9. Equacions en diferències i sistemes dinàmics discrets lineals

(9A) Equacions en diferències finites lineals.

9.1. Trobeu la solució de l'equació de Fibonacci $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k; \qquad F_0 = 0\,, \quad F_1 = 1\,.$

Solució: Equació característica: $t^2 - t - 1 = 0\,.$

Valors característics: $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$

Solució general: $F_k = c_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + c_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k.$

Condicions inicials: $\left.\begin{array}{l} 0 = c_1 + c_2 \\ 1 = c_1 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \end{array}.$

Solució: $F_k = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right).$

9.2. Resoleu les equacions en diferències següents:

(a) $y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1\,.$
(b) $y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = 0; \quad y(0) = y(1) = 1\,.$
(c) $y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 0; \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \alpha + \beta\,.$
(d) $y(k+2) - 2y(k+1) + 2y(k) = 0; \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 3\,.$

Solució:

(a) $y(k) = -2^k + 3^k\,.$
(b) $y(k) = 2^{k+1} - 3^k\,.$
(c) $y(k) = \alpha - \beta + \beta 2^k\,.$
(d) $y(k) = \underset{\frac{1-2i}{2}}{\underset{\|}{c_1}}\,(1+i)^k + \underset{\frac{1+2i}{2}}{\underset{\|}{c_2}}\,(1-i)^k = \sqrt{2}^k \cos\dfrac{\pi}{4}k + 2\sqrt{2}^k \sin\dfrac{\pi}{4}k\,.$

9.3. Resoleu les equacions en diferències següents:

(a) $y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) - y(k) = 0; \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2, \quad y(2) = 5\,.$
(b) $y(k+3) - y(k+2) - 8y(k+1) + 12y(k) = 0; \quad y(0) = 3, \quad y(1) = -1, \quad y(2) = 9\,.$

Solució:

(a) $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t-1)^3 = 0$

$$y(k) = c_1 + c_2k + c_3k^2$$
$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 2 \Rightarrow y(k) = 1 - k + 2k^2$$

(b) $t^3 - t^2 - 8t + 12 = (t-2)^2(t+3)$

$$\left.\begin{array}{l} y(k) = c_1 2^k + c_2 k 2^k + c_3(-3)^k \\ c_1 = 2, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y(k) = 2^{k+1} - k2^k + (-3)^k.$$

9.4. Determineu la solució general de les equacions en diferències següents:

(a) $y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 2$.

(b) $y(k+2) - 2y(k+1) + y(k) = 12k$.

(c) $y(k+3) - 3y(k+1) + 3y(k+1) + y(k) = \cos(2k)$.

(d) $y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 3^k$.

9.5. **(opt.)** Resoleu l'equació en diferències

$$y(k+1) - 5y(k) = 1$$

i deduïu-ne una solució per a l'equació en diferències no lineal

$$z(k+1) = \frac{z(k)}{5 + z(k)}.$$

9.6. Proveu que les solucions de

$$y(k+2) - y(k+1) + \frac{1}{4}y(k) = 2$$

tenen com a límit el punt d'equilibri, calculant-les prèviament.

9.7. Determineu quines de les solucions de l'equació

$$y(k+3) - \frac{1}{2}y(k+2) - 4y(k+1) + 2y(k) = 4$$

tenen com a límit el punt d'equilibri.

9.8. (*) (*Joc de la ruleta.*) Es tracta de calcular la probabilitat que un jugador de ruleta faci saltar la banca. Suposarem que inicialment el jugador té A fitxes i la banca en té B, i que el jugador es juga una fitxa a cada tirada. Designem per p la probabilitat de que el jugador guanyi la fitxa, per q la probabilitat de que perdi la fitxa i per $u(k)$ la probabilitat de fer saltar la banca quan el jugador té k fitxes.

(a) Justifiqueu que

$$u(k)Ppu(k+1) + qu(k-1), \qquad u(0) = 0, \quad u(A+B) = 1$$

i determineu la solució d'aquesta equació.

(b) Determineu l'equació en diferències i la solució de la mateixa en el cas de jugar a color en una ruleta de 37 caselles.

(c) Trobeu l'equació en diferències que satisfà $u(k)$, i determineu la seva solució, en el cas de la ruleta de Montecarlo, en què si surt el "0" la fitxa es reté, podent el jugador guanyar-la o perdre-la en la tirada següent (també pot continuar estant retinguda) sense que en cap cas en pugui guanyar una d'addicional.

(d) Compareu les probalitats de fer saltar la banca en el cas de jugar a color en la ruleta tradicional i en la de Montecarlo.

9.9. (*) (*Equació dels tres moments.*) L'anàlisi de les bigues requereix l'avaluació dels moments que actuen en els suports. Aquests moments satisfan l'anomenada "equació dels tres moments", que és la relació entre els moments que actuen en tres suports consecutius.
Una biga en voladís es recolza en N suports separats un de l'altre 3 m, i una càrrega de 227 Kg actua a l'extrem de la biga a 3 m del primer suport. Sigui $M(k)$ el moment en el suport k-èsim. Per tant, $M(0) = 681$ Kg m. Suposem que la biga està rígidament fixada en el suport $N-1$, amb la qual cosa $M(N-1) = 0$. Es satisfà l'equació dels tres moments.:

$$M(k+2) + 4M(k+1) + M(k) = 0\,, \qquad k = 0, 1, \dots, N-3 \tag{$*$}$$

(a) Determineu la solució general de l'equació en diferències (*).

(b) Trobeu la solució particular de (*) que satisfà les condicions de frontera $M(0) = 681$, $M(N-1) = 0$ (la solució inclou N).

(c) Suposem ara que perllonguem la biga fins a l'infinit per la dreta (és a dir, $N \to \infty$). Trobeu la solució particular de (*) que satisfà les condicions de frontera $M(0) = 681$, $M(\infty) = 0$.

9.10. (**) (*Voltatge en una cadena d'aïllants elèctrics.*) Suposem que tenim una "filera d'aïllants", formada per $n-1$ aïllants idèntics que estan connectats per conductors metàl.lics també idèntics. El primer aïllant està connectat a terra per la unió amb la torre, l'últim està connectat a la línia de conducció, la qual porta un corrent altern de freqüència ω. Considerem ara un conductor metàl.lic qualsevol entre dos aïllants. Si denotem el voltatge del conductor k per V_k, el corrent entre el conductor $k-1$ i el conductor k és $I_k = i\omega C_1(V_{k-1} - V_k)$; entre el conductor k i el terra és $i_k = -i\omega C_2 V_k$, on C_1 és la capacitat entre dos conductors ~~continguts~~ i C_2 és la capacitat d'un conductor respecte al terra. Es veu que $I_{k+1} = I_k + i_k$ i, per tant, contigus.

$$C_1(V_{k+1} - V_k) - C_1(V_k - V_{k-1}) - C_2 V_k = 0\,.$$

Les condicions de frontera són $V_0 = 0$ i $V_n = U$, essent U el voltatge de la línia de conducció.

