1.

Equació
Diferencial
Ordinària

10. EDO's lineals i sistemes lineals a coeficients constants

(10A) EDO's lineals amb coeficients constants.

10.1. Resoleu:

(a) $y''' - 8y = 0$.

(b) $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$.

(c) $y^{(8)} - y = 0$.

Solució:

(a) $y_{\text{h}}(t) = c_1 e^{2t} + e^{-t}\big(c_2 \cos(\sqrt{3}t) + c_3 \sin(\sqrt{3}t)\big)$.

(b) $y_{\text{h}}(t) = c_1 + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(2t) + c_4 t \cos(2t) + c_5 t \sin(2t)$.

(c) $y_{\text{h}}(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t + e^{t/\sqrt{2}}\big(c_5 \cos(t/\sqrt{2}) + c_6 \sin(t/\sqrt{2})\big) + e^{-t/\sqrt{2}}\big(c_7 \cos(t/\sqrt{2}) + c_8 \sin(t/\sqrt{2})\big)$.

(a) $y''' - 8y = 0$

Polinomi característic: $P(m) = m^3 - 8 = (m-2)(m^2+2m+4)$.

Arrels (valors característics): $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$

Llavors les solucions del CFS$^{(*)}$ són: $y_1(t) = e^{2t}$, $y_2(t) = e^{-t}\cos(\sqrt{3}t)$,

$y_3(t) = e^{-t}\sin(\sqrt{3}t)$.

La solució general ve donada per una c.l. de les solucions del CFS, i.e.,

$$y(t) = c_1 e^{2t} + e^{-t}\big(c_2 \cos(\sqrt{3}t) + c_3 \sin(\sqrt{3}t)\big),$$

amb coeficients $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures): vindrien determinats

(*) CFS: Conjunt Fonamental de Solucions per les condicions inicials (c.i.)

(b) $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = m^5 + 8m^3 + 16m = m(m^2+4)^2$.

Arrels (valors característics): $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$ (mult. 2); d'on es té que el CFS ve donat per:

$y_1(t) = 1$, $y_2(t) = \cos(2t)$, $y_3(t) = \sin(2t)$, $y_4(t) = t\cos(2t)$, $y_5(t) = t\sin(2t)$;

i la solució general és c.l. d'aquestes solucions,

$$y(t) = c_1 + c_2\cos(2t) + c_3\sin(2t) + c_4 t\cos(2t) + c_5 t\sin(2t)$$

amb $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$ lliures.

(c) $y^{(8)} - y = 0$

Polinomi característic: $P(m) = m^8 - 1 = (m-1)(m+1)(m^2+1)\times$
$\times(m^2 - \sqrt{2}m + 1)(m^2 + \sqrt{2}m + 1)$,

les seves arrels (valors característics) són: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$,
$\lambda_{5,6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_{7,8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$,

d'on el CFS resulta: $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$, $y_3(t) = \cos t$, $y_4(t) = \sin t$,

$y_5(t) = e^{\sqrt{2}/2\, t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$, $y_6(t) = e^{\sqrt{2}/2\, t}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$,

$y_7(t) = e^{-\sqrt{2}/2\, t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$, $y_8(t) = e^{-\sqrt{2}/2\, t}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$.

La solució general s'escriu com c.l. d'aquestes:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3\cos t + c_4 \sin t + e^{\sqrt{2}/2\, t}\left(c_5\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + c_6\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right)$$
$$+ e^{-\sqrt{2}/2\, t}\left(c_7\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + c_8\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right).$$

amb coeficients $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures), que es determinarien imposant les c.i. per exemple en el temps inicial $t_0 = 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, $y''(0) = y_2$, ..., $y^{(6)}(0) = y_6$; amb $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_6 \in \mathbb{R}$ donats (que són les anomenades condicions inicials) □

10.2. Resoleu:

(a) $2y'' + 2y' + 3y = t^2 + 2t + 1$.
(b) $y'' + 3y' - 4y = \sin 2t$.
(c) $y'' + 4y = \sin 2t$.
(d) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^{4t}$.
(e) $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 13e^{-2t}$.
(f) $y''' - 2y'' - y' + 2y = \cos t$.
(g) $y''' - y' = te^t$.

Solució:

(a) $y_g(t) = e^{-t/2}\left(c_1 \cos(\sqrt{5}t/2) + c_2 \sin(\sqrt{5}t/2)\right) - \frac{7}{27} + \frac{2}{9}t + \frac{1}{3}t^2$.
(b) $y_g(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-4t} - \frac{3}{50}\cos 2t - \frac{2}{25}\sin 2t$.
(c) $y_g(t) = (c_1 - t/4)\cos 2t + c_2 \sin 2t$.
(d) $y_g(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} + \frac{1}{18}e^{4t}$.
(e) $y_g(t) = (c_1 + t)e^{-2t} + c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t$.
(f) $y_g(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + \frac{1}{5}\cos t - \frac{1}{10}\sin t$.
(g) $y_g(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} + e^t(t^2 - 3t)/4$.

Solució:

(a) $2y'' + 2y' + 3y = t^2 + 2t + 1$

P1.- Polinomi característic de l'EDO homogènia associada: $P(m) = 2m^2 + 2m + 3$, el qual té per arrels $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{5}}{2}$; d'on resulta la solució la solució general de l'homogènia associada,

$$y_h(t) = e^{-t/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)\right)$$

amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures.

P2.- A continuació busquem el polinomi característic d'una EDO lineal a coeficients constants homogènia(*) que té el terme independent, $\varphi(t) = t^2 + 2t + 1$, per solució. En aquest cas, òbviament, és $Q(m) = m^3$, ja que el CFS$_1$ associat a les arrels d'aquest polinomi característic és: $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = t$, $y_3(t) = t^2$ i $\varphi(t)$ és c.l. d'aquestes solucions

(*) d'ordre mínim!

P3- Escrivim el CFS_2 associat al polinomi característic:

$$R(m) = P(m)\,Q(m) = (2m^2+2m+3)\cdot m^3$$

i.e., CFS_2 correspondria al CFS d'una EDO lineal, homogènia i a coeficients constants que tingués $R(m) = (2m^2+2m+3) * m^3$ per polinomi característic. En aquest exemple:

$$CFS_2:\ y_1(t) = e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right),\ y_2(t) = e^{-t/3}\sin\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right),$$

$$y_3(t) = 1,\ y_4(t) = t,\ y_5(t) = t^2.$$

P4- Busquem una solució particular, $y_p(t)$, de l'EDO no homogènia, com c.l. a coeficients indeterminats de les solucions del CFS_2 que no hi són en CFS_1. Així:

$$y_p(t) = d_1 + d_2 t + d_3 t^2.$$

P5- Finalment, determinem els coeficients d_1, d_2 i d_3 substituint $y_p(t)$ i les seves derivades en l'EDO no homogènia, i comparant coeficients:

$$y_p(t) = d_1 + d_2 t + d_3 t^2,$$
$$y_p'(t) = d_2 + 2d_3 t,$$
$$y_p''(t) = 2d_3,$$

$$\begin{aligned}2y_p''(t) + 2y_p'(t) + 3y_p(t) &= 4d_3 + 2(d_2 + 2d_3 t) + 3(d_1 + d_2 t + d_3 t^2)\\ &= 3d_1 + 2d_2 + 4d_3 + (3d_2 + 4d_3)t + 3d_3 t^2\\ &= 1 + 2t + t^2\ \forall t \Leftrightarrow \begin{aligned}3d_1 + 2d_2 + 4d_3 &= 1\\ 3d_2 + 4d_3 &= 2\\ 3d_3 &= 1\end{aligned}\end{aligned}$$

d'on resulta: $d_1 = -7/27$, $d_2 = 2/9$, $d_3 = 1/3$, i

$$y_p(t) = -\tfrac{7}{27} + \tfrac{2}{9}t + \tfrac{1}{3}t^2.$$

La solució general de l'EDO no homogènia s'escriu com la suma de la solució de l'EDO homogènia associada i la solució particular que hem trobat amb el mètode descrit dalt (mètode dels coeficients indeterminats), als passos P1-P5, i.e.:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = e^{-t/2}\left(c_1\cos\left(\tfrac{\sqrt{5}}{2}t\right) + c_2\sin\left(\tfrac{\sqrt{5}}{2}t\right)\right) - \tfrac{7}{27} + \tfrac{2}{9}t + \tfrac{1}{3}t^2,$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures (es determinarien imposant les c.i.)

b) $y'' + 3y' - 4y = \sin 2t$

P1.- $P(m) = m^2 + 3m - 4$ polinomi característic de l'EDO homogènia associada.

