4. Sistemes d'equacions lineals. Inversió de matrius. Sistemes matricials

(4A) Sistemes d'equacions lineals.

4.1. Discutiu i resoleu en $\mathbb{R}$ els sistemes d'equacions següents:

$$\text{(a)}\quad \left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2+5x_3&=1\\ 4x_1+3x_2+6x_3&=2\\ 5x_1+4x_2+7x_3&=3\\ 6x_1+7x_2+8x_3&=4 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}\quad \left.\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3+3x_4+x_5&=1\\ 2x_1-x_2-x_3-2x_4+x_5&=1\\ x_1+x_2-2x_3+x_4+2x_5&=1 \end{aligned}\right\}$$

i doneu una base dels subespais de solucions dels sistemes homogenis associats.

Solució:

(a) El sistema és compatible determinat, essent la seva solució $x_1=2$, $x_2=0$ i $x_3=-1$.

(b) El sistema és compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat, essent les seves solucions $x_1=1-2x_4-\frac{3}{2}x_5$, $x_2=\frac{2}{3}-\frac{11}{3}x_4-\frac{3}{2}x_5$, $x_3=\frac{1}{3}-\frac{7}{3}x_4-\frac{1}{2}x_5$, $x_4,x_5\in\mathbb{R}$.

4.2. Resoleu en $\mathbb{R}$ els següents sistemes, discutint-los segons els valors de $a,b,c\in\mathbb{R}$

$$\text{(a)}\quad \left.\begin{aligned} ax+y+z+t&=1\\ x+ay+z+t&=b\\ x+y+az+t&=b^2\\ x+y+z+at&=b^3 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}\quad \left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ ax+by+cz&=1\\ a^2x+b^2y+c^2z&=1 \end{aligned}\right\}$$

Solució:

(a) La resolució completa és molt llarga. La discussió de casos és la següent.

Caso	Discussió
$a=1$ i $b=1$	Compatible indeterminat amb 3 graus de llibertat
$a=1$ i $b\neq 1$	Incompatible
$a=-3$ i $b=-1$	Compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat
$a=-3$ i $b\neq -1$	Incompatible
$a\neq 1,-3$	Compatible determinat

(b) Al igual que en l'apartat anterior, ens limitem a discutir el sistema.
Si $a\neq b\neq c\neq a$, el sistema és compatible determinat.
Si $a=b$, $a=c$ o $b=c$, però cap dels números a,b,c és igual a un, el sistema és incompatible.
Si $a=b$, $a=c$ o $b=c$, i algun dels números a,b,c és igual a un, el sistema és compatible indeterminat.

4.3. Siguin $a_1, \ldots, a_n$ elements de $\mathbb{R}$; resoleu i discutiu el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_1 + x_3 = a_2 \\ \cdots \\ x_1 + x_{n+1} = a_n \\ x_1 + \cdots + x_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n \end{array}\right\}$$

Solució: El sistema és compatible i determinat. L'única solució del sistema ve donada per $x_1 = 0$, $x_2 = a_1$, $x_3 = a_2$, $\ldots$, $x_n = a_{n-1}$ i $x_{n+1} = a_n$.

4.4. (*) Una empresa ofereix tres productes diferents, amb índexs de producció respectius P_1, P_2, P_3 i les demandes D_1, D_2, D_3 dels esmentats productes vénen donades en funció de la producció per les relacions:

$$\begin{array}{rcl} D_1 & = & 3P_1 - P_3 - 6 \\ D_2 & = & 3P_1 + P_2 - 2P_3 + 11 \\ D_3 & = & 2P_1 + P_2 - 3P_3 - 6 \end{array}$$

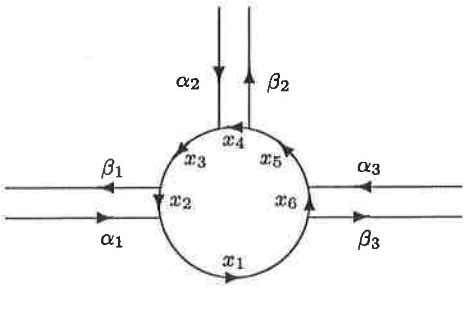
Determineu la quantitat de productes que s'han d'oferir per a que hi hagi equilibri de mercat.

Solució: Hi ha equilibri quan $P_1 = D_1$, $P_2 = D_2$ i $P_3 = D_3$. Resolent el sistema queda $P_1 = 23$, $P_2 = 120$ i $P_3 = 40$.

4.5. (*) Tenim tres productes, P_1 amb 50% de Fe, un 30% de Zn i un 20% de Cu; P_2 amb un 40% de Fe, un 30% de Zn i un 30% de Cu; P_3 amb un 30% de Fe i un 70% de Zn. Per a obtenir un producte amb un 40% de Fe, un 35% de Zn i un 25% de Cu, en quina proporció hem de barrejar P_1, P_2 i P_3?

Solució: Las proporciones són $12'5\%$, 75% i $12'5\%$, respectivament.

4.6. (*) Considereu una rotonda com la de la figura , on $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ indiquen els fluxos entrants, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ els sortints i $(x_1, \ldots, x_6)$ els interns. Es pretén estudiar els fluxos x_i, suposant coneguts els α_j, β_j.



(a) Raoneu empíricament que:

(i) Cal suposar $\Sigma\alpha_j = \Sigma\beta_j$.

(ii) Aleshores, ha d'haver una distribució factible de fluxos interns, amb $x_i > 0$.

(iii) De fet, aquesta distribució no serà única.

(b) Justifiqueu que la relació buscada ve donada pel sistema d'equacions

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\beta_1 \\ \alpha_2 \\ -\beta_2 \\ \alpha_3 \\ -\beta_3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Demostreu que:

(i') El sistema és compatible si, i només si, $\Sigma\alpha_j = \Sigma\beta_j$.

(ii') Aleshores el sistema és indeterminat.

(iii') En particular, admet solucions amb $x_i > 0$.

(d) En particular, considerem

$$\alpha_1 = 90, \quad \alpha_2 = 130, \quad \alpha_3 = 80, \quad \beta_1 = 50, \quad \beta_2 = 150, \quad \beta_3 = 100$$

(1) Estudieu quants i quins fluxos interns cal mesurar per conèixer la resta.