(a) Trobeu la distribució del voltatge al llarg de la cadena.

(b) Interpreteu el resultat obtingut.

9.11. (*) (*Teoria de la informació.*) Imagineu un sistema de transmissió d'informació que usa un alfabet format només de dos símbols: el punt i el guió. Els missatges es transmeten mitjançant una prèvia codificació en una "corda" d'aquests símbols.
Cada símbol requereix un cert temps per a la seva transmissió, de manera que en un temps fixat només determinades cordes poden ésser transmeses: indiquem per N_t el nombre de cordes

diferents que poden ser transmeses en un temps t. Shannon defineix la "capacitat" C de un sistema de transmissió (mesurat en bits per unitat de temps) mitjançant

$$C = \lim_{t\to\infty} \frac{\log_2 N_t}{t}.$$

(a) Suposeu un sistema en el qual tant el punt com el guió requereixen una sola unitat de temps per a ésser transmesos. Verifiqueu que $N_t = 2^t$ i per tant $C = 1$.

(b) Suposeu ara que el punt requereix una unitat de temps, mentre que el guió en requereix dues.

(i) Quins són els valors de N_1 i N_2? (Recordeu que només són permesos el punt i el guió; el "blanc" no és permès).

(ii) Justifiqueu l'equació $N_t = N_{t-1} + N_{t-2}$.

(iii) (**) Calculeu la capacitat d'aquest sistema.
(*Nota:* utilitzeu els números de Fibonacci.)

9.12. (*) (Teoria de cues.) Un petit taller treballa sota comanda, i serveix mantenint l'ordre de recepció de les comandes. Suposeu que en una hora hi ha una probabilitat p (molt petita) de rebre una comanda, i que pràcticament mai no en rep dues. Suposeu igualment que hi ha probabilitat q (també molt petita, però major que p) de que una comanda en realització sigui completada en el termini d'una hora, i que pràcticament mai no es completen dues comandes dins la mateixa hora. Es tracta de calcular, en mitjana, quantes comandes estaran en cua d'espera, pendents de completar.
Per a això, designeu per $u(n)$ la probabilitat de que la cua sigui n.

(a) Justifiqueu les relacions:

(i) $u(n) = p\,u(n-1) + q\,u(n+1) + (1-p-q)u(n), \quad n > 0$.

(ii) $u(0) = q\,u(1) + (1-p)u(0)$.

(iii) $\Sigma u(n) = 1$.

(b) Calculeu $u(n)$.

(c) Calculeu $u(0)$.

(d) Justifiqueu que la mitjana demanada és $\Sigma n\,u(n)$, i calculeu-la.

(e) Deduïu quina és la mitjana mínima compatible amb $u(0) < 0'1$.

(9B) Sistemes dinàmics discrets lineals.

9.21. Considereu el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{3}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{2}x_4(k) + 1 \\ x_2(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{3}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{2}x_4(k) - 1 \\ x_3(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{3}x_3(k) + \frac{1}{2}x_4(k) + 2 \\ x_4(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{3}x_4(k) - 1 \end{cases}$$

(9A) Equacions en diferencies finites EED(F).

9.1) Trobeu la solució de l'equació de Fibonacci

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

Solució

Polinomi característic $p(t) = t^2 - t - 1 \Rightarrow$ Valors característics $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, llavors totes les solucions són de la forma $F_k = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$, on c_1, c_2 venen fixades per les c.i. En aquest cas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

I la solució buscada és:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right], \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

9.2) Resoleu les equacions en diferències següents

(a) $y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$

Polinomi característic $p(t) = t^2 - 5t + 6$. Arrels (Valors característics) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$

Solució general $y(k) = c_1 2^k + c_2 3^k$. Per determinar c_1 i c_2 imposem les ci:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Solució: $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ i aleshores la solució és:

$$y(k) = -2^k + 3^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(b) $y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = 0, \quad y(0) = y(1) = 1$

La solució general és la mateixa però ara canviem les c.i. per tant c_1 i c_2 seran solució del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

i la solució buscada és ara:

$$y(k) = 2^{k+1} - 3^k.$$

(c) $y(k+2)-3y(k+1)+2y(k)=0,\ y(0)=\alpha,\ y(1)=\alpha+\beta$

Polinomi característic $p(t)=t^2-3t+2=(t-1)(t-2) \Rightarrow$ Valors característics: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$; per tant tota solució és de la forma $y(k)=c_1+c_2 2^k$.

Imposem les ci per fixar c_1 i c_2: $\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha+\beta\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha+\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-\beta\\\beta\end{pmatrix}$; i la solució és:

$$y(k)=\alpha-\beta+\beta 2^k.$$

(d) $y(k+2)-2y(k+1)+2y(k)=0;\ y(0)=1,\ y(1)=3$

Polinomi característic: $p(t)=t^2-2t+2=(t-1)^2+1 \Rightarrow$ Valors característics $\lambda_1=1+i,\ \lambda_2=1-i$. Aleshores tota solució és de la forma

$y(k)=c_1\sqrt{2}^k\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)+c_2\sqrt{2}^k\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)$. Determinem c_1 i c_2 corresponents a les ci. donades:

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix};$$

i tenim que la solució buscada és:

$$y(k)=\sqrt{2}^k\cos\left(\tfrac{\pi}{4}k\right)+2\sqrt{2}^k\sin\left(\tfrac{\pi}{4}k\right)$$

9.3) Resoleu les equacions en diferències següents:

(a) $y(k+3)-3y(k+2)+3y(k+1)-y(k)=0,\ y(0)=1,\ y(1)=2,\ y(2)=5$

Polinomi característic: $p(t)=t^3-3t^2+3t-1=(t-1)^3 \Rightarrow$ Valor característic $\lambda=1$ (mult 3). Aleshores totes les solucions són de la forma: $y(k)=c_1+c_2k+c_3k^2$.

