Problema 3.4. La transformació que descompon en monofàsics un operador d'inductàncies és:

$$F = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix},$$

essent $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha^3 = 1$, $\alpha \neq 1$. Calculeu F^4.

◁ **Solució.** Calculem primer F^2:

$$F^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1+\alpha+\alpha^2 & 1+\alpha+\alpha^2 \\ 1+\alpha+\alpha^2 & 1+\alpha^2+\alpha^4 & 1+\alpha^3+\alpha^3 \\ 1+\alpha+\alpha^2 & 1+\alpha^3+\alpha^3 & 1+\alpha^2+\alpha^4 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Si ara es té en compte que, segons l'enunciat: $\alpha^3 = 1$, es veu per una banda que:

$$1+\alpha^3+\alpha^3 = 3, \qquad \text{i per l'altra: } 1+\alpha^2+\alpha^4 = 1+\alpha+\alpha^2,$$

ja que: $\alpha^4 = \alpha^3\alpha = \alpha$.

A continuació ve el "truquet". Comproveu que:

$$\alpha^3 - 1 = (\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2). \quad (2)$$

...Surt? Fantàstic! A partir d'aquí, només cal adonar-se de que, essent $\alpha^3 = 1$ i $\alpha \neq 1$, (2) implica necessàriament que

$$1+\alpha+\alpha^2 = 0.$$

Oi que sí? Bé, recapitulem. Tenim: $1+\alpha^3+\alpha^3 = 3$ i $1+\alpha^2+\alpha^4 = 1+\alpha+\alpha^2 = 0$. Si substituïm això a l'expressió de F^2 a (1), arribem a:

$$F^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

i finalment,

$$F^4 = F^2F^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

on denotem $I_3 = \text{diag}[1,1,1]$, la matriu unitat 3×3. ▷

Remarca 1. De fet, es pot demostrar, per exemple per inducció (exercici!) que:

$$1 - \alpha^n = (1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}), \quad (3)$$

per tot $n \in \mathbb{N}$ i per $\alpha \in \mathbb{C}$ qualsevol (òbviament (2) correspondria a $n = 3$).

Suggeriment: Amb (3), intenteu el problema **1.9** (i.e., el problema 9 del Tema 1: *Nombres complexos*). en particular, proveu que "la suma de les n arrels n-èsimes d'un número complex sempre dóna zero" i interpreteu geomètricament aquest resultat.

3·5 Demostreu que la matriu triangular per blocs $A=\begin{pmatrix} P & R \\ O & Q \end{pmatrix}$ és invertible si, i només si, ho són P i Q, i que aleshores

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}RQ^{-1} \\ O & Q \end{pmatrix}. \qquad (\&)$$

Solució. Si A és invertible $\exists\, B=\begin{pmatrix} U & V \\ Z & W \end{pmatrix}$ t.q. $AB=BA=I_n$ i escrivim $B=A^{-1}$ ($\Leftrightarrow A=B^{-1}$). En particular

$$AB=\begin{pmatrix} P & R \\ O & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & V \\ Z & W \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PU+RZ & PV+RW \\ QZ & QW \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & \\ & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow PU+RZ=I_r,\ PV+RW=O,\ QZ=O,\ QW=I_{n-r}.$$

D'aquí tenim que Q té inversa "per la dreta" i.e.: $QW=I_{n-r}$ i com que Q és una matriu quadrada, llavors Q és invertible i $QW=WQ=I_{n-r}$. Posem doncs $W=Q^{-1}$ (i $Q=W^{-1}$). Aleshores:

1) $QZ=O \Rightarrow WQZ=Q^{-1}QZ=Z=O$,

2) $I_r=PU+RZ=PU$.