Valors característics: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$,

CFS_1: $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-4t}$

$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-4t}$ amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures.

P2.- Busquem el polinomi característic, $Q(m)$ d'una EDO lineal, a coeficients constants i homogènia que tingués el terme independent, $\varphi(t) = \sin 2t$ com solució. És clar(*) que

$$Q(m) = m^2 + 4$$

P3.- Escrivim el CFS_2, que és el associat al polinomi característic:

$$R(m) = P(m)\,Q(m) = (m-1)(m+4)(m^2+4):$$

CFS_2: $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-4t}$, $y_3(t) = \cos(2t)$,

$y_4(t) = \sin(2t)$

(*) Veure per exemple el Teorema de la pàgina 10.4 dels apunts del tema 10.

P4.- Busquem una solució particular, $y_p(t)$ de l'EDO no homogènia (o completa) com c.l. a coeficients indeterminats de les solucions del CFS_2 trobat a P3 que no hi figurin al CFS_1, trobat al pas P1. Per tant:

$$y_p(t) = d_1 \cos(2t) + d_2 \sin(2t)$$

P5.- Determinem els coeficients d_1 i d_2 substituint $y_p(t)$ i les seves derivades en l'EDO no homogènia, i comparant coeficients

$$y_p(t) = d_1 \cos(2t) + d_2 \sin(2t)$$
$$y_p'(t) = -2d_1 \sin(2t) + 2d_2 \cos(2t)$$
$$y_p''(t) = -4d_1 \cos(2t) - 4d_2 \sin(2t)$$

$$\begin{aligned} y_p''(t) + 3y_p'(t) - 4y_p(t) &= -4d_1 \cos(2t) - 4d_2 \sin(2t) \\ &\quad + 3\left(-2d_1 \sin(2t) + 2d_2 \cos(2t)\right) \\ &\quad - 4\left(d_1 \cos(2t) + d_2 \sin(2t)\right) \\ &= (-8d_1 + 6d_2)\cos(2t) + (-6d_1 - 8d_2)\sin(2t) \\ &= \sin(2t) \end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -8d_1 + 6d_2 = 0 \\ -6d_1 - 8d_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} d_1 = -\frac{3}{50} \\ d_2 = -\frac{2}{25} \end{matrix} \text{ (solució única).}$$

Llavors tenim que la solució particular buscada és:

$$y_p(t) = -\frac{3}{50}\cos(2t) - \frac{2}{25}\sin(2t).$$

Per últim, escrivim la solució general de l'EDO no homogènia com,

$$\therefore\ y(t) = \underbrace{c_1 e^{t} + c_2 e^{-4t}}_{= y_h(t)} \underbrace{- \frac{3}{50}\cos(2t) - \frac{2}{25}\sin(2t)}_{= y_p(t)},\ t \in \mathbb{R};\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ lliures.}$$

$\square$

(c) $y'' + 4y = \sin(2t)$

$\wp 1.-$ $P(m) = m^2+4$

$\lambda_{1,2} = \pm 2i$; CFS_1: $y_1(t) = \cos(2t)$, $y_2(t) = \sin(2t)$

$y_h(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures

$\wp 2.-$ $Q(m) = m^2+4$

$\wp 3.-$ $R(m) = P(m)\,Q(m) = (m^2+4)^2$; CFS_2: $y_1(t) = \cos(2t)$, $y_2(t) = \sin(2t)$

$y_3(t) = t\cos(2t)$, $y_4(t) = t\sin(2t)$

$\wp 4.-$ $CFS_2 \setminus CFS_1$: $y_3(t) = t\cos(2t)$, $y_4(t) = t\sin(2t)$;

$y_p(t) = d_1 t\cos(2t) + d_2 t\sin(2t)$

$\wp 5.-$ $y_p'(t) = d_1\cos(2t) - 2d_1 t\sin(2t) + d_2\sin(2t) + 2d_2 t\cos(2t)$

$y_p''(t) = -4d_1\sin(2t) - 4d_1 t\cos(2t) + 4d_2\cos(2t) - 4d_2 t\sin(2t)$

$y_p''(t) + 4y_p(t) = -4d_1\sin(2t) + 4d_2\cos(2t) = \sin(2t)$

$\forall t \Leftrightarrow d_1 = -1/4,\ d_2 = 0$

Aleshores la solució particular buscada resulta:

$y_p(t) = -\frac{1}{4}t\cos(2t)$

Així, escrivim la solució general de l'EDO no homogènia com:

$\therefore\ y(t) = y_h(t) + y_p(t) = (c_1 - t/4)\cos(2t) + c_2\sin(2t)$,

$t \in \mathbb{R}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures (es fixarien imposant condicions inicials).

(d) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^{4t}$

$\wp 1.-$ $P(m) = m^3 - 2m^2 - 5m + 6 = (m-3)(m-1)(m+2)$

Arrels (valors característics): $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$.

CFS_1 : $y_1(t) = e^{3t}$, $y_2(t) = e^{t}$, $y_3(t) = e^{-2t}$

$$y_h(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{-2t}$$

P2.- $Q(m) = m-4$

P3.- $R(m) = P(m)Q(m) = (m-3)(m-1)(m+2)(m-4)$

CFS_2 : $y_1(t) = e^{3t}$, $y_2(t) = e^{t}$, $y_3(t) = e^{-2t}$, $y_4(t) = e^{4t}$

P4.- $CFS_2 \setminus CFS_1$: $y_4(t) = e^{4t}$.

Busquem doncs una solució de l'EDO no-homogènia de la forma

$$y_p(t) = d_1 e^{4t}$$

P5.- $y_p'(t) = 4d_1 e^{4t}$, $y_p''(t) = 16 d_1 e^{4t}$, $y_p'''(t) = 64 d_1 e^{4t}$

$$y_p'''(t) - 2y_p''(t) - 5y_p'(t) + 6y_p(t) = (64-32-20+6)\, e^{4t} = 18 d_1 e^{4t} = e^{4t}$$

$$\forall t \Leftrightarrow d_1 = 1/18,$$

i tenim que la solució particular buscada és:

$$y_p(t) = \frac{1}{18} e^{4t},$$

mentre que ara podem escriure la solució general de la no-homogènia és

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{-2t} + \frac{1}{18} e^{4t},$$

$t \in \mathbb{R}$ i $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ lliures.

(e) $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 13 e^{-2t}$

P1.- $P(m) = m^3 + 2m^2 + 9m + 18 = (m+2)(m^2+9)$

CFS_1 : $y_3(t) = e^{-2t}$, $y_1(t) = \cos(3t)$, $y_2(t) = \sin(3t)$

$$y_h(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t) + c_3 e^{-2t}$$

P2.- $Q(m) = m+2$;

$\mathcal{P}3.- \ \mathcal{R}(m) = P(m)\cdot \mathcal{Q}(m) = (m+2)^2(m^2+9)$

$CFS_2: \ y_1(t) = \cos(3t), \ y_2(t) = \sin(3t), \ y_3(t) = e^{-2t},$
$y_4(t) = t e^{-2t}.$

$\mathcal{P}4.- \ CFS_2 \setminus CFS_1: \ y_p(t) = t e^{-2t}$

$y_p(t) = d_1 t e^{-2t}$

$\mathcal{P}5.- \left.\begin{array}{l} y_p'(t) = d_1 e^{-2t} - 2d_1 t e^{-2t} \\ y_p''(t) = -4d_1 e^{-2t} + 4d_1 t e^{-2t} \\ y_p'''(t) = 12 d_1 e^{-2t} - 8d_1 t e^{-2t} \end{array}\right\}$ Per determinar el coeficient d_1 substituïm $y_p(t)$ i les seves derivades a l'EDO no homogènia:

$$y_p'''(t) + 2y_p''(t) + 9y_p'(t) + 18y_p(t) = \big(12d_1 - 8d_1 t - 8d_1 + 8d_1 t + 9d_1 - 18d_1 t + 18d_1 t\big)e^{-2t}$$
$$= 13\, d_1 e^{-2t} = 13\, e^{-2t} \ \forall t$$
$$\Leftrightarrow d_1 = 1$$