Imposant les ci:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}:\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\1&1&1&2\\1&2&4&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&1&1\\0&2&4&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&1&1\\0&0&2&2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{array}\right)\Rightarrow c_1=1,\ c_2=0,\ c_3=1.$$

Així, la solució és:

$$y(k)=1+k^2$$

(b) $y(k+3)-y(k+2)-8y(k+1)+12y(k)=0$, $y(0)=3$, $y(1)=-1$, $y(2)=9$

Polinomi característic: $p(t)=t^3-t^2-8t+12=(t-2)^2(t+3)$, d'on tenim que els valors característics són: $\lambda_1=2$ (mult. 2) i $\lambda_2=-3$. Les solucions són de la forma: $y(k)=c_1 2^k+c_2 k 2^k+c_3(-3)^k$. Imposem les c.i. per trobar c_1, c_2, c_3:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&-3\\4&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\9\end{pmatrix} : \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&3\\2&2&-3&-1\\4&8&9&9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&3\\0&2&-5&-7\\0&8&5&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&3\\0&2&-5&-7\\0&0&25&25\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&2&0&-2\\0&0&1&1\end{array}\right) \Longrightarrow c_1=2,\ c_2=-1,\ c_3=1$$

La solució és doncs:

$$y(k)=2^{k+1}-k2^k+(-3)^k \qquad \square$$

9.4) Determineu la solució general de les equacions en diferències següents:

(a) $y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=2$

Polinomi característic de l'homogènia associada: $p(t)=t^2+3t+2=(t+1)(t+2)$ i llavors els valors característics són: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$. La solució general de l'EED homogènia associada resulta: $y_h(k)=c_1(-1)^k+c_2(-2)^k$, $k=0,1,2,\dots$ i $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ arbitraris. Busquem una solució particular constant de l'EED completa (no homogènia), i.e., de la forma $y_p(k)=y_e$ $\forall k=0,1,2,3,\dots$. Així y_e ha de satisfer $y_e+3y_e+2y_e=6y_e=2\Longrightarrow y_e=1/3$. Finalment la <u>solució general</u> de l'EED no homogènia s'escriu com:

$$y(k)=c_1(-1)^k+c_2(-2)^k+\frac{1}{3},$$

$k=0,1,2,3,\dots$ i amb $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ arbitràries.

(b) $y(k+2)-2y(k+1)+y(k)=12k$

Polinomi característic (de l'EED homogènia associada): $p(t)=t^2-2t+1$ $=(t-1)^2 \Longrightarrow$ Valor característic $\lambda=1$ (multiplicitat 2). Solució general de l'EED homogènia associada: $y_h(k)=c_1+c_2k$; $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ arbitraris. Busquem una solució particular de la no homogènia de la forma $y_p(k)=\alpha k^3+\beta k^2$ on α i β les determinarem substituint i comparant coeficients:

$$y_p(k+2)-2y_p(k+1)+y(k)=\alpha\left[(k+2)^3-2(k+1)+k^3\right]+\beta\left[(k+2)^2-2(k+1)^2+k^2\right]$$
$$=\alpha\left[\cancel{k^3}+\cancel{6k^2}+12k+8-\cancel{2k^3}-\cancel{6k^2}-6k-2+\cancel{k^3}\right]$$
$$+\beta\left[\cancel{k^2}+\cancel{4k}+4-\cancel{2k^2}-\cancel{4k}-2+\cancel{k^2}\right]$$
$$=6\alpha k+6\alpha+2\beta=12k \ \forall k=0,1,2,3,\ldots \Leftrightarrow \begin{array}{l}6\alpha=12 \Leftrightarrow \alpha=2\\ 6\alpha+2\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-6\end{array}$$

Llavors tenim que la solució particular buscada és: $y_p(k)=2k^3-6k^2$, amb $k=0,1,2,\ldots$ Aleshores la solució general de l'EED no homogènia ve donada per:

$$y(k)=y_h(k)+y_p(k)=c_1+c_2k+2k^3-6k^2,$$

$k=0,1,2,3\ldots$ i amb $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ arbitràries.

(c) $y(k+3)-3y(k+2)+3y(k+1)+y(k)=\cos(2k)$

Polinomi característic de l'EED homogènia associada:

$$p(t)=t^3-3t^2+3t+1=(t-1)^3+2,$$

i els corresponents valors característics són:

$$\lambda:=\lambda_1=1+\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}=1+\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}},$$
$$\lambda_2=\bar{\lambda}=1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}-i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}},\ \lambda_3=1-\sqrt[3]{2}.$$

$$|\lambda| = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^2 + \frac{3}{\sqrt[3]{16}}} = 0.589904413\ldots$$

$$\omega = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt[3]{4}}\right) = 1.961459177\ldots$$

Solució general de l'homogènia associada:

$$y_h(K) = c_1 |\lambda|^K \cos(\omega K) + c_2 |\lambda|^K \sin(\omega K) + c_3 (1-\sqrt[3]{2})^K,$$

$K = 0, 1, 2, 3, \ldots$; $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries.

A continuació, busquem solucions particulars de la forma:

$$y_p(K) = d_1 \cos(2K) + d_2 \sin(2K),$$

on d_1, d_2 són dos coeficients que determinarem per comparació i substitució:

$$y_p(K+3) - 3y_p(K+2) + 3y_p(K+1) + y_p(K) =$$

$$= d_1 [\cos(2K+6) - 3\cos(2K+4) + 3\cos(2K+2) + \cos(2K)]$$
$$+ d_2 [\sin(2K+6) - 3\sin(2K+4) + 3\sin(2K+2) + \sin(2K)]$$
$$= d_1 [\cos(2K)\cos 6 - 3\cos(2K)\cos 4 + 3\cos(2K)\cos 2 + \cos(2K)$$
$$- \sin(2K)\sin 6 + 3\sin(2K)\sin 4 - 3\sin(2K)\sin 2]$$
$$+ d_2 [\cos(2K)\sin 6 - 3\cos(2K)\sin 4 + 3\cos(2K)\sin 2$$
$$+ \sin(2K)\cos 6 - 3\sin(2K)\cos 4 + 3\sin(2K)\cos 2 + \sin(2K)]$$
$$= [d_1(\cos 6 - 3\cos 4 + 3\cos 2 + 1) + d_2(\operatorname{sen} 6 - 3\sin 4 + 3\sin 2)]\cos(2K)$$
$$+ [d_1(-\sin 6 + 3\sin 4 - 3\sin 2) + d_2(\cos 6 - 3\cos 4 + 3\cos 2 + 1)]\sin(2K)$$
$$= \cos(2K)$$

comparant coeficients s'arriba al sistema:

