$

Connexió en paral·lel (mateixa tensió):

$$\left.\begin{array}{l} U = Z_1 I_1 \\ U = Z_2 I_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} I = I_1 + I_2 \\ I = \dfrac{U}{Z_1} + \dfrac{U}{Z_2} \end{array} \qquad \frac{U}{I} = \frac{1}{\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}}$$

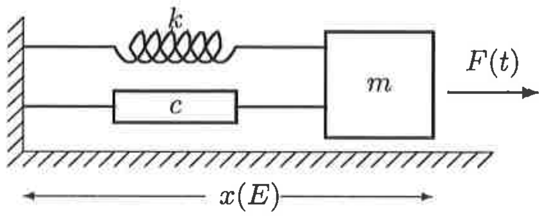
(b) Utilitzant el trobat a l'apartat anterior (connexió en paral·lel d'impedàncies):

$$Z_1 = -\frac{1}{C'\omega},$$
$$Z_2 = Z_{ZLC} = R + ju\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right).$$

La impedància serà real si, i només si, la seva inversa també ho és. Per tant només cal que s'iguali a zero la part imaginària de $\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}$, obtenint:

$$C' = \frac{L\omega^2 C^2 - C^3\omega^2 R^2 - C}{(C\omega^2 L - 1)^2}$$

1.4. (**) Per a un mecanisme oscil.latori com el de la figura



resulta l'equació diferencial següent

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)\,.$$

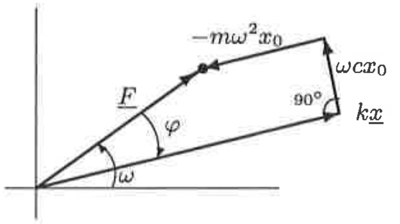
Si la força aplicada és de la forma $F(t) = F_0\, e^{j\omega t}$, resulta $x(t) = x_0\, e^{j(\omega t+\varphi)}$.

(a) Si representem aquestes magnituds pels fasors $\underline{F} = F_0\, e^{j\omega}$, $\underline{x} = x_0\, e^{j(\omega+\varphi)}$, raoneu que venen relacionats per: $\underline{F} = (k + j\omega c - m\omega^2)\underline{x}$.

(b) Apliquem-ho per calcular φ quan $\underline{x} = 2 + j$, $k = 3$, $\omega c = 2$, $m\omega^2 4$.

Solució:

(a)



(b) $\underline{F} = 3(2 + j) + 2(-1 + 2j) + 4(-2 - j) = -4 + 3j$

$$\varphi = \arg \frac{\underline{F}}{\underline{x}} = \arg \frac{-4 + 3j}{2 + j} = \arg\,(-1 + 2j) = -\arctan 2\,.$$

1.5. Calculeu les arrels de l'equació $x^2 - (1 + i)x + i = 0$.

Solució: $x = \dfrac{1 + i \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4i}}{2} = \dfrac{1 + i \pm \sqrt{-2i}}{2} = \dfrac{1 + i \pm (-1 + i)}{2} = \begin{array}{l} \nearrow i \\ \searrow 1 \end{array}$.

1.6. Calculeu:

$$\sqrt{i},\quad 1 - \sqrt[3]{i},\quad e^{-i\frac{\pi}{3}}(1 - (1 + i)^3),\quad \frac{(1 + i)^{100}}{(1 + \sqrt{3}i)^{50}},\quad (1 + \sqrt{3}i)^3 - (1 - \sqrt{3}i)^3$$

Solució: Els resultats expressats en forma binomial són:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\mathrm{i}} &= \pm\left(\sqrt{2}/2+\mathrm{i}\sqrt{2}/2\right), \\
1-\sqrt[3]{\mathrm{i}} &= 1-\sqrt{3}/2-\mathrm{i}/2,\ 1+\sqrt{3}/2-\mathrm{i}/2,\ 1+\mathrm{i}, \\
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}\left(1-(1+\mathrm{i})^3\right) &= \frac{3-2\sqrt{3}}{2}-\frac{2+3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \\
\frac{(1+\mathrm{i})^{100}}{(1+\sqrt{3})^{50}} &= 1/2+\mathrm{i}\sqrt{3}/2, \\
\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^3-\left(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Fet als "apuntillos" del tema 1