Llavors P té inversa per la dreta, $U \Rightarrow PU=UP=I$, d'on $U=P^{-1}$ (i, equivalentment $P=U^{-1}$). Per últim, de $PV+RW=O \Leftrightarrow PV=-RW \Leftrightarrow V=-P^{-1}RW=-P^{-1}RQ^{-1}$. D'aquesta manera queda provat que P i Q són invertibles i la inversa de la matriu A, $A^{-1}=B$ vé donada per (&)

D'altra banda, si P i Q són invertibles, considerem la matriu $B=A^{-1}$ donada per (&), llavors:

$$AB=\begin{pmatrix} P & R \\ O & Q \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}RQ^{-1} \\ O & Q^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & \\ & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

i:

$$BA=\begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}RQ^{-1} \\ O & Q^{-1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} P & R \\ O & Q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & \\ & I_{n-r} \end{pmatrix},$$

d'on $AB=BA=I$ i aleshores $B=A^{-1}$ i la matriu A és invertible. ☺

Problema 3.6. Calculeu la potència k-èsima de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\triangleleft$ **Solució.** Escrivim $A = \lambda I_n + N_n$, on $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ és la matriu identitat (o unitat) $n \times n$, mentre que:

$$N_n := \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Les matrius d'aquest tipus són nilpotents, i de fet, és fàcil comprovar que:

$$N_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_n^3 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

$$\dots, N_n^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_n^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Així per exemple, per $n = 4$,

$$N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_4^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si apliquem la fórmula del binomi:

$$A^k = (\lambda I_n + N_n)^k = \lambda^k I_n + \lambda^{k-1}\binom{k}{1}N_n + \lambda^{k-2}\binom{k}{2}N_n^2 + \lambda^{k-3}\binom{k}{3}N_n^3 + \cdots + \lambda\binom{k}{k-1}N_n^{k-1} + \binom{k}{k}N_n^k,$$

obtenim:

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & & & & & & \\ \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k & & & & & \\ \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \binom{k}{k} & \binom{k}{k-1}\lambda & \binom{k}{k-2}\lambda^2 & \cdots & \lambda^k & & \\ 0 & \binom{k}{k} & \binom{k}{k-1}\lambda & \cdots & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{4}$$

Remarca 2. Recordem que si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, amb $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, conmuten (i. e., $AB = BA$), aleshores és vàlida la fórmula del binomi de Newton que coneixem. És a dir:

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^{k-j} B^j.$$

En particular, en el nostre cas, agafem $A = \lambda I_n$, $B = N_n$.

Nota: per deduir (4) hem suposat que $k \in \mathbb{N}$ amb $k < n$. Es deixa com exercici al lector escriure la fórmula corresponent per $k \in \mathbb{N}$ amb $k \geq n$. Per exemple, si $n = 4$, llavors:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

i aplicant (4) tenim, per $k = 2, 3, 4$ i 5:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & & & \\ \binom{2}{1}\lambda & \lambda^2 & & \\ \binom{2}{2} & \binom{2}{1}\lambda & \lambda^2 & \\ 0 & \binom{2}{2} & \binom{2}{1}\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & & & \\ 2\lambda & \lambda^2 & & \\ 1 & 2\lambda & \lambda^2 & \\ 0 & 1 & 2\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & & & \\ \binom{3}{1}\lambda^2 & \lambda^3 & & \\ \binom{3}{2}\lambda & \binom{3}{1}\lambda^2 & \lambda^3 & \\ \binom{3}{3} & \binom{3}{2}\lambda & \binom{3}{1}\lambda^2 & \lambda^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & & & \\ 3\lambda^2 & \lambda^3 & & \\ 3\lambda & 3\lambda^2 & \lambda^3 & \\ 1 & 3\lambda & 3\lambda^2 & \lambda^3 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & & & \\ \binom{4}{1}\lambda^3 & \lambda^4 & & \\ \binom{4}{2}\lambda^2 & \binom{4}{1}\lambda^3 & \lambda^4 & \\ \binom{4}{3}\lambda & \binom{4}{2}\lambda^2 & \binom{4}{1}\lambda^3 & \lambda^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^4 & & & \\ 4\lambda^3 & \lambda^4 & & \\ 6\lambda^2 & 4\lambda^3 & \lambda^4 & \\ 4\lambda & 6\lambda^2 & 4\lambda^3 & \lambda^4 \end{pmatrix},$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} \lambda^5 & & & \\ \binom{5}{1}\lambda^4 & \lambda^5 & & \\ \binom{5}{2}\lambda^3 & \binom{5}{1}\lambda^4 & \lambda^5 & \\ \binom{5}{3}\lambda^2 & \binom{5}{2}\lambda^3 & \binom{5}{1}\lambda^4 & \lambda^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^5 & & & \\ 5\lambda^4 & \lambda^5 & & \\ 10\lambda^3 & 5\lambda^4 & \lambda^5 & \\ 10\lambda^2 & 10\lambda^3 & 5\lambda^4 & \lambda^5 \end{pmatrix},$$