$$\begin{pmatrix} \cos 6 - 3\cos 4 + 3\cos 2 + 1 & \operatorname{sen} 6 - 3\sin 4 + 3\sin 2 \\ -\sin 6 + 3\sin 4 - 3\sin 2 & \cos 6 - 3\cos 4 + 3\cos 2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definint:

$$\xi := \cos 6 - 3\cos 4 + 3\cos 2 + 1,$$
$$\eta := \sin 6 - 3\sin 4 + 3\sin 2$$

el sistema s'escriu com: $\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ -\eta & \xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'on:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ -\eta & \xi \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\xi^2+\eta^2}\begin{pmatrix} \xi & -\eta \\ \eta & \xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\xi^2+\eta^2}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Aleshores tenim que la solució general es pot posar com:

$$\begin{aligned} y(k) &= y_h(k) + y_p(k) \\ &= c_1 |\lambda|^k \cos(\omega k) + c_2 |\lambda|^k \sin(\omega k) + c_3 (1-\sqrt[3]{2})^k \\ &\quad + \frac{1}{(\cos 6 - 3\cos 4 + 3\cos 2 + 1)^2 + (\sin 6 - 3\sin 4 + 3\sin 2)^2} \times \\ &\quad \times \left[(\cos 6 - 3\cos 4 + 3\cos 2 + 1)\cos(2k) + (\sin 6 - 3\sin 4 + 3\sin 2)\sin(2k) \right] \end{aligned}$$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$; $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ arbitràries.

(d) $y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 3^k$

Polinomi característic de l'homogènia associada: $p(t) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$, i els valors característics són doncs $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$; amb la qual cosa, tenim que la solució general de l'EED homogènia associada és: $y_h(k) = c_1 + c_2 2^k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries. Busquem una solució particular de l'EED completa de la forma: $y_p(k) = \alpha 3^k$, amb α coeficient que determinarem per substitució:

$$\begin{aligned} y_p(k+2) - 3y_p(k+1) + 2y_p(k) &= \alpha(3^{k+2} - 3\cdot 3^{k+1} + 2\cdot 3^k) = \alpha 3^k (9 - 9 + 2) \\ &= \alpha \cdot 2 \cdot 3^k = 3^k \ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \iff \alpha = 1/2. \end{aligned}$$

Així la solució general de l'EED no homogènia és:

$$y(k) = c_1 + c_2 2^k + \frac{1}{2} 3^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris $\square$

9.5) Resoleu l'equació en diferències

$$y(k+1) - 5y(k) = 1$$

i deduïu-ne una solució per l'equació en diferències no lineal

$$z(k+1) = \frac{z(k)}{5+z(k)}$$

Solució:

Solució de l'EED homogènia $y_h(k) = c_1 5^k$, $k=0,1,2,3,\dots$; $c_1 \in \mathbb{R}$ arbitrari. Veiem que $y_p(k) = -\frac{1}{4}$ $\forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ és una solució particular de l'EED completa. Aleshores totes les solucions són de la forma $y(k) = c_1 5^k - \frac{1}{4}$, $k=0,1,2,3,\dots$; $c_1 \in \mathbb{R}$ arbitrari. D'altra banda, veiem que si $y(k)$ és solució de l'equació en diferències $y(k+1) - 5y(k) = 1$, $z(k) = 1/y(k)$ satisfà l'EED no lineal:

$$\frac{1}{z(k+1)} - \frac{1}{z(k)} = 1 \iff z(k+1) = \frac{z(k)}{5+z(k)},$$

i així les solucions d'aquesta última són de la forma:

$$z(k) = \frac{1}{y(k)} = \frac{4}{c_1 5^k - 1}, \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \ c_1 \in \mathbb{R} \text{ arbitrari.}$$

Comprovació:

$$z(k+1) = \frac{4}{c_1 5^{k+1} - 1}$$

$$\frac{z(k)}{z(k)+5} = \frac{\frac{4}{c_1 5^k - 1}}{\frac{4}{c_1 5^k - 1} + 5} = \frac{4}{c_1 5 \cdot 5^k + 4 - 5} = \frac{4}{c_1 5^{k+1} - 1} \quad \text{(ok)}$$

$\square$

9.6) Proveu que les solucions de

$$y(k+2) - y(k+1) + \frac{1}{4} y(k) = 2$$

tenen com a límit el punt d'equilibri, calculeu-les prèviament.

Solució. Polinomi característic de l'EED homogènia associada, $p(t) = t^2 - t + \frac{1}{4} = (t-\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ Valor característic (amb multiplicitat 2), llavors la solució de l'EED homogènia associada és $y_h(k) = c_1 \frac{1}{2^k} + c_2 \frac{k}{2^k}$, $k = 0,1,2,\dots$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitràries. Podem agafar com solució particular de l'EED completa el punt d'equilibri i.e. busquem $y_p(k) = y_e \ \forall k = 0,1,2,3,\dots$ amb y_e t.q.: $y_e - y_e + \frac{1}{4} y_e = \frac{1}{4} y_e = 2 \iff y_e = 8$. Així doncs les solucions de l'EED no homogènia són de la forma:

$$y(k) = c_1 \frac{1}{2^k} + c_2 \frac{k}{2^k} + 8, \quad k = 0,1,2,3,\dots$$

i on c_1, c_2 vénen determinades per les condicions inicials. Ara bé, prenem límits quan $k \to \infty$:

$$\lim_k y(k) = \lim_k \left(c_1 \frac{1}{2^k} + c_2 \frac{k}{2^k} + 8 \right) = 8 \ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

i es conclou que totes les solucions tendeixen cap al punt d'equilibri.

9.7) Determinem quines de les solucions de l'equació

$$y(k+3) - \frac{1}{2} y(k+2) - 4y(k+1) + 2y(k) = 4$$

tenen com a límit el punt d'equilibri.

Solució:

Polinomi característic $p(t) = t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 4t + 2 = (t-2)(t-\frac{1}{2})(t+2) \Rightarrow$ Valors característics: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = +\frac{1}{2}$, $\lambda_3 = -2$

Punt d'equilibri y_e: $y_e(1 - \frac{1}{2} - 4 + 2) = y_e(-1-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} y_e = 4 \iff y_e = -\frac{8}{3}$

Solució general:

$$y(k) = c_1 2^k + c_2 2^{-k} + c_3 (-2)^k - \frac{8}{3}, \quad k = 0,1,2,3,\dots$$

Veiem que les solucions que tendeixen cap al punt d'equilibri $y_e = -\frac{8}{3}$ són les que no contenen els modes associats als valors característics $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_3 = -2$; per tant les corresponents a $c_1 = c_3 = 0$. La resta són no acotades $\square$

9.8 (*) (Joc de la ruleta) Es tracta de calcular la probabilitat que un jugador de ruleta faci saltar la banca. Suposarem que el jugador té A fitxes i la banca en té B, i que el jugador es juga una fitxa a cada tirada. Designem per p la probabilitat de que el jugador guanyi la fitxa, per q la probabilitat de que perdi la fitxa i per $u(k)$ la probabilitat de fer saltar la banca quan el jugador té k fitxes.