1.7 (**) Durant més de la meitat del S.XX, el preu de la carn de tocino als USA va experimentar variacions cícliques quadrianuals (corresponents a 8 cicles semestrals de producció) d'amplitud constant, generant grans distorsions econòmiques als productors. Un model matemàtic per explicar-ho (i intentar corregir-ho), basat en la hipòtesi de que els productors utilitzen com preu de referència per a les seves produccions la mitjana de les darreres 5 temporades, condueix a que el preu en la temporada k ve donat per

$$p(k)=\sum_i c_i\lambda_i^k, \quad k=1,2,\ldots$$

on λ_i són les arrels complexes del polinomi

$$t^6+\frac{\alpha}{5}(t^4+t^3+t^3+t+1)=0$$

essent α un paràmetre susceptible de ser regulat mitjançant polítiques adequades

(a) Verifiqueu que, efectivament, les arrels λ_i de mòdul 1 generen oscil·lacions quadrianuals.

(b) Determineu el valor de α per al qual apareixen aquestes solucions.
Nota: la política econòmica ha de procurar, doncs, evitar aquests valors de α.

1.8. Trobeu $a\in\mathbb{R}$ per tal que $\dfrac{1+2ai}{1-3i}\in\mathbb{R}$.

Solució: $a=-3/2$.

1.9. (a) Si z_1,z_2,z_3,z_4 són les arrels quartes de 1, calculeu la seva suma $z_1+z_2+z_3+z_4$.

(b) En general, calculeu la suma de les n arrels n-èsimes d'un complex qualsevol $z\in\mathbb{C}$.

Solució: Sumen 0, per a tot $z\in\mathbb{C}$ i $n\in\mathbb{N}$.

1.10. (a) Si z_1,z_2,z_3,z_4 són les arrels quartes de $z\in\mathbb{C}$, calculeu el seu producte $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4$.

(b) En general, calculeu el producte de les n arrels n-èsimes d'un complex qualsevol $z\in\mathbb{C}$.

Solució:

(a) $-z$.

(b) $z_1 \dots z_n = (-1)^{n-1} z$.

1.11. Trobeu $z \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{z} = z^5$.

Solució: El zero i les sis arrels sisenes de la unitat. És a dir, $z = 0$ i $z = e^{ik\pi/3}$ amb $k = 0, \dots, 5$.

1.12. Si $z_1, \dots, z_8 \in \mathbb{C}$ són les arrels vuitenes de 1, calculeu quan val $z_1 + \dots + z_8$.

Solució: La suma dóna zero. De fet, la suma de les n arrels n-enèsimes d'un número complex sempre dóna zero.

1.13. **(opt)** Descriviu geomètricament el conjunt dels nombres complexos que satisfan $(z - \overline{z})^2 = i^2 |z|^2$.

Solució: Un número complex z compleix l'equació $(z - \bar{z})^2 = \mathrm{i}^2 z^2$ si i només si $\Re z = \pm\sqrt{3}\mathrm{Im}\ z$. Obtenim per tant el parell de rectes que passen per l'origen i formen un angle de $\pi/6$ radians (és a dir, trenta graus) amb l'eix real.

1.14. **(opt)** Trobeu $z \in \mathbb{C}$ tal que formi, junt amb $1 + 2i$, $2 - 3i$ un triangle equilàter.

Solució: Hi ha dues solucions:

$$z = \frac{3 + 5\sqrt{3}}{2} - \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \qquad z = \frac{3 - 5\sqrt{3}}{2} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

1.15. **(opt)** Quins nombres complexos hi ha tals que ells amb la seva suma i el seu producte formin un quadrat?

Solució: Hi ha dues solucions. La primera està formada pels números 2 i $1 + \mathrm{i}$. La segona està formada pels números 2 i $1 - \mathrm{i}$.

1.16. **(opt)** Si $A = (3, 2)$ i $C = (1, 4)$ són dos vèrtexs oposats d'un rombus, trobeu els altres dos vèrtexs, sabent que la diagonal BD és doble que la AC.

Solució: $B = (4, 5)$ i $D = (0, 1)$.

1.17. **(opt)** Un triangle té vèrtexs $A = (0, 0)$, $B = (3, 1)$. Trobeu el tercer vèrtex C sabent que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$ i que $\| \overrightarrow{AC} \| = 2 \| \overrightarrow{AB} \|$.

Solució: Hi ha dues solucions: $C = 2\sqrt{2}(1 + 2\mathrm{i})$ i $C = 2\sqrt{2}(2 - \mathrm{i})$.

