2. Polinomis i fraccions racionals

2.1. Sigui el polinomi $P(t) = t^5 - 5t^4 + 7t^3 - 2t^2 + 4t - 8$.

(a) Calculeu $P(2)$, $P'(2)$, $P''(2)$, $P'''(2)$. Què es pot deduir ?

(b) Descomponeu $P(t)$ en factors primers a $\mathbb{R}[t]$ i a $\mathbb{C}[t]$.

Solució:

(a) $P(2) = P'(2) = P''(2) = 0$ i $P'''(2) = 42 \neq 0$. Es dedueix que $t = 2$ és una arrel triple del polinomi $P(t)$.

(b) $P(t) = (t-2)^3(t^2+t+1)$ en $\mathbb{R}[t]$.
$P(t) = (t-2)^3 \left(t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(t + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$ en $\mathbb{C}[t]$.

2.2. Donat el polinomi $P(t) = t^4 - \lambda t^3 + \mu t - 1$, quins són els valors de λ i μ per a que 1 sigui arrel triple?

Solució: $\lambda = \mu = 2$.

2.3. Donat el polinomi $t^5 - 5t - a \in \mathbb{R}[t]$, per a quins valors de a pot tenir arrels múltiples ? De quina multiplicitat ?

Solució: Si $a = -4$, aleshores $t = 1$ és una arrel doble. Si $a = 4$, aleshores $t = -1$ és una arrel doble. No hi ha més possibilitats.

2.4. Sigui $P(t) = \frac{t^n}{n!} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + 1$. Té arrels múltiples? En cas afirmatiu, doneu-les.

Solució: $P(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!}$ no té arrels múltiples.

2.5. Doneu el desenvolupament de Taylor del polinomi $P(t) = t^5 + 4t^4 - t^3 + 2t^2 + t + 1$ en el punt $t = 1$. Quina és la resta de dividir $P(t)$ per $(t-1)^3$?

Solució: $P(t) = 8 + 23(t-1) + 33(t-1)^2 + 25(t-1)^3 + 9(t-1)^4 + (t-1)^5$. El reste de dividir $P(t)$ entre $Q(t) = (t-1)^3$ és $R(t) = 8 + 23(t-1) + 33(t-1)^2$.

2.6. Trobeu el valor de a per a que els polinomis $P(t) = t^4 - t + a$,

$Q(t) = t^2 - at + 1$, tinguin dues arrels comuns.

Solució: Hi ha dues solucions: $a = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2.7. Determineu m per a que els dos polinomis de $\mathbb{R}[t]$ següents:

$P(t) = t^3 + mt - 6$, $Q(t) = t^2 + mt - 2$ tinguin una arrel en comú.

Solució: Si $m = -1$, aleshores $t = 2$ és una arrel comú. És l'única possibilitat.

2.8. Descomponeu el polinomi $P(t) = t^4 + 12t - 5 \in \mathbb{R}[t]$ en dos factors pertanyents també a $\mathbb{R}[t]$, sabent que $P(t)$ té dues arrels t_1, t_2 la suma de les quals val 2.

Solució: $P(t) = t^4 + 12t - 5 = (t^2 - 2t + 5)(t^2 + 2t - 1)$.

2.9. Trobeu tots els polinomis $P(t)$ de $\mathbb{R}_7[t]$ tals que $P(t)+1$ sigui divisible per $(t-1)^4$ i que $P(t)-1$ ho sigui per $(t+1)^4$.

Solució: $P(t) = (5t^7 - 21t^5 + 35t^3 - 35t)/16$.

2.10. (a) Determineu la resta de la divisió de $P(t) = t^{2n} + nt^{n+1} - 3t + 2$ per $(t-1)^2$.

(b) Proveu que $P(t) = nt^{n+2} - (n+2)t^{n+1} + (n+2)t - n$ és divisible per $(t-1)^3$.

Solució:

(a) El resto de dividir $P(t) = t^{2n} - nt^{n+1} - 3t + 2$ entre $Q(t) = (t-1)^2$ és $R(t) = (n^2 + 3n - 3)(t-1) + n = (n^2 + 3n - 3)t - n^2 - 2n + 3$.

(b) El resto de dividir $P(t) = nt^{n+2} - (n+2)t^{n+1} + (n+2)t - n$ entre $Q(t) = (t-1)^3$ és $R(t) = 0$. És a dir, $Q(t)$ divideix a $P(t)$.

2.11. (a) La resta de dividir un polinomi $P(t)$ per $t-1$ és 4 i la resta de dividir-lo per $t-2$ és 5. Calculeu la resta de dividir-lo per $(t-1)(t-2)$.

(b) La resta de dividir un polinomi $P(t)$ per $t^2 - 1$ és $2t$ i la resta de dividir-lo per t és 1. Calculeu la resta de dividir-lo per $t^3 - t$.

Solució:

(a) El reste de dividir $P(t)$ entre $Q(t) = (t-1)(t-2)$ és $R(t) = t + 3$.

(b) El reste de dividir $P(t)$ entre $Q(t) = t^3 - t$ és $R(t) = -t^2 + 2t + 1$.

2.12. Calculeu $\displaystyle\int \frac{t^3 + 2t^2 + 2t + 2}{(t^2+1)^2} dt$ mitjançant la descomposició en fraccions simples de la fracció racional a primitivar.

Solució: $\displaystyle\frac{t^3 + 2t^2 + 2t + 2}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{t+2}{t^2+1}$

$$\int \frac{t^3 + 2t^2 + 2t + 2}{(t^2+1)^2} = \int \frac{t}{(t^2+1)^2} + \int \frac{t}{t^2+1} + \int \frac{2}{t^2+1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + 2\arctan t + C.$$

2.13. Descomponeu en fraccions simples sobre $\mathbb{R}$ i sobre $\mathbb{C}$ les fraccions racionals

$$\frac{-50t - 10}{(t-1)^2(t+2)(t^2+1)}, \qquad \frac{3t^2 + 1}{t^3 - 6t^2 + 11t - 6},$$

$$\frac{22 - 53t}{t^5 - 5t^4 + 7t^3 - 2t^2 + 4t - 8}, \qquad \frac{1}{t^3 - 3at^2 + (1 + 3a^2)t - (a^3 + a)}.$$

Solució: La primera descomposició ve donada per

$$\begin{aligned}\frac{-50t-10}{(t-1)^2(t+2)(t^2+1)} &= \frac{-10}{(t-1)^2}+\frac{5}{t-1}+\frac{2}{t+2}+\frac{9-7t}{t^2+1}\\ &= \frac{-10}{(t-1)^2}+\frac{5}{t-1}+\frac{2}{t+2}-\frac{\frac{7}{2}-\frac{9}{2}\mathrm{i}}{t+\mathrm{i}}-\frac{\frac{7}{2}+\frac{9}{2}\mathrm{i}}{t-\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

Usant que $t^3-6t^2+11t-6=(t-1)(t-2)(t-3)$, obtenim

$$\frac{3t^2+1}{t^3-6t^2+11t-6} = \frac{2}{t-1}-\frac{13}{t-2}+\frac{14}{t-3}.$$

Usant que $t^5-5t^4+7t^3-2t^2+4t-8=(t-2)^3(t^2+t+1)$, obtenim

$$\begin{aligned}\frac{22-53t}{t^5-5t^4+7t^3-2t^2+4t-8} &= \frac{1}{t-2}+\frac{1}{(t-2)^2}-\frac{12}{(t-2)^3}-\frac{4+t}{t^2+t+1}\\ &= \frac{1}{t-2}+\frac{1}{(t-2)^2}-\frac{12}{(t-2)^3}-\frac{\alpha}{t-\beta}-\frac{\bar{\alpha}}{t-\bar{\beta}},\end{aligned}$$

on $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{7\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$, $\bar{\alpha}=\frac{1}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$, $\beta=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ i $\bar{\beta}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
Usant que $t^3-3at^2+(1+3a^2)t-(a^3+a)=(t-a)(t^2-2at+1+a^2)$, obtenim

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^3-3at^2+(1+3a^2)t-(a^3+a)} &= \frac{1}{t-a}-\frac{t-a}{t^2-2at+(1+a^2)}\\ &= \frac{1}{t-a}-\frac{1/2}{t-a-\mathrm{i}}-\frac{1/2}{t-a+\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

2.14. Descomponeu sobre $\mathbb{C}$ la fracció racional $\frac{1}{(t-a)^8(t-b)^4}$ utilitzant el desenvolupament de Taylor de $f(t)=\frac{1}{(t-a)^8}$ i $g(t)=\frac{1}{(t-b)^4}$ en els punts $t=b$ i $t=a$, respectivament.

Solució: La descomposició és

$$\begin{aligned}\frac{1}{(t-a)^8(t-b)^4} = {} & \frac{g(a)}{(t-a)^8}+\frac{g'(a)}{(t-a)^7}+\cdots+\frac{g^{(6)}(a)/6!}{(t-a)^2}+\frac{g^{(7)}(a)/7!}{t-a}+\\ & +\frac{f(b)}{(t-b)^4}+\frac{f'(b)}{(t-b)^3}+\frac{f''(b)/2}{(t-b)^2}+\frac{f^{(3)}(b)/3!}{t-b},\end{aligned}$$

on $f(t)=(t-a)^{-8}$ i $g(t)=(t-b)^{-4}$.

2.15. (*) ("Spline" de campana). Siguin α i β dos nombres reals.

(a) Proveu que existeixen uns únics polinomis $Q(t), R(t) \in \mathbb{R}_3[t]$ tals que

$$Q(-1) = \alpha, \quad Q(0) = 1 = R(0), \quad Q'(0) = 0 = R'(0), \quad Q''(0) = 2\gamma = R''(0), \quad R(1) = \beta.$$

Calculeu explícitament els polinomis $Q(t)$ i $R(t)$ en funció de α, β i γ.

(b) Proveu que existeix un únic polinomi $P(t) \in \mathbb{R}_3[t]$ tal que

$$P(-2) = 0, \qquad P'(-2) = 0, \qquad P''(-2) = 0, \qquad P(-1) = \alpha.$$

Calculeu explícitament el polinomi $P(t)$ en funció de α.

(c) Anàlogament, calculeu l'únic polinomi $S(t) \in \mathbb{R}_3[t]$ tal que

$$S(2) = 0, \qquad S'(2) = 0, \qquad S''(2) = 0, \qquad S(1) = \beta.$$

(d) Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida a trossos mitjançant les fórmules

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{quan } t \leq -2 \\ P(t), & \text{quan } -2 \leq t \leq -1 \\ Q(t), & \text{quan } -1 \leq t \leq 0 \\ R(t), & \text{quan } 0 \leq t \leq 1 \\ S(t), & \text{quan } 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{quan } t \geq 2 \end{cases}$$

Quan $f \in C^1(\mathbb{R})$? Quan $f \in C^2(\mathbb{R})$? Quan $f \in C^3(\mathbb{R})$? Especifiqueu en cada cas els valors de α i β per als quals es compleixen aquestes condicions.

(e) Dibuixeu la gràfica de la funció $f(t)$ per als valors de αi β tals que $f \in C^2(\mathbb{R})$.

(Indicació: La funció $f(t)$ s'anomena *spline de campana.* El terme campana fa referència a la forma de la seva gràfica).