(a) Justifiqueu que

$$u(k) = p\,u(k+1) + q\,u(k-1), \quad u(0)=0, \quad u(A+B)=1$$

i determineu la solució d'aquesta equació.

(b) Determineu l'equació en diferències i la solució de la mateixa en el cas de jugar a color en una ruleta de 37 caselles.

(c) Trobeu l'equació en diferències que satisfà $u(k)$, i determineu la seva solució, en el cas de la ruleta de Montecarlo, en què si surt "0" la fitxa es reté, podent el jugador guanyar-la o perdre-la en la tirada següent (també pot continuar estant retinguda) sense que en cap cas en pugui guanyar una d'addicional.

(d) Compareu les probabilitats de fer saltar la banca en el cas de jugar a color en la ruleta tradicional i en la de Montecarlo.

Solució.

(a) Definim els successos:

A_k: fer saltar la banca quan el jugador té k fitxes: $P(A_k) = u(k)$.

W: guanyar la tirada següent: $P(W) = p$

L: perdre " " " : $P(L) = q$

$A_k|W$: probabilitat de fer saltar la banca quan es tenen k fitxes i es guanya la tirada següent.

$A_K|L$: idèntic però si es perd la jugada següent.

Per la fórmula de la probabilitat total, tenim:

$$P(A_k) = P(W)\cdot P(A_k|W) + P(L)\cdot P(A_k|L), \qquad (\&)$$

però obviament:

$$P(A_k|W) = P(A_{k+1}) = u(k+1)$$
$$P(A_k|L) = P(A_{k-1}) = u(k-1)$$

i (&) es converteix en la relació de recurrència següent

$$u(k) = p\,u(k+1) + q\,u(k-1) \quad \forall k = 1,2,3,\dots$$

amb les c.i.: $u(0)=0$, $u(A+B)=1$

$$\Longleftrightarrow \; p\,u(k+2) - u(k+1) + q\,u(k) = 0,\; u(0)=0,\; u(A+B)=1$$

$$\Longleftrightarrow \; u(k+2) - \frac{1}{p}u(k+1) + \frac{q}{p}u(k) = 0,\; k=0,1,2,3,\dots \; u(0)=0,\; u(A+B)=1 \qquad (\&\&)$$

Solució de l'EED (&&):

- Polinomi característic $p(t) = t^2 - \frac{1}{p}t + \frac{q}{p}$: $\lambda_{\substack{1,2\\+,-}} = \dfrac{1/p \pm \sqrt{1/p^2 - 4q/p}}{2} = \dfrac{1}{2p}\left(1 \pm \sqrt{1-4pq}\right)$.

Aleshores, si suposem $p \neq q$, les solucions són de la forma:

$$u(k) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{1-4pq}}{2p}\right)^k + c_2\left(\frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2p}\right)^k$$

$$u(0) = 0 = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

$$u(A+B) = 1 = c_1\left[\left(\frac{1+\sqrt{1-4pq}}{2p}\right)^{A+B} - \left(\frac{1-\sqrt{1-4qp}}{2p}\right)^{A+B}\right],$$

d'on, la solució buscada és:

$$u(k) = \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{1-4qp}}{2p}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{1-4qp}}{2p}\right)^k}\left[\left(\frac{1+\sqrt{1-4qp}}{2p}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{1-4qp}}{2p}\right)^k\right] \qquad (\&\&\&)$$

b) Ruleta amb $N = 37$ caselles 18R, 18N. Aquí $p = 18/37$, $q = 19/37$. Els valors característics són doncs:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{1-4qp}}{2p} = \frac{1+\sqrt{1-4\cdot 18\cdot 19/37^2}}{2\cdot 18/37} = \frac{1+\sqrt{1-1368/1369}}{2\cdot 18/37} = \frac{1+1/37}{2\cdot 18/37}$$

$$= \frac{19}{18} = 1'0\widehat{5}.$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{1-4qp}}{2p} = \frac{1-\sqrt{1-4\cdot 18\cdot 19/37^2}}{2\cdot 18/37} = \frac{1-\sqrt{1-1368/1369}}{2\cdot 18/37} = \frac{1-1/37}{2\cdot 18/37}$$

$$= \frac{36}{2\cdot 18} = 1.$$

Així doncs, aplicant (&&) resulta que la probabilitat de fer saltar la banca quan es tenen K fitxes és, en aquest cas ("ruleta tradicional"):

$$u(K) = \frac{1-\left(19/18\right)^K}{1-\left(19/18\right)^{A+B}}, \quad K = 0, 1, 2, \ldots$$

(c) Als successos definits a l'apartat (a), afegim:

$\widehat{W}$: surt 0, i a la següent tirada que no surti zero, es guanya.

$A_K|\widehat{W}$: fer saltar la banca quan es tenen K fitxes, a la següent tirada surt un zero i a la següent tirada que no surti zero, es guanya.

$\widehat{L}$: surt 0, i a la següent tirada que no surti zero, es perd

$A_K|\widehat{L}$: fer saltar la banca quan es tenen K fitxes, a la jugada següent surt un zero i a la següent tirada que no surti zero, es perd.

Probabilitats: $P(\widehat{W}) = \frac{p'}{N}$: on N és el nombre de caselles de la ruleta,

$P(\widehat{L}) = \frac{q'}{N}$: " " " " " " " " " "

Ara, per la fórmula de la probabilitat total, es té:

$$P(A_K) = P(W)\cdot P(A_K|W) + P(L)\cdot P(A_K|L) + P(\hat{W})\cdot P(A_K|\hat{W}) + P(\hat{L})\cdot P(A_K|\hat{L})$$

però: $P(A_K|W) = P(A_{K+1}) = u(K+1)$, $P(A_K|L) = P(A_{K-1}) = u(K-1)$,
com abans a l'apartat (a) i ara, a més:

$P(A_K|\hat{W}) = P(A_K) = u(K)$: continuem tenint el mateix nombre, K, de fitxes

$P(A_K|\hat{L}) = P(A_{K-1}) = u(K-1)$: perdem 1 fitxa.

i la corresponent EED s'escriu ara com:

$$u(K) = p\,u(K+1) + q\,u(K-1) + \frac{p'}{N}u(K) + \frac{q'}{N}u(K-1), \quad u(0)=0,\ u(A+B)=1$$

$$\Longleftrightarrow p\,u(K+1) + \left(\frac{p'}{N}-1\right)u(K) + \left(q+\frac{q'}{N}\right)u(K-1)$$

$$\Longleftrightarrow p\,u(K+2) + \left(\frac{p'}{N}-1\right)u(K+1) + \left(q+\frac{q'}{N}\right)u(K) = 0, \qquad (*)$$

amb $u(0)=0$, $u(A+B)=1$.