(2) Determineu el flux x_5 mínim.

(3) Estudieu si en algún punt de la rotonda el tràfic pot ser 0.

Solució:

(b) En cada confluència, el nombre de vehicles que hi arriben ha de ser igual al dels que se'n van:

$$x_1 = x_2 + \beta_3, \quad x_2 + \alpha_3 = x_3, \ldots, \quad x_6 + \alpha_1 = x_1.$$

(d) (1) Només una, que pot ser qualsevol.

(2) $x_5 > 150$.

(3) x_4.

4.7. (*) (La dieta de Cambridge) La taula següent recull el contingut (grs per 100) en 3 nutrients bàsics (proteïnes, carbohidrats, greixos) de tres aliments

	Llet desnatada	Farina de soja	Serum
Proteïnes	36	51	13
Carbohidrats	52	34	75
Greixos	0	7	11

Determineu quina quantitat de cada aliment cal ingerir per obtenir les aportacions diàries de nutrients bàsics que recomana la dieta de Cambridge: 33 gr de proteïnes, 45 gr de carbohidrats i 3 gr de greixos.

4.8. (*) Alka-setzer conté bicarbonat de sodi i àcid cítric, que al dissoldre's en aigua produeixen citrat de sodi, aigua i diòxid de carboni: $\mathtt{Na\ HCO_3{+}H_3C_6H_5O_7} \longrightarrow \mathtt{Na_3C_6H_5O_7{+}H_2O{+}CO_2}$.
Determineu quantes molècules de cada component són necessàries per produir-ne 100 de citrat de sodi, i aleshores quantes se'n produiran d'aigua i de diòxid de carboni.

Solució: Si escrivim x_1, x_2 el nombre de molècules dels components inicials, respectivament, i que x_3, x_4 el de subproductes, ha de ser:

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\6\\8\\7\end{pmatrix}=100\begin{pmatrix}3\\6\\5\\7\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$$

on els vectors columna indiquen la composició atòmica (Na, C, H, O) de una molècula de cada substància. Resulta doncs:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&6&0&-1\\1&8&-2&0\\3&7&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}300\\600\\500\\700\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&300\\1&6&0&-1&600\\1&8&-2&0&500\\3&7&-1&-2&700\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&300\\-1&5&1&0&500\\1&8&-2&0&500\\3&7&-1&-2&700\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&300\\-1&18&0&0&1500\\1&8&-2&0&500\\3&7&-1&-2&700\end{array}\right).$$

Per tant, $x_1 = 300$, $x_2 = -(1500-5400) = 3900$, etc.

4.9. Sigui $A \in M_n(\mathbb{R})$ i $Ax = b$ un sistema compatible i determinat . Què es pot afirmar del sistema $A^8x = b$?

Solució: El sistema $A^8x = b$ és compatible i determinat, ja que $\det A^8 = (\det A)^8 \neq 0$.

4.10. Utilitzant la regla de Cramer, trobeu la solució dels sistemes següents:

$$\text{(a)}\quad \left.\begin{aligned}x_1+2x_2-x_3&=1\\x_2+x_3&=0\\x_1+3x_2+x_3&=1\end{aligned}\right\}\qquad \text{(b)}\quad \left.\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=1\\x_1-x_3&=0\\2x_1+x_2&=1\end{aligned}\right\}\qquad \text{c)}\quad \left.\begin{aligned}x_1-x_2-x_5&=1\\x_3+x_6&=0\\x_4-x_5&=1\end{aligned}\right\}$$

Solució:

(a) Sistema compatible determinat: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

(b) Sistema compatible indeterminat: $x_1 = x_3$, $x_2 = 1-2x_3$ y x_3 queda lliure.

(c) Sistema compatible indeterminat: $x_1 = 1+x_2+x_5$, $x_3 = -x_6$, $x_4 = 1+x_5$ i x_2, x_5, x_6 queden lliures.

(4B) Inversió de matrius.

4.11. Determineu la inversa de les matrius

(a) $A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

(b) $C = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$. d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solució:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 17 \\ 4 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Si $a \neq 1$, aleshores $B^{-1} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $a = 1$, aleshores la matriu B no és invertible.

(c) Si $abc \neq 0$, aleshores $C^{-1} = \frac{1}{2abc}\begin{pmatrix} -c^2 & bc & ac \\ bc & -b^2 & ab \\ ac & ab & -a^2 \end{pmatrix}$.

Si $abc = 0$, aleshores la matriu C no és invertible.

(d) $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a^{n-4} & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.12. (a) Determineu la inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) En general, sigui $A = (a_{ij}) \in M_4(\mathbb{R})$ invertible tal que $a_{ij} = 0$ si $i + j$ és parell, i $a_{ij} \neq 0$ si $i + j$ és senar. És també la inversa una matriu d'aquest tipus?

Solució:

(a) $A^{-1} = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 44 & 0 & -77 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -11 & 0 & 22 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(b) Sí.

4.13. Utilitzant determinants, estudieu el rang de les següents matrius, i trobeu la seva inversa, en cas de ser invertibles

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solució: La matriu A té rang màxim i $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriu B no és invertible, ja que $\operatorname{rang}(B) = 3$.

(4C) Sistemes matricials. (NO)

4.21. Determineu la matriu X tal que $AX = B$, essent

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \alpha \in R$.

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Solució:

(a) Sistema compatible determinat, essent la seva solució $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Sistema incompatible.

(c) Sistema compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat, essent les seves solucions

$$X = \begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 1-\frac{5}{2}a & 1-\frac{5}{2}b \\ -\frac{3}{2}a & -\frac{3}{2}b \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(d) Si $\alpha \neq 1$ i $\alpha \neq -2$, el sistema és compatible determinat, essent la seva solució

$$X = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha+2)} \begin{pmatrix} \alpha-1 & -2 \\ \alpha-1 & 2(\alpha+1) \\ \alpha-1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha = 1$ o $\alpha = -2$, el sistema és incompatible.