respectivament.$\triangleright$

3.7 El model probabilístic de Jukes-Cantor descriu el procés de transformació de cadenes d'ADN formades per 4 nucleòtids mitjançant una matriu del tipus

$$M = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha/3 & \alpha/3 & \alpha/3 \\ \alpha/3 & 1-\alpha & \alpha/3 & \alpha/3 \\ \alpha/3 & \alpha/3 & 1-\alpha & \alpha/3 \\ \alpha/3 & \alpha/3 & \alpha/3 & 1-\alpha \end{pmatrix} = \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right) I + \frac{\alpha}{3} U$$

on $0 < \alpha \leq 3/4$ i on U és la matriu amb tots els coeficients 1.

(a) Demostreu que les seves potències també són del tipus Jukes-Cantor. Concretament:

$$M^k = \left(1-\frac{4}{3}\alpha_k\right) I + \frac{\alpha_k}{3} U, \qquad \alpha_k = \frac{3}{4}\left(1-\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^k\right)$$

(b) Discutiu per a quins valors de α és M invertible.

Solució. (a) Com que I i U commuten, apliquem la fórmula del binomi:

$$M^k = \left(\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right) I + \frac{\alpha}{3} U\right)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^{k-j} \left(\frac{\alpha}{3}\right)^j U^j$$

$$= \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^k I + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^{k-j} \left(\frac{\alpha}{3}\right)^j U^j.$$

D'altra banda tenim:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U^2 = \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix} = nU$$

d'on:

$$U^3 = U \cdot U^2 = nU^2 = n^2 U, \quad U^4 = U U^3 = n^2 U^2 = n^3 U, \ldots$$

$\ldots, U^j = n^{j-1} U$, per tot $j = 1, 2, 3, \ldots$ (inducció).

Llavors, tornant a la fórmula del binomi,

$$M^k = \left(1-\tfrac{4}{3}\alpha\right)^k I + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\left(1-\tfrac{4}{3}\alpha\right)^{k-j}\left(\tfrac{4\alpha}{3}\right)^j U$$

$$= \left(1-\tfrac{4}{3}\alpha\right)^k I + \frac{1}{4}\left[\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(1-\tfrac{4}{3}\alpha\right)^{k-j}\left(\tfrac{4\alpha}{3}\right)^j - \left(1-\tfrac{4}{3}\alpha\right)^k\right] U$$

$$= \left(1-\tfrac{4}{3}\alpha\right)^k I + \frac{1}{4}\left[\left(1-\cancel{\tfrac{4}{3}\alpha}+\cancel{\tfrac{4}{3}\alpha}\right)^k - \left(1-\tfrac{4}{3}\alpha\right)^k\right] U$$

$$= \left(1-\tfrac{4}{3}\alpha\right)^k I + \frac{1}{4}\left(1-\left(1-\tfrac{4}{3}\alpha\right)^k\right) U$$

$$= \left[1-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\left(1-\left(1-\tfrac{4}{3}\alpha\right)^k\right)\right] I + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\left(1-\left(1-\tfrac{4}{3}\alpha\right)^k\right) U$$

$$= \left(1-\tfrac{4}{3}\alpha_k\right) I + \frac{\alpha_k}{3} U,$$

on s'ha definit,

$$\alpha_k := \frac{3}{4}\left(1-\left(1-\tfrac{4}{3}\alpha\right)^k\right)$$

(b) $$\det M = \begin{vmatrix} 1-\alpha & \alpha/3 & \alpha/3 & \alpha/3 \\ \alpha/3 & 1-\alpha & \alpha/3 & \alpha/3 \\ \alpha/3 & \alpha/3 & 1-\alpha & \alpha/3 \\ \alpha/3 & \alpha/3 & \alpha/3 & 1-\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-4\alpha/3 & 0 & 0 & \alpha/3 \\ 0 & 1-4\alpha/3 & 0 & \alpha/3 \\ 0 & 0 & 1-4\alpha/3 & \alpha/3 \\ 4\alpha/3-1 & 4\alpha/3-1 & 4\alpha/3-1 & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-4\alpha/3 & 0 & 0 & \alpha/3 \\ 0 & 1-4\alpha/3 & 0 & \alpha/3 \\ 0 & 0 & 1-4\alpha/3 & \alpha/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(1-\frac{4\alpha}{3}\right)^3,$$