Aleshores, per comparació de coeficients hem trobat que la solució particular buscada de l'EDO no homogènia és:

$y_p(t) = t e^{-2t}$

Així la solució general de l'EDO no homogènia ve donada per la suma de la solució general de l'homogènia obtiguda al pas $\mathcal{P}1$ i la solució particular de la no homogènia que hem trobat al final del pas $\mathcal{P}5$. És a dir:

$$y(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) + (c_3 + t)e^{-2t}, \ t \in \mathbb{R}$$

i $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries (paràmetres lliures). $\square$

(f) $y''' - 2y'' - y' + 2y = \cos t$

P1.- $P(m) = m^3 - 2m^2 - m + 2 = (m-1)(m+1)(m-2)$

CFS_1: $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$, $y_3(t) = e^{2t}$

$y_h(t) = c_1 e^{+t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}$

P2.- $Q(m) = m^2 + 1$, ja que l'EDO a coeficients constants i homogènia amb aquest polinomi característic, $y'' + y = 0$, té com solució general $\tilde{y}(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ i en particular, llavors, el terme independent $\varphi(t) = \cos t$ de la nostra EDO no homogènia és solució.

P3.- $R(m) = P(m)Q(m) = (m-1)(m+1)(m-2)(m^2+1)$

CFS_2: $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$, $y_3(t) = e^{2t}$,

$y_4(t) = \cos t$, $y_5(t) = \sin t$

P4.- Buscarem solucions particulars de l'EDO no homogènia com c.l. de les solucions que figuren a CFS_2 que no són a CFS_1, i.e.:

$CFS_2 \setminus CFS_1$: $y_4(t) = \cos t$, $y_5(t) = \sin t$

és a dir, de la forma:

$$y_p(t) = d_1 \cos t + d_2 \sin t$$

P5.- $y_p'(t) = -d_1 \sin t + d_2 \cos t$

$y_p''(t) = -d_1 \cos t - d_2 \sin t$

$y_p'''(t) = d_1 \sin t - d_2 \cos t$

$$\begin{aligned} y_p'''(t) - 2y_p''(t) - y_p'(t) + 2y_p(t) &= d_1 \sin t - d_2 \cos t \\ &+ 2d_1 \sin t + 2d_2 \cos t \\ &+ d_1 \sin t - d_2 \cos t \\ &+ 2d_1 \sin t + 2d_1 \cos t = \end{aligned}$$

$= (2d_1+4d_2)\sin t + (4d_1-2d_2)\cos t = \cos t \quad \forall t,$

Llavors comparant coeficients això es verificarà sii d_1, d_2 satisfan les equacions:

$$\left.\begin{array}{l} d_1 + 2d_2 = 0 \\ 4d_1 - 2d_2 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} d_1 = 1/5 \\ d_2 = -1/10 \end{array} \quad \text{(solució única)}$$

Tenim doncs la solució particular:

$$y_p(t) = \frac{1}{5}\cos t - \frac{1}{10}\sin t,$$

i podem escriure la solució general de l'EDO no homogènia (completa) com: $y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t} + \frac{1}{5}\cos t - \frac{1}{10}\sin t$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ lliures

(g) $y''' - y' = te^t$

P1.- $P(m) = m^3 - m = m(m^2-1) = m(m-1)(m+1)$: Arrels: $\begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 1, \\ \lambda_3 = -1. \end{cases}$

CFS_1: $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = e^t$, $y_3(t) = e^{-t}$

$y_h(t) = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t}$

P2.- $\mathcal{L}(m) = (m-1)^2$, ja que l'EDO a coeficients constants, lineal i homogènia amb aquest polinomi característic, $y'' - 2y' + y = 0$, té com a solució general $y(t) = c_1e^t + c_2te^t$. En particular veiem doncs que el terme independent $f(t) = te^t$ és solució.

P3.- $R(m) = P(m)\,Q(m) = m(m+1)(m-1)^3$

CFS_2: $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = e^{-t}$, $y_3(t) = e^t$,

$y_4(t) = te^t$, $y_5(t) = t^2e^t$.

P4.- $CFS_2 \setminus CFS_1$: $y_4(t) = te^t$, $y_5(t) = t^2e^t$

$y_p(t) = d_1te^t + d_2t^2e^t$

P5.- $y_p'(t) = d_1 e^t + (d_1 + 2d_2) t e^t + d_2 t^2 e^t$

$$y_p''(t) = d_1 e^t + (d_1 + 2d_2) e^t + (d_1 + 2d_2) t e^t + 2d_2 t e^t + d_2 t^2 e^{-t}$$
$$= (2d_1 + 2d_2) e^t + (d_1 + 4d_2) t e^t + d_2 t^2 e^t$$

$$y_p'''(t) = (2d_1 + 2d_2) e^t + (d_1 + 4d_2) e^t + (d_1 + 4d_2) t e^t + 2d_2 t e^t + d_2 t^2 e^t$$
$$= (3d_1 + 6d_2) e^t + (d_1 + 6d_2) t e^t + d_2 t^2 e^t$$

Substituint a l'EDO no-homogènia tindrem:

$$y_p'''(t) - y_p'(t) = (3d_1 + 6d_2) e^t + (d_1 + 6d_2) t e^t + d_2 t^2 e^t$$
$$- d_1 e^t - (d_1 + 2d_2) t e^t - d_2 t^2 e^t$$
$$= (2d_1 + 6d_2) e^t + 4d_2 t e^t = t e^t \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

la qual cosa es satisfà sii:

$$\left.\begin{aligned} 2d_1 + 6d_2 &= 0 \\ d_2 &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} d_1 &= -\tfrac{3}{4} \\ d_2 &= \tfrac{1}{4} \end{aligned} \quad \text{(solució única)}$$

amb la qual cosa tenim que la solució particular buscada és:

$$y_p(t) = -\frac{3}{4} t e^t + \frac{1}{4} t^2 e^t$$

Finalment, la solució general de l'EDO no homogènia (completa) l'escriurem com la suma de la solució general de l'homogènia, $y_h(t)$ i la solució particular obtinguda amb els passos P1-P5 (mètode dels coeficients indeterminats), $y_p(t)$. Així:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 + \left(c_2 - \frac{3}{4} t + \frac{1}{4} t^2\right) e^t + c_3 e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

i amb $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures), els quals es determinarien imposant condicions inicials.

10.3. Resoleu:

(a) $y''' - 4y' = \cos^2 t$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

(b) $y'' + 2y' + y = te^{-t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Solució:

(a) $y(t) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{8}t + \frac{11}{64}e^{2t} + \frac{5}{64}e^{-2t} - \frac{1}{32}\sin 2t$. Hemos usado que $2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$.

(b) $y(t) = e^{-t}(1 + 3t + t^3/6)$.

Solució.

(a) $y''' - 4y' = \cos^2 t$ amb les c.i.: $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$

$P(m) = m^3 - 4m = m(m-2)(m+2)$. CFS_1: $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = e^{2t}$, $y_3(t) = e^{-2t}$

$y_h(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}$;

$Q(m) = m(m^2+4)$, on fem servir que $P(t) = \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$: fórmula de l'angle meitat $^{(\dagger)}$.

$R(m) = P(m)\,Q(m) = m^2(m-2)(m+2)(m^2+4)$

CFS_2: $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = e^{2t}$, $y_3(t) = e^{-2t}$, $y_4(t) = t$, $y_5(t) = \cos(2t)$, $y_6(t) = \sin(2t)$

$CFS_2 \setminus CFS_1$: $y_4(t) = t$, $y_5(t) = \cos(2t)$, $y_6(t) = \sin(2t)$.