(e) Sistema compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat, essent les seves solucions

$$X = \begin{pmatrix} 1-a & 1-b \\ 1-a & 2-b \\ 1-a & 1-b \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

4.22. Determineu X tal que $XA = B$ essent

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Solució:

(a) Sistema compatible determinat, essent la seva solució $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) Sistema compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat, essent les seves solucions

$$X = \begin{pmatrix} 1-2a & a-1 & a \\ -1-2b & 2+b & b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(c) Sistema incompatible.

(d) Sistema compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat, essent les seves solucions

$$X = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} - \frac{1}{4} & -\frac{3}{2}a + \frac{7}{4} & a \\ \frac{b}{2} + \frac{5}{4} & -\frac{3}{2}b - \frac{3}{4} & b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

4.23. Discutiu segons els valors de α la solució del sistema $XA = B$, essent

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució: Si $\alpha = 1$, el sistema és compatible indeterminat amb 4 graus de llibertat, essent les seves solucions

$$X = \begin{pmatrix} a & b & 1-a-b \\ c & d & 1-c-d \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Si $\alpha = -2$, el sistema és incompatible.
Si $\alpha \neq 1$ i $\alpha \neq -2$, el sistema és compatible determinat, essent la seva solució

$$X = \frac{1}{\alpha+2} \begin{pmatrix} -(\alpha+1) & 1 & (\alpha+1)^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.24. Resoleu en $M_2(\mathbb{R})$ el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{r} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{array}\right\}$$

essent

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

Solució:

(a) Compatible determinat, amb $X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -17 \\ -37 & 14 \end{pmatrix}$ i $Y = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Compatible determinat, amb $X = \begin{pmatrix} 28 & 5 \\ -11 & -2 \end{pmatrix}$ i $Y = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.25. Siguin $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 0 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 2 & b & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $D = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 2 \\ -2 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Per a quins valors de $a, b \in \mathbb{R}$ els sistemes d'equacions $AX = B$, $XC = D$ tenen una solució comuna? Trobeu-la per a aquests valors.

Solució: $a = 0$, $b = 1$ i $X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(4A) Sistemes d'equacions lineals

4.1) Discutiu i resoleu en $\mathbb{R}$ els sistemes d'equacions següents

(a) $\left.\begin{array}{l} 3x_1+2x_2+5x_3=1 \\ 4x_1+3x_2+6x_3=2 \\ 5x_1+4x_2+7x_3=3 \\ 6x_1+7x_2+8x_3=4 \end{array}\right\}$ (b) $\left.\begin{array}{l} x_1-x_2+2x_3+3x_4+x_5=1 \\ 2x_1-x_2-x_3-2x_4+x_5=1 \\ x_1+x_2-2x_3+x_4+2x_5=1 \end{array}\right\}$

i doneu una base dels subespais de solucions dels sistemes homogenis associats.

Solució: (a) amb Octave:

```
>> A = [3,2,5; 4,3,6; 5,4,7; 6,7,8];
>> B = [A, [1;2;3;4]];
>> [R, jp] = rref(B)
 R =
     1  0  0  2
     0  1  0  0
     0  0  1 -1
     0  0  0  0
 jp =
     1  2  3

>> null(A)
 ans =
        Empty matrix: 3-by-0  % El sistema és compatible determinat

>> % Solució: x1 = 2, x2 = 0, x3 = -1
```

"a mà":

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 7 & 3 \\ 6 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 12 & 8 & 20 & 4 \\ 12 & 9 & 18 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 12 & 8 & 20 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 12 & 8 & 20 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f_3' = f_3 - (3f_1 - f_2)$
$f_4' = f_4 - 2f_1$
$f_2' = 3f_2$
$f_1' = 4f_1$

$f_2'' = f_2' - f_1'$

$f_3'' = f_3' - f_2''$
$f_4'' = f_3''$
$f_3''' = f_4'$

$$\sim \begin{pmatrix} 12 & 8 & 20 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 12 & 8 & 20 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 12 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f_3^{(4)} = f_3''' - 3f_2''$

$f_3^{(5)} = \frac{1}{4} f_3^{(4)}$

$f_2''' = f_2'' + 3 \cdot f_3^{(5)}$
$f_1'' = f_1' - 20 f_3^{(5)}$

$$\sim \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f_1''' = f_1'' - 8f_2''$

Veiem que rang A = rang $(A|b) = 3 = \#$ d'incògnites: sistema compatible determinat (SCD). Aleshores la solució serà: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

(b) Amb Octave:

```
>> A = [1,-1,2,3,1; 2,-1,-1,-2,1; 1,1,-2,1,2];
>> B = [A, [1;1;1]];
>> [R, jp] = rref(B)
   R =

        1  0  0   2    3/2  1
        0  1  0  11/3  3/2  2/3
        0  0  1  7/3   1/2  1/3

   jp =
        1  2  3
```

% Solució:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1-2s-\frac{3}{2}t \\ x_2 = \frac{2}{3}-\frac{11}{3}s-\frac{3}{2}t \\ x_3 = \frac{1}{3}-\frac{7}{3}s-\frac{1}{2}t \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{array}\right\}, \quad \mathrm{Nuc}\,A = [(-2,-11/3,-7/3,1,0)^T, (-3/2,-3/2,-1/2,0,1)^T]$$

"A mà":

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 14 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$f_3' = f_3 - f_1$
$f_2' = f_2 - 2f_1$

$f_3'' = f_3' - 2f_2'$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 11/3 & 3/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 6 & 14 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 11/3 & 3/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$f_1' = f_1 - \frac{1}{3}f_3''$
$f_2'' = f_2' + \frac{5}{6}f_3''$

$f_1'' = f_1' + f_2''$

Solució:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1-2s-\frac{3}{2}t \\ x_2 = \frac{2}{3}-\frac{11}{3}s-\frac{3}{2}t \\ x_3 = \frac{1}{3}-\frac{7}{3}s-\frac{1}{2}t \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{array}\right\},$$

$$\mathrm{Nuc}\,A = [(-2,-11/3,-7/3,1,0)^T, (-3/2,-3/2,-1/2,0,1)^T]$$

4.2 Resoleu en $\mathbb{R}$ els següents sistemes, discutint-los segons els valors de $a,b,c \in \mathbb{R}$

(a) $\left.\begin{aligned} ax+y+z+t &= 1 \\ x+ay+z+t &= b \\ x+y+az+t &= b^2 \\ x+y+z+at &= b^3 \end{aligned}\right\}$ (b) $\left.\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ ax+by+cz &= 1 \\ a^2x+b^2y+c^2z &= 1 \end{aligned}\right\}$