Solució:

(a) $Q(t) = (-\alpha + 1 + \gamma)t^3 + \gamma t^2 + 1, \qquad R(t) = (\beta - \gamma - 1)t^3 + \gamma t^2 + 1.$

(b) $P(t) = \alpha(t^3 + 6t^2 + 12t + 8)$.

(c) $S(t) = \beta(-t^3 + 6t^2 - 12t + 8)$.

(d) $f \in C^1(\mathbb{R})$ sempre; $f \in C^2(\mathbb{R})$ si $\alpha = \beta$ i $\gamma = 6\beta - 3$; $f \in C^2(\mathbb{R})$ si $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$ i $\gamma = -\frac{3}{2}$.

2.16. (**opt.**) Donat $P(t) = t^5 - a$, $a \neq 0$; $Q(t) = t^3 - b$, $b \neq 0$.

(a) Quina relació han de verificar a, b per a que MCD $(P(t), Q(t))$ sigui un polinomi de grau 1?

(b) Doneu per a aquests casos MCD $(P(t), Q(t))$ i MCM $(P(t), Q(t))$.

(c) Calculeu MCD $(t^5 - 32, t^3 - 8)$, MCM $(t^5 - 32, t^3 - 8)$, aplicant b).

Solució:

(a) $b^5 = a^3$.

(b) m.c.d.$[t^5 - a, t^3 - b] = t - a^{-1}b^2$.
m.c.m.$[t^5 - a, t^3 - b] = t^7 + a^{-1}b^2t^6 + a^{-2}b^4t^5 - at^2 - b^2t - a^{-1}b^4$.

(c) m.c.d.$[t^5 - 32, t^3 - 8] = t - 2$.
m.c.m.$[t^5 - 32, t^3 - 8] = t^7 + 2t^6 + 4t^5 - 32t^2 - 64t + 128$.

2.17. **(opt.)** Calculeu el MCD $(P(t), Q(t))$ i el MCM $(P(t), Q(t))$ amb

(a) $P(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 2$ i $Q(t) = t^2 - 4t + 4$.

(b) $P(t) = t^5 - 3t^4 + 2t^3 + 2t^2 - 3t + 1$ i $Q(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$.

(c) $P(t) = t^4 - t^3 - 3t^2 + 5t - 2$ i $Q(t) = t^2 - 6t + 9$.

Trobeu en cada cas, polinomis $P_1(t)$, $Q_1(t)$ tals que

$$P_1(t)P(t) + Q_1(t)Q(t) = MCD(P(t), Q(t)).$$

Solució:

(a) m.c.d.$[P(t), Q(t)] = t - 2$.
m.c.m.$[P(t), Q(t)] = t^4 - 5t^3 + 9t^2 - 8t + 4$.
$P_1(t) = \frac{1}{3}$ i $Q_1(t) = -\frac{1}{3}(t + 1)$.

(b) m.c.d.$[P(t), Q(t)] = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t - 1)^3$.
m.c.m.$[P(t), Q(t)] = t^6 - 6t^5 + 11t^4 - 4t^3 - 9t^2 + 10t - 3$.
$P_1(t) = \frac{1}{8}$ i $Q_1(t) = -\frac{1}{8}(t + 3)$.

(c) m.c.d.$[P(t), Q(t)] = 1$; és a dir, els polinomis són primers.
m.c.m.$[P(t), Q(t)] = P(t) \cdot Q(t) = t^6 - 7t^5 + 12t^4 + 14t^3 - 59t^2 + 57t - 18$.
$P_1(t) = \frac{1}{400}(61 - 17t)$ i $Q_1(t) = \frac{1}{400}(17t^3 + 24t^2 + t + 58)$.

2.18. **(opt.)** Es considera $P(t) = t^3 + t^2 - 8t - 12 \in \mathbb{R}[t]$

(a) Determineu $P'(t)$ i doneu la seva descomposició en factors primers.

(b) Proveu que una de les arrels de $P'(t)$ ho és també de $P(t)$, i deduïu la seva descomposició en factors primers de $P(t)$.

(c) Calculeu MCD $(P(t), P'(t))$.

(d) Determineu $P_1(t)$ i $Q_1(t)$ tals que $P_1(t)P(t) + Q_1(t)P'(t) = MCD(P(t), P'(t))$.

Solució:

(a) $P'(t) = 3t^2 + 2t - 8 = 3(t + 2)(t - 4/3)$.

(b) L'arrel comú és $t = -2$. A més, $P(t) = (t + 2)^2(t - 3)$.

(c) m.c.d.$[P(t), P'(t)] = t + 2$.

(d) $P_1(t) = -\frac{9}{50}$ i $Q_1(t) = \frac{1}{50}(3t + 1)$.

2.1 Sigui el polinomi $P(t) = t^5-5t^4+7t^3-2t^2+4t-8$

(a) Calculeu $P(2), P'(2), P''(2), P'''(2)$. Què es pot deduir?

(b) Descomposeu P en factors primers a $\mathbb{R}[t]$ i a $\mathbb{C}[t]$.

Solució.

(a)
$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -5 & 7 & -2 & 4 & -8 \\
2 & & 2 & -6 & 2 & 0 & 8 \\
\hline
 & 1 & -3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\
 & 5 & -20 & 21 & -4 & 4 & \\
2 & & 10 & -20 & 2 & -4 & \\
\hline
 & 5 & -10 & 1 & -2 & 0 & \\
 & 20 & -60 & 42 & -4 & & \\
2 & & 40 & -40 & 4 & & \\
\hline
 & 20 & -20 & 2 & 0 & & \\
 & 60 & -120 & 42 & & & \\
2 & & 120 & 0 & & & \\
\hline
 & 60 & 0 & 42 & & &
\end{array}
$$

$\Rightarrow P(2)=0$

$\Rightarrow P'(2)=0$

$\Rightarrow P''(2)=0$

$\Rightarrow P'''(2)=42\neq 0$

Aleshores el desenvolupament de Taylor de $P(t)$ en $t=2$ queda

$$P(t) = (t-2)^3 \underbrace{\left[\frac{P'''(2)}{3!} + \frac{P^{IV}(2)}{4!}(t-2) + \frac{P^{V}(2)}{5!}(t-2)^2 \right]}_{Q(t)} = (t-2)^3 Q(t)$$

amb $Q(2)\neq 0$.

Llavors, $t=2$ és una arrel de multiplicitat 3 de $P(t)$. Si calculem les derivades que resten: $P^{IV}(2) = 120$ i $P^{V}(2)=120$, i així podrem descomposar $P(t)$ de la manera següent:

$$P(t) = (t-2)^3\left[\frac{42}{3!} + \frac{120}{4!}(t-2) + \frac{120}{5!}(t-2)^2\right] = (t-2)^3\left(7+5(t-2)+(t-2)^2\right)$$
$$= (t-2)^3(t^2+t+1) = (t-2)^3\left((t+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\right).$$

b) Finalment queda vist que la descomposició de $P(t)$ en $\mathbb{R}[t]$ és:

$P(t) = (t-2)^3(t^2+t+1)$, mentre que en $\mathbb{C}[t]$ és: $P(t) = (t-2)^3\left(t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot\left(t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ □

2.2 Donat el polinomi $P(t) = t^4 - \lambda t^3 + \mu t - 1$, quins són els valors de λ i μ per a que 1 sigui arrel triple?

Solució.

1 arrel triple sii $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ i $P'''(1) \neq 0$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -\lambda & 0 & \mu & -1 \\
1 & & 1 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda+\mu \\
\hline
 & 1 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda+\mu & -\lambda+\mu
\end{array} \Longrightarrow \mu - \lambda = P(1),$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 4 & -3\lambda & 0 & \mu \\
1 & & 4 & 4-3\lambda & 4-3\lambda \\
\hline
 & 4 & 4-3\lambda & 4-3\lambda & 4-3\lambda+\mu
\end{array} \Longrightarrow 4-3\lambda+\mu = P'(1),$$

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 12 & -6\lambda & 0 \\
1 & & 12 & \\
\hline
 & 12 & 12-6\lambda &
\end{array} \Longrightarrow 12-6\lambda = P''(1).$$

$$\begin{array}{c|cc}
 & 24 & -6\lambda \\
1 & & 24 \\
\hline
 & 24 & 24-6\lambda
\end{array} \Longrightarrow 24-6\lambda = P'''(1)$$

Cal que $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$. Per tant λ, μ han de satisfer les equacions: $-\lambda + \mu = 0$, $-3\lambda + \mu = -4$, $+6\lambda = 12$. Matricialment

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} +1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i veiem que el sistema és compatible determinat amb solució $\lambda = \mu = 2$, i com que, per aquests valors $P'''(1) = 24 - 6\lambda = 24 - 12 = 12 \neq 0$, es conclou que $t = 1$ és una arrel triple de $P(t)$ sii $\lambda = \mu = 2$ $\square$

2.3 Donat el polinomi $t^5-5t-a \in \mathbb{R}[t]$, per a quins valors de a pot tenir arrels múltiples?

Solució.

Per tal que hi hagui una arrel múltiple, t_0, cal que $P(t_0)=0$ i $P'(t_0)=0$:

$P(t) = t^5-5t-a=0$

$P'(t) = 5t^4-5 = 5(t^4-1) = 5(t-1)(t+1)(t+i)(t-i) = 0$,

$P'(t)$ veiem que té com arrels $t=1,-1,i,-i$. Ara:

per $t=1$: $P(1) = 1-5-a=0 \Leftrightarrow a=-4$,

per $t=-1$: $P(-1) = -1+5-a=0 \Leftrightarrow a=4$,

per $t=i$: $P(i) = -i-5i-a=0 \Leftrightarrow a=-6i, \notin \mathbb{R}$.

per $t=-i$: $P(-i) = i+5i-a=0 \Leftrightarrow a=6i, \notin \mathbb{R}$.

Com que $P''(t) = 20t^3$, per $t=\pm 1$ és $P''(\pm 1) = \pm 20 \neq 0$. Per tant, per $a=-4$, $t=1$ és una arrel doble i per $a=4$, $t=-1$ és una arrel doble. No hi ha més possibilitats. □

2.4 Sigui $P(t) = \frac{t^n}{n!} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + 1$. Té arrels múltiples. En cas afirmatiu, doneu-les.

Solució.

Per tal que el polinomi tingui una arrel múltiple, α, cal que $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$; però en aquest cas: $P(\alpha) = \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + 1 = \frac{\alpha^n}{n!} + \underbrace{P'(\alpha)}_{0} = \frac{\alpha^n}{n!} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$; però $P(0)=1$. Per tant $P(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!}$ no té arrels múltiples. □

2.5 Doneu el desenvolupament de Taylor del polinomi $P(t) = t^5+4t^4-t^3+2t^2+t+1$ en el punt $t=1$. Quina és la resta de dividir $P(t)$ per $(t-1)^3$?

