(d) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 3z - t = 0\}$.
$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 0\}$.

(e) $F = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] : 9a_0 - 24a_1 + 16a_2 = 0\}$.

(f) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a - 4b + c + d = 0 \right\}$.

6.23. (*) Considereu un paral·lelogram (A, B, C, D) en el pla, centrat a l'origen. Demostreu que, donada una distribució arbitrària de masses $m_1, \ldots, m_s$ en punts $P_1, \ldots, P_s$, sempre és possible ubicar masses adequades m_A, m_B, m_C, m_D en els vèrtexs del paral·lelogram per tal que el centre de masses del conjunt sigui l'origen. Raoneu que, de fet, només cal emprar dos dels quatre vèrtexs en cada cas.

6.24. (**) El repartiment del cost de producció dels productes P_1 i P_2 entre material, ma d'obra, logística i d'altres és

$$v_j = (a_j, b_j, c_j, d_j), \quad a_j + b_j + c_j + d_j = 1$$

per a $j = 1, 2$. Es pretén produir-los en proporcions adequades per tal d'equilibrar les despeses en els tres primers conceptes.

(a) Justifiqueu que això és possible si, i només si,

$$(1, 1, 1) \in [(a_1,\ b_1,\ c_1),\ (a_2\, b_2\, c_2)]\,.$$

(b) Justifiqueu que, aleshores, la proporció de despesa en "altres" ve donada pel valor de α tal que

$$\left(\frac{1-\alpha}{3},\ \frac{1-\alpha}{3},\ \frac{1-\alpha}{3},\ \alpha\right) \in [v_1,\ v_2]\,.$$

(6D) Intersecció i suma de subespais.

6.31. (a) En $\mathbb{R}^4$ considerem els vectors: $(1, 2, 0, 1), (2, 3, 0, 3), (3, 2, 1, 2)$.
Formeu les equacions del subespai vectorial F que generen.

(b) Considerem $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + z + t = 0\}$. Determineu una base de G, comprovant prèviament que G és un subespai vectorial.

(c) Doneu les equacions que defineixen els subespais $F \cap G$ i $F + G$, així com una base de cadascun d'ells.

(d) Determineu una base de $\mathbb{R}^4$ adaptada a F i G.

Solució:

(a) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 3x - y - 5z - t = 0\}$.

(b) Una base de G és $((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$.

(c) $F \cap G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 3x - y - 5z - t = 0,\ x - y + z + t = 0\}$. $F + G = \mathbb{R}^4$. Una base de $F \cap G$ és $((1, 2, 0, 1), (3, 4, 1, 0))$.

6.32. (*) En el sistema de control

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \qquad A \in M_n\,, \qquad B \in M_{n\times m}$$

el conjunt d'estats x assolibles des de l'origen (mitjançant controls u adients) és el subespai $F \subset \mathbb{R}^n$ engendrat per les columnes de la matriu de controlabilitat

$$K = (B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A^{n-1}B)$$

(a) Calculeu $F \subset \mathbb{R}^n$ per a $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Suposeu ara que el segon control és fora de servei i només podem utilitzar u_1. La nova matriu de controlabilitat és la formada per les columnes de K obtinguts a partir de la primera columna de B:

$$K_1 = (b_1 \,\vdots\, Ab_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}b_1)\,.$$

Calculeu el subespai $F_1 \subset \mathbb{R}^3$ d'estats assolibles des de l'origen en aquestes condicions.

(c) Anàlogament, calculeu el subespai $F_2 \subset \mathbb{R}^3$ d'estats assolibles des de l'origen només amb el segon control.

(d) Front l'eventualitat que s'avariï un dels dos controls, determineu quins estats finals queden garantits mitjançant l'altre (tant si és u_1 com u_2).

6.33. En $\mathbb{R}^4$, considerem els subespais $F = \operatorname{Im} A$ (és a dir, F és generat per les columnes de A) i $G = \operatorname{Nuc} B$ (és a dir, $G = \{x : Bx = 0\}$), essent

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 7 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu les dimensions de $F \cap G$ i de $F + G$.

(b) Determineu una base de E adaptada als subespais F i G.

Solució:

(a) $\dim F = 2$; $\dim G = 2$; $\dim(F \cap G) = 1$; $\dim(F + G) = 3$.

(b)

$$\underbrace{\mathrlap{\overbrace{\phantom{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}}}^{F}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}\overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}}_{F\cap G}\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}}^{G}}_{F+G}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

6.34. (*) La descomposició de Kalman d'un sistema de control

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{aligned}$$

es calcula mitjançant una base adaptada a Im K i Nuc L, essent

$$K = (B, \quad AB, \quad \dots, \quad A^{n-1}B), \qquad L = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

(a) Obtingueu una base de Kalman per a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C = (0 \quad 2 \quad 0 \quad 0).$$

(b) Idem amb $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solució:

(a) $K = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1/2 & 7/2 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Im $K \cap$ Nuc $L = (1,0,0,0)$

Im $K = [(1,0,0,0),\ (0,1,0,0)]$

Nuc $L = [(1,0,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)]$

Im $K +$ Nuc $L = E$.

(b) $K = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 3 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Im $K \cap$ Nuc $L =$ Im $K = [(1,0,0,0),\ (0,0,1,1)]$

Nuc $L = [(1,0,0,0),\ (0,0,1,1),\ (0,0,0,1)]$

$E = [(0,1,0,0),\ (1,0,0,0),\ (0,0,1,1),\ (0,0,0,1)]$

(6E) Suma directa.

6.41. En l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ es consideren els subconjunts:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} \\ V_2 &= \{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

(a) Proveu que V_1, V_2 són subespais vectorials, doneu la seva dimensió i una base de cadascun d'ells.

(b) Proveu que són linealment independents.

(c) Proveu que $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$. Doneu la descomposició d'un vector qualsevol de $\mathbb{R}^3$ en suma d'un de V_1 i un de V_2.

Solució:

(a) $\dim V_1 = 2$ i $\dim V_2 = 1$.
Una base de V_1 és $((1,-1,0),(1,0,-1))$.
Una base de V_2 és $((1,2,3))$.

(b) $V_1 \cap V_2 = \{(\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha);\ \alpha + 2\alpha + 3\alpha = 0\} = \{0\}$.