Solució:

$$\underset{f_4 \leftrightarrow f_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a & b^3 \\ 1 & a & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & 1 & b^2 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a & b^3 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & b-b^3 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & b^2-b^3 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 1-ab^3 \end{pmatrix}$$

$f_4' = f_4 - af_1$
$f_3' = f_3 - f_1$
$f_2' = f_2 - f_1$

$$\underset{f_4'' = f_4' + f_2'}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & b^3 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & b-b^3 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & b^2-b^3 \\ 0 & 0 & 1-a & (1-a)(a+2) & 1-ab^3+b-b^3 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_4''' = f_4'' + f_3'}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & b^3 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & b-b^3 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & b^2-b^3 \\ 0 & 0 & 0 & (1-a)(a+3) & 1-ab^3+b+b^2-2b^3 \end{array}\right) \quad (*)$$

Discussió:

- Si $a \neq 1, -3$: Sistema compatible determinat (SCD) per tot $b \in \mathbb{R}$
- Si $a = 1$:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b(1-b)(1+b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^2(1-b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-b)(3b^2+2b+1) \end{array}\right)$$

d'on:
- $b \neq 1$: sistema incompatible (SI)
- $b = 1$: sistema compatible indeterminat (SCI).

- Si $a = -3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & b^3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & b(1-b)(1+b) \\ 0 & 0 & 4 & -4 & b^2(1-b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (b+1)(b^2+1) \end{array}\right)$$

Per tant:
- $b \neq -1 \Rightarrow SI$
- $b = -1 \Rightarrow SCI$

• Estudiem el cas $a \neq 1,-3$: SCD. Llavors, a partir de la matriu esglaonada $(*)$.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & b^3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & b(1-b)(1+b)/(a-1) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b^2(1-b)/(a-1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ((a+2)b^3-b^2-b-1)/((a-1)(a+3)) \end{array}\right)$$

$f_k' = f_k/(a-1)$, $k=2,3,4$; $f_4'' = f_4'/(a+3)$.

Si definim: $\alpha_1 := \dfrac{(a+2)b^3-b^2-b-1}{(a-1)(a+3)}$, $\alpha_2 := \dfrac{b^2(1-b)}{a-1}$, $\alpha_3 := \dfrac{b(1-b)(1+b)}{a-1}$,

i continuem ...

$$\underset{\substack{f_3''=f_3'+f_4'' \\ f_2''=f_2'+f_4''}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & b^3-a\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_3+\alpha_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha_2+\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_1 \end{array}\right) \underset{f_1'=f_1-f_2''-f_3''}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & b^3-(a+2)\alpha_1-(\alpha_3+\alpha_1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_3+\alpha_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha_2+\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_1 \end{array}\right) (**)$$

d'aquesta última matriu esglaonada reduïda $(**)$ obtenim la solució:

$$t = \alpha_1 = \frac{(a+2)b^3-b^2-b-1}{(a-1)(a+3)},$$

$$z = \alpha_2+\alpha_1 = \frac{(a+2)b^3-b^2-b-1+b^2(1-b)(a+3)}{(a-1)(a+3)} = \frac{(a+2)b^2-b^3-b-1}{(a-1)(a+3)},$$

$$y = \alpha_3+\alpha_1 = \frac{(a+2)b^3-b^2-b-1+b(1-b)(1+b)(a+3)}{(a-1)(a+3)} = \frac{(a+2)b-b^2-b^3-1}{(a-1)(a+3)},$$

$$x = b^3-(a+2)\alpha_1-(\alpha_3+\alpha_1) = \frac{-b^3-b^2-b+a+2}{(a-1)(a+3)},$$

$\therefore$ $x = \dfrac{-b^3-b^2-b+a+2}{(a-1)(a+3)}$, $y = \dfrac{(a+2)b-b^2-b^3-1}{(a-1)(a+3)}$, $z = \dfrac{(a+2)b^2-b^3-b-1}{(a-1)(a+3)}$,

$t = \dfrac{(a+2)b^3-b^2-b-1}{(a-1)(a+3)}$.

• Cas $a=1$. Hem vist que llavors el sistema és compatible sii $b=1$; de la matriu $(*)$ per $a=1$, $b=1$ resulta:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$ i així podem escriure la solució com: $\begin{cases} x = 1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3, \\ y = \lambda_1, \\ z = \lambda_2, \\ t = \lambda_3, \end{cases}$

... amb $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ paràmetres reals lliures (el sistema té doncs <u>3 graus de llibertat</u>)

- Si $a=-3$, aleshores el sistema és compatible sii $b=-1$. En aquest cas, de la matriu (*),

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{f_2' = -f_2/4 \\ f_3' = f_3/4}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{f_1'' = f_1' + f_2' + f_3'}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

s'obté, de la seva esglaonada reduïda, la solució:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\frac{3}{2} + \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \frac{1}{2} + \lambda, \\ t = \lambda. \end{array}\right\}$$

amb $\lambda \in \mathbb{R}$ paràmetre lliure (1 grau de llibertat).

(b) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=1 \\ a^2x+b^2y+c^2z=1 \end{array}\right\} : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{f_2' = f_2 - a f_1 \\ f_3' = f_3 - a^2 f_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & 1-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & 1-a^2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & 1-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & (1-a)(1-b) \end{array}\right)$$

$f_3'' = f_3' - (b+a)\cdot f_2'$

Discussió:

C1. $a \neq b \neq c \neq a \Longrightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|b) = 3 = \#$ d'incògnites $\Longrightarrow$ SCD.

C2. $b=c\neq a$: en aquest cas

C2-1. $a\neq 1$ i $b=c\neq 1$ (cap dels 3 numeros és 1) $\Longrightarrow$ SI

C2-2. $a=1$ ó $b=c=1 \Longrightarrow$ SCI (1 grau de llibertat).