1.18. **(opt)** Trobeu un nombre complex tal que ell i les seves tres arrels cúbiques formin un rombe.

Solució: Hi ha dues solucions: $z = \pm 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

1. Nombres Complexos

1.1 Expreseu en forma polar

$$i^{23}-1,\ (1+i)^3,\ (1+\sqrt{3}i)^7,\ \frac{(\sqrt{3}+i)^5}{(1-i)^2},\ \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^6}{(3-3\sqrt{3}i)^4}$$

Solució.

1.1.a) $i^{23}-1 = i^{4\cdot 5+3}-1 = i^3(i^4)^5-1 = -i-1 = \underline{\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}}$

1.1.b) $(1+i)^3 = \underline{2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

1.1.c) $(1+\sqrt{3}i)^7 = 128\,e^{i\frac{7\pi}{3}} = \underline{128\,e^{i\pi/3}}$

1.1.d) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^5}{(1-i)^2} = \dfrac{2^5 e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2\,e^{i\frac{7\pi}{2}}} = 16\,e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{7\pi}{2}\right)} = \underline{16\,e^{i\frac{4\pi}{3}}}$

(Nota: $\frac{5\pi}{6}-\frac{7\pi}{2} = \frac{5-21\pi}{6} = -\frac{16\pi}{6} = -\frac{8\pi}{3}$ i $4\pi-\frac{8\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ que és l'argument que agafem.)

1.1.e) $\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^6}{(3-3\sqrt{3}i)^4} = \dfrac{2^6 e^{i\frac{3\pi}{2}}}{2^4\cdot 3^4 e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \dfrac{4}{81}\,e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)} = \underline{\dfrac{4}{81}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

$$(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^6 = \left(2\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 = 2^6 e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

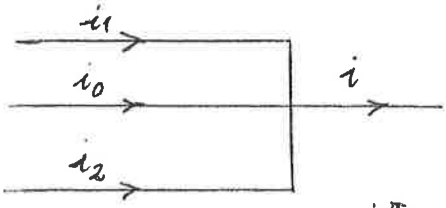
$$(3-3\sqrt{3}i)^4 = \left(2\cdot 3\,e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)^4 = 2^4\cdot 3^4\cdot e^{i\frac{20\pi}{3}} = 2^4\cdot 3^4\,e^{i\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2^4 3^4 e^{i\frac{2\pi}{3}}\underbrace{e^{i2\ldots}}_{1}$$

$$= 2^4 3^4 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

1.2 (*)

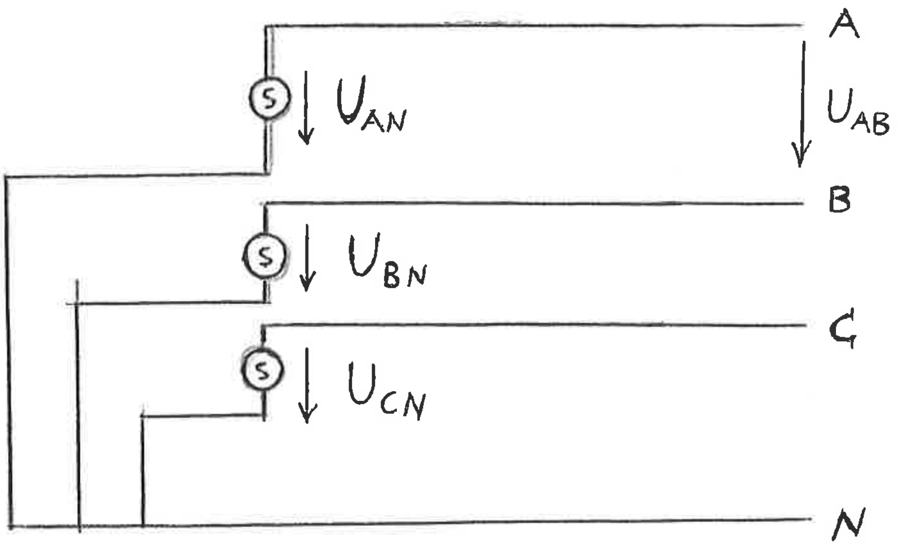
Mentre que en corrents continus les magnituds elèctriques (tensió, intensitat,...) són representades per nombres reals, en corrents alterns ho són per nombres complexos de la forma $Me^{j\alpha}$. Són vàlides relacions anàlogues a les lleis de Kirchoff, emprant l'operació suma de complexos.