Polinomi característic:

$$p(t) = pt^2 + \left(\frac{p'}{N}-1\right)t + \left(q+\frac{q'}{N}\right),$$

Valors característics:

$$\lambda_{1,2 \atop +,-} = \frac{1-p'/N \pm \sqrt{(p'/N-1)^2 - 4p(q+q'/N)}}{2p}$$

Per tant, les solucions són de la forma (si suposem $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Leftrightarrow (p'/N-1) \neq 4p(q+q'/N)$):

$$u(K) = C_1\left[\frac{1-p'/N + \sqrt{(p'/N-1)^2 - 4p(q+q'/N)}}{2p}\right]^K + C_2\left[\frac{1-p'/N - \sqrt{(p'/N-1)^2 - 4p(q+q'/N)}}{2p}\right]^K$$

$$u(0) = C_1 + C_2 = 0 \Longrightarrow C_2 = -C_1$$

$$u(A+B) = C_1\cdot\lambda_1^{A+B} + C_2\lambda_2^{A+B} = C_1\left(\lambda_1^{A+B} - \lambda_2^{A+B}\right) = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\lambda_1^{A+B} - \lambda_2^{A+B}}.$$

i així la solució és:

$$u(K) = \frac{1}{\left(\frac{1-p'/N+\sqrt{(p'/N-1)^2-4p(q+q'/N)}}{2p}\right)^{A+B}-\left(\frac{1-p'/N-\sqrt{(p'/N-1)^2-4p(q+q'/N)}}{2p}\right)^{A+B}}$$
$$\times\left[\left(\frac{1-p'/N+\sqrt{(p'/N-1)^2-4p(q+q'/N)}}{2p}\right)^{K}-\left(\frac{1-p'/N-\sqrt{(p'/N-1)^2-4p(q+q'/N)}}{2p}\right)^{K}\right]$$

d) En el cas de la ruleta de Montecarlo, amb $N=37$ caselles, tenim:

$p=18/37$, $q=18/37$, $p'=18/36=1/2$, $q'=18/36=1/2$. Els valors característics de l'EED (*) són:

$$\lambda_{\substack{1,2\\+,-}} = \frac{1-p'/N \pm\sqrt{(p'/N-1)^2-4p(q+q'/N)}}{2p} = \frac{73/74 \pm 1/74\sqrt{73^2-8\cdot 18\cdot 37}}{36/37}$$
$$= \frac{73/74 \pm 1/74}{36/37} = \begin{cases} 37/36 = 1'02\overline{7} \ (=\lambda_1) \\ 1 \ (=\lambda_2)\end{cases}$$

Llavors, la probabilitat de fer saltar la banca quan es tenen K fitxes és en aquesta modalitat del joc — ruleta de Montecarlo, amb $N=37$ caselles

$$u_M(K) = \frac{(37/36)^K-1}{(37/36)^{A+B}-1} \; ; \; K=0,1,2,\ldots \quad \text{"Ruleta de Montecarlo".}$$

Per exemple, si la banca té inicialment $B=1000$ fitxes i el jugador $A=100$ fitxes, llavors les probabilitats respectives són:

$$u(100) \simeq 3'288148\cdot 10^{-24} < u_M(100) \simeq 1'179736\cdot 10^{-12},$$

hi ha doncs més possibilitats de fer saltar la banca amb la ruleta Montecarlo. □

Representació gràfica:

$$f_{a,B}(x) = \frac{a^x-1}{a^{x+B}-1} = \frac{e^{x\ln a}-1}{e^{(x+B)\ln a}-1}, \text{ amb } a>1.$$

$$f'_{a,B}(x) = \frac{(a^{x+B}-1)a^x\ln a-(a^x-1)a^{x+B}\ln a}{(a^{x+B}-1)^2} = a^x\ln a\,\frac{a^{x+B}-1-a^{x+B}+a^B}{(a^{x+B}-1)^2} =$$

$$= \frac{a^B - 1}{(a^{x+B}-1)^2}\, a^x \ln a > 0 \ \forall x \geq 0$$

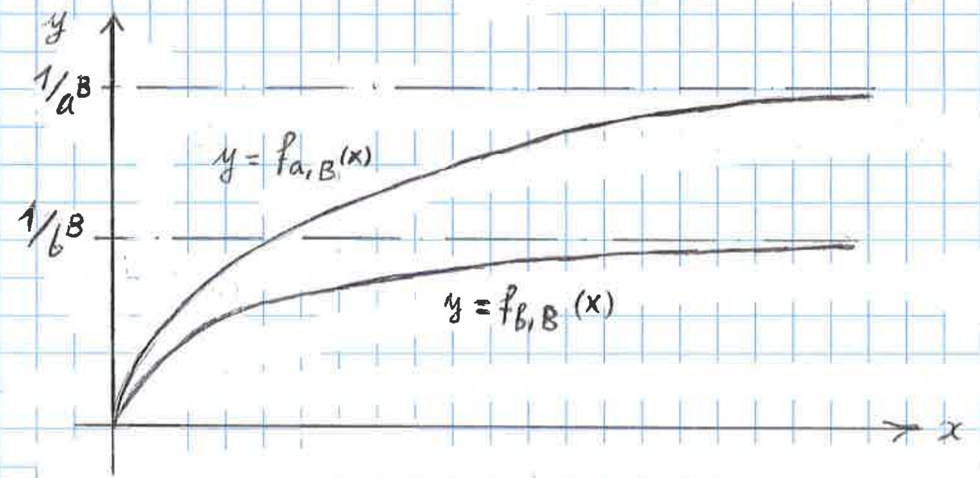
$$f''_{a,B}(x) = (a^B - 1)\ln a \, \frac{(a^{x+B}-1)^2 a^x \ln a - 2(a^{x+B}-1) a^x a^{x+B} \ln a}{(a^{x+B}-1)^4}$$

$$= (a^B-1)\, a^x (\ln a)^2 \, \frac{a^{x+B} - 1 - 2a^{x+B}}{(a^{x+B}-1)^3} = -\frac{a^{x+B}+1}{(a^{x+B}-1)^3}\, a^x (a^B - 1)(\ln a)^2$$

$$\leq 0 \ \forall x \geq 0.$$

En el cas de la ruleta de Montecarlo $a = \frac{37}{36} = 1'027 < b = \frac{19}{18} = 1'05$ (Ruleta tradicional).