C3. $a=c\neq b$; llavors:

C3-1. $a=c\neq 1$ i $b\neq 1 \Longrightarrow$ SI

C3-2. $a=c=1$ ó $b=1 \Longrightarrow$ SCI (1 grau de llibertat).

C4. $a=b\neq c$: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a & 1-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & (1-a)(1-b) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (1-a)(1-c) \end{array}\right)$

$f_3' = f_3 - (c-b)f_2$

d'on:

C4-1 $a=b\neq 1$ i $c\neq 1 \Longrightarrow$ SI

C4-2 $a=b=1$ ó $c=1 \Longrightarrow$ SCI (1 grau de llibertat)

C5. $a=b=c$: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (1-a)(1-b) \end{array}\right)$; aleshores

C5.1 $a=b=c\neq 1 \Longrightarrow$ SI

C5.2 $a=b=c=1 \Longrightarrow$ SCI

Mirem quina és la solució en cadascun d'aquests casos:

C.1: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & 1-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & (1-a)(1-b) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{c-a}{b-a} & \frac{1-a}{b-a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1-a)(1-b)}{(c-a)(c-b)} \end{array}\right)$

$f_2' = f_2/(b-a)$

$f_3' = f_3/((c-a)(c-b))$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{b-c}{b-a} & \frac{b-1}{b-a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(1-a)(c-1)}{(b-a)(c-b)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1-a)(1-b)}{(c-a)(c-b)} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{(b-1)(c-1)}{(c-a)(b-a)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(1-a)(c-1)}{(b-a)(c-b)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1-a)(1-b)}{(c-a)(c-b)} \end{array}\right)$

$f_1' = f_1 - f_2'$

$f_2'' = f_2 - \frac{c-a}{b-a} f_3'$

$f_1'' = f_1' - \frac{b-c}{b-a} f_3'$

$\therefore \quad x = \frac{(b-1)(c-1)}{(c-a)(b-a)}, \quad y = \frac{(1-a)(c-1)}{(c-b)(b-a)}, \quad z = \frac{(1-a)(1-b)}{(c-a)(c-b)}.$

C2, C3 $b=c\neq a$, $a=c\neq b$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{c-a}{b-a} & \frac{1-}{1-b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f_2' = f_2/(b-a)$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b-c}{b-a} & \frac{b-1}{b-a} \\ 0 & 1 & \frac{c-a}{b-a} & \frac{1-a}{b-a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f_1' = f_1 - f_2'$

$$\therefore \quad x = \frac{b-1}{b-a} - \frac{b-c}{b-a}\lambda, \quad y = \frac{1-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a}\lambda, \quad z = \lambda$$

on λ és un paràmetre real arbitrari (el sistema té 1 grau de llibertat).

C4. $a = b \neq c$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{f_1' = f_1 - f_2/(c-a) \\ f_2' = f_2/(c-a)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{c-1}{c-a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-a}{c-a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

on hem de suposar $a = b = 1$ ó $c = 1$ (en altre cas, el sistema és incompatible). Aleshores la solució s'escriu com:

$$\therefore \quad x = \frac{c-1}{c-a} - \lambda, \quad y = \lambda, \quad z = \frac{1-a}{c-a}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ paràmetre lliure.}$$

C5. $a = b = c$. En aquest cas, el sistema és compatible si, i només si $a = b = c = 1$. Llavors la matriu esglaonada resulta ara;

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'on és clar que la solució del sistema es pot escriure com:

$$\therefore \quad x = 1 - \lambda_1 - \lambda_2, \quad y = \lambda_1, \quad z = \lambda_2;$$

on $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ són dos paràmetres lliures (el sistema té 2 graus de llibertat). $\square$

4.3 Sigui $a_1, \dots, a_n$ elements de $\mathbb{R}$; resoleu i discutiu el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_1 + x_3 = a_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1 + x_n = a_n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{array}\right\}$$

Solució. Calculem el determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1-n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot (n-1)$$

$$C_1' = C_1 - C_2,\ C_1'' = C_1' - C_3,\ \dots,\ C_1^{(n)} = C_1^{(n-1)} - C_{n+1}$$

Per tant, el sistema és compatible determinat si $\mathbb{N} \ni n > 1$. Llavors, de la 1^a equació: $x_2 = a_1 - x_1$, de la 2^a: $x_3 = a_2 - x_1$, de la 3^a: $x_4 = a_3 - x_1, \dots$

..., de la n-èsima: $x_{n+1} = a_n - x_1$. Si substituïm a l'última equació:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} = x_1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n - n x_1$$

$$= (1-n) x_1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

d'on $x_1 = 0$ (si $n \neq 1$) i llavors: $x_2 = a_1$, $x_3 = a_2, \dots, x_n = a_{n-1}$, $x_{n+1} = a_n$.

D'altra banda, si $n = 1$ tenim un sistema amb **només una equació**:

$x_1 + x_2 = a_1$, i aleshores el sistema és <u>compatible indeterminat</u> i podem escriure la solució com: $x_1 = a_1 - \lambda$, $x_2 = \lambda$, on $\lambda \in \mathbb{R}$ és un paràmetre arbitrari. $\square$

4.4 (*) Una empresa ofereix tres productes diferents amb índex de producció respectius P_1, P_2, P_3 i les demandes D_1, D_2, D_3 dels esmentats productes vénen donats en funció de la producció per les relacions:

$$D_1 = 3P_1 - P_3 - 6$$
$$D_2 = 3P_1 + P_2 - 2P_3 + 11$$
$$D_3 = 2P_1 + P_2 - 3P_3 - 6$$

Determineu la quantitat de productes que s'han d'oferir perquè hi hagui equilibri de mercat.