$y_p(t) = d_1 t + d_2\cos(2t) + d_3\sin(2t)$,

$y_p'(t) = d_1 - 2d_2\sin(2t) + 2d_3\cos(2t)$,

$y_p''(t) = -4d_2\cos(2t) - 4d_3\sin(2t)$,

$y_p'''(t) = 8d_2\sin(2t) - 8d_3\cos(2t)$,

$y_p'''(t) - 4y_p'(t) = 8d_2\sin(2t) - 8d_3\cos(2t) - 4d_1 + 8d_2\sin(2t) - 8d_3\cos(2t) =$

$(\dagger)$ Per exemple a partir de la fórmula d'Euler:

$$\cos^2 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2it} + e^{-2it} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$$

$= -4d_1 + 16\,d_2\sin(2t) - 16\,d_3\cos(2t) = -4d_1 + 16d_2\sin(2t) - 16d_1\cos(2t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$

$\forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow d_1 = -\frac{1}{8},\ d_2 = 0,\ d_3 = -\frac{1}{32},$

Llavors: $y_p(t) = -\frac{t}{8} - \frac{1}{32}\sin(2t)$, i la solució general s'escriu:

$$y_g(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t} - \frac{t}{8} - \frac{1}{32}\sin(2t)\ ;\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \text{ lliures}$$

A continuació, imposem les c.i. i obtenim el sistema

$$\left.\begin{aligned} y_g(0) &= c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ y_g'(0) &= 2c_2 - 2c_3 - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = 0, \\ y_g''(0) &= 4c_2 + 4c_3 = 1. \end{aligned}\right\}$$

que és compatible determinat (unicitat de solució), i que un cop resolt s'obté:

$$c_1 = -\frac{1}{4},\quad c_2 = \frac{11}{64},\quad c_3 = \frac{5}{64}.$$

Amb la qual cosa, la solució del PVI ve donada per.

$$y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{11}{64}e^{2t} + \frac{5}{64}e^{-2t} - \frac{t}{8} - \frac{1}{32}\sin(2t),\quad t \in \mathbb{R}$$

(b) $y'' + 2y' + y = te^{-t}$ amb les c.i. $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

$P(m) = (t+1)^2$: Arrels $\lambda_1 = -1$ multiplicitat 2;

$\boxed{\begin{array}{l} CFS_1: y_1(t) = e^{-t},\ y_2(t) = te^{-t} \\ y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \text{ amb } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{array}}$

$Q(m) = (t+1)^2$:

$R(m) = P(m)\,Q(m) = (m+1)^4$

CFS_2: $y_1(t) = e^{-t}$, $y_2(t) = te^{-t}$, $y_3(t) = t^2e^{-t}$, $y_4(t) = t^3e^{-t}$

$CFS_2 \setminus CFS_1$: $y_3(t) = t^2e^{-t}$, $y_4(t) = t^3e^{-t}$

Busquem una solució particular de la forma:

$$y_p(t) = d_1 t^2 e^{-t} + d_2 t^3 e^{-t}$$

i determinem els coeficients d_1 i d_2 substituint $y_p(t)$ i les seves derivades a l'EDO no homogènia i comparant coeficients. Això és:

$$y_p'(t) = 2d_1 t e^{-t} - d_1 t^2 e^{-t} + 3d_2 t^2 e^{-t} - d_2 t^3 e^{-t}$$
$$= 2d_1 t e^{-t} + (-d_1 + 3d_2) t^2 e^{-t} - d_2 t^3 e^{-t}$$
$$y_p''(t) = 2d_1 e^{-t} + (-4d_1 + 6d_2) t e^{-t} + (d_1 - 6d_2) t^2 e^{-t} + d_2 t^3 e^{-t}$$

$$y_p''(t) + 2y_p'(t) + y_p(t) = \Big(2d_1 + (-4d_1 + 6d_2)t + (d_1 - 6d_2)t^2 + d_2 t^3$$
$$+ 4d_1 t + (-2d_1 + 6d_2)t^2 - 2d_2 t^3$$
$$+ d_1 t^2 + d_2 t^3\Big) e^{-t}$$
$$= 2d_1 e^{-t} + 6d_2 t e^{-t} = t e^{-t} \ \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow d_1 = 0, d_2 = \tfrac{1}{6}$$

(comparació de coeficients). Aleshores tenim per la solució particular:

$y_p(t) = \frac{t^3}{6} e^{-t}$, mentre que podrem escriure la solució general com:

$$y_g(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + \frac{t^3}{6} e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures.

A continuació, per tenir la solució del PVI, imposem les c.i.:

$$y_g(0) = c_1 = 1$$
$$y_g'(0) = -c_1 + c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 3.$$

Finalment doncs, la solució que satisfà les condicions inicials donades (i.e. la solució del PVI) és:

$$y(t) = \left(1 + 3t + \frac{t^3}{6}\right) e^{-t}$$

$\square$

10.4. Usar el comando `dsolve` de MATLAB para resolver simbólicamente los problemas:

(a) $y''' - y'' + y' - y = te^t \sin t$.

(b) $2y^{(5)} - 7y^{(4)} + 12y''' + 8y'' = 0,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\ y'''(0) = y^{(4)}(0) = 1$.

(a) *El comando* `dsolve('D3y-D2y+Dy-y=t*eyp(t)*sin(t)')` *da la solución general*

$$y_g(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t - e^t\left(8\cos t + 5t\cos t - 19\sin t + 10t\sin t\right)/25.$$

(b) *Obtenemos la solución* $y(t) = 19/16 - 5t/8 - 48e^{-t/2}/41 + e^{2t}(24\sin(2t) - 11\cos(2t))/656$ *con los comandos*

```
>> edo='2*D5y-7*D4y+12*D3y+8*D2y=0';
>> ci='y(0)=0,Dy(0)=0,D2y(0)=0,D3y(0)=1,D4y(0)=1';
>> dsolve(edo,ci)
```

10.5. Tenemos una EDO lineal homogénea a coeficientes constantes cuyo polinomio característico es $P(m) = (m^2 - 4)(m^2 + 9)(m^2 + 2m + 2)m$.

(a) ¿De qué dimensión es el subespacio vectorial formado por todas sus soluciones? Escribir la solución general de la ecuación.

(b) ¿De qué dimensión es el subespacio vectorial formado por todas sus soluciones periódicas? ¿Qué periodo tienen?

(c) ¿De qué dimensión es el subespacio vectorial formado por todas las soluciones que tienden a cero cuando $t \to +\infty$? ¿Y cuando $t \to -\infty$? ¿Y cuando $t \to \pm\infty$?

Solució: La EDO tiene orden siete, pues $\mathrm{gr}[P(m)] = 7$.

(a) Siete. $y_g(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3\cos(3t) + c_4\sin(3t) + e^{-t}(c_5\cos t + c_6 \sin t) + c_7$.

(b) Tres, pues necesitamos que $c_1 = c_2 = c_5 = c_6 = 0$. El periodo es $T = 2\pi/3$.

(c) Tres, pues necesitamos que $c_1 = c_3 = c_4 = c_7 = 0$. Uno, pues c_1 es la única constante que puede ser no nula. Cero, pues todas las constantes deben ser nulas.

Solució.

(a) Sabem que la dimensió de l'ev. de les solucions d'una EDO lineal homogènia i a coeficients constants S_0 = ordre de l'EDO = grau del seu polinomi característic, $P(m)$.