Solució:

$P(t) = t^5+4t^4-t^3+2t^2+t+1$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 4 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 5 & 4 & 6 & 7 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 \end{array} \Rightarrow P(1)=8$$

$P'(t) = 5t^4+16t^3-3t^2+4t+1$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 5 & 16 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & & 5 & 21 & 18 & 22 \\ \hline & 5 & 21 & 18 & 22 & 23 \end{array} \Rightarrow P'(1)=23$$

$P''(t) = 20t^3+48t^2-6t+4$

$$\begin{array}{c|cccc} & 20 & 48 & -6 & 4 \\ 1 & & 20 & 68 & 62 \\ \hline & 20 & 68 & 62 & 66 \end{array} \Rightarrow P''(1)=66$$

$P'''(t) = 60t^2+96t-6$

$$\begin{array}{c|ccc} & 60 & 96 & -6 \\ 1 & & 60 & 156 \\ \hline & 60 & 156 & 150 \end{array} \Rightarrow P'''(1)=150$$

$P^{IV}(t) = 120t+96$

$$\begin{array}{c|cc} & 120 & 96 \\ 1 & & 120 \\ \hline & 120 & 216 \end{array} \Rightarrow P^{IV}(1)=216$$

$P^{V}(t) = 120$

$$P(t) = P(1) + \frac{P'(1)}{1!}(t-1) + \frac{P''(1)}{2!}(t-1)^2 + \frac{P'''(1)}{3!}(t-1)^3 + \frac{P^{IV}(t)}{4!}(t-1)^4 + \frac{P^{V}(t)}{5!}(t-1)^5$$

$$= \underline{8+23(t-1)+33(t-1)^2+25(t-1)^3+9(t-1)^4+(t-1)^5}$$

$$\frac{P(t)}{(t-1)^3} = 25+9(t-1)+(t-1)^2+\frac{8+23(t-1)+33(t-1)^2}{(t-1)^3}.$$

Per tant la resta de la divisió de $P(t)$ per $(t-1)^3$ és: $\underline{8+23(t-1)+33(t-1)^2}$. □

2.6 Troben el valor de a per a que els polinomis $P(t)=t^4-t+a$, $Q(t)=t^2+at+1$ tinguin dues arrels comunes.

Solució.

Com que $Q(t)$ és un polinomi de grau 2, hi ha prou amb imposar que la resta de la divisió de $P(t)$ per $Q(t)$ sigui zero.

$$
\begin{array}{l|l}
t^4 \qquad -t+a & t^2-at+1 \\
\hline
-t^4+at^3-t^2 & t^2+at+(a^2-1) \\
\hline
\quad at^3-t^2-t+a & \\
\quad -at^3+a^2t^2-at & \\
\hline
\quad (a^2-1)t^2-(a+1)t+a & \\
\quad -(a^2-1)t^2+a(a^2-1)t-(a^2-1) & \\
\hline
\qquad (a+1)(a^2-a-1)t-(a^2-a-1). &
\end{array}
$$

Aleshores cal que a verifiqui, simultàniament:

$$(a+1)(a^2-a-1)=0 \quad i \quad a^2-a-1=0.$$

la primera equació te per solució $a=-1$ i $a=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, mentre que la segona té per solució les dues últimes, així doncs la solució buscada correspon a $a=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. □

2.7 Determineu m per a que els dos polinomis de $\mathbb{R}[t]$ següents: $P(t)=t^3+mt-6$, $Q(t)=t^2+mt-2$ tinguin una arrel comú.

Solució.

Sigui α aquesta arrel comuna. Llavors:

$$P(\alpha)=\alpha^3+m\alpha-6=0$$

$$Q(\alpha)=\alpha^2+m\alpha-2=0 \Rightarrow m\alpha-2=-\alpha^2$$

i substituint a $P(\alpha)=\alpha^3-\alpha^2-4=(\alpha-2)(\alpha^2+\alpha+2)$. En particular, per $\alpha=2$ tindrem: $P(2)=2m+2$ i $Q(2)=2m+2$, amb la qual cosa es veu que, si $m=-1$, $t=2$, serà una arrel comú de $P(t)$ i de $Q(t)$. Com que les altres possibles arrels són complexes conjugades (de $\alpha^2+\alpha+2=0$, $\Longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$), resultaria $m \in \mathbb{C}$ (Comproveu-lo!). Per tant aquesta és l'única possibilitat $\square$

2.8 Descomposeu el polinomi $P(t) = t^4+12t-5 \in \mathbb{R}[t]$ en dos factors pertanyents també a $\mathbb{R}[t]$, sabent que $P(t)$ té dues arrels t_1, t_2 la suma de les quals val 2.

Solució.

$$\left.\begin{array}{l} P(t_1) = t_1^4+12t_1-5=0 \\ P(t_2) = t_2^4+12t_2-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow t_1^4+t_2^4+12(t_1+t_2)-10 \underset{t_1+t_2=2}{=} t_1^4+t_2^4+1=0,$$

d'on es dedueix que t_1 i t_2 no poden ser totes dues reals; d'altra banda com que la seva suma sí que ho és, necessàriament: $t_2 = \bar{t}_1$ i llavors, de $t_1+t_2=2$ es segueix: $Re(t_1) = Re(t_2) = 1$. Per tant un dels factors serà $P_1(t) = (t-1)^2+\alpha^2 = t^2-2t+1+\alpha^2$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$ a determinar. El segon factor el buscarem de la forma: $P_2(t) = t^2+\beta t+\gamma$, amb $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ a determinar. Llavors:

$$P(t) = P_1(t)P_2(t) = \underline{(t^2-2t+1+\alpha^2)(t^2+\beta t+\gamma)} = t^4+(\beta-2)t^3+(-2\beta+\gamma+1+\alpha^2)t^2$$
$$(-2\gamma+\beta(1+\alpha^2))t+\gamma(1+\alpha^2) = t^4+0t^3+0t^2+12t-5.$$

I fixem α, β, γ per comparació de coeficients:

$$\beta-2=0, \quad 1+\alpha^2-2\beta+\gamma=0, \quad \beta(1+\alpha^2)-2\gamma=12, \quad \gamma(1+\alpha^2)=-5$$

Així, de la primera equació tenim $\underline{\beta=2}$. Substituint en la 2ª i en la 3ª s'arriba al sistema lineal en $1+\alpha^2, \gamma$ següent:

$$\left.\begin{array}{l} 1+\alpha^2+\gamma=4 \\ 2(1+\alpha^2)-2\gamma=12 \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{\gamma=-1,\ 1+\alpha^2=5};$$

i aquesta solució és compatible amb la quarta equació. En efecte: $\gamma(1+\alpha^2) = -1\cdot 5 = -5$. Així doncs, la descomposició buscada és:

$$P(t) = t^4+12t-5 = (t^2-2t+5)(t^2+2t-1)$$ $\square$

NOTE BOOK

2.9 Trobeu els polinomis $P(t)$ de $\mathbb{R}_7[t]$ tals que $P(t)+1$ sigui divisible per $(t-1)^4$ i que $P(t)-1$ ho sigui per $(t+1)^4$.

Solució.

Sigui $P(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3+\alpha_4 t^4+\alpha_5 t^5+\alpha_6 t^6+\alpha_7 t^7$.

Cal que $t=1$ sigui una arrel quarta de $P(t)+1$ i que $t=-1$ sigui una arrel quarta $P(t)-1$. Per tant, s'ha de satisfer:

$$
\begin{aligned}
P(1) &= \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7=-1\\
P(-1) &= \alpha_0-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4-\alpha_5+\alpha_6-\alpha_7=1\\
P'(1) &= \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+5\alpha_5+6\alpha_6+7\alpha_7=0\\
P'(-1) &= \alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3-4\alpha_4+5\alpha_5-6\alpha_6+7\alpha_7=0\\
P''(1) &= 2\alpha_2+6\alpha_3+12\alpha_4+20\alpha_5+30\alpha_6+42\alpha_7=0\\
P''(-1) &= 2\alpha_2-6\alpha_3+12\alpha_4-20\alpha_5+30\alpha_6-42\alpha_7=0\\
P'''(1) &= 6\alpha_3+24\alpha_4+60\alpha_5+120\alpha_6+210\alpha_7=0\\
P'''(-1) &= 6\alpha_3-24\alpha_4+60\alpha_5-120\alpha_6+210\alpha_7=0
\end{aligned}
$$

Aquest sistema és equivalent als dos sistemes desacoplats:

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_0+\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6&=0\\
\alpha_2+2\alpha_4+3\alpha_6&=0\\
\alpha_2+6\alpha_4+15\alpha_6&=0\\
\alpha_4+5\alpha_6&=0
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&1&6&15\\0&0&1&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&1&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&2\end{pmatrix}
$$

Solució: $\alpha_2=\alpha_4=\alpha_6=0$

i:
$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\alpha_7&=-1\\
\alpha_1+3\alpha_3+5\alpha_5+7\alpha_7&=0\\
3\alpha_3+10\alpha_5+21\alpha_7&=0\\
\alpha_3+10\alpha_5+35\alpha_7&=0
\end{aligned}\right\}
$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 21 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 35 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 21 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 35 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & 35 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 21 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -64 & 1 \\ 0 & 0 & -20 & -84 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1/16 \\ 0 & 0 & -20 & -84 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1/16 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -20/16 \end{pmatrix}$$

Solució:

$$\alpha_7 = \frac{5}{16},$$

$$\alpha_5 + \frac{20}{16} = -\frac{1}{16} \Longrightarrow \alpha_5 = -\frac{21}{16}.$$

$$\alpha_3 - \frac{210}{16} + \frac{175}{16} = 0 \Longrightarrow \alpha_3 = \frac{35}{16}$$

$$\alpha_1 + \frac{35}{16} - \frac{21}{16} + \frac{5}{16} = \alpha_1 + \frac{19}{16} = -1 \Longrightarrow \alpha_1 = -\frac{35}{16}.$$

Llavors el polinomi $P(t)$ buscat és:

$$P(t) = \frac{1}{35}\left(5t^7 - 21t^5 + 35t^3 - 35t\right)$$

2.10 (a) Determineu la resta de la divisió de $P(t) = t^{2n} + nt^{n+1} - 3t + 2$ per $(t-1)^2$

(b) Proveu que $P(t) = nt^{n+2} - (n+2)t^{n+1} + (n+2)t - n$ és divisible per $(t-1)^3$

Solució.