Solució. Thi ha equilibri quan la producció iguala la demanda, i.e. quan $D_1 = P_1$, $D_2 = P_2$, $D_3 = P_3$ i així aquest equilibri ve donat per la solució del sistema.

$$\left.\begin{aligned} 2P_1 - P_3 &= 6 \\ 3P_1 - 2P_3 &= -11 \\ 2P_1 + P_2 - 4P_3 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & -11 \\ 2 & 1 & -4 & 6 \end{array}\right) \underset{\substack{f_2' = f_2 - \frac{3}{2} f_1 \\ f_3' = f_3 - f_1 \\ f_1' = f_1/2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -20 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_3'' = f_3' - 6f_2' \\ f_4'' = f_1' - f_2'}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -20 \\ 0 & 1 & 0 & 120 \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_3'' \leftrightarrow f_2'}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -20 \end{pmatrix}$$

Aleshores, el sistema és compatible determinat i te per solució: $P_1 = 23$, $P_2 = 120$, $P_3 = 40$. □

4.5 Tenim tres productes, P_1 amb 50 % de Fe, un 30 % Zn i un 20 % de Cu; P_2 amb un 40 % de Fe, un 30 % de Zn i un 30 % de Cu; P_3 amb un 30 % de Fe i un 70 % de Zn. Per obtenir un producte amb un 40 % de Fe, un 35 % de Zn i un 25 % de Cu, en quina proporció hem de barrejar P_1, P_2, P_3?

Solució

	%Fe	%Zn	%Cu
P_1	50	30	20
P_2	40	30	30
P_3	30	70	–

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Fe}: & 0'50P_1 + 0'40P_2 + 0'30P_3 = 0'40(P_1+P_2+P_3) \\ \text{Zn}: & 0'30P_1 + 0'30P_2 + 0'70P_3 = 0'35(P_1+P_2+P_3) \\ \text{Cu}: & 0'20P_1 + 0'30P_2 \qquad\qquad\quad = 0'25(P_1+P_2+P_3) \end{array}\right\}$$

Si definim: $x_i = \dfrac{P_i}{P_1+P_2+P_3}$, $i = 1,2,3$; tenim el

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 7/2 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad\quad = 5/2 \end{array}\right\} : \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & 7/2 \\ 2 & 3 & 0 & 5/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 3/5 & 26/5 & 11/10 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$f_3' = f_3 - (f_1 - f_2)$

$f_2' = f_2 - \frac{3}{5} f_1$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 3/5 & 26/5 & 11/10 \\ 0 & 0 & 40 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 0 & 29/8 \\ 0 & 3/5 & 0 & 9/20 \\ 0 & 0 & 40 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 5/8 \\ 0 & 3/5 & 0 & 9/20 \\ 0 & 0 & 40 & 5 \end{array}\right)$$

$f_3'' = \left(f_3' - \frac{10}{3} f_2'\right)\cdot(-3)$ $\qquad f_2'' = f_2' - \frac{13}{100} f_3''$ $\qquad f_1'' = f_1' - \frac{20}{3} f_2''$

$f_1' = f_1 - \frac{3}{40} f_3''$

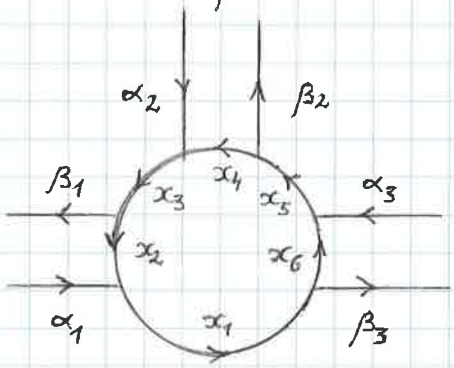
i a partir de la matriu esglaonada reduïda, la solució resulta:

$x_1 = 1/8 = 0'125$: un 12'5 % de producte P_1

$x_2 = 3/4 = 0'75$: " 75 % " " P_2

$x_3 = 1/8 = 0'125$: " 12'5 % " " P_3

4.6 (*) Considereu una rotonda com la de la figura, on $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ indiquen els fluxos entrants, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ els sortints i $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ els interns. Es pretén estudiar els fluxos, suposant coneguts els α_j, β_j.



(a) Raoneu empíricament que:

(i) Cal suposar $\sum \alpha_j = \sum \beta_j$

(ii) Aleshores, ha d'haver una distribució factible de fluxos interns amb $x_i > 0$.

(iii) De fet, aquesta distribució no serà única.

(b) Justifiqueu que la relació buscada ve donada pel sistema d'equacions.

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\beta_1 \\ \alpha_2 \\ -\beta_2 \\ \alpha_3 \\ -\beta_3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Demostreu que:

(i') El sistema és compatible si, i només si, $\sum \alpha_j = \sum \beta_j$.

(ii') Aleshores el sistema és indeterminat.

(iii') En particular, admet solucions amb $x_i > 0$.

(d) En particular, considerem

$$\alpha_1 = 90, \quad \alpha_2 = 130, \quad \alpha_3 = 80, \quad \beta_1 = 50, \quad \beta_2 = 150, \quad \beta_3 = 100$$

(1) Estudieu quants i quins fluxos cal mesurar per conèixer la resta.

(2) Determineu el flux x_5 mínim.

(3) Estudieu si en algun punt de la rotonda el tràfic pot ser zero.

(a) . . . .

(b)
$$\left.\begin{array}{lcl} x_2+\alpha_1=x_1 & \Leftrightarrow & x_1-x_2=\alpha_1 \\ x_3=\beta_1+x_2 & \Leftrightarrow & x_2-x_3=-\beta_1 \\ x_4+\alpha_2=x_3 & \Leftrightarrow & x_3-x_4=\alpha_2 \\ x_5=\beta_2+x_4 & \Leftrightarrow & x_4-x_5=-\beta_2 \\ x_6+\alpha_3=x_5 & \Leftrightarrow & x_5-x_6=\alpha_3 \\ x_1=\beta_3+x_6 & \Leftrightarrow & -x_1+x_6=-\beta_3 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\beta_1 \\ \alpha_2 \\ -\beta_2 \\ \alpha_3 \\ -\beta_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \alpha_3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\beta_3 \end{array}\right) \underset{f_6\leftrightarrow f_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\beta_3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \alpha_3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{f_2'=f_2+f_1 \\ f_3'=f_3+f_2' \\ f_4'=f_4+f_3' \\ f_5'=f_5+f_4' \\ f_6'=f_6+f_5'}}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\beta_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_1-\beta_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -\beta_1+\alpha_1-\beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \alpha_2-\beta_1+\alpha_1-\beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -\beta_2+\alpha_2-\beta_1+\alpha_1-\beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3-\beta_2+\alpha_2-\beta_1+\alpha_1-\beta_3 \end{array}\right)$$

(i') Per tant, el sistema és compatible sii $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3$.