Llavors:

$$\dim S_0 = \text{grau } P(m) = \text{grau}\left((m^2-4)(m^2+9)(m^2+2m+2)m\right) = 7$$

Les seves arrels són: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2,\ \lambda_{4,5} = \pm 3i,\ \lambda_{6,7} = -1 \pm i$,

d'on tenim que el CFS és: $y_1(t) = 1,\ y_2(t) = e^{2t},\ y_3(t) = e^{-2t},\ y_4(t) = \cos(3t),$

$y_5(t) = \sin(3t),\ y_6(t) = e^{-t}\cos t,\ y_7(t) = e^{-t}\sin t$

La solució general ve doncs donada per:

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t} + c_4\cos(3t) + c_5\sin(3t) + e^{-t}(c_6\cos t + c_7 \sin t), \quad (*)$$

b) Per tenir solucions periòdiques necessitem que no figurin els termes que contenen les exponencials sinó que només apareguin solucions periòdiques, és a dir cal que les constants $c_2 = c_3 = c_6 = c_7 = 0$.
Llavors la dimensió del subespai de les solucions periódiques, S_1, és
$\underline{\dim S_1 = 7-4 = 3}$
i qualsevol solució periódica s'escriu com
$$y(t) = c_1 + c_4 \cos(3t) + c_5 \sin(3t)$$
i el període és: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ si c_4 ó c_5 són diferents de zero,
o $T \in \mathbb{R}$ qualsevol si $c_4 = c_5 = 0$. (i.e. solucions constants)

c.1) Si busquem solucions que tendeixin a zero quan $t \to +\infty$ cal $c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = 0$, per tant la dimensió d'aquest subespai, S_2 és $\underline{\dim S_2 = 7-4 = 3}$.
c.2) Veiem que les solucions que tendeixen a zero quan $t \to -\infty$ són les que tenen $c_1 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = 0$. Aleshores la dimensió d'aquest subespai, S_3, és: $\underline{\dim S_3 = 7-6 = 1}$.

c.3) Per inspecció de la solució general (*) queda clar que l'única solució que tendeix a zero quan $t \to \pm\infty$ és la solució nul·la, i.e. $y(t) = 0 \; \forall t$. La dimensió del corresponent sev, S_4, és $\dim S_4 = 0$. □

10.6. Probar que la EDO $y''' - y = \cos t$ tiene una única solución periódica. Calcularla.

Solució: La solución general de la EDO es

$$y_{\mathrm{g}}(t) = y_{\mathrm{h}}(t) + y_{\mathrm{p}}(t) = c_1 \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t/2}(c_2 \cos \sqrt{3}t/2 + c_3 \sin \sqrt{3}t/2) - (\cos t + \sin t)/2.$$

Tomando $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, queda que $y(t) = -(\cos t + \sin t)/2$ es la única solución periódica.

Solució.
Calculem 1er la solució general de l'EDO:

1.- Solució general de l'homogènia associada

Polinomi característic: $P(m) = m^3 - 1 = (m-1)(m^2+m+1)$

$$= (m-1)\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)$$

Arrels (valors característics): $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aleshores el corresponent CFS de l'EDO homogènia associada, CFS_1, és,

$$CFS_1:\ y_1(t) = e^t,\quad y_2(t) = e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),\quad y_3(t) = e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$$

i la solució general d'aquesta és:

$$y_h(t) = c_1 e^{t/2} + e^{-t/2}\left(c_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_3\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ lliures}$$

2. Busquem una solució particular de l'EDO completa.

2.1. Busquem el polinomi característic d'una EDO que tingués per solució el terme independent, $\varphi(t) = \cos t$. Aquest polinomi ha de tenir les arrels $\lambda_{1,2} = \pm i$ amb multiplicitat 1; per tant és:

$$Q(m) = m^2 + 1.$$

En efecte, el CFS associat és: $y_4(t) = \cos t$, $y_5(t) = \sin t$; llavors, $\varphi(t) = \cos t$ és c.l. d'aquestes dues solucions amb la qual cosa $\varphi(t) = \cos t$ és solució de l'EDO lineal homogènia a coeficients constants que té $Q(m)$ per polinomi característic

2.2. Escrivim el CFS associat a l'EDO lineal homogènia a coeficients constants i homogènia que té $R(m) = P(m)Q(m) = (m^2+1)(m-1)(m^2+m+1)$ per polinomi característic, CFS_2:

$$CFS_2:\ y_1(t) = e^t,\ y_2(t) = e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),\ y_3(t) = e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$$

$$y_4(t) = \cos t,\quad y_5(t) = \sin t.$$

2.3. Busquem una solució particular de l'EDO completa, $y_p(t)$, com una c.l. de les solucions d'aques últim conjunt, CFS_2, que no figurin en el CFS de l'homogènia associada, CFS_1, i.e., de les solucions:

$CFS_2 \setminus CFS_1$: $y_4(t) = \cos t$, $y_5(t) = \sin t$.

És a dir, busquem $y_p(t)$ de la forma:

$$y_p(t) = d_1 \cos t + d_2 \sin t$$

2.4. Determineu els coeficients d_1, d_2 substituint aquesta $y_p(t)$ i les seves derivades a l'EDO no homogènia (completa) i comparant coeficients.

$$y_p'(t) = -d_1 \sin t + d_2 \cos t,$$
$$y_p''(t) = -d_1 \cos t - d_2 \sin t,$$
$$y_p'''(t) = d_1 \sin t - d_2 \cos t,$$

$$\begin{aligned} y_p'''(t) - y_p(t) &= d_1 \sin t - d_2 \cos t \\ &\quad - d_2 \sin t - d_1 \cos t \\ &= (d_1 - d_2)\sin t - (d_1 + d_2)\cos t = \cos t \end{aligned}$$

i això es verifica $\forall t \in \mathbb{R}$ sii d_1, d_2 satisfan les equacions:

$$d_1 - d_2 = 0,$$
$$d_1 + d_2 = -1,$$

que és un sistema compatible determinat amb solució: $d_1 = d_2 = -\frac{1}{2}$

La solució general, s'escriu finalment com:

$$y(t) = c_1 e^t + e^{-t/2}\left(c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t); \; t \in \mathbb{R}$$

i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. D'aquesta solució general es dedueix que només hi ha una solució periòdica, la corresponent a $c_1 = c_2 = c_3 = 0$:

$$\tilde{y}(t) = -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t),$$

amb període $T = 2\pi$. Veiem que $\tilde{y}(t) = y_p(t)$ coincideix amb la solució particular trobada. Per qualsevol altra solució (i.e. si alguna de les c_1, c_2 ó c_3 són diferents de zero), llavors el terme corresponent conté factors exponencials que són funcions no periòdiques. $\square$

10.7. **(opt.)** Consideramos la EDO lineal no homogénea $y^{(4)} - y = 45\sin(2t)$.

(a) Calcular su solución general.

(b) Si $y(t)$ es su solución determinada por las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$, ¿cuál es el menor valor de $n \geq 4$ tal que $y^{(n)}(0) \neq 0$? ¿Qué valor tiene esa primera derivada no nula?

(c) Calcular todas sus soluciones periódicas. ¿Tienen el mismo periodo? En caso afirmativo, dar el periodo común. En caso negativo, dar el periodo de cada solución.

Solució:

(a) $y_{\mathrm{g}}(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t + 3\sin(2t)$, con $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ libres.

(b) $y^{(4)}(t) = 45\sin(2t) + y(t)$, luego $y^{(4)}(0) = 0 + y(0) = 0$. Derivando la expresión anterior, vemos que $y^{(5)}(t) = 90\cos(2t) + y'(t)$, luego $y^{(5)}(0) = 90 + y'(0) = 90 \neq 0$.

(c) Las frecuencias $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = 2$ son resonantes, luego tomando $c_1 = c_2 = 0$, queda $y(t) = c_3 \cos t + c_4 \sin t + 3\sin(2t)$, con $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ libres. que son todas las soluciones periódicas de la EDO. La solución particular $y_{\mathrm{p}}(t) = 3\sin(2t)$ tiene periodo $T_2 = 2\pi/\omega_2 = \pi$, todas las demás tienen periodo $T = \text{m.c.m.}[2\pi/\omega_1, 2\pi/\omega_2] = \text{m.c.m.}[2\pi, \pi] = 2\pi$.

Solució.- $y^{(4)} - y = 45\sin(2t)$

(a) Solució general.

a.1.- Solució general de l'homogènia; $y_h(t)$

$P(m) = m^4 - 1 = (m-1)(m+1)(m^2+1)$

Arrels (valors característics): $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$

CFS_1: $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$, $y_3(t) = \cos t$, $y_4(t) = \sin t$

$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t$, $t \in \mathbb{R}$

a.2.- Veure els exercicis anteriors per als detalls.-

$Q(m) = m^2 + 4$

En efecte, el CFS associat a $Q(m)$ és $y_5(t) = \cos(2t)$, $y_6(t) = \sin(2t)$.
i com que el terme independent de l'EDO, $f(t) = 45\sin(2t)$ és c.l d'aquestes solucions, llavors $f(t) = 45\sin(2t)$ és solució d'una EDO lineal a coeficients constants i homogènia amb polinomi característic $Q(m)$.