(c) Si $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, la descomposició $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$, es:

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(\frac{5x-y-z}{6}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+z}{2}\right), \\ u_2 &= \left(\frac{x+y+z}{6}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{2}\right). \end{aligned}$$

6.42. **(opt.)** En $E = \mathbb{R}_2[t]$ considerem els polinomis $P_1(t) = (t-\alpha)(t-\beta)$, $P_2(t) = (t-\alpha)(t-\gamma)$, $P_3(t) = (t-\beta)(t-\gamma)$, on α, β, γ són nombres reals diferents. Essent F_1, F_2, F_3 els subespais generats respectivament per cadascun d'aquests polinomis:

(a) Caracteritzeu els subespais F_1, $F_1 \cap F_2$, $F_1 + F_2$, $(F_1 + F_2) \cap F_3$ en termes de les arrels dels polinomis que hi pertanyen.

(b) Deduïu que F_1, F_2, F_3 formen suma directa.

(c) Deduïu igualment que P_1, P_2, P_3 formen una base de E.

6.43. (a) En $M_2(\mathbb{R})$ considerem els subespais

$$\begin{aligned} F &= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a = d \right\} \\ G &= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = 0, a = -d \right\} \end{aligned}$$

Estudieu si són linealment independents. Determineu $F + G$.

(b) Anàlogues qüestions amb

$$F = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / a = b = c;\ d = 0\}$$

$$G = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / c + d = 0\}$$

Solució:

(a) No són linealment independents. $F + G = M_2(\mathbb{R})$.

(b) $F \oplus G = M_2(\mathbb{R})$.

6.44. **(opt.)** Busqueu un complementari de F en E essent:

(a) $E = \mathbb{R}^4$ $F = [(1,2,0,0),(1,0,0,1)]$

(b) $E = \mathbb{R}_3[t]$ $F = [1+t, 1-t^2, 1]$

(c) $E = M_2(\mathbb{R})$ $F = \{A \in E \mid A = -A^t\}$

(d) $E = \mathbb{R}_3[t]$ $F = \{P(t) \in E \mid P(1) = P'(1); P(0) = 0\}$

(e) $E = M_2(\mathbb{R})$ $F = \{A \in E \mid \text{tr } A - \text{tr } A^t = 0\}$

(f) $E = M_2(\mathbb{R})$ $F = \{A \in E \mid \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A\right) = 0\}$

Solució: Si notem per G a un complementari de F en E, aleshores

(a) $G = [(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$.

(b) $G = [t^3]$.

(c) $G = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$.

(d) $G = [1, t^2]$.

(e) $G = \{0\}$, ja que $F = E$.

(f) $G = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$.

6.44) (a) $$\text{rang}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = 4 \Rightarrow G = [(0,0,1,0)^T, (0,0,0,1)^T]$$ $\underbrace{\quad}_{F}$

(b) $$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow G = [t^3]$$ $\underbrace{\quad}_{F}$

(c) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a = d = 0 \\ b = -c \end{array}\right\} \text{d'on: } F = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow G = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$ $\underbrace{\quad}_{F}$

(d) $P(t) = a+bt+ct^2+dt^3 \in F \Leftrightarrow \begin{cases} P(0)=0 \Leftrightarrow a=0 \\ P(1)=P'(1) \Leftrightarrow c+2d=0 \end{cases}$

i.e.: $F = \{P(t) \in \mathbb{R}_3[t] : bt-2dt^2+dt^3, \text{ amb } b,d \in \mathbb{R}\} = [t^3-2t^2, t]$

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cc|cccc} \overset{\downarrow}{0} & \overset{\downarrow}{0} & \overset{\downarrow}{1} & 0 & \overset{\downarrow}{0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \underbrace{\qquad\quad}_{F} \qquad\qquad\quad \end{array} \sim \underset{f_3' = f_3 + 2f_4}{} \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} \overset{\downarrow}{1} & \overset{\downarrow}{0} & \overset{\downarrow}{0} & 0 & \overset{\downarrow}{0} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

d'on: $G = [1, t^2]$

(e) $G = \{0\}$ $\left(\text{on: } 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})\right)$, ja que $F = E = M_2(\mathbb{R})$

(f) $\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = c+b = 0 \Leftrightarrow c = -b$:

$F = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|cccc} \overset{\downarrow}{1} & \overset{\downarrow}{0} & \overset{\downarrow}{0} & 1 & \overset{\downarrow}{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{F} \qquad\qquad\qquad \end{array} \sim \underset{f_3' = f_3 + f_2}{} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{f_4 \Leftrightarrow f_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cccc} \overset{\downarrow}{1} & \overset{\downarrow}{0} & \overset{\downarrow}{0} & 1 & \overset{\downarrow}{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \text{ d'on: } G = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

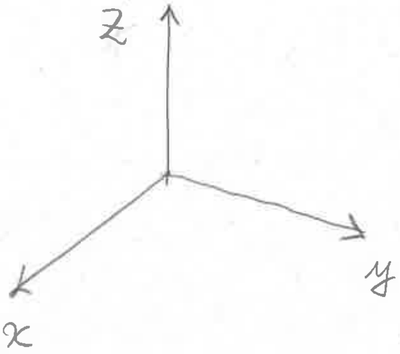
6D Intersecció i suma de subespais.

Problemes "recomanats": 31, 32, 33, 41

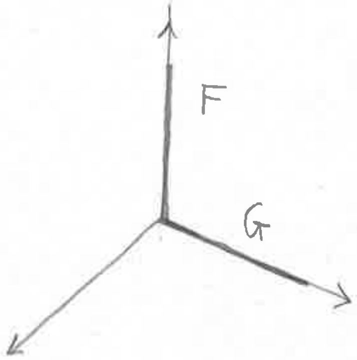
Sigui E ev. i $F, G \subset E$ sev, llavors:

- $F \cap G$ és el sev més gran contenint a F i G.
- $F \cup G$ no és un sev (en general). El sev més petit contenint F i G $[F \cup G]$, que escriurem $F+G$, i.e.: $F+G=[F\cup G]$

Exemples:



Ex. I.