(a) Calculeu el corrent $I = I_0 + I_1 + I_2$



essent $I_0 = 4$, $I_1 = 3e^{j\pi/3}$, $I_2 = 2e^{j\pi/4}$.

(b) Calculeu la tensió "fase/fase" $U_{AB} = U_{AN} - U_{BN}$



essent les tensions "fase/neutre" $U_{AN} = 120$, $U_{BN} = 120\, e^{-j\frac{2\pi}{3}}$

Solució.

(a) $I = I_0 + I_1 + I_2 = 4 + 3e^{j\frac{\pi}{3}} + 2e^{j\frac{\pi}{4}} = 4 + \frac{3}{2} + j\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} + j\sqrt{2}$

$= 4 + \frac{3}{2} + \sqrt{2} + j\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}\right) \simeq 7'99405\, e^{j\,0'52581} = 7'99405_{30^\circ 7' 36''}$

(b) $U_{AB} = U_{AN} - U_{BN} = 120 - 120\, e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 120\left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)$

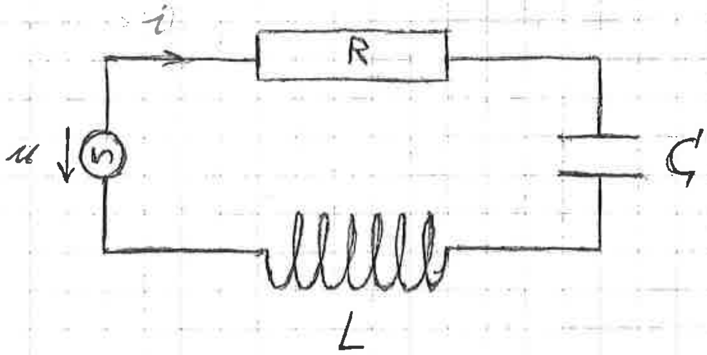
$= 120\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = 120\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = 60\left(3 + \sqrt{3}j\right)$

$= 120\sqrt{3}\, e^{j\frac{\pi}{6}}$.

1.3 (*) En els corrents alterns, la relació anàloga a la llei d'Ohm resulta $U = ZI$ on ara les magnituds U (tensió), I (intensitat) i Z (impedància) són nombres complexos.

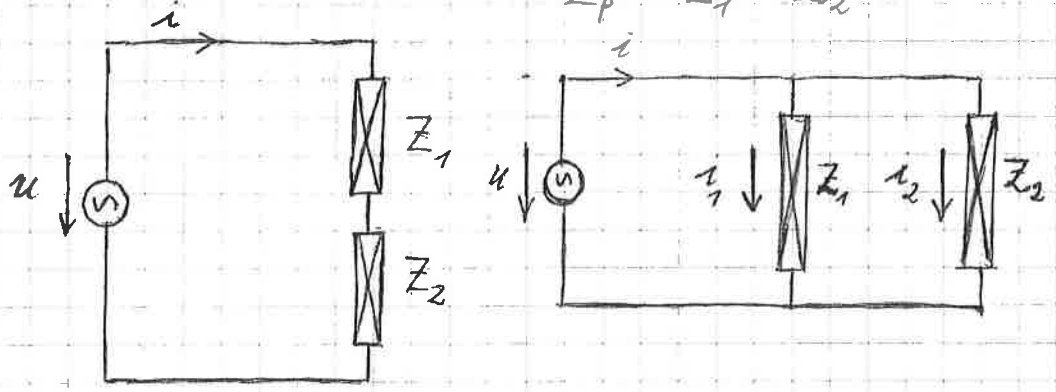
Així, per un circuit R-L-C com el de la figura, resulta

$Z_{RLC} = R + j\cdot\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$

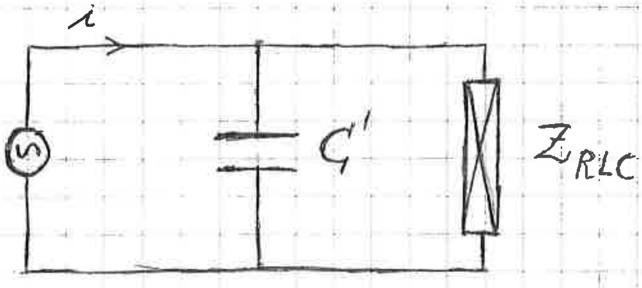


(a) Demostreu que, de forma anàloga als corrents continus, per a les connexions en sèrie i paral·lel resulta

$$Z_s = Z_1 + Z_2 \qquad \frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$