$R(m) = P(m)\,Q(m) = (m-1)(m+1)(m^2+1)(m^2+4)$

El CFS d'una EDO lineal homogènia que té per polinomi característic $R(m)$, CFS_2, és

CFS_2: $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$, $y_3(t) = \cos t$, $y_4(t) = \sin t$,

$$y_5(t) = \cos(2t), \; y_6(t) = \sin(2t)$$

Busquem una solució particular com c.l. del conjunt de solucions:

$CFS_2 \setminus CFS_1$: $y_5(t) = \cos(2t)$, $y_6(t) = \sin(2t)$;

es a dir:

$$y_p(t) = d_1 \cos(2t) + d_2 \sin(2t),$$

i determinem d_1, d_2 substituint $y_p(t)$ i les seves derivades a l'EDO completa i comparant coeficients:

$$y_p'(t) = -2d_1 \sin(2t) + 2d_2 \cos(2t),$$
$$y_p''(t) = -4d_1 \cos(2t) - 4d_2 \sin(2t),$$
$$y_p'''(t) = 8d_1 \sin(2t) - 8d_2 \cos(2t),$$
$$y_p^{(4)}(t) = 16d_1 \cos(2t) + 16d_2 \sin(2t)$$

$$\begin{aligned} y_p^{(4)}(t) - y_p(t) &= 16d_1 \cos(2t) + 16d_2 \sin(2t) \\ &\quad - d_1 \cos(2t) - d_2 \sin(2t) \\ &= 15d_1 \cos(2t) + 15d_2 \sin(2t) = 45 \sin 2t \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = 0, \\ d_2 = 3. \end{cases}$ D'on resulta que la solució particular buscada de l'EDO no homogènia és:

$$y_p(t) = 3\sin(2t),$$

i la solució general de l'EDO no homogènia, $y_g(t)$ és:

$$y_g(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t + 3\sin(2t), \quad t \in \mathbb{R}$$

i amb c_1, c_2, c_3 lliures.

(b) Sigui $y(t)$ la solució determinada per les condicions inicials $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0)$. La idea és que la solució general es pot expressar com ho hem fet a l'apartat anterior, i.e.:

$$y_g(t) = y_h(t) + y_p(t) = y_h(t) + 3\sin 2t,$$

com que $y_{g_1}^{(4)}(t) - y_g(t) = 45\sin(2t) \Leftrightarrow y_g^{(4)}(t) = y_g(t) + 45\sin(2t)$. (&)
La solució particular considerada satisfà $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$
llavors i com que (&) ho satisfan totes les solucions, tenim primer que:

$$y^{(4)}(0) = y(0) + 45\sin(2\times 0) = 0,$$

tornant a derivar:

$$y^{(5)}(t) = y'(t) + 90\cos(2t)$$

ara, avaluant en $t=0$ i tenint en compte que $y'(0)=0$ resulta:

$$y^{(5)}(0) = y'(0) + 90\cos(2\times 0) = 90 \neq 0$$

Aleshores, el menor valor de $n \geq 4$ t.q. $y^{(n)}(0) \neq 0$ és $n=5$.

(c) Les solucions periòdiques vénen donades per $c_1 = c_2 = 0$ (i.e. eliminem els termes no periodics de la solució general. Aleshores totes les solucions periodiques vénen donades per la família:

$$\tilde{y}(t) = c_3\cos t + c_4\sin t + 3\sin(2t),\ t \in \mathbb{R}$$

i amb c_3, c_4 lliures. La solució particular té freqüència $\omega_2 = 2$, que correspon a un període $T = \frac{2\pi}{\omega_2} = \pi$. Les altres tindran un període donat per les resonàncies amb els altres dos termes que tenen freqüència $\omega_1 = 1$. És a dir:

- Si $c_1 = c_2 = 0$, llavors la solució té període $T = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$
- Si c_1 ó $c_2 \neq 0$, les solucions tenen període:

$$T = m.c.m\left\{\frac{2\pi}{\omega_1}, \frac{2\pi}{\omega_2}\right\} = m.c.m\{2\pi, \pi\} = 2\pi$$

Tenim doncs una única solució periòdica de període π, $\tilde{y}(t) = 3\sin(2t)$, mentre que tota la resta de solucions periòdiques:

$$\hat{y}(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + 3\sin(2t)$$

amb c_1 ó $c_2 \neq 0$, tenen totes període 2π. $\square$

10.8. (*) (Desintegración radioactiva) La desintegración de una partícula inestable (esto es, radioactiva) es un proceso aleatorio que no puede ser predecido, pero se sabe que esta desintegración es igualmente probable en todos los instantes. Por tanto, dada una muestra de un isótopo radioactivo, el número de desintegraciones en un momento dado es proporcional al número de átomos radioactivos existentes en ese momento.

Sea λ la constante de proporcionalidad, que recibe el nombre de *constante de desintegración*. Plantear la ecuación que cumple el número de átomos $N(t)$.

La *semivida* $t_{1/2}$ es el tiempo que debe transcurrir para que se desintegren la mitad de los átomos iniciales. Relacionar $t_{1/2}$ y λ.

En el enlace `http://www.walter-fendt.de/ph14s/lawdecay_s.htm` se puede visualizar este fenómeno mediante un applet de JAVA.

Solució: La ecuación es $N' = -\lambda N$ y su solución general es $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, siendo N_0 el número de átomos iniciales. Las relación es $\lambda t_{1/2} = \ln 2$.

Solución.

i) $\frac{dN}{dt} = -\lambda N \Leftrightarrow N' + \lambda N = 0$ que es una EDO lineal homogenea de orden 1.

Si N_0 es el número de átomos inicialmente presentes en la muestra, i.e., $N_0 = N(0)$, entonces podemos escribir la solución como:

$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

ii) Por definición $N(t_{1/2}) = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}$. Es decir:

$t_{1/2} = \frac{1}{\lambda} \ln 2$.

10.9. (*) (Datación por Carbono-14) Una muestra de carbón de la cueva de Lascaux daba, en 1950, una media de 0.97 desintegraciones de ^{14}C por minuto y gramo, mientras que en árboles vivos suele ser de 6.68. Estimar la fecha en que se hicieron las pinturas rupestres de Lascaux. La semivida del ^{14}C es (aproximadamente) de 5730±40 años.

Solució: La fecha aproximada es $5730(\ln 6.68 - \ln 0.97)/\ln 2 = 15951$ años antes de 1950. Es decir, unos 14000 años A.C.

Solució.-

$$N(t) = N(t_0)\, e^{-\frac{t-t_0}{t_{1/2}} \ln 2}$$

$$\left.\begin{aligned} N'(t_1) &= -\frac{\ln 2}{t_{1/2}} N(t_0)\, e^{-\frac{t_1-t_0}{t_{1/2}} \ln 2} = -0'97 \\ N'(t_0) &= -\frac{\ln 2}{t_{1/2}} N(t_0) = -6'68 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 6'68\, e^{-\frac{t_1-t_0}{t_{1/2}} \ln 2} = -0'97$$

d'on:

$$t_1 - t_0 = -\frac{t_{1/2}}{\ln 2}\left(\ln 6'68 - \ln 0'97\right) \underset{t_{1/2}=5730}{=} -\frac{5730}{\ln 2}\left(\ln 6'68 - \ln 0'97\right)$$

$$= -15.951 \underset{t_0=1950}{\Longrightarrow} t_1 = -15.951 + 1950 = -14.001,$$

és a dir, 14.000 anys A.C. □

10.10. (*) (Airbus A380) El avión de transporte de pasajeros Airbus A380 tiene un peso en vacío de 276.8 toneladas, su carga típica es de 66.4 toneladas y puede despegar con hasta 248 toneladas de combustible. Cuando alcanza su velocidad de crucero (900 kilómetros por hora), consume 28 kilogramos de combustible por tonelada de peso y hora. Suponiendo que siempre debe quedar una reserva de 30 toneladas de combustible para el despegue, aterrizaje y por seguridad, ¿cuál es su rango de vuelo máximo con la carga típica?