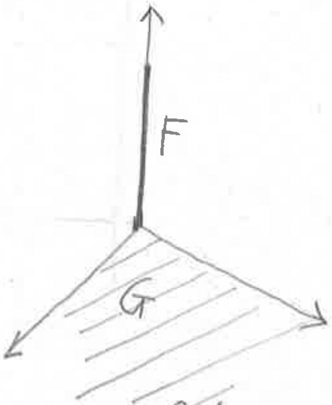


$F=\left\{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$

$G=\left\{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$

$F\cap G=\{0\}$

Ex. II

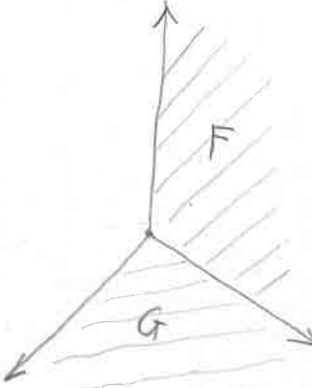


$F=\left\{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$

$G=\{z=0\}$

$F\cap G=\{0\}$

Ex. III



$F=\{x=0\}$

$G=\{z=0\}$

$F\cap G=\{x=z=0\}$

Proposició (intersecció de dos subespais), E ev.

Sigui E ev i $F, G \subset E$ sev

(1) $F\cap G$ és sev

(1') és el sev més gran contingut en F i en G

(2) si F i G vénen donats per equacions, la seva intersecció son les solucions comunes:

$$\begin{matrix} F=\{x : Ax=0\} \\ G=\{x : Bx=0\} \end{matrix} \Longrightarrow F\cap G=\left\{x : \left(\frac{A}{B}\right)x=0\right\}$$

Nota 1. Si $\dim E=n$, aleshores: $\dim(F\cap G)=\dim \mathrm{Nuc}\left(\frac{A}{B}\right)=n-\mathrm{rang}\left(\frac{A}{B}\right)=$ ordre d'indeterminació

Nota 2. Si F i G vénen representats per generadors, convé representar-los per equacions quan es vol estudiar $F\cap G$.

(2') En general $\mathrm{Nuc}\,A_1 \cap \mathrm{Nuc}\,A_2 = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$.

Nota 3. (2) i (2') es generalitzen de manera trivial quan tenim més de 2 subespais

Proposició Suma de subespais. Signi E ev. i $F,G\subset E$ sev.

(1) $F+G$ és un sev

(1') és el sev més petit que conté F i G: $F+G=[F\cup G]$

(2) Si F i G vénen donats per generadors, la seva suma és el generat per tots ells, i.e.:

$$\left.\begin{array}{l} F=[v_1,\dots,v_p] \\ G=[w_1,\dots,w_q] \end{array}\right. \Rightarrow F+G=[v_1,\dots,v_p,w_1,\dots,w_q]$$

(2') En particular: $\mathrm{Im}\,A_1+\mathrm{Im}\,A_2=\mathrm{Im}\,(A_1|A_2)$

Nota 4: Si F i G són donats "per equacions", convé representar-los "per generadors" (per ex. una base), quan volem estudiar $F+G$.

Nota 5. 2 i (2') generalitzen de manera trivial quan tenim més de 2 sev.

Bases adaptades a dos subespais

Lema: Donat E ev.; $F,G\subset E$ finit generats.

$$(1)\quad \left.\begin{array}{ll} u_1,\dots,u_d & \text{base de } F\cap G \\ u_1,\dots,u_d,v_1,\dots,v_p & \text{b" " } F \\ u_1,\dots,u_d,w_1,\dots,w_q & \text{" " } G \end{array}\right\} \Rightarrow u_1,\dots,u_d,v_1,\dots,v_p,w_1,\dots,w_q \text{ base de } F+G$$

Corol·lari (fórmula de Grassmann) E ev; $F,G\subset E$ sev

Llavors:

(1) $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$

(2) Existeixen bases de la forma:

$u_1,\dots,u_d$	base de $F\cap G$
$u_1,\dots,u_d,v_1,\dots,v_p$	" de F
$u_1,\dots,u_d,w_1,\dots,w_q$	" de G
$u_1,\dots,u_d,v_1,\dots,v_p,w_1,\dots,w_q,z_1,\dots,z_s$	" de E

Def. En direm bases adaptades a F i G.

---

1) En l'Ex. I: $\dim\left(F=\{x=y=0\}\cap G=\{x=z=0\}\right) = 3 - \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0,$

$\dim\left(F=\{x=y=0\}+G=\{x=z=0\}\right) = \{x=0\}.$

" l'Ex. II: $\dim\left(F=\{x=y=0\}\cap G=\{z=0\}\right) = 3 - \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0,$

$\dim\left(F=\{x=y=0\}+G=\{z=0\}\right) = \mathbb{R}^3.$

i l'Ex. III: $\dim\left(F=\{x=0\}\cap G=\{z=0\}\right) = 3 - \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3-2 = 1,$

$\dim\left(F=\{x=0\}+G=\{z=0\}\right) = \mathbb{R}^3.$

2) En $E=\mathbb{R}^4$, considerem els subespais $F=\{x_1=x_2=0\}$, $G=\{x_1+\alpha x_3+\beta x_4 = x_2+\alpha x_3-\beta x_4=0\}$.

clarament: $\dim F = \dim G = 2$ (Nota: $\dim G = 4 - \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & -\beta \end{pmatrix} = 4-2=2$)

$$\dim(F\cap G) = 4 - \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & -\beta \end{pmatrix} = \begin{cases} 0, \text{ si } \alpha\neq 0 \text{ i } \beta\neq 0, \\ 1, \text{ si } \alpha=0 \text{ i } \beta\neq 0 \text{ ó } \alpha\neq 0 \text{ i } \beta=0, \\ 2, \text{ si } \alpha=\beta=0. \end{cases}$$

3) $F=\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$, $G=\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}\right]$. També es veu d'immediat que: $\dim F = \dim G = 2$.

$$\dim(F+G) = \text{rang}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&\alpha&\alpha\\0&0&\beta&-\beta\end{pmatrix} = \begin{cases}4 \text{ si } \alpha\neq 0 \text{ i } \beta\neq 0,\\ 3 \text{ si } \alpha=0 \text{ i } \beta\neq 0 \text{ ó } \alpha\neq 0 \text{ i } \beta=0\\ 2 \text{ si } \alpha=\beta=0.\end{cases}$$

6 E Subespais li. Suma directa

Signi E sev.

Lema. Donats $F_1,\dots,F_s \subset E$ sev.; són equivalents:

(1) $v_1,\dots,v_s$ no nuls, són l.i. si $v_1\in F_1, v_2\in F_2,\dots,v_s\in F_s$.