(a) La resta de la divisió $R(t)$ de $P(t)$ per $Q(t) = (t-1)^2$ és un polinomi de grau 1, posem $R(t) = at + b$. Llavors $P(t) = Q(t)(t-1)^2 + at + b$ i aleshores:

$P(1) = a + b = \cancel{1} + n - \cancel{1}$

$P'(1) = a = 2n + n(n+1) - 3 = n^2 + 3n - 3,$

d'on:

$$a = n^2 + 3n - 3$$

$$b = -n^2 - 2n + 3$$

i la resta és doncs: $R(t) = (n^2+3n-3)\,t - n^2 - 2n + 3$

(b) $P(t) = n\,t^{n+2} - (n+2)\,t^{n+1} + (n+2)\,t - n$

$$P'(t) = n(n+2)\,t^{n+1} - (n+2)(n+1)\,t^{n} + n + 2$$

$$P''(t) = n(n+2)(n+1)\,t^{n} - (n+2)(n+1)\,n\,t^{n-1}$$

$$P'''(t) = n^2(n+2)(n+1)\,t^{n-1} - n(n+2)(n+1)(n-1)\,t^{n-2}$$

Llavors:

$$P(1) = \cancel{n} - \cancel{(n+2)} + \cancel{(n+2)} - \cancel{n} = 0$$

$$P'(1) = n(n+2) - (n+2)(n+1) + n + 2 = (n+2)(\cancel{n} - \cancel{n} - 1) + n + 2 = 0$$

$$P''(1) = n(n+2)(n+1) - (n+2)(n+1)\,n = 0$$

$$P'''(1) = n^2(n+2)(n+1) - n(n+2)(n+1)(n-1) = n(n+2)(n+1)(\cancel{n} - \cancel{n} + 1)$$

$$= n(n+2)(n+1) \neq 0$$

Aleshores $t=1$ és una arrel de multiplicitat 3 de $P(t)$. Per tant: $P(t) = Q(t)(t-1)^3$, amb $Q(1) \neq 0$ i en conseqüència $(t-1)^3$ divideix $P(t)$. $\square$

2.11 (a) La resta de dividir un polinomi $P(t)$ per $t-1$ és 4 i la resta de dividir-lo per $t-2$ és 5. Calculeu la resta de dividir-lo per $(t-1)(t-2)$.

(b) La resta de dividir un polinomi $P(t)$ per t^2-1 és $2t$ i la resta de dividir-lo per t és 1. Calculeu la resta de dividir-lo per t^3-t.

Solució:

a) Tenim d'una banda $P(t) = Q_1(t)(t-1)+4$ i $P(t) = Q_2(t)(t-2)+5$. Per tant $P(1) = 4$ i $P(2) = 5$. Sigui $R(t) = at+b$ la resta de la divisió de $P(t)$ per $(t-2)(t-1)$. Nota: com que $(t-2)(t-1)$ és un polinomi de grau 2, la resta haurà de ser un polinomi de grau 1. Aleshores:

$$P(t) = Q_3(t)(t-1)(t-2) + R(t) = Q_3(t)(t-1)(t-2) + at+b,$$

d'on:

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = a+b = 4 \\ P(2) = 2a+b = 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Solució } a=1, b=3\text{; i la resta buscada és}$$

$$R(t) = at+b = t+3$$

b) Idènticament:

$$P(t) = Q_1(t)(t^2-1)+2t \Longrightarrow P(1) = 2,\ P(-1) = -2$$

$$P(t) = Q_2(t)\cdot t+1 \Longrightarrow P(0) = 1$$

$$P(t) = Q_3(t)\,t(t^2-1) + at^2+bt+c,$$

aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = a+b+c = 2 \\ P(-1) = a-b+c = -2 \\ P(0) = \quad c = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Solució: } a=-1,\ b=2,\ c=1;$$

i llavors la resta de la divisió és: $R(t) = -t^2+2t+1$.

2.12 Calculeu $\int \frac{t^3+2t^2+2t+2}{(t^2+1)^2}\,dt$ mitjançant la descomposició en fraccions simples de la fracció racional a primitivar.

Solució:

$$\frac{t^3+2t^2+2t+2}{(t^2+1)^2} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{(t^2+1)^2} \Longleftrightarrow t^3+2t^2+2t+2 =$$

$$= (At+B)(t^2+1)+Ct+D = At^3+Bt^2+(A+C)t+B+D$$

Comparant coeficients: $A=1$, $B=2$, $A+C=2$, $B+D=2$, d'on $A=1$, $B=2$, $C=1$, $D=0$.

Aleshores:

$$\int \frac{t^3+2t^2+2t+2}{(t^2+2)^2}\,dt = \int \frac{t+2}{t^2+1}\,dt + \int \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + 2\arctan t - \frac{1/2}{t^2+1} + C \qquad \square$$

2.13 Descomposeu en fraccions simples sobre $\mathbb{R}$ i sobre $\mathbb{C}$ les fraccions racionals.

(a) $$\frac{-50t-10}{(t-1)^2(t+2)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+2} + \frac{Mt+N}{t^2+1}$$

Sumem i comparem coeficients al numerador:

$$A(t-1)(t+2)(t^2+1) + B(t+2)(t^2+1) + C(t-1)^2(t^2+1) + (Mt+N)(t-1)^2(t+2)$$
$$= -2A+2B+C+2N + (A+B-2C+2M-3N)t + (-A+2B+2C-3M)t^2$$
$$+ (A+B-2C+N)t^3 + (A+C+M)t^4 = -50t-10$$

d'on se'n deriva el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{rcl} -2A+2B+C \qquad +2N &=& -10 \\ A+B-2C+2M-3N &=& -50 \\ -A+2B+2C-3M \qquad &=& 0 \\ A+B-2C \qquad +N &=& 0 \\ A \qquad +C+M \qquad &=& 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

que és compatible determinat, amb solució

$A=5$, $B=-10$, $C=2$, $M=-7$, $N=9$.

Per tant, la descomposició en fraccions simples sobre $\mathbb{R}$ queda:

$$\frac{-50t-10}{(t-1)^2(t+2)(t^2+1)} = \frac{5}{t-1} - \frac{10}{(t-1)^2} + \frac{2}{t+2} + \frac{9-7t}{t^2+1}$$

Remarca 1. Alternativament, donant valors a t:

$t=1$: $6B = -50-10 = -60$, i: $B=-10$

$t=-2$: $45C = 100-10 = 90$, i: $C=2$

$t=0$: $-2A+2B+C+2N = -2A-20+2+2N = -2A+2N-18 = -10$,

$t=-1$: $-4A+2B+8C-4M+4N = -4A-20+16-4M+4N = -4A-4M+4N-4 = 40$

$t=2$: $20A+20B+5C+8M+4N = 20A-200+10+8M+4N = -110$

obtenim un sistema, més senzill que el sistema (1):

$$\left.\begin{aligned} -A \quad\quad +N &= 4 \\ A+M-N &= -11 \\ 5A+2M+N &= 20 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

que té per solució: $A=5$, $M=-7$, $N=9$; que ens porta a la mateixa descomposició d'abans.

D'altra banda:

$$\frac{9-7t}{t^2+1} = \frac{M}{t+i} + \frac{N}{t-i} : \left.\begin{aligned} &(t-i)M+(t+i)N = -7t+9, \\ &t=i: 2iN = -7i+9 \Rightarrow N = -\tfrac{7}{2} - \tfrac{9}{2}i \\ &t=-i: -2iM = 7i+9 \Rightarrow M = -\tfrac{7}{2} + \tfrac{9}{2}i \end{aligned}\right\}$$

Tenim així que la descomposició en els complexos ve donada per:

$$\frac{-50t-10}{(t-1)^2(t+2)(t^2+1)} = \frac{5}{t-1} - \frac{10}{(t-1)^2} + \frac{2}{t+2} - \frac{\tfrac{7}{2}-\tfrac{9}{2}i}{t+i} - \frac{\tfrac{7}{2}+\tfrac{9}{2}i}{t-i} \qquad (3)$$

Remarca 2. Podríem haver fet 1er la descomposició en els complexos:

$$A(t-1)(t+2)(t-i)(t+i) + B(t+2)(t-i)(t+i) + C(t-1)^2(t-i)(t+i)$$
$$+ M(t-1)^2(t+2)(t-i) + N(t-1)^2(t+2)(t+i) = -50t-10.$$

Determinem A, B, C, M i N donant valors a t:

$t=1$: $6B = -60$, i: $B=-10$

$t=-2$: $45C = 90$, i: $C=2$

$t=i$: $2i(i-1)^2(i+2)N = -50i-10$, i: $N = -\tfrac{7}{2} - \tfrac{9}{2}i$,

$t = -i$: $-2i(-i-1)^2(-i+2)M = 50i - 10$, y $M = -7/2 + 9/2\, i$

$t = 0$: $-2A + 2B + C - 2iM + 2iN = -2A - 20 + 2 + 18 = -10$ y $A = 5$

D'aquesta manera recuperem la descomposició en els complexos donada per (3):

$$\frac{-50t-10}{(t-1)^2(t+2)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+2} + \frac{M}{t+i} + \frac{N}{t-i} =$$

$$= \frac{5}{t-1} - \frac{10}{(t-1)^2} + \frac{2}{t+2} - \frac{7/2 - 9/2\, i}{t+i} - \frac{7/2 + 9/2\, i}{t-i},$$

i sumant les dues últimes fraccions:

$$-\frac{7/2 - 9/2\, i}{t+i} - \frac{7/2 + 9/2\, i}{t-i} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(t-i)(7-9i)+(t+i)(7+9i)}{t^2+1}$$

$$= -\frac{14t-18}{2(t^2+1)} = \frac{9-7t}{t^2+1}$$

s'arriba a la descomposició en els reals:

$$\frac{-50t-10}{(t-1)^2(t+2)(t^2+1)} = \frac{5}{t-1} - \frac{10}{(t-1)^2} + \frac{2}{t+2} + \frac{9-7t}{t^2+1}.$$

(b) $$\frac{22-53t}{t^5-5t^4+7t^3-2t^2+4t-8} = \frac{22-53t}{(t-2)^3(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{(t-2)^2} + \frac{C}{(t-2)^3} + \frac{Mt+N}{t^2+t+1}$$

d'on:

$$22-53t = A(t-2)^2(t^2+t+1) + B(t-2)(t^2+t+1) + C(t^2+t+1) + (Mt+N)(t-2)^3$$

$$= 4A - 2B + C - 8N + (-B + C - 8M + 12N)t + (A - B + C + 12M - 6N)t^2 + (-3A + B - 6M + N)t^3 + (A+M)t^4$$

i comparant coeficients, arribem al sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} 4A-2B+C \qquad\qquad -8N &= 22 \\ -B+C-8M+12N &= -53 \\ A-B+C+12M-6N &= 0 \\ -3A+B \qquad -6M+N &= 0 \\ A \qquad\qquad +M &= 0 \end{array}\right\}$$

que té per solució:

$$A=1,\quad B=1,\quad C=-12,\quad M=-1,\quad N=-4;$$

i llavors s'obté la descomposició en els reals següent

$$\frac{22-53t}{t^5-5t^4+7t^3-2t^2+4t+8}=\frac{1}{t-2}+\frac{1}{(t-2)^2}-\frac{12}{(t-2)^3}-\frac{t+4}{t^2+t+1}$$

Per obtenir la descomposició en els complexos descomposarem l'última fracció:

$$\frac{t+4}{t^2+t+1}=\frac{M}{t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}+\frac{N}{t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}:\ M\left(t+\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)+N\left(t+\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=t+4$$

$$t=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i:\ -i\sqrt{3}\,N=\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ i:\ N=\frac{1}{2}+\frac{7\sqrt{3}}{6}i$$

$$t=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i:\ i\sqrt{3}\,M=\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ i:\ M=\frac{1}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{6}i$$

i s'obté així:

$$\frac{22-53t}{t^5-5t^4+7t^3-2t^2+4t+8}=\frac{1}{t-2}+\frac{1}{(t-2)^2}-\frac{12}{(t-2)^3}-\frac{1/2-7\sqrt{3}/6\,i}{t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}-\frac{1/2+7\sqrt{3}/6\,i}{t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