Si comparem totes dues gràfiques $f_{a,B}(x)$ i $f_{b,B}(x)$, amb $B = 1000$,



veiem que hi ha més possibilitats amb la ruleta de Montecarlo que amb la tradicional.

9.9 (Equació dels tres moments). L'anàlisi de les bigues requereix l'avaluació dels moments que actúen en els suports. Aquests moments satisfan l'anomenada "Equació dels tres moments", que és la relació entre els moments que actuen en tres suports consecutius.

Una biga en voladís es recolza en N suports separats un de l'altre 3m, i una càrrega de 227 Kg actua a l'extrem de la biga a 3 m del primer suport. Sigui $M(K)$ el moment en el suport K-esim. Per tant, $M(0) = 681$ Kg·m. Suposem que la biga està rígidament fixada en el support $N-1$, amb la qual cosa $M(N-1) = 0$. Es satisfà l'equació dels tres moments:

$$M(K+2) + 4M(K+1) + M(K) = 0, \qquad K = 0,1,2,\dots, N-3 \qquad (*)$$

(a) Determineu la solució general de l'equació en diferències $(*)$.

(b) Trobeu la solució particular de $(*)$ que satisfà les condicions de frontera $M(0) = 681$, $M(N-1) = 0$ (la solució inclou N).

(c) Suposem ara que perllonguem la biga fins a l'infinit per la dreta (és a dir, $N \to \infty$). Trobeu la solució particular de $(*)$ que satisfà les condicions de frontera $M(0) = 681$, $M(\infty) = 0$.

Solució.

(a) $M(K+2) + 4M(K+1) + M(K) = 0$, $K = 0,1,2,\dots,N-3$,

amb $M(0) = 681$ Kg·m, $M(N-1) = 0$ (condicions a la frontera). El polinomi característic: $p(t)$, és: $p(t) = t^2 + 4t + 1$ i aleshores els valors característics vénen donats per $\lambda_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$, i.e.: $\lambda_1 = -2-\sqrt{3} = -3'73205\cdots$, $\lambda_2 = -2+\sqrt{3} = -0'26794\cdots$

Aleshores, les solucions de l'EDO $(*)$ són de la forma

$$M(K) = c_1(-2-\sqrt{3})^K + c_2(-2+\sqrt{3})^K, \quad K = 0,1,2,\dots,N-1$$

(b) Imposem les condicions frontera (c.f.)

$$M(0) = c_1 + c_2 = 681$$
$$M(N-1) = c_1(-2-\sqrt{3})^{N-1} + c_2(-2+\sqrt{3})^{N-1} = 0$$
$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (-2-\sqrt{3})^{N-1} & (-2+\sqrt{3})^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 681 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (-2-\sqrt{3})^{N-1} & (-2+\sqrt{3})^{N-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 681 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} (-2+\sqrt{3})^{N-1} & -1 \\ -(-2-\sqrt{3})^{N-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 681 \\ 0 \end{pmatrix}$$

amb:
$$\Delta = \frac{681}{(-2+\sqrt{3})^{N-1} - (-2-\sqrt{3})^{N-1}},$$

i llavors:
$$c_1 = \frac{681}{(-2+\sqrt{3})^{N-1} - (-2-\sqrt{3})^{N-1}} (-2+\sqrt{3})^{N-1},$$

$$c_2 = \frac{681}{(-2+\sqrt{3})^{N-1} - (-2-\sqrt{3})^{N-1}} (-2-\sqrt{3})^{N-1},$$

i la solució de (*) amb les c.f. $M(0) = 681$ i $M(N-1) = 0$ és:
$$M(K) = \frac{681}{(-2+\sqrt{3})^{N-1} - (-2-\sqrt{3})^{N-1}} \left[(-2+\sqrt{3})^{N-1}(-2-\sqrt{3})^K - (-2-\sqrt{3})^{N-1}(-2+\sqrt{3})^K \right],$$
$K = 0, 1, 2, \ldots, N.$

(c) Com que: $|\lambda_1| = |-2-\sqrt{3}| = 3'73205\ldots > |\lambda_2| = |-2+\sqrt{3}| = 0'26794\ldots$ i la solució general és $M(K) = c_1\lambda_1^K + c_2\lambda_2^K$, tota solució amb $c_1 \neq 0$ és no acotada. Per tant, si volem que $M(\infty) = \lim_K M(K) = 0$, cal fixar $c_1 = 0$ i c_2 es determina imposant la primera c.f., i.e.: $M(0) = c_2(-2+\sqrt{3})^0 = c_2 = 681$, d'on resulta que la solució buscada és:

$$M(K) = 681(-2+\sqrt{3})^K, \quad K = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad \square$$

9.10 (Voltatge en una cadena d'aïllants elèctrics). Suposem que tenim una "filera d'aïllants", formada per $n-1$ aïllans idèntics que estan connectats per conductors metàl·lics també idèntics. El primer aïllant està connectat a terra per la unió amb la torre, l'últim està connectat a la línea de conducció, la qual porta un corrent altern de freqüència ω. Considerem ara un conductor metàl·lic qualsevol entre dos aïllants. Si denotem el voltatge del conductor k per V_k, el corrent entre el conductor $k-1$ i el conductor k és $I_k = i\omega C_1(V_{k-1}-V_k)$; entre el conductor k i el terra és $i_k = -i\omega C_2 V_k$, on C_1 és la capacitat entre dos conductors contigus i C_2 és la capacitat d'un conductor respecte al terra. Es veu que $I_{k+1} = I_k + i_k$ i, per tant,

$$C_1(V_{k+1}-V_k) - C_1(V_k - V_{k-1}) - C_2 V_k = 0.$$

Les condicions de frontera són $V_0 = 0$ i $V_n = U$, essent U el voltatge de la línea de conducció.

(a) Trobeu la distribució del voltatge al llarg de la cadena.

(b) Interpreteu el resultat obtingut.

Solució.