(2) $\underset{\substack{\cap\\ F_1}}{v_1}+\dots+\underset{\substack{\cap\\ F_s}}{v_s}=0$ només si $v_1=\dots=v_s=0$

(2') $\underset{\substack{\cap\\ F_1}}{v_1}+\dots+\underset{\substack{\cap\\ F_s}}{v_s}=\underset{\substack{\cap\\ F_1}}{v_1'}+\dots+\underset{\substack{\cap\\ F_s}}{v_s'} \Leftrightarrow v_1=v_1',\dots,v_s=v_s'$

Def. (1) En les condicions anteriors es diu que $F_1,\dots,F_s$ són subespais vectorials l.i.

(2) aleshores, la suma es diu suma directa i s'escriu $F_1\oplus\dots\oplus F_s$

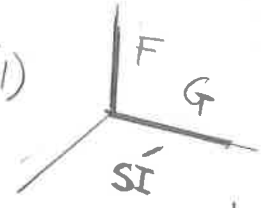
Observació: es poden caracteritzar mitjançant les interseccions:

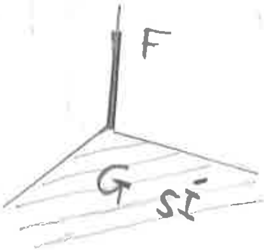
(1) F, G l.i. $\Leftrightarrow F\cap G=\{0\}$

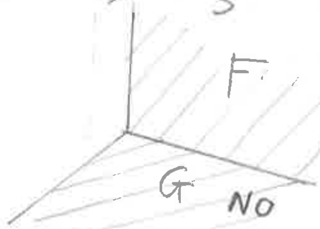
(2) $F_1,\dots,F_s$ l.i. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} F_1\cap\dots\cap F_s=\{0\}$

(3) $F_1,\dots,F_s$ li $\Leftrightarrow \{0\}=F_1\cap F_2=(F_1+F_2)\cap F_3=\dots=(F_1+\dots+F_{s-1})\cap F_s$

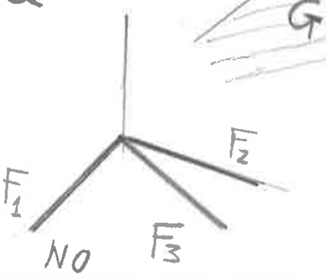
Exemples: (1)

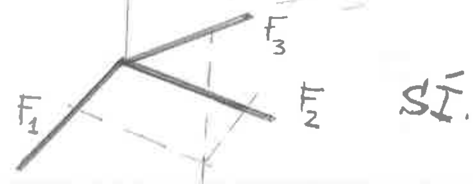






(2)





T5

Proposició. Propietats fonamentals dels subespais li (de fet, només certes per li) són:

(1) $F_1, \dots, F_s$ li $\Leftrightarrow \dim(F_1 + \dots + F_s) = \dim F_1 + \dots + \dim F_s$

(2) $F_1, \dots, F_s$ li $\Leftrightarrow$ base $(F_1 + \dots + F_s) =$ base $F_1 \cup \dots \cup$ base F_s

(3) $F_1, \dots, F_s$ li $\Leftrightarrow$ tot $v \in F_1 + \dots + F_s$ descompon de forma única(!) en: $v = v_1 + \dots + v_s$; on $v_1 \in F_1, \dots, v_s \in F_s$.

(6D) Intersecció i suma de subespais

6.31 (a) En $\mathbb{R}^4$ considereu els vectors: $(1,2,0,1), (2,3,0,3), (3,2,1,2)$. Formeu les equacions del subespai F que generen.

(b) Considereu $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z+t=0\}$. Determineu una base de G, comprovant prèviament que G és un subespai vectorial.

(c) Doneu les equacions que defineixen els subespais $F \cap G$ i $F+G$, així com una base de cadascun d'ells.

(d) Determineu una base de $\mathbb{R}^4$ adaptada a F i G

Solució.

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 3 & 2 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 1 & 3 & 2 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -1 & -4 & -2x+y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & -1 & -x+t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -1 & -4 & -2x+y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & -5 & -3x+y+t \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -1 & -4 & -2x+y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & -3x+y+5z+t \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ 3x-y-5z-t=0\}$$

(b) $u = (x_1, y_1, z_1, t_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in G \Leftrightarrow x_i - y_i + z_i + t_i = 0,\ i=1,2$

Sigui $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda u + \mu v = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda t_1 + \mu t_2) \text{ i :}$$
$$\lambda x_1 + \mu x_2 - (\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2) + (\lambda t_1 + \mu t_2) =$$
$$= \lambda(x_1 - y_1 + z_1 + t_1) + \mu(x_2 - y_2 + z_2 + t_2) = 0 \Rightarrow \lambda u + \mu v \in G$$

i aleshores G és un subespai vectorial. Si resolem el sistema:

$x = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$, $y = \lambda_1$, $z = \lambda_2$, $t = \lambda_3$, amb $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 3 paràmetres reals arbitraris (3 graus de llibertat). Per tant podem agafar, com a base de G:

$$G = [(1,1,0,0)^T, (-1,0,1,0)^T, (-1,0,0,1)^T]$$

(c) $F \cap G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 3x-y-5z-t=0,\ x-y+z+t=0\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & -8 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ F \cap G = [(3,4,1,0)^T, (1,2,0,1)^T]$$

$$F+G: \begin{array}{c} \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \overset{(*)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(*) $f_2' = f_2 - 2f_1$
$f_4' = f_4 - f_1$

$$\underset{f_2' \leftrightarrow f_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(**)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(**) $f_3' = f_3 + 2f_2$
$f_4'' = f_4' + 3f_2$

$$\underset{f_4''' = f_4'' + f_3'}{\sim} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \end{matrix} \end{array}$$

$$\therefore\ F+G = [(1,2,0,1)^T, (3,4,1,0)^T, (2,3,0,3)^T, (1,1,0,0)^T] = \mathbb{R}^4$$

(d) Segons l'apartat anterior, una base de $\mathbb{R}^4$ adaptada a F i G (veure apunts, secció 6·19 — secció 19 del tema 6 —) ve donada pels vectors

$$(1,2,0,1)^T,\ (3,4,1,0)^T,\ (2,3,0,3)^T,\ (1,1,0,0)^T.$$

Remarca. Si volem fer aquest últim apartat pel mètode que s'explica als apunts, secció 6·19, pàg 6·30; llavors hauríem de construir una matriu de la forma.