Solució: Sea $P_0 = 276.8 + 66.4 = 343.2$ el peso en vacío más la carga típica y $c_0 = 248$. Sean $c(t)$ y $P(t) = P_0 + c(t)$ el peso del combustible y el peso del avión en el instante t. Entonces, $P' = -0.028P$, luego $P(t) = P(0)\mathrm{e}^{-0.028t}$ y así $c(t) = P(t) - P_0 = (P_0 + c_0)\mathrm{e}^{-0.028t} - P_0$. Finalmente, la solución de la ecuación $c(t_*) = 30$ es $t_* \simeq 16.43$ horas y el rango de vuelo es $r_* = 900t_* \simeq 14787$ kilómetros.

Solución.-

Pes buit: $276'8$ tm
Carrega típica: $66'4$ tm
$343'2$ tm

$c(t)$: pes de combustible en l'instant t
$c(0) = 248$ tm : pes del combustible en despegar $(t=0)$

$$c'(t) = -(343'2 + c(t))\,0'028 \Leftrightarrow c'(t) + 0'028\,c(t) = -9'6096 \quad (*)$$

$$c_h(t) = c_1 e^{-0'028t}, \quad c_p(t) = -\frac{9'6096}{0'028} = -\frac{343'2 \times \cancel{0'028}}{\cancel{0'028}} = -343'2$$

Aleshores la solució general de (*) és:

$$c(t) = c_h(t) + c_p(t) = c_1 e^{-0'028t} - 343'2.$$

Per determinar c_1 imposem que $c(0) = c_1 - 343'2 = 248 \Leftrightarrow c_1 = 591'2$.

Així:

$$c(t) = 591'2\, e^{-0'028t} - 343'2$$

Busquem t_* t.q.: $c(t_*) = 591'2\, e^{-0'028t_*} - 343'2 = 30$ (combustible "de seguretat").

Llavors $t_* = \frac{1}{0'028} \ln \frac{591'2}{343'2} = 16'71824\ldots \simeq 16'72$ h

El rang de vol és, aleshores: $r_* = \frac{900}{0'028} \ln \frac{591'2}{343'2} = 14786'9968\ldots \simeq 14787$ Km □

10.11. (*) (Modelo de Malthus) Sea $x(t)$ el tamaño de una población aislada que dispone de recursos y alimento ilimitados. El modelo de Malthus consiste en suponer que el ritmo de crecimiento de la población es, en cada instante, proporcional al tamaño de la población. Sea $k > 0$ la constante de proporcionalidad. Escribir y resolver la ecuación diferencial resultante.

Supongamos que $x(1800) = 0.978 \times 10^9$ y $x(1900) = 1.65 \times 10^9$. ¿Cuánto vale $x(2000)$?

Solució: La ecuación es $x' = kx$ y su solución general es $x(t) = x_0 e^{kt}$, siendo x_0 la población inicial. La predicción es $x(2000) = 2.78 \times 10^9$, aunque la población mundial en 2000 fue $\approx 6 \times 10^9$.

Solució:

$$x' = kx \Leftrightarrow x' - kx = 0 \qquad (1)$$

Solució de l'EDO lineal homogènia (1):

$$x(t) = x_0 e^{kt},$$

on $x_0 = x(0)$: població a l'època inicial $t=0$. Tenim:

$$x(1800) = x_0 e^{k \cdot 1800} = 0'978 \cdot 10^9 \Leftrightarrow \ln x_0 + 1800k = 9 \ln 10 + \ln 0'978,$$

$$x(1900) = x_0 e^{k 1900} = 1'65 \cdot 10^9 \Leftrightarrow \ln x_0 + 1900k = 9 \ln 10 + \ln 1'65,$$

d'on:

$$k = \frac{1}{100} \ln \frac{1'65}{0'978}, \quad x_0 = 1'65 \cdot 10^9 e^{-19 \ln \frac{1'65}{0'978}}$$

i llavors:

$$x(t) = 1'65 \cdot 10^9 \left(\frac{1'65}{0'978}\right)^{\frac{t}{100} - 19},$$

amb la qual cosa la població per l'any 2000, segons el model de Malthus seria,

$$x(2000) = 1'65 \cdot 10^9 \frac{1'65}{0'978} = \frac{1'65^2}{0'978} \cdot 10^9 \simeq 2'78 \cdot 10^9,$$

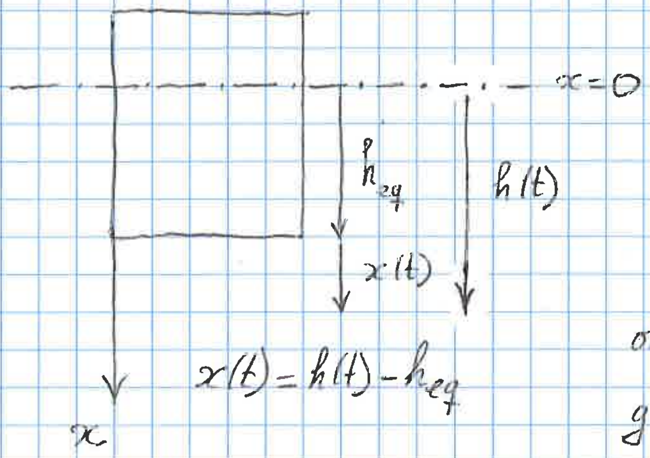
mentre que la població l'any 2.000 era d'uns 6000 milions d'habitants, i a data d'avui, 2011 ja hem superat els 7000 milions... $\square$

10.12. (*) (Principio de Arquímedes & Eliminación de parámetros físicos) Una caja de altura h_{cj} y densidad d flota en aguas tranquilas con pequeñas oscilaciones. Sea $h(t)$ la altura sumergida en el instante t y h_{eq} la altura sumergida en la *posición de equilibrio*. Cacular h_{eq}. Determinar, despreciando los términos de fricción, la ecuación diferencial que cumple $h(t)$. Ídem para la función $x(t) = h(t) - h_{\mathrm{eq}}$. Ídem para la función $y(s) = x(t)$ con $s = \omega t$ y $\omega^2 = g/h_{\mathrm{eq}}$, donde g denota la aceleración de la gravedad.

En `http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?topic=266.0` se puede visualizar el movimiento oscilatorio de la caja mediante un applet de JAVA.

Solució: $h_{\mathrm{eq}} = h_{\mathrm{cj}} d$. Las ecuaciones son $h'' + gh/h_{\mathrm{eq}} = g$, $x'' + \omega^2 x = 0$ y $y'' + y = 0$.

Solució:



i) Trobem h_{eq} igualant el pes de la capsa a l'empenyiment arquemedià:

$$g\, d\, S h_{cj} = g S h_{eq} \Leftrightarrow h_{eq} = d h_{cj},$$

on S és l'àrea de la secció de la capsa, g l'acceleració de la gravetat ($g \simeq 9'8\ m/s^2$) i on agafem la densitat de l'aigua com $\rho = 1\ Kg/m^3$.

Sigui $x(t)$ el desplaçament respecte de la posició d'equilibri (veure figura). Llavors l'EDO que satisfà $h(t)$ és —despreciant el fregament—,

$$d h_{cj} \frac{d^2h}{dt^2} = \underbrace{g\, d h_{cj}}_{\text{pes de la capsa}} - \underbrace{g(h_{eq}+x(t))}_{\text{empenyement arquemedià}} = \underbrace{g(dh_{cj}-h_{eq})}_{=0} - g\, x(t) = -g(h(t)-h_{eq})$$

$x(t) = h(t) - h_{eq}$

$$\underset{h_{eq}=dh_{cj}}{\Leftrightarrow} \boxed{h'' + \frac{g}{h_{eq}} h = g} \quad (*)$$

Tenint en compte que $x(t) = h(t) - h_{eq}$ l'EDO (*) es pot escriure com:

$$x''(t) + \frac{g}{h_{eq}}(x(t)+h_{eq}) = g \Leftrightarrow \boxed{x'' + \omega^2 x = 0}, \text{ on definim } \omega^2 := \frac{g}{h_{eq}}.$$

Sigui ara $t = \omega s$. Llavors definim $y(s) = x(\frac{s}{\omega})$, d'on, aplicant la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{ds} = x'\left(\frac{s}{\omega}\right)\frac{1}{\omega} \underset{t=s/\omega}{\Rightarrow} x'(t) = \omega \frac{dy}{ds}$$