(c) $$\frac{3t^2+1}{t^3-6t^2+11t-6}=\frac{3t^2+1}{(t-2)(t-1)(t-3)}=\frac{A}{t-2}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t-3}$$

Sumant i igualant els numeradors:

$$A(t-1)(t-3)+B(t-2)(t-3)+C(t-2)(t-1)=3t^2+1$$

per determinar A, B i C, donem valors a t:

$t=1: \ 2B=4$, i: $B=2$,

$t=2: \ -A=13$, i: $A=-13$,

$t=3: \ 2C=28$, i: $C=14$,

i la descomposició en fraccions simples que s'obté és:

$$\frac{3t^2+1}{t^3-6t^2+11t-6}=-\frac{13}{t-2}+\frac{2}{t-1}+\frac{14}{t-3}$$

(d) Fent servir que: $t^3-3at^2+(1+3a^2)t-(a^3+a)=(t-a)(t^2-2at+a^2+1)$, suposem que $a\in\mathbb{R}$ i busquem la descomposició en els reals de la forma:

$$\frac{1}{t^3-3at^2+(1+3a^2)t-(a^3+a)}=\frac{A}{t-a}+\frac{Mt+N}{t^2-2at+a^2+1}$$

$$\Longleftrightarrow A(t^2-2at+1+a^2)+(Mt+N)(t-a)$$
$$=(A+M)t^2+(-2aA-aM+N)t+(1+a^2)A-aN,$$

comparant coeficients s'arriba al sistema:

$$\left.\begin{aligned} A+M \quad &=0\\ 2aA+aM-N&=0\\ (1+a^2)A \quad -aN&=0\end{aligned}\right\},$$

que té per solució:

$$A=1, \quad M=-1, \quad N=a$$

i tenim la descomposició en els reals següent:

$$\frac{3t^2+1}{t^3-3at^2+(1+3a^2)t-(a^3+a)}=\frac{1}{t-a}+\frac{a-t}{t^2-2at+a^2+1}.$$

D'altra banda:

$$\frac{a-t}{t^2-2at+a^2+1}=\frac{C}{t-a+i}+\frac{D}{t-a-i},$$

NOTE BOOK

$$C(t-a-i)+D(t-a+i)=a-t$$

$t=a+i$: $2iD=-i$, i : $D=-1/2$,

$t=a-i$: $-2iC=i$, i : $C=-1/2$,

i s'obté la descomposició en els complexos següent:

$$\frac{1}{t^3-3at^2+(1+3a^2)t-(a^3+a)}=\frac{1}{t-a}-\frac{1/2}{t-a+i}-\frac{1/2}{t-a-i}$$

$\square$

2.14. Descomposeu sobre $\mathbb{C}$ la fracció racional $\dfrac{1}{(t-a)^8(t-b)^4}$ utilitzant el desenvolupament de Taylor de $f(t) = \dfrac{1}{(t-a)^8}$ i $g(t) = \dfrac{1}{(t-b)^4}$ en els punts $t = b$ i $t = a$, respectivament.

$\triangleleft$ **Solució.** Tenim, d'una banda que descomposició en fraccions simples en $\mathbb{C}$ de la fracció racional ve donada per:

$$\begin{aligned} f(t)g(t) = \frac{1}{(t-a)^8(t-b)^4} &= \frac{A_1}{t-a} + \frac{A_2}{(t-a)^2} + \frac{A_3}{(t-a)^3} + \frac{A_4}{(t-a)^4} + \frac{A_5}{(t-a)^5} + \frac{A_6}{(t-a)^6} \\ &+ \frac{A_7}{(t-a)^7} + \frac{A_8}{(t-a)^8} + \frac{B_1}{t-b} + \frac{B_2}{(t-b)^2} + \frac{B_3}{(t-b)^3} + \frac{B_4}{(t-b)^4} \end{aligned} \tag{1}$$

i el desenvolupament de Taylor de $g(t) = \dfrac{1}{(t-b)^4}$ en $t = a$ fins a ordre 8 és:

$$\begin{aligned} g(t) = \frac{1}{(t-b)^4} &= g(a) + \frac{Dg(a)}{1!}(t-a) + \frac{D^2g(a)}{2!}(t-a)^2 + \frac{D^3g(a)}{3!}(t-a)^3 + \frac{D^4g(a)}{4!}(t-a)^4 \\ &+ \frac{D^5g(a)}{5!}(t-a)^5 + \frac{D^6g(a)}{6!}(t-a)^6 + \frac{D^7g(a)}{7!}(t-a)^7 + \frac{D^8g(a)}{8!}(t-a)^8 + G(t) \end{aligned} \tag{2}$$

on $G(t)$ és la resta d'ordre 8, i per tant:

$$\lim_{t\to a} \frac{G(t)}{(t-a)^8} = 0. \tag{3}$$

Multiplicant el desenvolupament (2) per $f(t)$ s'obté:

$$\begin{aligned} f(t)g(t) = \frac{1}{(t-a)^8(t-b)^4} &= \frac{g(a)}{(t-a)^8} + \frac{Dg(a)/1!}{(t-a)^7} + \frac{D^2g(a)/2!}{(t-a)^6} + \frac{D^3g(a)/3!}{(t-a)^5} + \frac{D^4g(a)/4!}{(t-a)^4} \\ &+ \frac{D^5g(a)/5!}{(t-a)^3} + \frac{D^6g(a)/6!}{(t-a)^2} + \frac{D^7g(a)/7!}{(t-a)} + D^8g(a)/8! + \frac{G(t)}{(t-a)^8}. \end{aligned} \tag{4}$$

Si a continuació calculem el $\lim_{t\to a}(t-a)^8 f(t)g(t)$ a partir de (1) i de (4), tenint en compte (3):

$$A_8 = \lim_{t\to a}(t-a)^8 f(t)g(t) = g(a) + \lim_{t\to a}(t-a)^8 \frac{G(t)}{(t-a)^8} = g(a).$$

A partir d'aquí, restant $\dfrac{A_8}{(t-a)^8} = \dfrac{g(a)}{(t-a)^8}$:

$$\begin{aligned} A_7 &= \lim_{t\to a}(t-a)^7\left(f(t)g(t) - \frac{A_8}{(t-a)^8}\right) = (t-a)^7\left(f(t)g(t) - \frac{g(a)}{(t-a)^8}\right) \\ &= Dg(a) + \lim_{t\to a}(t-a)^7 \frac{G(t)}{(t-a)^8} = Dg(a) \end{aligned}$$

Procedint de la mateixa manera, i. e., restant successivament $\dfrac{A_{8-k}}{(t-a)^{8-k}} = \dfrac{D^kg(a)/k!}{(t-a)^{8-k}}$ (on denotem $D^0g(a) = g(a)$) per $k = 0,1,2,3,4,5,6,7$, es troben els coeficients A_j per $j = 1,2,3,5,5,6,7$. Així, en general, escrivim:

$$\begin{aligned} A_j &= \lim_{t\to a}(t-a)^j\left(f(t)g(t) - \sum_{k=0}^{7-j}\frac{A_{8-k}}{(t-a)^{8-k}}\right) = \lim_{t\to a}(t-a)^j\left(f(t)g(t) - \sum_{k=0}^{7-j}\frac{D^kg(a)/k!}{(t-a)^{8-k}}\right) \\ &= \frac{D^{8-j}g(a)}{(8-j)!} + \lim_{t\to a}(t-a)^j\frac{G(t)}{(t-a)^8} = \frac{D^{8-j}g(a)}{(8-j)!}, \end{aligned}$$

per $j = 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$. És a dir,

$$A_1 = \frac{D^7 g(a)}{7!}, \qquad A_2 = \frac{D^6 g(a)}{6!}, \qquad A_3 = \frac{D^5 g(a)}{5!}, \qquad A_4 = \frac{D^4 g(a)}{4!},$$
$$A_5 = \frac{D^3 g(a)}{3!}, \qquad A_6 = \frac{D^2 g(a)}{2!}, \qquad A_7 = \frac{D g(a)}{1!}, \qquad A_8 = g(a).$$

Per trobar els coeficients B_1, B_2, B_3, B_4 aplicarem el mateix mètode. Ara desenvolupem $f(t) = \dfrac{1}{(t-a)^8}$ en $t = b$ fins a ordre 4:

$$f(t) = \frac{1}{(t-a)^8} = f(a) + \frac{Df(b)}{1}(t-b) + \frac{D^2 f(b)}{2!}(t-b)^2 + \frac{D^3 f(b)}{3!}(t-b)^3 + \frac{D^4 f(b)}{4!}(t-b)^4 + F(t) \quad (5)$$

on ara $F(t)$ és la resta d'ordre 4 i per tant, satisfà:

$$\lim_{t \to b} \frac{F(t)}{(t-b)^4} = 0. \qquad (6)$$

Multiplicant per $g(t) = \dfrac{1}{(t-b)^4}$ i d'acord ambla descomposició en fraccions simples donada per (1) resulta:

$$\begin{aligned} f(t)g(t) = \frac{1}{(t-a)^8 (t-b)^4} &= \frac{f(b)}{(t-b)^4} + \frac{Df(b)/1!}{(t-b)^3} + \frac{D^2 f(b)/2!}{(t-b)^2} + \frac{D^3 f(b)/3!}{(t-b)^1} + D^4 f(b)/4! + \frac{F(t)}{(t-b)^4} \\ &= \frac{A_1}{t-a} + \frac{A_2}{(t-a)^2} + \frac{A_3}{(t-a)^3} + \frac{A_4}{(t-a)^4} + \frac{A_5}{(t-a)^5} + \frac{A_6}{(t-a)^6} + \frac{A_7}{(t-a)^7} \\ &+ \frac{A_8}{(t-a)^8} + \frac{B_1}{t-b} + \frac{B_2}{(t-b)^2} + \frac{B_3}{(t-b)^3} + \frac{B_4}{(t-b)^4} \end{aligned}$$

d'on, com abans, es deriven els coeficients B_4, B_3, B_2, B_1 (per aquest ordre), calculant els límits:

$$\begin{aligned} B_4 &= \lim_{t \to b} (t-b)^4 f(t)g(t) = f(b) + \lim_{t \to b} (t-b)^4 \frac{F(t)}{(t-b)^4} = f(b), \\ B_3 &= \lim_{t \to b} (t-b)^3 \left(f(t)g(t) - \frac{B_4}{(t-b)^4} \right) = \lim_{t \to b} (t-b)^3 \left(f(t)g(t) - \frac{f(b)}{(t-b)^4} \right) \\ &= \frac{Df(b)}{1!} + \lim_{t \to b} (t-b)^3 \frac{F(t)}{(t-b)^4} = \frac{Df(b)}{1!}, \\ B_2 &= \lim_{t \to b} (t-b)^2 \left(f(t)g(t) - \frac{B_4}{(t-b)^4} - \frac{B_3}{(t-b)^3} \right) = \lim_{t \to b} (t-b)^2 \left(f(t)g(t) - \frac{f(b)}{(t-b)^4} - \frac{Df(b)/1!}{(t-b)^3} \right) \\ &= \frac{D^2 f(b)}{2!} + \lim_{t \to b} (t-b)^2 \frac{F(t)}{(t-b)^4} = \frac{D^2 f(b)}{2!}, \\ B_1 &= \lim_{t \to b} (t-b) \left(f(t)g(t) - \frac{B_4}{(t-b)^4} - \frac{B_3}{(t-b)^3} - \frac{B_2}{(t-b)^2} \right) \\ &= \lim_{t \to b} (t-b) \left(f(t)g(t) - \frac{f(b)}{(t-b)^4} - \frac{Df(b)/1!}{(t-b)^3} - \frac{D^2 f(b)/2!}{(t-b)^2} \right) = \frac{D^3 f(b)}{3!} + \lim_{t \to b} (t-b)^2 \frac{F(t)}{(t-b)^4} \\ &= \frac{D^3 f(b)}{3!}. \end{aligned}$$