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} \text{base de} & \text{base de} & \text{base de} & \text{base de} \\ F\cap G & F & G & E^{(*)} \end{array}\right)$$

(*) Podríem posar, per exemple, la base canònica: $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

i esglaonar-la per trobar les columnes l·i· que inclouran tots els elements de la base de $F\cap G$, alguns elements de la base de F, alguns elements de la base de G; completats — si s'escau —, amb elements de la base **donada** de l'ev E. En aquest cas, tenim:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|ccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc|ccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -4 & -1 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} \text{base} & \text{base} & \text{base} & \text{base} \\ \text{de} & \text{de} & \text{de} & \text{de} \\ F\cap G & F & G & E=\mathbb{R}^2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|ccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -4 & -1 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc|ccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 4 & 2 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc|ccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 4 & 2 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 8 & 4 & -3 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Veiem que la primera, la segona, la quarta i la sisena columnes són l·i, per tant una base de $E=\mathbb{R}^4$ adaptada a F i G és:

$$\{(1,2,0,1)^T, (3,4,0,1)^T, (2,3,0,3)^T, (1,1,0,0)^T\}$$

Finalment, recordem que en Matlab / Octave tenim la funció rref() ("reduced row echelon form") que dóna directament la forma esglaonada reduïda. Feu: >> help rref, per més informació.

6·32 El sistema de control

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A \in M_n, \; B \in M_{n\times m}$$

el conjunt d'estats x assolibles des de l'origen (mitjançant controls u addients) és el subespai $F \subset \mathbb{R}^n$ engendrat per les columnes de la matriu de controtabilitat

$$K = (B\,|\,AB\,|\,A^2B\,|\cdots|\,A^{n-1}B)$$

(a) **Calculeu** $F \subset \mathbb{R}^n$ per $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Suposeu ara que el segon control és fora de servei i només podem utilitzar u_1. La nova matriu de controlabilitat és la formada per les columnes de K obtingudes a partir de la primera columna de B:

$$K_1 = (b_1\,|\,Ab_1\,|\,A^2b_1\,|\cdots|\,A^{n-1}b_1).$$

Calculeu el subespai $F_1 \subset \mathbb{R}^3$ d'estats assolibles des de l'origen amb aquestes condicions.

(c) Anàlogament, calculeu el subespai $F_2 \subset \mathbb{R}^3$ d'estats assolibles des de l'origen només amb el segon control.

(d) Front l'eventualitat que s'avarii un dels dos controls, determineu quins estats finals queden garantits mitjançant l'altre (tant si és u_1 com si és u_2).

Solució

a) $$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 2 & -8 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$K = (B \,|\, A\cdot B \,|\, A^2 B) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right);$$

$$K \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$f_1' = f_2$

$f_2' = f_3$

$f_3' = f_1$

, per tant rang $K = 3$ i aleshores: $F = \operatorname{Im} K = \mathbb{R}^3$

b) $$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ 0 & 1 & 2 & z \end{array}\right) \underset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & y \\ 0 & -1 & -2 & x \\ 0 & 1 & 2 & z \end{array}\right) \underset{f_3' = f_3 + f_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & y \\ 0 & -1 & -2 & x \\ 0 & 0 & 0 & x+z \end{array}\right)$$

(intercanviem les files 1ª i 2ª)

d'on: $F_1 = \operatorname{Im} K_1 = [(0,1,0)^T, (-1,1,1)^T] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0\}$

c) $$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & -8 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 8 & x \\ -1 & -2 & -8 & y \\ 1 & 2 & 8 & z \end{array}\right) \underset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -8 & y \\ 0 & 2 & 8 & x \\ 1 & 2 & 8 & z \end{array}\right) \underset{f_3' = f_3 + f_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -8 & y \\ 0 & 2 & 8 & x \\ 0 & 0 & 0 & y+z \end{array}\right)$$

d'on: $F_2 = \operatorname{Im} K_2 = [(0,-1,1)^T, (2,-2,2)^T] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\}$

d) Els estats que queden garantits davant l'avaria d'alguns dels dos controls són els que pertanyen a F_1 i F_2, per tant a $F_1 \cap F_2$:

$$F_1 \cap F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0,\ y + z = 0\} = \operatorname{Nuc}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

6.33 En $\mathbb{R}^4$, considereu els subespais $F = \operatorname{Im} A$ (és a dir, F és generat per les columnes de A) i $G = \operatorname{Nuc} B$ (és a dir, $G = \{x : Bx = 0\}$), essent

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 7 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Calculeu les dimensions de $F \cap G$, i de $F + G$

(b) Determineu una base de E adaptada als subespais F i G

Solució

(a) $F = \operatorname{Im} A$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 2 & 0 & 4 & z \\ 0 & 1 & -1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 2 & 0 & 4 & z \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & -1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & 0 & z-2x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & t-y \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-2x \\ 0 & 0 & 0 & t-y \end{array}\right)$$

$$F = \operatorname{Im} A = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : -2x + z = 0, -y + t = 0 \right\}$$

$$= [\,(1,0,2,0)^T, (0,1,0,1)^T\,]$$

$G = \operatorname{Nuc} B$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 7 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -8 \\ 0 & 8 & 4 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \operatorname{Nuc} B = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - z = 0, 2y + z - 4t = 0 \right\}$$

$$= [\,(1,-1,2,0)^T, (0,2,0,1)^T\,]$$

Remarca: $\dim G = \dim \operatorname{Nuc} B = n - \operatorname{rang} B = 4 - 2 = 2.$

$$F \cap G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : -2x+z=0,\ -y+t=0,\ 2x-z=0,\ 2y+z-4t=0\}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant: $F \cap G = [(1,1,2,1)^T]$

$$F+G: \begin{array}{c} \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & & \uparrow \end{matrix} \end{array}$$

$f'_4 = f_4 - f_2$

$f'_3 = f_3 - 2f_1$

$f'_2 = f_2 - f_1$

$f'_4 \leftrightarrow f'_3$

(intercanviem les files 3^a i 4^a)

Aleshores podem agafar, per exemple, la primera, la segona i la cinquena columnes com una base del subespai $F+G$

$$F+G = [(1,1,2,1)^T, (1,0,2,0)^T, (0,2,0,1)^T],$$

veiem doncs que:

$$\dim F = 2,\ \dim G = 2,\ \dim(F \cap G) = 1,$$

$$\dim(F+G) = 3$$

(b) Ampliem la base de $F+G$ que hem obtingut a una base de $E = \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Llavors tenim, per a la base adaptada

$$\mathbb{E} = \mathbb{R}^4 = \left[\underbrace{\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}}_{F\cap G}, \begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\end{bmatrix}}_{F}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\\1\end{bmatrix}}_{F+G}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \right]$$