(ii') En aquest cas rang$(A|b)$ = rang $A = 5 < 6 = \#$d'incògnites, aleshores el sistema és CI amb $6-5=1$ g.l.

(iii) Busquem les solucions:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \beta_3 + t \\ x_2 &= \beta_3 - \alpha_1 + t \\ x_3 &= \beta_1 + \beta_3 - \alpha_1 + t \\ x_4 &= \beta_1 + \beta_3 - (\alpha_1+\alpha_2) + t \\ x_5 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - (\alpha_1+\alpha_2) + t \\ x_6 &= t \end{aligned}\right\}$$

Aquest sistema admet solucions $x_i > 0$, $i = 1,2,3,4,5,6$. En efecte, agafant:

$$t = x_6 > \sup\left\{-\beta_3, \alpha_1 - \beta_3, \alpha_1 - (\beta_1+\beta_3), \alpha_1+\alpha_2-(\beta_1+\beta_2+\beta_3), 0\right\}$$
$$=: f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

s'obtenen solucions amb totes les components positives.

(d) $\alpha_1 = 90$, $\alpha_2 = 130$, $\alpha_3 = 80$, $\beta_1 = 50$, $\beta_2 = 150$, $\beta_3 = 100$

(1) Només cal mesurar un dels fluxos, que pot ser qualsevol, per exemple x_6,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 100+t \\ x_2 &= 10+t \\ x_3 &= 60+t \\ x_4 &= -70+t \\ x_5 &= 80+t \\ x_6 &= t \end{aligned}\right\}$$

(2) El flux $x_5 > 80 + f(90, 130, 80, 50, 150, 100) = 80 + 70 = 150$

(3) El flux pot ser zero en algun tram de la rotonda. Per exemple, en el cas anterior, agafant $x_6 = 70$ tenim que $x_4 = 0$.

4.7 (*) (La dieta de Cambridge) La taula següent recull el contingut (g per 100) en 3 nutrients bàsics (proteïnes, carbohidrats, greixos) de tres aliments.

	Llet desnatada	Farina de Soja	Serum
Proteïnes	36	51	13
Carbohidrats	52	34	75
Greixos.	0	7	11

Determinar quina quantitat de cada aliment cal ingerir per obtenir les aportacions diàries de nutrients bàsics que recomana la dieta de Cambridge: 33 g de proteïnes, 45 g de carbohidrats i 3 g de greixos.

Solució: $x :=$ # grams de proteïnes; $y :=$ # grams de carbohidrats; $z :=$ # grams de greixos.

$$\left.\begin{aligned} 0'36x + 0'51y + 0'13z &= 33 \\ 0'52x + 0'34y + 0'75z &= 45 \\ 0'07y + 0'11z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

MATLAB/Octave:

```
> A = [0.36 0.51 0.13; 0.52 0.34 0.75; 0.00 0.07 0.11];
> b = [33 45 3];
> det A
  ans = -0.029876
> X = A\b
  ans =  53.5011...
         23.8586...
         12.0899...
```

Solució:

$x = \frac{23487}{439} \approx 53'5011\ldots$ g de Llet

$y = \frac{16200}{679} \approx 23'8586\ldots$ g de Soja

$z = \frac{4703}{389} \approx 12'0899$ g de Serum

4.8 (*) Alka-setzer conté bicarbonat de sodi i àcid cítric, que al dissoldre's en aigua produeixen citrat de sodi, aigua i diòxid de carboni: $NaHCO_3 + H_3C_6H_5O_7 \longrightarrow Na_3C_6H_5O_7 + H_2O + CO_2$.

Determineu quàntes molècules de cada component són necessàries per produir-ne 100 de citrat de sodi, i aleshores quantes se'n poduiran d'aigua i dioxi de carboni

Solució:

x_1 : # molècules de $NaHCO_3$

x_2 : # " " $H_3C_6H_5O_7$

x_4 : # " " H_2O

x_5 : # " " CO_2

$\left.\begin{matrix} H_2O \\ CO_2 \end{matrix}\right\}$ subproductes.

Llavors ha de ser:

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\6\\8\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}300\\600\\500\\700\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$$

on els vectors columna indiquen la composició atòmica (Na, C, H, O) de una molècula de cada substància. Resulta donces:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 6 & 0 & -1\\ 1 & 8 & -2 & 0\\ 3 & 7 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}300\\600\\500\\700\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 300\\ 1 & 6 & 0 & -1 & 600\\ 1 & 8 & -2 & 0 & 500\\ 3 & 7 & -1 & -2 & 700\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 300\\ 1 & 6 & 0 & -1 & 600\\ 1 & 8 & -2 & 0 & 500\\ 1 & -5 & -1 & 0 & -500\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 300\\ -1 & 18 & 0 & 0 & 1500\\ 1 & -5 & -1 & 0 & -500\\ 1 & 6 & 0 & -1 & 600\end{array}\right)$$

I la solució és donces: $x_1 = x_3 = x_4 = 300$, $x_2 = 100$

4.9 Sigui $A \in M_n(\mathbb{R})$ i $Ax = b$ un sistema compatible determinat. Què es pot afirmar del sistema $A^8x = b$?

Solució. $Ax = b$, amb $A \in M_n(\mathbb{R})$ compatible determinat $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0 \Rightarrow \det A^8 = (\det A)^8 \neq 0 \Rightarrow$ compatible determinat.