En resum,

$$B_1 = \frac{D^3 f(b)}{3!}, \qquad B_2 = \frac{D^2 f(b)}{2!}, \qquad B_3 = \frac{Df(b)}{1!}, \qquad B_4 = f(b)$$

i la descomposició en fraccions simples de $f(t)g(t)$ en $\mathbb{C}$ s'escriu, amb els coeficients en termes de les derivades de f i g en $t = b$ i $t = a$ respectivament, com

$$f(t)g(t) = \frac{1}{(t-a)^8} = \frac{D^7g(a)/7!}{(t-a)} + \frac{D^6g(a)/6!}{(t-a)^2} + \frac{D^5g(a)/5!}{(t-a)^3} + \frac{D^4g(a)/4!}{(t-a)^4} + \frac{D^3g(a)/3!}{(t-a)^5}$$
$$+ \frac{D^2g(a)/2!}{(t-a)^6} + \frac{Dg(a)/1!}{(t-a)^7} + \frac{g(a)}{(t-a)^8} + \frac{D^3f(b)/3!}{(t-b)} + \frac{D^2f(b)/2!}{(t-b)^2} + \frac{Df(b)/1!}{(t-b)^3} + \frac{f(b)}{(t-b)^4}. \triangleright$$

2.15. Siguin α i β dos nombres reals fitats.

(a) Proveu que existeixen dos únics polinomis $Q(t), R(t) \in \mathbb{R}_3[t]$ tals que

$$Q(-1) = \alpha, \qquad Q(0) = 1 = R(0), \qquad Q'(0) = 0 = R'(0),$$
$$Q''(0) = 2\gamma = R''(0), \qquad R(1) = \beta.$$

Calculeu explícitament els polinomis $Q(t)$ i $R(t)$ en funció de α, β i γ.

(b) Proveu que exsteix un únic polinomi $P(t) \in \mathbb{R}_3[t]$ tal que

$$P(-2) = 0, \qquad P'(-2) = 0, \qquad P''(-2) = 0, \qquad P(-1) = \alpha.$$

(c) Calculeu explícitament el polinomi $P(t)$ en funció de α.

(d) Anàlogament, calculeu l'únic polinomi $S(t) \in \mathbb{R}_3[t]$ tal que

$$S(2) = 0, \qquad S'(2) = 0, \qquad S''(2) = 0, \qquad S(1) = \beta.$$

(e) Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida a trossos mitjançant les fórmules:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{quan} \quad t \leq -2 \\ P(t), & \text{quan} \quad -2 \leq t \leq -1 \\ Q(t), & \text{quan} \quad -1 \leq t \leq 0 \\ R(t), & \text{quan} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ S(t), & \text{quan} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{quan} \quad t \geq 2 \end{cases}$$

Quan $f \in C^1(\mathbb{R})$? Quan $f \in C^2(\mathbb{R})$? Quan $f \in C^3(\mathbb{R})$? Especifiqueu en cada cas els valors de α i β per als quals es compleixen aquestes condicions.

(f) Dibuixeu la gràfica de la funció $f(t)$ per als valors de α i β tals que $f \in C^2(\mathbb{R})$. (Indicació: la funció $f(t)$ s'anomena *spline de campana*. El terme campana fa referència a la forma de la seva gràfica).

$\triangleleft$ **Solució.** (a) Siguin,

$$Q(t) = q_3t^3 + q_2t^2 + q_1t + q_0, \qquad R(t) = r_3t^3 + r_2t^2 + r_1t + r_0$$

els polinomis buscats. Si imposem les condicions de l'enunciat:

$$Q(-1) = -q_3 + q_2 - q_1 + q_0 = \alpha, \quad Q''(0) = 2q_2 = 2\gamma, \quad Q'(0) = q_1 = 0, \quad Q(0) = q_0 = 1,$$
$$R(1) = r_3 + r_2 + r_1 + r_0 = \beta, \quad R''(0) = 2r_2 = 2\gamma, \quad R'(0) = r_1 = 0, \quad R(0) = r_0 = 1,$$

veiem que els coeficients q_0, q_1, q_2, q_3 i r_0, r_1, r_2, r_3 dels polinomis $Q(t)$ i $R(t)$ s'obtenen, en funció del paràmetres α, β i γ, com solució dels sistemes,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_3 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_2 \\ r_1 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Aquests sistemes tenen solució única |els determinants de les matrius són -1 i 1 respectivament|. Com fàcilment es calcula, aquestes resulten,

$$\begin{array}{llll} q_0 = 1, & q_1 = 0, & q_2 = \gamma, & q_3 = -\alpha + \gamma + 1, \\ r_0 = 1, & r_1 = 0, & r_2 = \gamma, & r_3 = \beta - \gamma - 1 \end{array}$$

amb la qual cosa els polinomis $Q(t)$ i $R(t)$ que satisfan les condicions demanades a l'enunciat són:

$$Q(t) = (-\alpha + \gamma + 1)t^3 + \gamma t^2 + 1, \qquad R(t) = (\beta - \gamma - 1)t^3 + \gamma t^2 + 1.$$

(b) Busquem un polinomi $P(t) = p_3t^3 + p_2t^2 + p_1t + p_0 \in \mathbb{R}_3[t]$ que verifiqui,

$$\begin{array}{rcrcl} P(-1) & = & p_0 - p_1 + p_2 - p_3 & = & \alpha, \\ P(-2) & = & p_0 - 2p_1 + 4p_2 - 8p_3 & = & 0, \\ P'(-2) & = & p_1 - 4p_2 + 12p_3 & = & 0, \\ P''(-2) & = & 2p_2 - 12p_3 & = & 0, \end{array}$$

i. e., tal que els coeficients p_0, p_1, p_2, p_3, són solució del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

la qual és única —es comprova que el determinant de la matriu és -2, per tant el sistema és compatible determinat— i un cop calculada (per ex., pel mètode de Gauss-Jordan) resulta:

$$p_0 = 8\alpha, \qquad p_1 = 12\alpha, \qquad p_2 = 6\alpha, \qquad p_3 = \alpha.$$

Això ens fixa els coeficients del polinomi $P(t) \in \mathbb{R}_3[t]$ en funció de α:

$$P(t) = \alpha t^3 + 6\alpha t^2 + 12\alpha t + 8\alpha.$$

(c) De la mateixa manera, busquem ara un polinomi $S(t) = s_3t^3 + s_2t^2 + s_1t + s_0 \in \mathbb{R}_3[t]$ que satisfagui les condicions:

$$\begin{array}{rcrcl} S(-1) & = & s_0 + s_1 + s_2 + s_3 & = & \beta, \\ S(-2) & = & s_0 + 2s_1 + 4s_2 + 8s_3 & = & 0, \\ S'(-2) & = & s_1 + 4s_2 + 12s_3 & = & 0, \\ S''(-2) & = & 2s_2 + 12s_3 & = & 0 \end{array}$$

o, de manera equivalent, amb els coeficients s_0, s_1, s_2, s_3 solució del sistema,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

la qual, com a l'apartat anterior també és única (el sistema és compatible determinat, ja que el seu determinant és 2). Un cop calculada s'obtenen els coefcients en funció de β,

$$s_0 = 8\beta, \qquad s_1 = -12\beta, \qquad s_2 = 6\beta, \qquad s_3 = -\beta$$

i el polinomi $S(t) \in \mathbb{R}_3[t]$ que verifica les condicions anteriors és,

$$S(t) = -\beta t^3 + 6\beta t^2 - 12\beta t + 8\beta$$

(d) Comencem, en primer lloc, observant que $f \in C^0(\mathbb{R})$: la funció f és contínua en $\mathbb{R}$. Comproveu-lo! A partir d'aquí, tenim que:

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ sii } P'(-2) = 0, \quad P'(-1) = Q'(-1), \quad Q'(0) = R'(0), \quad R'(1) = S'(1), \quad S'(2) = 0. \qquad (8)$$

D'una banda de la primera condició tenim, per construcció que: $P'(-2) = 0$, per $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ qualssevol; de la segona:

$$P'(-1) = R'(-1) \Leftrightarrow 3\alpha - 12\alpha + 12\alpha = 3(-\alpha + \gamma + 1) - 2\gamma \Leftrightarrow 6\alpha - 3 = \gamma;$$

de la tercera, avaluant directament les derivades de Q i R en $t=0$ es té: $Q'(0)=0=R'(0)$, per $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ qualssevol; de la quarta s'obté,

$$R'(1)=S'(1)\Leftrightarrow 3(\beta-\gamma-1)+\gamma=-3\beta+12\beta-12\beta\Leftrightarrow 6\beta-3=\gamma;$$

i de l'última, com abans, per construccio és: $S'(-2)=0$ per $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ qualssevol. Resumint: f és de classe C^1 en $\mathbb{R}$ sii els paràmetres $\alpha,\beta,\gamma\mathbb{R}$ satisfan:

$$\alpha=\beta=\frac{\gamma}{6}+\frac{1}{2},$$

llavors, amb els polinomis $Q,R,P,S\in\mathbb{R}_3[t]$ vénen donats per,

$$Q(t)=\left(\frac{5}{6}\gamma+\frac{1}{2}\right)t^3+\gamma t^2+1,\qquad P(t)=\left(\frac{\gamma}{6}+\frac{1}{2}\right)t^3+(\gamma+3)t^2+(2\gamma+6)t+\frac{4}{3}\gamma+4,$$
$$R(t)=-\left(\frac{5}{6}\gamma+\frac{1}{2}\right)t^3+\gamma t^2+1,\qquad S(t)=-\left(\frac{\gamma}{6}+\frac{1}{2}\right)t^3+(\gamma+3)t^2-(2\gamma+6)t+\frac{4}{3}\gamma+4,\tag{9}$$

amb $\gamma\in\mathbb{R}$ qualsevol.