6.34 (*) La descomposición de Kalman d'un sistema de control

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$
$$y(t) = C x(t)$$

es calcula mitjançant una base adaptada a $\operatorname{Im} K$ i $\operatorname{Nuc} L$, essent

$$K = (B, AB, \ldots, A^{n-1}B), \quad L = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

(a) Obtingueu una base de Kalman per a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = (0, 2, 0, 0)$$

(b) Ídem amb $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Solució

(a) $$K = (B, AB, A^2B, A^3B) = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1/2 & -7/2 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1/2 & 7/2 & x \\ 1 & -2 & 4 & -8 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1/2 & 7/2 & x \\ 0 & -5 & 5 & -15 & -2x+y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}\,K = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : z = 0 = t\} = [(1,0,0,0)^T, (0,1,0,0)^T]$

$\mathrm{Nuc}\,L = [(1,0,0,0)^T, (0,0,1,0)^T, (0,0,0,0,1)^T]$

$\mathrm{Im}\,K \cap \mathrm{Nuc}\,L = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y = z = t = 0\} = [(1,0,0,0)^T]$

$\mathrm{Im}\,K + \mathrm{Nuc}\,L = \mathbb{E} = \mathbb{R}^4$ (obviament).

(b) $K = (B, AB, A^2B, A^3B) = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 3 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}\,K$: $\begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 3 & 9/2 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 3 & 9/2 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & z \\ 0 & 3/2 & 3 & 9/2 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-z \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}\,K = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y = 0,\ t-z = 0\} = [(1,0,0,0)^T, (0,0,1,1)^T]$

La matriu L és la mateixa que la de l'apartat (a) — no hem canviat ni A ni C —, i llavors el subespai $\mathrm{Nuc}\,L$ és el d'abans.

Així:

$$\mathrm{Im}\,K \cap \mathrm{Nuc}\,L = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y = 0, t-z = 0\} = \mathrm{Im}\,K.$$

Per tant:

$$\mathrm{Im}\,K + \mathrm{Nuc}\,L = \mathrm{Nuc}\,L = [(1,0,0,0)^T, (0,0,1,1)^T, (0,0,0,1)^T],$$

on hem agafat la base de $\mathrm{Im}\,K$ i l'hem ampliada a una base del $\mathrm{Nuc}\,L$. Finalment, ampliem aquesta última base a una base de $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P10

Llavors és clar que podem agafar el vectors $(1,0,0,0)^T$, $(0,1,0,0)^T$, $(0,0,1,1)^T$, $(0,0,0,1)^T$ com a base de $\mathbb{E}=\mathbb{R}^4$, adaptada als subespais $\operatorname{Im} K$ i $\operatorname{Nuc} L$. Escrivim doncs:

$$\mathbb{E}=\mathbb{R}^4=[(1,0,0,0)^T,(0,1,0,0)^T,(0,0,1,1)^T,(0,0,0,1)^T]$$

G·41 En l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ es consideren els subconjunts:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$$

$$V_2 = \{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(a) Proveu que V_1, V_2 són subespais vectorials, doneu la seva dimensió i una base de cadascun d'ells.

(b) Proveu que són linealment independents.

(c) Proveu que $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$. Doneu la descomposició d'un ~~vector~~ qualsevol de $\mathbb{R}^3$ en suma d'un de V_1 i un de V_2.

Solució:

(a) V_1, V_2 són sev[(1)] de $\mathbb{R}^3$. En efecte, siguin $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in V_1$, llavors: $\lambda_1(x_1,y_1,z_1) + \lambda_2(x_2,y_2,z_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_1 y_1, \lambda_1 z_1) + (\lambda_2 x_2, \lambda_2 y_2, \lambda_2 z_2)$ $= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \in V_1$ per $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ qualssevol, ja que:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = \lambda_1(x_1+y_1+z_1) + \lambda_2(x_2+y_2+z_2) =$$
$$= 0 \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ donat que: } x_1+y_1+z_1 = x_2+y_2+z_2 = 0$$

De la mateixa manera, siguin $u, v \in V_2$. Aleshores existeixen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tals que: $u = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha)$ i $v = (\beta, 2\beta, 3\beta)$; per tant:

$$\lambda u + \mu v = \lambda(\alpha, 2\alpha, 3\alpha) + \mu(\beta, 2\beta, 3\beta) = (\lambda\alpha, 2\lambda\alpha, 3\lambda\alpha) +$$
$$+ (\mu\beta, 2\mu\beta, 3\mu\beta) = (\lambda\alpha+\mu\beta, 2(\lambda\alpha+\mu\beta), 3(\lambda\alpha+\mu\beta)) \in V_2$$

per tot $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; d'on es dedueix que donats dos vectors arbitraris u, v de V_2 $\lambda u + \mu v \in V_2$ per $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ qualssevol. Aleshores queda provat que V_1 i V_2 són sev de $\mathbb{R}^3$.

D'altra banda:

---

(1) sev: subespai vectorial.

$V_1 = \text{Nuc}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} = [(-1,1,0)^T, (-1,0,1)^T]$, i observem que $(-1,1,0)^T, (-1,0,1)^T$ són vectors l.i., i com que $\dim \text{Nuc}(1,1,1) = 3 - \text{rang}(1,1,1) = 3-1 = 2$; aquest dos vectors formen una base de V_1 i $\dim V_1 = 2$.

$V_2 = [(1,2,3)^T]$, clarament. Tanmateix:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 2 & y \\ 3 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & -2x+y \\ 0 & -3x+z \end{array}\right)$$

per tant $V_2 = [(1,2,3)^T] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2x+y=0, -3x+z=0\}$, i $\dim V_2 = 1$

(b) $V_1 \cap V_2 = \text{Nuc}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix} = \text{Nuc}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix} = \text{Nuc}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = \{(0,0,0)\}$

d'on es segueix que V_1 i V_2 són sev. l.i.