i aleshores <u>la matriu M és invertible si i només si $\alpha \neq 3/4$</u>. ☺

(3B) Rang d'una matriu

3.11 (*) Un sistema de control

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad A \in M_n, \; B \in M_{n\times m}.$$

resulta ser "controlable" (és a dir, tot canvi en els valors de x és factible mitjançant un control $u(t)$ adequat) si i només si, és màxim el rang de l'anomenada "matriu de controlabilitat"

$$K = (B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B)$$

(a) Discutiu per a quins valors de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és controlable el sistema definit per

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Discutiu per a quins valors de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és controlable amb només el segon control, és a dir, quan en lloc de la matriu B original es considera només la matriu columna $B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) En general, els "índexs de controlabilitat" vénen determinats pels rangs de les matrius

$$B, \; (B, AB), \; (B, AB, A^2B), \ldots, K$$

Calculeu aquests rangs, en funció dels paràmetres $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ per al sistema definit per

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ \hline & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \gamma \\ 0 & \delta \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

Solució.

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -2 & \beta \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $A^2B = \begin{pmatrix} -2 & \beta \\ -2 & -\beta \\ \alpha & \alpha\beta+1 \end{pmatrix}$

$$K = (B, AB, A^2B) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & \beta & -2 & \beta \\ 0 & \beta & -2 & \beta & -2 & -\beta \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha & \alpha\beta+1 \end{array}\right)$$

$$\text{rang}\, K = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta & -2 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha & \alpha\beta+1 \\ 0 & \beta & -2 & \beta & -2 & -\beta \end{pmatrix}$$

$$= \text{rang} \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & \beta & -2 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha & \alpha\beta+1 \\ 0 & 0 & -2-\alpha\beta & 0 & -2-\alpha\beta & \beta(-2-\alpha\beta) \end{array}\right)$$

$$= 3 \iff \alpha\beta \neq -2$$

(b) Només amb el 2^{on} control, i.e., amb $B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$

$$K_2 = (B_2\ AB_2\ A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \beta \\ \beta & \beta & -\beta \\ 1 & 1 & \alpha\beta+1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}\, K_2 = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha\beta+1 \\ \beta & \beta & -\beta \\ 0 & \beta & \beta \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha\beta+1 \\ 0 & 0 & -\beta(2+\alpha\beta) \\ 0 & \beta & \beta \end{pmatrix}$$

$$= \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha\beta+1 \\ 0 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & -\beta(2+\alpha\beta) \end{pmatrix} = 3 \iff \beta(2+\alpha\beta) \neq 0$$

(c) $\text{rang}\, K_0 = \text{rang}\, B = 2$ (òbviament).

$$\text{rang}\, K_1 = \text{rang}\,(B, AB) = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 & \delta \\ 0 & \delta & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2' = f_2 - \gamma f_6 \\ f_3' = f_3 - \gamma f_7 - \delta f_6 \\ f_4' = f_4 - \delta f_7}}{=}$$

$$= \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 \ \forall\, \delta, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{rang} K_2 = \operatorname{rang}(B, AB, A^2B) = \operatorname{rang} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B & & AB & & A^2B & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \delta \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 & 0 \\ 0 & \delta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$= \operatorname{rang} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B & & AB & & A^2B & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} = \begin{cases} 6, \text{ si } \gamma \neq 0 \text{ ó } \delta \neq 0. \\ 5, \text{ si } \gamma = \delta = 0. \end{cases}$$

$$\operatorname{rang} K_3 = \operatorname{rang}(B, AB, A^2B, A^3B) = \operatorname{rang} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} B & & AB & & A^2B & & A^3B & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$= \operatorname{rang} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} B & & AB & & A^2B & & A^3B & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} = \begin{cases} 7 \text{ si } \gamma \neq 0 \text{ ó } \delta \neq 0, \\ 6 \text{ si } \gamma = 0 = \delta. \end{cases}$$

$$\operatorname{rang} K_4 = \operatorname{rang}(B, AB, A^2B, A^3B, A^4B) =$$

$$\operatorname{rang} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} \end{array} \end{array} = \operatorname{rang} \left(\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$= 7 \ \forall \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