A continuació, $f\in\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ sii f és de classe C^1 en $\mathbb{R}$, per tant sii se satisfan les condicions (8), i a més

$$P''(-2)=0,\qquad P''(-1)=Q''(-1),\qquad Q''(0)=R''(0),\qquad R''(1)=S''(1),\qquad S''(2)=0.\tag{10}$$

Aquestes condicions les imposem sobre la forma dels polinomis $Q,R,P,S\in\mathbb{R}_3[t]$ donada per (9) —que és la que garanteix que f és derivable amb continuïtat en $\mathbb{R}$. Així, de la primera: $P''(-2)=-2(\gamma+3)+2(\gamma+3)=0$ per qualsevol $\gamma\in\mathbb{R}$; de la segona:

$$P''(-1)=Q''(-1)\Leftrightarrow -(\gamma+3)+2(\gamma+3)=-(5\gamma+3)+2\gamma\Leftrightarrow\gamma+3=-3\gamma-3\Leftrightarrow\gamma=-\frac{3}{2};$$

la tercera es verifica per tot $\gamma\in\mathbb{R}$: $Q''(0)=R''(0)=2\gamma$; mentre que la quarta és consistent amb la segona. En efecte:

$$R''(1)=S''(1)\Leftrightarrow -(5\gamma+3)+2\gamma=-(\gamma+3)+2(\gamma+3)\Leftrightarrow\gamma+3=-3\gamma-3\Leftrightarrow\gamma=-\frac{3}{2}.$$

Per últim $S''(2)=-2(\gamma+2)+2(\gamma+2)=0$ i veiem que la cinquena es satisfà per qualsevol $\gamma\in\mathbb{R}$. Per tant, els valors de α, β i γ que fan que f sigui de classe C^2 en $\mathbb{R}$ són:

$$\gamma=-\frac{3}{2},\qquad \alpha=\beta=\frac{\gamma}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\tag{11}$$

mentre que el polinomis $Q,R,P,S\in\mathbb{R}_3[t]$ corresponents s'obtenen substituint $\gamma=-\frac{3}{2}$ en (9), d'on resulten,

$$Q(t)=-\frac{3}{4}t^3-\frac{3}{2}t^2+1,\qquad R(t)=\frac{3}{4}t^3-\frac{3}{2}t^2+1,\qquad P(t)=\frac{t^3}{4}+\frac{3}{2}t^2+3t+2,$$
$$S(t)=-\frac{1}{4}t^3+\frac{3}{2}t^2-3t+2.\tag{12}$$

Tanmateix, f és de classe $C^3(\mathbb{R})$ sii $f\in C^2(\mathbb{R})$ —és a dir, sii es satisfan simultàniment les condiciions (8) i (10)—, i a més:

$$P'''(-2)=0,\quad P'''(-1)=Q'''(-1),\quad Q'''(0)=R'''(0),\quad R'''(1)=S'''(1),\quad S'''(2)=0$$

però:

(i) $P'''(t)=\frac{3}{2}$, per tot $t\in\mathbb{R}$ i llavors: $P'''(-2)=\frac{3}{2}\neq 0$,

(ii) $Q'''(t)=-\frac{9}{2}$, per tot $t\in\mathbb{R}$ i llavors: $P'''(-1)=\frac{3}{2}\neq Q'''(-1)=-\frac{9}{2}$,

(iii) $R'''(t)=\frac{9}{2}$, per tot $t\in\mathbb{R}$ i llavors: $Q'''(0)=-\frac{9}{2}\neq R'''(0)=\frac{9}{2}$,

(iv) $S'''(t) = -\dfrac{3}{2}$, per tot $t \in \mathbb{R}$ i llavors: $R'''(1) = \dfrac{9}{2} \neq S'''(1) = -\dfrac{3}{2}$,

(v) $S'''(2) = -\dfrac{3}{2} \neq 0$.

Veiem doncs que f no és de classe C^3 en $\mathbb{R}$ per cap valor dels paràmetres $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(e) A la figura 1 a sota es representa la gràfica de la funció $f(t)$ per als valors de α, β, γ donats per (11) i que són els que fan que $f \in C^2(\mathbb{R})$. Explícitament,

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{quan} \quad t \leq -2 \\ \dfrac{1}{4}t^3 + \dfrac{3}{2}t^2 + 3t + 2, & \text{quan} \quad -2 \leq t \leq -1 \\ -\dfrac{3}{4}t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 + 1, & \text{quan} \quad -1 \leq t \leq 0 \\ \dfrac{3}{4}t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 + 1, & \text{quan} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ -\dfrac{1}{4}t^3 + \dfrac{3}{2}t^2 - 3t + 2, & \text{quan} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{quan} \quad t \geq 2. \end{cases} \tag{13}$$

La funció $f(t)$ s'anomena *spline de campana.* ▷

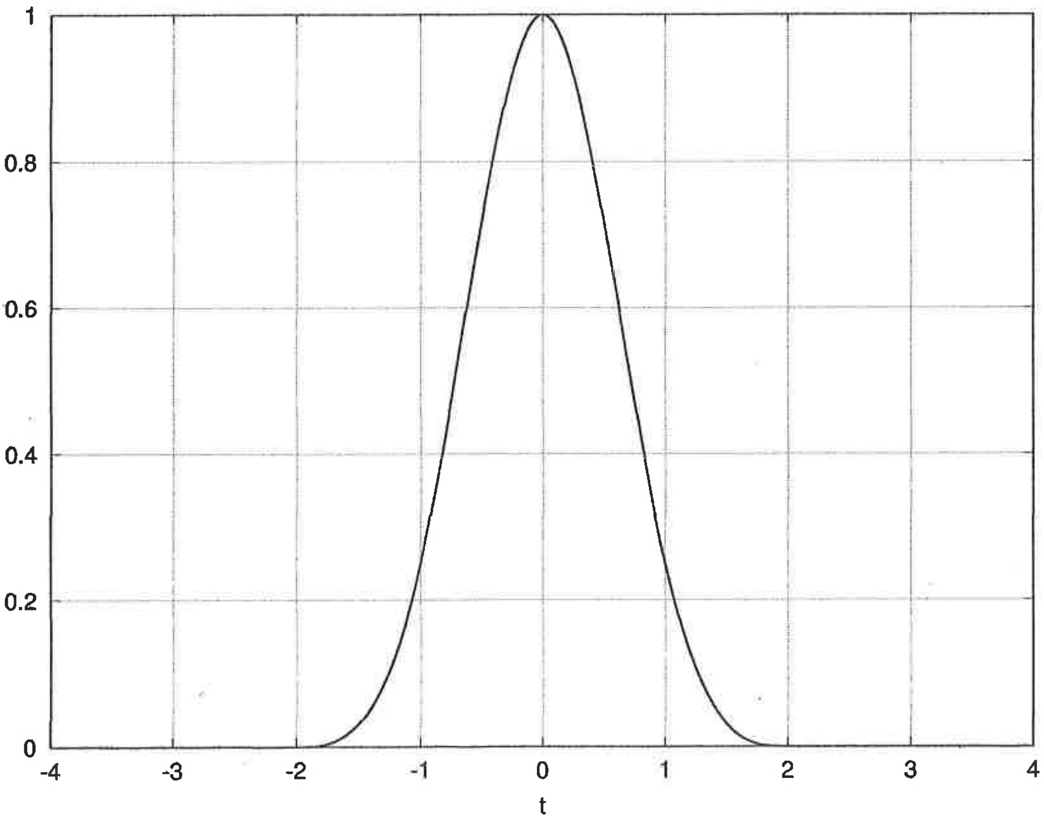

Figura 1. Representació gràfica de la funció "a trossos" definida per l'equació (13).

2·16 (opt) Donat $P(t)=t^5-a$, $a\neq 0$; $Q(t)=t^3-b, b\neq 0$.

(a) Quina relació han de verificar a, b per a que $MCD(P(t), Q(t))$ sigui un polinomi de grau 1?

(b) Doneu, per a aquest casos $MCD(P(t), Q(t))$ i $MCM(P(t), Q(t))$.

(c) Calculeu $MCD(t^5-32, t^3-8)$, $MCM(t^5-32, t^3-8)$.

Solució. Comentarem primer la idea en què es basa l'Algorisme d'Euclides.

Proposició. El MCD de dos polinomis P i S coincideix amb el MCD de S i R on R és el residu de la divisió de P i S.

Demostració. Siguin $D=MCD(P,S)$, $L=MCD(S,R)$. Per definició de MCD $\exists$ polinomis P_1, S_1 t.q.: $P=P_1D$, $S=S_1D$. D'altra banda, per l'algorisme de la divisió $\exists$ polinomi Q t.q.:

$$P=S\cdot Q+R \tag{1}$$

amb grau $R<$ grau S, d'on $R=P-SQ=P_1D-S_1DQ=(P_1-S_1Q)D$; per tant D és també un divisor de R i com que és un divisor de S, ha de dividir el MCD de tots dos, que és L. En resum: <u>D divideix a L</u>.
Tanmateix, L divideix a S i a R i per tant $\exists$ polinomis S_2 i R_2 t.q.: $S=S_2L$ i $R=R_2L$. Ara, substituint això a (1): $P=SQ+R$ $=S_2LQ+R_2L=(S_2Q+R_2)L$, veiem que L és un divisor de P i, com que divideix a S, també ha de dividir el MCD de P i S, D. Això és: L divideix a D i, com que hem demostrat abans que D divideix L; aleshores, necessàriament: $D=L$.

Aleshores si posem $S=R_0$ i $R=R_1$ llavors iterant la proposició anterior tindrem:

$$MCD(P,S) = MCD(R_0, R_1) = MCD(R_1, R_2) = \ldots$$
$$\ldots = MCD(R_i, R_{i+1}) = MCD(R_{i+1}, R_{i+2}) = \ldots$$
$$\ldots = MCD(R_s, R_{s+1})$$

on R_{i+2} és la resta de la divisió de R_i i R_{i+1}, $i = 0, 1, 2, \ldots, s+1$.

D'altra banda, com que grau R_{i+2} < grau R_{i+1} arribarem a $R_{s+2} = 0$ per algun s. Aleshores el MCD serà el polinomi mònic corresponent a R_{s+1}, i.e.: $MCD(P,S) = R_{s+1}$/coef principal de R_{s+1}.

Una (possible) implementació d'aquest algorisme en Matlab/Octave seria:

```
function  r = euclides(p,s)
% càlcul del MCD de dos polinomis,
% p i s, per l'algorisme d'Euclides.

prec = 1e-15;
r = p;
while norm(r) > prec
  [q,r] = deconv(p,s);
  [a q] = max(abs(r)>prec);
  r = r(q:end);
  p = s;
  s = r;
end
r = p/p(1);
return
```

fitxer euclides.m

Així, si volguéssim calcular el MCD de $P(t)=t^5-3t^4+2t^3+2t^2-3t+1$ i $Q(t)=t^4-6t^3+12t^2-10t+3$ (veure problema 2.17, apartat (b)), introduiríem comandes següents:

```
>> p=[1 -3 2 2 -3 1]
 p=
  1 -3 2 2 -3 1
>> q=[1 -6 12 -10 3]
 q=
  1 -6 12 -10 3
>> mcd=euclides(p,q)
 mcd=
  1 -3 3 1
```

Llavors $MCD(P(t),Q(t))=MCD(t^5-3t^4+2t^3+2t^2-3t+1,\ t^4-6t^3+12t^2-10t+3)=t^3-3t^2+3t+1=(t-1)^3$.

(a) Aplicant l'algorisme d'Euclides:

	t^2	$\frac{1}{b}t$	$\frac{b^2}{a}t+\frac{b^4}{a^2}$
t^5-a	t^3-b	bt^2-a	$\frac{a}{b}t-b$
bt^2-a	$\frac{a}{b}t-b$	$\frac{b^5}{a^2}-a$	

	Q_1	Q_2	$\dots$	Q_{s+1}	Q_{s+2}
P	Q	R_1	$\dots$	R_s	R_{s+1}
R_1	R_2	R_3	$\dots$	R_{s+2}	

Algorisme d'Euclides

$R_{s+2}=0$

Aleshores $MCD(t^5-a,t^3-b)$ amb $a\neq 0, b\neq 0$ serà un polinomi de 1er grau $\Longleftrightarrow \frac{b^5}{a^2}-a=0 \Longleftrightarrow b^5=a^3$.