Remarca: el recíproc també es cert, i.e.: $A^8x = b, CD \Rightarrow Ax = b, CD$ $\square$

4.10 Utilitzant la regla de Cramer, trobeu la solució dels sistemes següents:

(a) $\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{array}\right\}$ (b) $\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{array}\right\}$ (c) $\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 - x_5 = 1 \\ x_3 + x_6 = 0 \\ x_4 - x_5 = 1 \end{array}\right\}$

Solució:

(a) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore\ x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0 \text{ (regla de Cramer)}$$

(b) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, però en canvi $\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ i veiem que: $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 2 <$
$3 = \#$ d'incògnites $\Rightarrow$ SCI amb $3-2 = 1$ grau de llibertat. Si agafem x_3 com variable indendent (o paràmetre lliure), llavors tenim el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 1 - x_3 \\ - x_2 & = & -1 + 2x_3 \end{array}\right\}$$

que és CD per qualsevol valor arbitrari de x_3. I ho podem resoldre per la regla de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1-x_3 & 1 \\ -1+2x_3 & -1 \end{vmatrix} = -1+x_3+1-2x_3 = -x_3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1-x_3 \\ 0 & -1+2x_3 \end{vmatrix} = -1+2x_3$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = x_3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1-2x_3;$$

si posem $x_3 = \lambda$, aleshores podem escriure la solució en "forma paramètrica" com:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda \\ x_2 &= 1-2\lambda \\ x_3 &= \lambda \end{aligned}\right\}, \text{ amb } \lambda \in \mathbb{R} \text{ lliure.}$$

(c) Mirem la compatibilitat, a partir de la matriu ampliada del sistema,

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) : \operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|b) = 3 < 6;$$

per tant el sistema és doncs CI amb $6-3=3$ graus de llibertat. Veiem d'altra banda que la matriu ampliada és esglaonada reduïda, essent la 1ª, la 3ª i la 4ª columnes pivot; llavors podem agafar x_2, x_5 i x_6 com variables independents (paràmetres lliures) i escriure la solució en "forma paramètrica" com:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1+\lambda+\mu \\ x_2 &= \lambda \\ x_3 &= -\nu \\ x_4 &= 1+\mu \\ x_5 &= \mu \\ x_6 &= \nu \end{aligned}\right\}$$

amb $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ paràmetres lliures. □

(4B) Inversió de matrius

4.11 Determineu la inversa de les matrius

(a) $A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$, (d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solució

(a) $M := 13A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, d'on $\hat{M} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \\ 17 & -4 & -1 \end{pmatrix}$: matriu "dels adjunts"

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\hat{M}^T = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -4 & 5 & 17 \\ 4 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ ja que } \det M = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

Aleshores:

$$13\,A\,M^{-1} = A\cdot(13M^{-1}) = \frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 5 & 17 \\ 4 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 13 & & \\ & 13 & \\ & & 13 \end{pmatrix}$$

d'on:

$$A^{-1} = 13M^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 17 \\ 4 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{f_3' = f_3 - f_1 \\ f_2' = f_2 - f_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\underset{\substack{f_1' = f_1 - \frac{1}{a-1}f_2' \\ -\frac{1}{a-1}f_3'}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{a+1}{a-1} & \frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-a} & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-a} & 0 & \frac{1}{a-1} \end{array}\right). \text{ Per tant: } B^{-1} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarca: suposem $a \neq 1$, ja que d'altra banda, $\det B = 0$ i la matriu no seria invertible.

Comprovació: $B^{-1}B = \dfrac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$. Tenim $\det C = -a\begin{vmatrix} a & b \\ c & 0 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} 0 & a \\ b & c \end{vmatrix} = 2abc$,

cal suposar $abc \neq 0$ ($\Leftrightarrow a \neq 0$ i $b \neq 0$ i $c \neq 0$).

Matriu "dels adjunts": $\hat{C} = \begin{pmatrix} -c^2 & bc & ac \\ bc & -b^2 & ab \\ ac & ab & -a^2 \end{pmatrix}$, d'on: $C^{-1} = \dfrac{1}{2abc}\begin{pmatrix} -c^2 & bc & ac \\ bc & -b^2 & ab \\ ac & ab & -a^2 \end{pmatrix}$

Comprovació:

$$C^{-1}C = \frac{1}{2abc}\begin{pmatrix} -c^2 & bc & ac \\ bc & -b^2 & ab \\ ac & ab & -a^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) $$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & a^{n-4} & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$f'_{n-1} = f_{n-1} + a \cdot f_n$,
$f'_{n-2} = f_{n-2} + a \cdot f'_{n-1}$,
$\vdots$
$f'_1 = f_1 + a \cdot f'_2$.

Aleshores: $$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a^{n-4} & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Per exemple, per $n=4$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$f_3' = f_3 + a f_4$$
$$f_2' = f_2 + a f_3'$$
$$f_1' = f_1 + a f_2'$$

Llavors:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comprovació:

$$D^{-1}D = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

4.12 (a) Determineu la inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) En general, sigui $A = (a_{ij}) \in M_4(\mathbb{R})$ invertible tal que $a_{ij} = 0$ si $i+j$ és parell, i $a_{ij} \neq 0$ si $i+j$ és senar. És també la inversa una matriu d'aquest tipus?

Solució

(a)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$f_3 \leftrightarrow f_1$: permutem les files 1a i 3a.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11/3 & 0 & -7/3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7/11 & 0 & -3/11 \end{array}\right)$$

$f_4' = f_4 - \frac{7}{3} f_2$

$f_3' = f_3 - 2 f_1$

$f_4'' = -\frac{3}{11} f_4'$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3/11 & 0 & 6/11 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7/11 & 0 & -3/11 \end{array}\right)$$

$f_2' = f_2 - 2 f_4''$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3/11 & 0 & 6/11 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7/11 & 0 & -3/11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/11 & 0 & 2/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7/11 & 0 & -3/11 \end{array}\right)$$

$f_1' = f_1 + 4 f_3'$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 44 & 0 & -77 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -11 & 0 & 22 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Comprovació:

$$\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 44 & 0 & -77 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -11 & 0 & 22 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & & & \\ & 11 & & \\ & & 11 & \\ & & & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Si, per exemple si procedim per reducció (esglaonant) per files, podrem operar amb les files parelles i senars per separat, i llavors la matriu inversa serà del mateix tipus.

4.13. Utilitzant determinants, estudieu el rang de les següents matrius, i trobeu la seva inversa, en cas de ser invertibles.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & +1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & +1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & +1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

amb la qual cosa rang $A = 3$; la seva matriu "dels adjunts" és:

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A')^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprovació:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rang } B < 4$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{rang } B = 3$$

$\therefore$ La matriu B no és invertible, ja que rang $B = 3$

(*) De fet $c_2 = c_1 + c_4$; per tant $\det B = 0$.