(b) Calculeu C' per tal que, en el circuit de la figura resulti $U/I \in \mathbb{R}$



(Nota: aquesta condició és la que maximitza la potència activa del circuit; raoneu que sempre és possible aconseguir-ho mitjançant una C' adequada, qualsevol que sigui la impedància Z inicial)

Solució (a) $U = U_1 + U_2 = IZ_1 + IZ_2 = I(Z_1 + Z_2) = IZ_s$, d'on:

$$\boxed{Z_s = Z_1 + Z_2},$$

d'altra banda: $I = I_1 + I_2 = \dfrac{U}{Z_1} + \dfrac{U}{Z_2} = U\left(\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}\right) = \dfrac{U}{Z_p}$

d'on: $$\boxed{\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$$

(b) $$\frac{1}{Z} = \frac{1}{-j/C'\omega} + \frac{1}{Z_{RLC}} = C'\omega j + \frac{1}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

$$= C'\omega j + \frac{R - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)j}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \frac{R}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} + \left[C'\omega - \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}\right]j$$

i cal que: $\frac{U}{I} = Z \in \mathbb{R}$, i això passa sii:

$$C'\omega - \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = 0, \text{ d'on: } \boxed{C' = C\,\frac{LC\omega^2 - 1}{R^2C^2\omega^2 + \left(LC\omega^2 - 1\right)^2}}$$

Remarca: en general, per a qualsevol altre valor de la impedància, $Z' = A + Bj$, tindrem

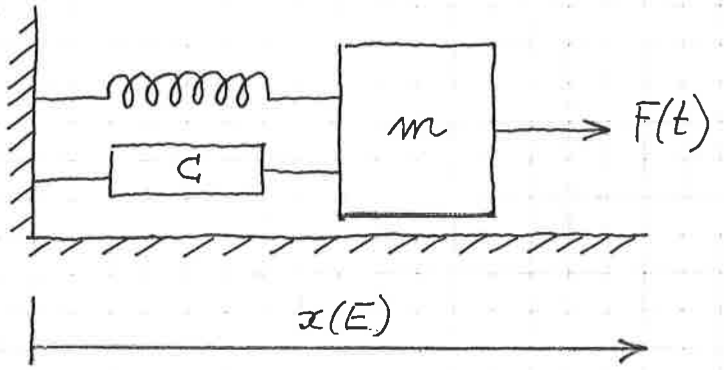
$$\frac{1}{Z} = C'\omega j + \frac{1}{A + jB} = C'\omega j + \frac{A - Bj}{A^2 + B^2}$$

$$= \frac{A}{A^2 + B^2} + \left(C'\omega - \frac{B}{A^2 + B^2}\right)j$$

i per tant sempre és possible aconseguir $1/Z = U/I \in \mathbb{R}$ prenent:

$$\boxed{C' = \frac{B/\omega}{A^2 + B^2}}$$

1.4. (**) Per a un mecanisme oscil·latori com el de la figura



resulta l'equació diferencial següent

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F(t)$$

Si la força aplicada és de la forma $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$, resulta $x(t) = x_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$

(a) Si representem aquestes magnituds pels fasors $\underline{F} = F_0 e^{j\omega}$, $\underline{x} = x_0 e^{j(\omega+\varphi)}$, raoneu que vénen relacionats per $\underline{F} = (K + j\omega c - m\omega^2)\underline{x}$.

(b) Apliqueu-ho per calcular φ quan $\underline{x} = 2+j$, $K=3$, $\omega c = 2$, $m\omega^2 = 4$

Solució (a) $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$, $x(t) = x_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = (-m\omega^2 + c\omega j + K)x_0 e^{j(\omega t+\varphi)} = F_0 e^{j\omega t} \; \forall t$$

$$\underset{t=1}{\Longrightarrow} (K - m\omega^2 + c\omega j)x_0 e^{j(\omega+\varphi)} = F_0 e^{j\omega} \Longleftrightarrow \underline{F} = (K - m\omega^2 + c\omega j)\underline{x}$$

(veure figura 1).