(c) $V_1 \oplus V_2 = [(-1,1,0)^T, (-1,0,1)^T, (1,2,3)^T] = \mathbb{R}^3$ ja que $\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2+1-0 = 3$ (fórmula de Grassman), d'una banda, com que V_1, V_2 són sev de $\mathbb{R}^3$ la seva suma és tot $\mathbb{R}^3$ i com que la seva intersecció conte només el zero, aquesta suma és directa

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta \\ \gamma\end{pmatrix} = \underbrace{\alpha\begin{pmatrix}-1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}}_{\substack{\pitchfork \\ V_1}} + \underbrace{\gamma\begin{pmatrix}1 \\ 2 \\ 3\end{pmatrix}}_{\substack{\pitchfork \\ V_2}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta \\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_2' = f_2 + f_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_3' = f_3 + f_2'}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{f_1' = 6f_1 - f_3' \\ f_2'' = 2f_2' - f_3'}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & -6 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Aleshores: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i llavors:

$$\alpha = \frac{-2x+4y-2z}{6}, \quad \beta = \frac{-3x-3y+3z}{6}, \quad \gamma = \frac{x+y+z}{6}.$$

i, donat un vector $v=(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$V_1 \ni v_1 = \frac{-2x+4y-2z}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-3x-3y+3z}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{5x-y-z}{6}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+z}{2}\right)^T, \qquad (1)$$

$$V_2 \ni v_2 = \frac{x+y+z}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \left(\frac{x+y+z}{6}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{2}\right)^T, \qquad (2)$$

la descomposició: $\mathbb{R}^3 \ni v=(x,y,z)^T = v_1+v_2$, amb els $v_1 \in V_1$ i $v_2 \in V_2$ donats dalt per (1) i (2) respectivament en funció de les components x, y, z del vector $v \in \mathbb{R}^3$ □

6.42 (opt) En $E=\mathbb{R}_2[t]$ considerem els polinomis $P_1(t)=(t-\alpha)(t-\beta)$, $P_2(t)=(t-\alpha)(t-\gamma)$, $P_3(t)=(t-\beta)(t-\gamma)$, on α,β,γ són nombres reals diferents. Essent F_1, F_2, F_3 els subespais generats respectivament per cadascun d'aquests polinomis:

(a) Caracteritzeu els subespais F_1, $F_1\cap F_2$, F_1+F_2, $(F_1+F_2)\cap F_3$ en termes de les arrels dels polinomis que hi pertanyen.

(b) Deduïu que F_1, F_2, F_3 formen una suma directa.

(c) Deduïu igualment que P_1, P_2, P_3 formen una base de E.

Solució:

(a) $F_1=[(t-\alpha)(t-\beta)]=[t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta]=\{at^2+bt+c\in\mathbb{R}_2[t] : (\alpha+\beta)a+b=0,\ -\alpha\beta\cdot a+c=0\}$

en efecte:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ -(\alpha+\beta) & b \\ \alpha\beta & c \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2'=f_2+(\alpha+\beta)f_1 \\ f_3'=f_3-\alpha\beta f_1}}{\backsim} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & (\alpha+\beta)a+b \\ 0 & -\alpha\beta a+c \end{pmatrix}$$

. Es a dir: $at^2+bt+c\in F_1 \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+\beta)a+b=0, \\ -\alpha\beta a+c=0, \end{cases}$

Anàlogament: $F_2=[(t-\alpha)(t-\gamma)]=[t^2-(\alpha+\gamma)t+\alpha\gamma]=\{at^2+bt+c\in\mathbb{R}_2[t] : (\alpha+\gamma)a+b=0,\ -\alpha\gamma\cdot a+c=0\}$

aleshores, la intersecció de F_1 i F_2, $F_1\cap F_2$ ve donada per:

$$F_1\cap F_2=\left\{at^2+bt+c\in\mathbb{R}_2[t] : \begin{array}{l} (\alpha+\beta)a+b=0, \\ -\alpha\beta a+c=0, \\ (\alpha+\gamma)a+b=0, \\ -\alpha\gamma a+c=0 \end{array}\right\}=\mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} \alpha+\beta & 1 & 0 \\ -\alpha\beta & 0 & 1 \\ \gamma+\alpha & 1 & 0 \\ -\alpha\gamma & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\underset{\substack{f_3'=f_3-f_1 \\ f_4'=f_4-f_2}}{=\mathrm{Nuc}}\begin{pmatrix} \alpha+\beta & 1 & 0 \\ -\alpha\beta & 0 & 1 \\ \gamma-\beta & 0 & 0 \\ \alpha(\beta-\gamma) & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{f_4''=f_4'+\alpha f_3'}{=}\mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} \alpha+\beta & 1 & 0 \\ -\alpha\beta & 0 & 1 \\ \gamma-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\{0\},$$

ja que $\gamma\neq\beta$ d'on: $F_1\cap F_2=\{0\}$ i on 0 es refereix al "polinomi nul"

Subespai F_1+F_2:

$$\begin{pmatrix}1&1&a\\-(\alpha+\beta)&-(\alpha+\gamma)&b\\\alpha\beta&\alpha\gamma&c\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&a\\0&\beta-\gamma&(\alpha+\beta)a+b\\0&\alpha(\gamma-\beta)&-\alpha\beta a+c\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&a\\0&\beta-\gamma&(\alpha+\beta)a+b\\0&0&\alpha^2a+\alpha b+c\end{pmatrix}$$

$f_2'=f_2+(\alpha+\beta)f_1$
$f_3'=f_3-\alpha\beta f_1$

$f_3''=f_3'+\alpha f_2'$

I com que $\beta\neq\gamma$ tenim: $at^2+bt+c\in F_1+F_2 \Leftrightarrow \alpha^2a+\alpha b+c=0$, és a dir:

$$F_1+F_2=[t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta,\ t^2-(\alpha+\gamma)t+\alpha\gamma]=\{at^2+bt+c\in\mathbb{R}_2[t]\ \text{t.q.}\ \alpha^2a+\alpha b+c=0\}$$

D'altra banda:

$$F_3=[(t-\beta)(t-\gamma)]=[t^2-(\beta+\gamma)t+\beta\gamma]=\{at^2+bt+c\in\mathbb{R}_2[t]: (\beta+\gamma)a+b=0,\ -\beta\gamma a+c=0\},$$

i llavors $at^2+bt+c\in(F_1+F_2)\cap F_3$

$$\Leftrightarrow (a,b,c)\in Nuc\begin{pmatrix}\alpha^2&\alpha&1\\\beta+\gamma&1&0\\-\beta\gamma&0&1\end{pmatrix}=Nuc\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta\gamma-\alpha(\beta+\gamma)&0&0\\\beta+\gamma&1&0\\-\beta\gamma&0&1\end{pmatrix}=$$