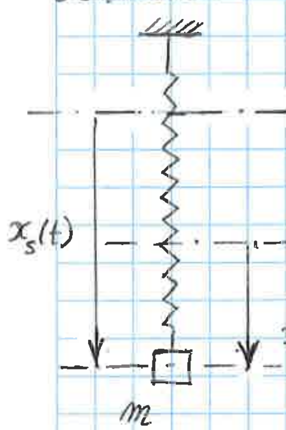
$$\frac{d^2y}{ds^2} = x''\left(\frac{s}{\omega}\right)\frac{1}{\omega^2} \Rightarrow x''(t) = \omega^2 \frac{d^2y}{ds^2}$$

Per tant: $x'' + \omega^2 x = \omega^2 \frac{d^2y}{ds^2} + \omega^2 y = 0 \Leftrightarrow \boxed{y'' + y = 0}$

10.13. (*) (Muelle vertical con fricción) Colgamos una masa m de un muelle vertical cuya *constante de Hooke* es λ. El medio ofrece una resistencia igual a μ veces la velocidad instantánea. Sean $x_c(t)$ y $x_s(t)$ las desviaciones de la masa desde las posiciones de equilibrio del muelle con y sin masa, respectivamente. Relacionarlas y plantear la ecuación que cumple cada una.

Solució: La relación es $x_s(t) = x_c(t) + mg/\lambda$. Las EDOs son $mx_c'' + \mu x_c' + \lambda x_c = 0$ y $mx_s'' + \mu x_s' + \lambda x_s = mg$.

Solució.-



$x = 0$: posició de la molla sense càrrega.

$x_s(t)$

$x_0 = \frac{mg}{\lambda}$: posició d'equilibri: $\lambda x_0 = mg$.

$x_c(t)$: desplaçament des de la posició d'equilibri

m

Veiem que: $x_s(t) = x_c(t) + \frac{mg}{\lambda}$, i combinant la 2ª llei de Newton amb la llei de Hooke, tenim d'una banda:

$$m x_s'' = \underbrace{mg}_{\text{pes}} - \underbrace{\lambda x_s}_{\text{força de recuperació de la molla}} - \underbrace{\mu x_s'}_{\text{fricció}} \iff m x_s'' + \mu x_s' + \lambda x_s = mg, \qquad (*)$$

i com que: $x_s = x_c + mg/\lambda \Rightarrow x_s' = x_c' \Rightarrow x_s'' = x_c''$.

Substituint això a l'EDO (*) obtenim:

$$m x_c'' + \mu x_c' + \lambda\left(x_c + \frac{mg}{\lambda}\right) = m x_c'' + \mu x_c' + \lambda x_c + mg = mg,$$

és a dir:

$$m x_c'' + \mu x_c' + \lambda x_c = 0,$$

que és l'EDO que satisfan els desplaçaments — respecte de la posició d'equilibri — de la massa m que penja de la molla $\square$

10.14. (**) (Muelle vertical con fricción) Volvemos al problema anterior del muelle vertical, tomando $m = 1/2$ kilogramos, $\lambda = 3/2$ Newtons por metro y $\mu = 2$ Newtons por metro por segundo. Recordamos que la ecuación diferencial que modela la dinámica es

$$mx'' + \mu x' + \lambda x = 0$$

siendo $x(t)$ el desplazamiento desde la posición de equilibrio con masa en el instante t.

(a) ¿Qué tipo de oscilación es?

(b) Resolver el PVI correspondiente a impulsar la masa desde la posición de equilibrio con velocidad inicial v_0.

(c) Calcular la aceleración inicial de la masa. Calcular el instante $t_* > 0$ en el cual la masa alcanza su desplazamiento máximo. Calcular el valor del desplazamiento, de la velocidad y de la aceleración de la masa en el instante t_*. Expresar los resultados de forma exacta.

Solució:

(a) Tenemos la oscilación amortiguada libre $x'' + 2kx' + \omega_0^2 x = 0$ con $k = \mu/2m = 2$ y $\omega_0^2 = \lambda/m = 3$. Por tanto, estamos en el caso sobreamortiguado: $k > \omega$.

(b) Las c.i. son $x(0) = 0$ y $x'(0) = v_0$. La solución del PVI asociado es $x(t) = v_0(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t})/2$.

(c) La aceleración inicial es igual a $x''(0) = -4x'(0) - 3x(0) = -4v_0$. La solución anterior vale cero inicialmente, tiende a cero cuando $t \to +\infty$ y tiene un único punto crítico en el instante $t = t_* = (\ln 3)/2$. El desplazamiento, la velocidad y la aceleración en ese instante valen $x(t_*) = v_0/3\sqrt{3}$, $x'(t_*) = 0$ y $x''(t_*) = -4x'(t_*) - 3x(t_*) = -v_0/\sqrt{3}$, respectivamente.

Solució

$mx'' + \mu x' + \lambda x = 0 \Leftrightarrow x'' + 2Kx' + \omega^2 x = 0$,

on definim $K := \frac{\mu}{2m} = \frac{2}{1} = 2$ $\quad \omega^2 := \frac{\lambda}{m} = \frac{3/2}{1/2} = 3$

$\mu = 2$, $m = 1/2$ $\qquad \lambda = 3/2$, $m = 1/2$

(a) Com que $K > \omega$ estem en el cas que s'anomena sobre-esmorteït: el polinomi característic té dues arrels negatives diferents. En efecte:

$P(t) = t^2 + 2Kt + \omega^2$; $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-2K \pm 2\sqrt{K^2 - \omega^2}\right) = -K \pm \sqrt{K^2 - \omega^2}$

$= -2 \pm \sqrt{4-3} = \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

$K = 2$
$\omega^2 = 3$

(b) Solució general: $x_g(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t}$

Imposem les condicions inicials: $\left.\begin{array}{l} x(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ x'(0) = -3c_1 - c_2 = v_0 \end{array}\right\}$ Solució (única): $c_1 = -v_0/2$, $c_2 = v_0/2$

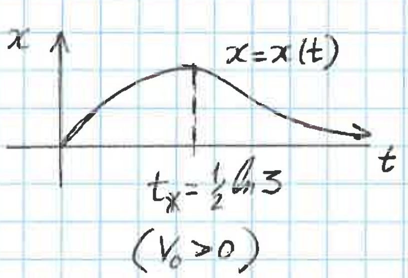
i llavors la solució que satisfà les c.i. donades és:

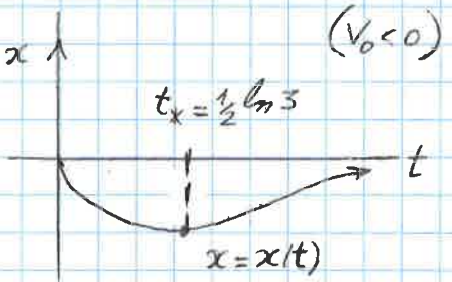
$x(t) = \frac{v_0}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right)$.

(c) $x''(0) = -2K\,x'(0) - \omega^2 x(0) = -4\underbrace{x'(0)}_{V_0} - 3\underbrace{x(0)}_{0} = -4V_0$

$$x'(t) = \frac{V_0}{2}\left(3e^{-3t} - e^{-t}\right) = \frac{V_0}{2}e^{-3t}\left(3 - e^{2t}\right).$$

$$x'(t_*) = 0 \iff t_* = \tfrac{1}{2}\ln 3$$





La solució $x=x(t)$ tendeix cap a zero quan $t\to+\infty$ i té un únic punt crític (màxim per $V_0>0$, mínim per $V_0<0$) per $t_* = \frac{1}{2}\ln 3$, on el desplaçament $x=x(t_*)$ val:

$$x(t_*) = x\left(\tfrac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{V_0}{2}\left(e^{\ln 3^{-\frac{1}{2}}} - e^{\ln 3^{-\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= \frac{V_0}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{V_0}{2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}} = V_0\frac{\sqrt{3}}{9}$$

mentre que l'acceleració serà, en el mateix instant $t=t_*$

$$x''(t_*) = -2K\,x'(t_*) - \omega^2 x(t_*) = -4\underbrace{x'(t_*)}_{0} - 3x(t_*)$$

$$= -V_0\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\square$