(b) Com que $\underline{F} = F_0 e^{j\omega}$, $\underline{x} = x_0 e^{j(\omega+\varphi)}$,

llavors: $\arg\varphi = \arg\left(\frac{\underline{x}}{\underline{F}}\right) = \arg\left(\frac{x_0}{F_0} e^{j\varphi}\right)$ i com que d'una banda:

$$\underline{F} = (K - \omega^2 + c\omega j)\underline{x} = (3 - 4 + 2j)\underline{x}$$
$$= (-1+2j)(2+j) = -4+3j,$$

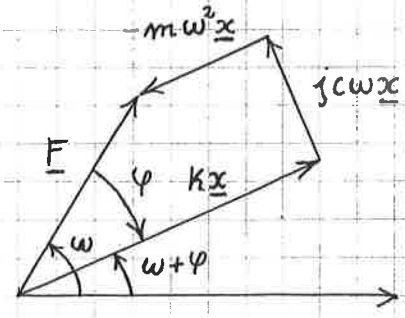


figura 1

aleshores:

$$\arg\varphi = \arg\left(\frac{\underline{x}}{\underline{F}}\right) = \arg\left(\frac{2+j}{-4+3j}\right) = \arg(-1-2j) = \pi + \arctan 2$$

1.5) Calculeu les arrels de l'equació $x^2-(1+i)x+i=0$

Solució:

$$x^2-(1+i)x+i = x^2-(1+i)x+\frac{(1+i)^2}{4}+i-\frac{(1+i)^2}{4} = \left(x-\frac{1+i}{2}\right)^2+\frac{4i-(1+i)^2}{4}$$

$$= \left(x-\frac{1+i}{2}\right)^2+\frac{4i-\cancel{1}-2i+\cancel{1}}{4} = \left(x-\frac{1+i}{2}\right)^2+\frac{i}{2}=0$$

$$\iff x=\frac{1+i}{2}+\sqrt{-\frac{i}{2}} = \frac{1+i}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi\right)} = \frac{1+i}{2}+\begin{cases}-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}, & k=0\\ \frac{1}{2}-\frac{i}{2}, & k=1\end{cases}$$

$$= \frac{1+i\pm(1-i)}{2} = \begin{cases} i,\\ 1.\end{cases}$$

1.6) Calculeu

a) $\sqrt{i} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$, $k=0,1$

$k=0$: $z_0 = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$k=1$: $z_1 = e^{i5\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

b) $1-\sqrt[3]{i} = 1-e^{i\left(\frac{\pi}{6}+2k\frac{\pi}{3}\right)}$, $k=0,1,2$

$k=0$: $z_0 = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$, $k=1$: $z_1 = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$, $k=2$: $z_2 = 1+i$

(Notem que $k=0$: $\varphi_0=\frac{\pi}{6}$, $k_1=1$: $\varphi_1=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi+4\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$,
$k_2=2$: $\varphi_2=\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}=\frac{9\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$.)

c) $$e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(1-(1+i)^3\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(1-2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+2-2i)$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3-2i) = \frac{3-2\sqrt{3}}{2}-\frac{2+3\sqrt{3}}{2}i$$

d) $$\frac{(1+i)^{100}}{(1+\sqrt{3})^{50}} = \frac{2^{50}e^{i25\pi}}{2^{50}e^{i\frac{50\pi}{3}}} = \frac{e^{i\pi}}{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(Notem que: $25\pi = 12(2\pi)+\pi \Rightarrow \arg(1+i)^{100}=\pi$,
i: $\frac{50\pi}{3} = 16\pi+\frac{2\pi}{3} = 8(2\pi)+\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \arg(1+\sqrt{3})^{50} = \frac{2\pi}{3}$.)

e) $$(1+\sqrt{3}i)^3-(1-\sqrt{3}i)^3 = 8e^{i\pi}-8e^{i5\pi} = 8e^{i\pi}-8e^{i\pi}\underbrace{e^{i4\pi}}_{=1} = 0$$

1.8 Troben $a \in \mathbb{R}$ per tal que $\dfrac{1+2ai}{1-3i} \in \mathbb{R}$

Solució

$$\frac{1+2ai}{1-3i}\cdot\frac{1+3i}{1+3i} = \frac{1-6a+i(3+2a)}{10} = \frac{1-6a}{10} + i\,\frac{3+2a}{10} \in \mathbb{R}$$

$\Longleftrightarrow 3+2a=0 \Longleftrightarrow a=-3/2$ □

1.9 (a) Si z_1, z_2, z_3, z_4 són les arrels quartes de 1, calculen la seva suma $z_1+z_2+z_3+z_4$.