$\alpha^2-\beta\gamma-\alpha(\beta+\gamma)$
$=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$

$f_1'=f_1-f_3-\alpha f_2$

$$=Nuc\begin{pmatrix}(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)&0&0\\\beta+\gamma&1&0\\-\beta\gamma&0&1\end{pmatrix}=\{0\}$$

: com que $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\neq0$, $\text{rang}(\dots)=3\Rightarrow \dim Nuc(\dots)=0$

Per tant: $(F_1+F_2)\cap F_3=0$

(b) Tenim que els sev $F_1, F_2, \dots, F_s\subset E$ són l.i. (i per tant, la seva suma és directa) $\Leftrightarrow 0=F_1\cap F_2=(F_1+F_2)\cap F_3=\dots=(F_1+F_2+\dots+F_{s-1})\cap F_s$ (veure apunts, secció 6.24, en concret l'observació a la pàgina 6.34). En el nostre cas, hem comprovat que $F_1\cap F_2=(F_1+F_2)\cap F_3=0$. Per tant, els s.e.v F_1, F_2, F_3

P16

són l.i., i la seva suma és directa

c) Llavors $F_1+F_2+F_3 = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ i aleshores:

(i) $\dim(F_1 \oplus F_2 \oplus F_3) = \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 = 1+1+1=3=\dim \mathbb{R}_2[t]$

(ii) $\text{base}\,(F_1 \oplus F_2 \oplus F_3) = \text{base}(F_1) \cup \text{base}(F_2) \cup \text{base}(F_3)$

$$= \{ P_1(t) = (t-\alpha)(t-\beta),\ P_2(t) = (t-\alpha)(t-\gamma),\ P_3(t) = (t-\beta)(t-\gamma) \}$$

(veure apunts secció 6.24, proposició pàg 6.33). Així doncs els tres polinomis $P_1(t) = (t-\alpha)(t-\beta)$, $P_2(t) = (t-\alpha)(t-\gamma)$, $P_3(t) = (t-\beta)(t-\gamma)$ amb α, β, γ nombres reals diferents, formen una base de $E = \mathbb{R}_2[t]$. $\square$

6.43) (a) En $M_2(\mathbb{R})$ considerem els subespais,

$$F=\left\{M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}) : a=d\right\},$$

$$G=\left\{M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}) : b=0, a=-d\right\}.$$

Estudieu si són linealment independents. Determineu $F+G$.

(b) Anàlogues qüestions amb

$$F=\left\{M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}) : a=b=c,\ d=0\right\}$$

$$G=\left\{M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}) : c+d=0\right\}$$

Solució:

(a) $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in F \Leftrightarrow a=d$, amb b i c lliures (3 graus de llibertat). Alesbores $\dim F=3$ i una base de F ve donada per ex. per: $\left\{\underset{\substack{d=1\\b=c=0}}{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}, \underset{\substack{d=c=0\\b=1}}{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}, \underset{\substack{d=b=0\\c=1}}{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}\right\}$

Idènticament:

$$M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r}a+d=0\\b=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (a,b,c,d)^T\in Nuc\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\left[(1,0,0,-1)^T,(0,0,1,0)^T\right],$$

Remarca: $\dim Nuc(\cdots)=4-\text{rang}(\cdots)=2$

on els dos vectors formen una base; per tant: $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ formen una base de G, $\dim G=2$.

Ara: $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in F\cap G \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r}a-d=0\\b=0\\a+d=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\\hline 1&0&0&1\end{array}\right)\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow (a,b,c,d)^T\in Nuc\left(\begin{array}{cccc}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\\hline 1&0&0&1\end{array}\right)=Nuc\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\doteq\left[(0,0,1,0)^T\right]$$

d'on: $F\cap G=\left[\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right]$ i llavors F i G no són l.i.

sol: $\left\{\begin{array}{l}a=d=0\\b=0,\\c: \text{paràmetre lliure}: 1gl\\\text{d'on}: \dim Nuc(\ldots)=1\end{array}\right.$

Completem a una base de F+G

esglaonem per files.

$$\begin{array}{c|ccc|cc} \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \swarrow & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \text{base de } F\cap G & \multicolumn{3}{c|}{\text{base de } F} & \multicolumn{2}{c}{\text{base de } G} \end{array} \sim \left(\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c|ccc|cc} \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \swarrow & \end{array} \\ \sim \left(\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

: forma esglaonada reduïda per files.

Veiem doncs que les 1es, 2a, 3a i 5a columnes són l.i. Així doncs: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$ formen una base de F+G. Notem, finalment que, per la fórmula de Grassmann: $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G) = 3+2-1 = 4 = \dim M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow F+G = M_2(\mathbb{R})$

b) $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in F \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r}a-b=0\\b-c=0\\d=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (a,b,c,d)^T \in \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \left[(1,1,1,0)^T\right]$

Solució del sistema: $\left\{\begin{array}{l}a=b=c,\\d=0\end{array}\right\}$ i veiem que hi ha 1 grau de llibertat, amb la qual cosa $\dim \mathrm{Nuc}(\dots) = 1$. Aleshores $F=\left[\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right]$

De manera anàloga: $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G \Leftrightarrow c+d=0$. Llavors és clar que $\dim G = 3$ i que $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$ és una base de G.

$a=1, b=d=0$; $b=1, a=d=0$; $d=1, a=b=0$.

D'altra banda:

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F\cap G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} a-b=0 \\ b-c=0 \\ d=0 \\ c+d=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (a,b,c,d) \in \mathrm{Nuc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Nuc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i és clar que $\mathrm{rang}(\dots) = 4 \Rightarrow \dim \mathrm{Nuc}(\dots) = 4$ i per tant el sistema és C.D., i com que és homogeni, aleshores només admet la solució nul·la: $a=b=c=d=0$, d'on es té que: $F\cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; que implica que F i G són sev l.i.

Aleshores: $\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{base de}(F\oplus G)} = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{base de }(F)} \cup \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{base de}(G)}$

és una base de $F+G = \underset{\text{suma directa: els dos sev són l.i.}}{F\oplus G}$. A més com que $\dim(F\oplus G) = 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$, tenim que: $F\oplus G = M_2(\mathbb{R})$. □