(b) En aquests casos:

$$MCD(t^5-a,t^3-b)\underset{b=a^{3/5}}{=}MCD(t^5-a,t^5-a^{3/5})=\frac{a^{2/5}t-a^{3/5}}{a^{2/5}}=t-a^{1/5}$$

$$mcm(t^5-a,t^3-b)=mcm(t^5-a,t^3-a^{3/5})=\frac{(t^5-a)(t^3-a^{3/5})}{t-a^{1/5}}=$$

NOTE BOOK

$$= \frac{t^8 - a^{3/5}t^5 - at^3 + a^{8/5}}{t - a^{1/5}} = t^7 + a^{1/5}t^6 + a^{2/5}t^5 - at^2 - a^{6/5}t - a^{7/5}.$$

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & -a^{3/5} & 0 & -a & 0 & 0 & a^{8/5} \\
a^{1/5} & & a^{1/5} & a^{2/5} & a^{3/5} & 0 & 0 & -a^{6/5} & -a^{7/5} & -a^{8/5} \\
\hline
 & 1 & a^{1/5} & a^{2/5} & 0 & 0 & -a & -a^{6/5} & -a^{7/5} & 0
\end{array}$$

(c) $a = 32$, $b = 8$, aleshores $b = a^{3/5}$. En efecte, ja que $32^{3/5} = (2^5)^{3/5} = 2^3 = 8$.

Llavors:

$$MCD(t^5 - 32, t^3 - 8) = t - 32^{1/5} = t - 2$$

$$mcm(t^5 - 32, t^3 - 8) = t^7 + 2t^6 + 4t^5 - 32t^2 - 64t - 128. \square$$

2.17 (opt.) Calculeu el $MCD(P(t),Q(t))$ i el $MCM(P(t),Q(t))$ amb

(a) $P(t)=t^3-3t^2+3t-2$ i $Q(t)=t^2-4t+4$.

(b) $P(t)=t^5-3t^4+2t^3+2t^2-3t+1$, i $Q(t)=t^4-6t^3+12t^2-10t+3$.

(c) $P(t)=t^4-t^3-3t^2+5t-2$ i $Q(t)=t^2-6t+9$.

Trobeu en cada cas, polinomis $P_1(t)$, $Q_1(t)$ tals que

$$P_1(t)\,P(t)+Q_1(t)\,Q(t)=MCD(P(t),Q(t)).$$

Solució

(a)

	$t+1$	$t-2$
t^3-3t^2+3t-2	t^2-4t+4	$t-2$
$3t-6$	0	

algorisme d'Euclides

$$MCD(P(t),Q(t))=t-2$$

$$mcm(P(t),Q(t))=\frac{(t^3-3t^2+3t-2)(t^2-4t+4)}{t-2}=(t^3-3t^2+3t-2)(t-2)$$

$$=t^4-5t^3+9t^2-8t+4.$$

$$P(t)P_1(t)+Q(t)Q_1(t)=MCD(P(t),Q(t))$$

$$\Longleftrightarrow (t^2-t+1)P_1(t)+(t-2)Q_1(t)=1$$ (hem dividit pel MCD).

	1	-3	3	-2
2		2	-2	2
	1	-1	1	0

Busquem $P_1(t)=c$ i $Q_1(t)=at+b$. Aleshores:

$$1=(t^2-t+1)\cdot c+(t-2)(at+b)=ct^2-ct+c+$$
$$at^2+(-2a+b)t-2b=(c+a)t^2+(-c-2a+b)t+c-2b.$$

Això porta al sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} c+a & =0 \\ -c-2a+b & =0 \\ c\quad -2b & =1 \end{array}\right\}$$ Solució: $a=-\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$, $c=\frac{1}{3}$.

Aleshores:

$$P_1(t)=\frac{1}{3},\quad Q_1(t)=-\frac{1}{3}(t+1)$$

(b)

	$t+3$	$t-3$
$t^5-3t^4+2t^3+2t^2-3t+1$	$t^4-6t^3+12t^2-10t+3$	t^3-3t^2+3t-1
$8t^3-24t^2+24t-8$	0	

algorisme d'Euclides.

$$MCD(P(t),Q(t)) = MCD(t^5-3t^4+2t^3+2t^2-3t+1,\ t^4-6t^3+12t^2-16t+3)$$
$$= t^3-3t^2+3t-1 = (t-1)^3$$

$$mcm(P(t),Q(t) = mcm(t^5-3t^4+2t^3+2t^2-3t+1,\ t^4-6t^3+12t^2-16t+3)$$
$$= \frac{(t^5-3t^4+2t^3+2t^2-3t+1)(t^4-6t^3+12t^2-16t+3)}{(t-1)^3}$$
$$= (t^2-1)(t^4-6t^3+12t^2-10t+3)$$
$$= t^6-6t^5+11t^4-4t^3-9t^2+10t-3.$$

$$P(t)P_1(t)+Q(t)Q_1(t) = MCD(P(t),Q(t))$$
$$\Leftrightarrow (t^5-3t^4+2t^3+2t^2-3t+1)P_1(t)+(t^4-6t^3+12t^2-10t+3)Q_1(t)$$
$$=(t-1)^3.$$

Dividint pel MCD, $(t-1)^3$ es té: $(t^2-1)P_1(t)+(t-3)Q_1(t) = 1$. Busquem doncs $P_1(t)$ i $Q_1(t)$ de la forma $P_1(t)=c$, $Q_1(t)=at+b$ i llavors; substituint:

$$ct^2-c+at^2+(-3a+b)t-3b = (c+a)t^2+(-3a+b)t-c-3b = 1,$$

d'on veiem que els coeficients a, b i c vénen determinats per la solució del sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} c+a & =0 \\ -a+b & =0 \\ -c- \quad -3b & =1 \end{array}\right\}; \text{ Solució: } a=-\frac{1}{8},\ b=-\frac{3}{8},\ c=\frac{1}{8}.$$

Finalment doncs:

$$P_1(t)=c=\frac{1}{8},\quad Q_1(t)=at+8=-\frac{1}{8}(t+3).$$

(c)

	$t^2+5t+18$	$t-\frac{61}{17}$	$\frac{289}{100}t-\frac{697}{100}$
$t^4-t^3-3t^2+5t-2$	t^2-6t+9	$t-\frac{41}{17}$	$100/289$
$68t-164$	$\frac{100}{289}$	0	

algorisme d'Euclides

$$MCD(P(t),Q(t)) = MCD(t^4-t^3-3t^2+5t-2,\ t^2-6t+9) = 1$$

$$mcm(P(t),Q(t)) = mcm(t^4-t^3-3t^2+5t-2,\ t^2-6t+9) =$$
$$= (t^4-t^3-3t^2+5t-2)(t^2-6t+9) = t^6-7t^5+12t^4+14t^3-59t^2+57t-18.$$

Busquem $P_1(t), Q_1(t)$ tals que: $P(t)P_1(t)+Q(t)Q_1(t)=1$. En aquest cas busquem $P_1(t)=at+b$ i $Q_1(t)=ct^3+dt^2+et+f$, on els coeficients els determinarem per substitució:

$$(t^4-t^3-3t^2+5t-2)(at+b)+(t^2-6t+9)(ct^3+dt^2+ct+f)$$
$$=(a+c)t^5+(-a+b-6c+d)t^4+(-3a-b+9c-6d+e)t^3+$$
$$+(5a-3b+9d-6e+f)t^2+(-2a+5b+9e-6f)t+9f-2b=1.$$

d'on s'obté el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a+c=0\\ -a+b-6c+d=0\\ -3a-b+9c-6d+e=0\\ 5a-3b+9d-6e+f=0\\ -2a+5b+9e-6f=0\\ -2b+9f=1 \end{array}\right\}$$

solució: $a=-\frac{17}{400}$, $d=\frac{3}{50}$, $b=\frac{61}{400}$, $e=\frac{1}{400}$, $c=\frac{17}{400}$, $f=\frac{29}{200}$

Així doncs, tenim:

$$P_1(t)=at+b=\frac{1}{400}(-17t+61)$$

$$Q_1(t)=ct^3+dt^2+et+f=\frac{1}{400}(17t^3+24t^2+t+58) \quad \square$$

2.18 (opt.) Es considera $P(t) = t^3 + t^2 - 8t - 12 \in \mathbb{R}[t]$

(a) Determineu $P'(t)$ i doneu la seva descomposició en factors primers.

(b) Proveu que una de les arrels de $P'(t)$ ho és també de $P(t)$, i deduïu la seva descomposició en factors primers de $P(t)$.

(c) Calculeu $MCD(P(t), P'(t))$.

(d) Determineu $P_1(t)$ i $Q_1(t)$ tals que $P_1(t)\,P(t) + Q_1(t)\,P'(t) =$
$= MCD(P(t), P'(t))$.

Solució. (a) $P(t) = t^3 + t^2 - 8t - 12 \in \mathbb{R}[t] \Rightarrow P'(t) = 3t^2 + 2t - 8$

$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & 2 & -8 \\ -2 & & -6 & 8 \\ \hline & 3 & -4 & 0 \end{array}$$

d'on: $P'(t) = 3t^2 + 2t - 8 = 3(t+2)(t - 4/3)$.

(b) $P(-2) = -8 + 4 + 16 - 12$

$P(t) = t^3 + t^2 - 8t - 12 = (t+2)^2(t-3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -8 & -12 \\ -2 & & -2 & 2 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \\ -2 & & -2 & 6 & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & \end{array}$$

veiem que $t = -2$ és arrel de $P(t)$ (doble) i de $P'(t)$.

(c) $MCD(P(t), P'(t)) = t + 2$

(d) $P_1(t), Q_1(t)$ t.q.: $P_1(t)\,P(t) + Q_1(t)\,Q(t) = MCD(P(t), P'(t))$:

$P_1(t)\,(t+2)^2(t+3) + Q_1(t)\,(3t-4)(t+2) = t+2$

$\Leftrightarrow P_1(t)\,(t+2)(t+3) + Q_1(t)\,(3t-4) = 1.$

Agafem: $P_1(t) = c$, $Q_1(t) = at + b$ i llavors:

$c\,(t+2)(t-3) + (at+b)(3t-4) = ct^2 - ct - 6c + 3at^2 + (3b-4a)t - 4b$

$= (c+3a)t^2 + (-c+3b-4a)\,t - 6c - 4b = 1$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rl} c + 3a & = 0 \\ -c + 3b - 4a & = 0 \\ -6c - 4b & = 1 \end{array}\right\} : \text{solució: } \underline{a = \tfrac{3}{50},\ b = \tfrac{1}{50},\ c = -\tfrac{9}{50}}.$$

Per tant: $P_1(t) = -\dfrac{9}{50}$, $Q_1(t) = \dfrac{1}{50}(3t+1)$. □

NOTE BOOK