(3C) Determinants

3·21 Calculeu els següents determinants:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 8 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} \cos x & e^{ix} & e^{-ix} \\ \cos 2x & e^{2ix} & e^{-2ix} \\ \cos 3x & e^{3ix} & e^{-3ix} \end{vmatrix}$

Solució.

(a) $$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -5/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -5/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/10 \end{vmatrix} = 1$$

(b) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -8 \\ 0 & 7 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & -8 \\ 0 & 0 & 18 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -8 \\ 18 & -1 \end{vmatrix} = 144-13$$

$$= 131.$$

(c)
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 \\ 1-x & 1-x & 1-x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x+3 \end{vmatrix}$$

$$= (x+3)(x-1)^3 = (x^3-3x^2+3x-1)(x+3) = x^4 \cancel{-3x^3} + 3x^2 - x +$$

$$+ \cancel{3x^3} - 9x^2 + 9x - 3 = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$$

(d)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 8 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 8 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} = 0$$

$$f_4' = f_4 - \frac{1}{2}(f_3 + f_5).$$

(e)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$f_4' = f_4 - \frac{1}{2}(f_3 + f_5).$$

(f)
$$\begin{vmatrix} \cos x & e^{ix} & e^{-ix} \\ \cos 2x & e^{2ix} & e^{-2ix} \\ \cos 3x & e^{3ix} & e^{-3ix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \cos x + i\sin x & \cos x - i\sin x \\ \cos 2x & \cos 2x + i\sin 2x & \cos 2x - i\sin 2x \\ \cos 3x & \cos 3x + i\sin 3x & \cos 3x - i\sin 3x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & e^{ix} & e^{-ix} \\ 0 & e^{2ix} & e^{-2ix} \\ 0 & e^{3ix} & e^{-3ix} \end{vmatrix} = 0$$

$$c_1' = c_1 - \frac{1}{2}(c_2 + c_3).$$

Nota: recordem que:

$$\cos(\alpha x) = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}\right)$$

$$\sin(\alpha x) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}\right)$$

3.23 Demostreu que:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)(b-d)(c-d)(a-d).$$

Solució:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & acd \\ 1 & c & c^2 & abd \\ 1 & d & d^2 & abc \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & cd(a-b) \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & bd(a-c) \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & bc(a-d) \end{vmatrix}$$

$$= -(b-a)(c-a)(d-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & b+a & -cd \\ 1 & c+a & -bd \\ 1 & d+a & -bc \end{vmatrix} = -(b-a)(c-a)(d-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & b+a & -cd \\ 1 & c-b & -d(b-c) \\ 1 & d-b & -c(b-d) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(b-c)(d-a)(d-b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & d \\ 1 & c \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)(b-d)(c-d)(a-d).$$

☺

3.24 (a) Calculeu els anomenats "determinants de Van der Monde"

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}, \quad D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

(b) Deduïu que hi ha un únic polinomi $P(x) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tal que en els punts $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prengui valors $y_1, y_2, \ldots, y_n$ arbitraris prefixats.

Solució. Calcularem directament $D_n := \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2} & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

Operem per columnes:
- a la columna n-èsima, li restem la columna $(n-1)$-èsima multiplicada per x_1.
- a la columna $(n-1)$-èsima, li restem la columna $(n-2)$-èsima multiplicada per x_1.

. . . .