(b) En general, calculen la suma de les n arrels n-èsimes d'un complex qualsevol $z \in \mathbb{C}$.

Solució (b) En general, si $z_1, z_2, \dots, z_n$ són les n arrels n-èsimes d'un nombre complex, z, $z_k = \rho^{1/n} e^{i\theta/n}\cdot e^{i(k-1)\cdot 2\pi/n}$, on $\theta = \arg z$ i $\rho = |z|$, per $k=1,2,3,\dots,n$; i la seva suma és doncs,

$$S = \sum_{k=1}^{n} z_k = \rho^{1/n} e^{i\theta/n} \sum_{k=1}^{n} e^{i(k-1)2\pi/n} \overset{(*)}{=} \rho^{1/n} e^{i\theta/n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$$

def: $\omega := e^{i2\pi/n}$

$$= \rho^{1/n} e^{i\theta/n}\cdot\frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \rho^{1/n} e^{i\theta/n}\cdot\frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0.$$

$(*)$
$$\left.\begin{aligned} S &= 1+\omega+\omega^2+\dots+\omega^{n-1} \\ \omega S &= \quad\;\; \omega+\omega^2+\dots+\omega^{n-1}+\omega^n \end{aligned}\right\} \Rightarrow (1-\omega)S = 1-\omega^n \Rightarrow S = \frac{1-\omega^n}{1-\omega},$$

(sempre que $\omega \neq 1$). L'apartat (a) és un c.p. de (b) amb $n=4$.

1.10 (a) Si z_1, z_2, z_3, z_4 són les arrels quartes de $z \in \mathbb{C}$, calculen el seu producte $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4$.

(b) En general, calculen el producte de les n arrels n-èsimes d'un complex qualsevol $z \in \mathbb{C}$.

Solució. Posem $z = \rho e^{i\varphi}$, on $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$, i llavors les n arrels n èsimes vénen donades per $z_k = \rho^{1/n} e^{i \frac{\varphi + 2(k-1)\pi}{n}}$ amb $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. El seu producte és, doncs:

(b) $$p = \prod_{k=1}^{n} z_k = \prod_{k=1}^{n} \rho^{1/n} e^{i \frac{\varphi + 2(k-1)\pi}{n}} = \rho e^{i\varphi} e^{i \frac{2\pi}{n}(0+1+2+\cdots+n-1)}$$

$$\overset{(*)}{=} \rho e^{i\varphi} e^{i \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}} = \rho e^{i\varphi} e^{i(n-1)\pi}$$

$$= (-1)^{n-1} \rho e^{i\varphi}$$

$$= (-1)^{n-1} z$$

(*) recordem que $1+2+\cdots+r = \frac{r(r+1)}{2}$ per tot $r \in \mathbb{N}$

(a) És un c.p. de (b) amb $n = 4$; per tant $z_1 z_2 z_3 z_4 = (-1)^{4-1} z = -z$ □

1.11 Trobeu $z \in \mathbb{C}$ tal que $\bar{z} = z^5$

Solució. Sigui $z = |z| e^{i\varphi}$ on $\varphi = \arg z$, llavors $\bar{z} = |z| e^{-i\varphi}$ i: $\bar{z} = z^5 \Leftrightarrow |z| e^{-i\varphi} = |z|^5 e^{i5\varphi} \Leftrightarrow z = 0$ ó $|z|^4 e^{i6\varphi} = 1$. Per tant o bé $z = z_0 = 0$ o bé $z = z_k = e^{i(k-1)\frac{\pi}{3}}$ per $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$: $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $z_4 = -1$, $z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $z_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$. És a dir, les solucions són el zero i les sis arrels sisenes de la unitat □

1.12 Si $z_1, z_2, \ldots z_8 \in \mathbb{C}$ són les arrels vuitenes de 1, calculeu quant val $z_1 + z_2 + \cdots + z_8$

Solució. Com ja s'ha vist al problema 1.9 la suma de les n arrels n-èsimes d'un nombre complex dóna zero, per tant

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_8 = 0 \quad \square$$