- a la 2ª columna li restem la 1ª columna multiplicada per x_1

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & x_2^2(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-3}(x_2-x_1) & x_2^{n-2}(x_2-x_1) \\ 1 & x_3-x_1 & x_3(x_3-x_1) & x_3^2(x_3-x_1) & \cdots & x_3^{n-3}(x_3-x_1) & x_3^{n-2}(x_2-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n-x_1 & x_n(x_n-x_1) & x_n^2(x_n-x_1) & \cdots & x_n^{n-3}(x_n-x_1) & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Si definim $\Delta(x_2, x_3, \ldots, x_n) := \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$: aquest és un determinant del mateix tipus, però d'ordre n-1, i amb $x_2, x_3, \ldots, x_n$; aleshores $D_n = \Delta(x_1, x_2, x_3, \ldots; x_n)$ es pot escriure com:

$$D_n = \Delta(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\,\Delta(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Repetint els càlculs per columnes d'abans podem trobar el determinant $\Delta(x_2, x_3, \ldots, x_n)$; i iterant aquest procès s'obté:

$$\begin{aligned} D_n &= \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\,\Delta(x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\cdots(x_n - x_2)\,\Delta(x_3, x_4, \ldots, x_n) \\ &= \cdots = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\cdots(x_n - x_2)\cdot \\ &\quad \cdot(x_4 - x_3)(x_5 - x_3)\cdots(x_n - x_3)\cdots(x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-2})\cdot \underbrace{(x_n - x_{n-1})}_{\Delta(x_{n-1}, x_n)}, \end{aligned}$$

i aquest producte es pot expressar com:

$$D_n = \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \qquad (*)$$

En efecte: per $i = 1$, j anirà des de 2 fins a n: $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\cdots(x_n - x_1)$;

" $i = 2$, j " " 3 " " n: $(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_5 - x_2)\cdots(x_n - x_2)$;

. . . .

per $i = n-2$, j anirà des de $n-1$ fins a n: $(x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-2})$;

" $i = n-1$, j prendrà només el valor n i tenim el factor: $(x_n - x_{n-1})$.

(b) Sigui $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-1}$; imposant les condicions de l'enunciat, i.e.: $P(x_i) = y_i$, per $i = 1, 2, \ldots, n$ s'obté el sistema següent pels coeficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$:

$$\left.\begin{array}{l}
P(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_{n-2} x_1^{n-2} + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\
P(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_{n-2} x_2^{n-2} + a_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
P(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_{n-2} x_n^{n-2} + a_{n-1} x_n^{n-1} = y_n
\end{array}\right\} (**)$$

d'on es veu que el determinant del sistema és precisament el determinant de Van der Monde, $D_n = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$, que és $\neq 0$ si les abscisses $x_1, x_2, \dots, x_n$ són totes diferents, i.e. si $x_i \neq x_j \ \forall\, 1 \le i < j \le n$. (fórmula (*)). En aquest cas el sistema (**) és compatible determinat i els coeficients $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ del polinomi vénen fixats de manera única per $y_1, y_2, \dots, y_n$ qualssevol. El polinomi $P(x)$ que satisfà aquesta propietat reb el nom de <u>polinomi interpolador</u>. ☺

3·25 (a) Demostreu que si $a_{jj} \neq 0$ per tot j, aleshores:

$$\begin{vmatrix} \alpha & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left(\alpha - \sum_{j=1}^{n} \frac{(a_j)^2}{a_{jj}}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ii}\right)$$

(b) Apliqueu aquest resultat al càlcul de: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

Solució:

(a)
$$\begin{vmatrix} \alpha & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{\alpha} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \tilde{\alpha}\, a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \left(\alpha - \frac{(a_1)^2}{a_{11}} - \frac{(a_2)^2}{a_{22}} - \cdots \frac{(a_n)^2}{a_{nn}}\right) a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$= \left(\alpha - \sum_{j=1}^{n} \frac{(a_j)^2}{a_{jj}}\right) \prod_{i=1}^{n} a_{ii},$$

on hem fet: $C_1^{(1)} = C_1 - \frac{a_1}{a_{11}} C_2$, $C_1^{(2)} = C_1^{(1)} - \frac{a_2}{a_{22}} C_3, \ldots$

$$\ldots\, C_1^{(n)} = C_1^{(n-1)} - \frac{a_n}{a_{nn}} C_{n+1}$$

(b)
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \left(3 - \frac{1^2}{2} - \frac{2^2}{1} - \frac{3^2}{3}\right) 2 \cdot 1 \cdot 3 = -\frac{9}{2} \cdot 2 \cdot 3 = -27$$