(a) $C_1(V_{k+1}-V_k) - C_1(V_k - V_{k-1}) - C_2 V_k = 0$

$$\Longleftrightarrow C_1 V_{k+1} - (2C_1 + C_2)V_k + C_1 V_{k-1} = 0 \Longleftrightarrow C_1 V_{k+2} - (2C_1+C_2)V_{k+1} + C_1 V_k = 0.$$

Polinomi característic: $p(t) = C_1 t^2 - (2C_1+C_2)t + C_1$; aleshores els valors característics són:

$$\lambda_{\substack{1,2\\+,-}} = \frac{2C_1 + C_2 \pm \sqrt{(2C_1+C_2)^2 - 4C_1^2}}{2C_1} = \frac{2C_1 + C_2 \pm \sqrt{4C_1C_2 + C_2^2}}{2C_1},$$

i.e.:

$$\lambda_{\substack{1\\+}} = \frac{2C_1 + C_2 + \sqrt{4C_1C_2 + C_2^2}}{2C_1}, \quad \lambda_{\substack{2\\-}} = \frac{2C_1 + C_2 - \sqrt{4C_1C_2 + C_2^2}}{2C_1}, \qquad (\&)$$

(observem, en particular que $0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$) i aleshores, qualsevol solució és de la forma:

$$V_K = a_1\left(\frac{2C_1+C_2+\sqrt{4C_1C_2+C_2^2}}{2C_1}\right)^K + a_2\left(\frac{2C_1+C_2-\sqrt{4C_1C_2+C_2^2}}{2C_1}\right)^K.$$

· A continuació imposem les condicions frontera

$$\begin{aligned} V_0 &= a_1+a_2=0 \\ V_n &= a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2 = U \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ U \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2^n-\lambda_1^n}\begin{pmatrix} \lambda_2^n & -1 \\ -\lambda_1^n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ U \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2^n-\lambda_1^n}\begin{pmatrix} -U \\ U \end{pmatrix}$$

i la solució és:

$$V_K = \frac{U}{\lambda_1^n-\lambda_2^n}\left[\left(\frac{2C_1+C_2+\sqrt{4C_1C_2+C_2^2}}{2C_1}\right)^K - \left(\frac{2C_1+C_2-\sqrt{4C_1C_2+C_2^2}}{2C_1}\right)^K\right] \quad (\&\&)$$

$(K=0,1,2,\dots,n)$

(b) Veiem que, a mesura que augmentem K, i.e. quan ens apropem a la línea de corrent, el voltatge del corresponent conductor augmenta. Això és degut a què λ_1^K augmenta amb K perquè:

$$\lambda_1 = \left(1+\frac{C_2}{2C_1}\right)\cdot\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\frac{C_2}{2C_1}\right)^2}}\right] > 1,$$

mentre que λ_2^K disminueix amb K, perquè $\xi := 1+\frac{C_2}{2C_1} > 1$, i

$$\lambda_2 = \left(1+\frac{C_2}{2C_1}\right)\left[1-\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\frac{C_2}{2C_1}\right)^2}}\right] = \xi\left(1-\sqrt{1-1/\xi^2}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{1-1/\xi^2}}{1+\sqrt{1-1/\xi^2}}$$

$$= \xi\cdot\frac{1-1+1/\xi^2}{1+\sqrt{1-1/\xi^2}} = \frac{1}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}} < 1$$

Remarca. De fet, això es veu directament expressant la solució (&&) com:

$$\frac{U}{\lambda_1^K-\lambda_2^K}\cdot\left(\frac{2C_1+C_2+\sqrt{4C_1C_2+C_2^2}}{2C_1}\right)^K\cdot\left[1-\left(\frac{2C_1+C_2-\sqrt{4C_1C_2+C_2^2}}{2C_1+C_2+\sqrt{4C_1C_2+C_2^2}}\right)^K\right],$$

$K=0,1,2,3,\dots,n.$ □

9.11 (Teoria de la informació.) Imagineu un sistema de transmissió d'informació que usa un alfabet format només per dos símbols: el punt i el guió. Els missatges es transmeten mitjançant una prèvia codificació en una "corda" d'aquests símbols.

Cada símbol requereix un cert temps per a la seva transmissió, de manera que en un temps fixat només determinades cordes poden ésser transmesses: indiquem per N_t el nombre de cordes diferents que poden ser transmeses en un temps t. Shannon defineix la "capacitat" C de un sistema de transmissió (mesurat en bits per unitat de temps) mitjançant

$$C = \lim_{t\to\infty} \frac{\log_2 N_t}{t}.$$

(a) Suposeu un sistema en el qual tant el punt com el guió requereixen una sola unitat de temps per ésser transmesos. Verifiqueu que $N_t = 2^t$ i per tant $C = 1$.

(b) Suposeu ara que el punt requereix una unitat de temps, mentre que el guió en requereix dues.

(i) Quins són els valors de N_1 i N_2? (Recordeu que només són permesos el punt i el guió; el "blanc" no és permès).

(ii) Justifiqueu l'equació $N_t = N_{t-1} + N_{t-2}$.

(iii) Calculeu la capacitat d'aquest sistema. (Nota: utilitzeu els números de Fibonacci).

Solució: (a) $N_1 = 2^1$ $(\cdot, -)$, $N_2 = 2^2$ $(\cdot\cdot, \cdot-, -\cdot, --)$: variacions amb repetició de 2 elements. Aleshores: $N_t = 2^t$ i la capacitat C ve donada, segons la fórmula de l'enunciat per:

$$C = \lim_{t\to\infty} \frac{\log_2 N_t}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log_2 2^t}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t} = 1.$$

(b)-(i) $N_1 = 1$ (només es pot transmetre un punt: un guió necessita dues unitats de temps).

$N_2 = 2$ (podem transmetre dos punts o un guió: un punt sol no és permès).

(b)-(ii) $N_t = N_{t-1} + N_{t-2}$: en el temps t es poden transmetre cordes de $[N_{t-1} + \text{punt}]$ més les cordes de $[N_{t-2} + \text{guió}]$ (notem que les cordes $[N_{t-2} + 2 \text{ punts}]$ ja estan incloses en $[N_{t-1} + \text{punt}]$).

(b)-(iii) Fent ús dels números de Fibonacci (problema 9.1) tenim que l'EED $N_t = N_{t-1} + N_{t-2}$ per $t = 3, 4, \dots$ amb $N_1 = 1$, $N_2 = 2$ és:

$$N_t = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^t - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^t \right]; \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

i llavors la capacitat C és ara:

$$C = \lim_{t\to\infty} \frac{\log_2 N_t}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log_2 \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t \left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^t\right]}{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t}{t} \log_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{1}{t} \log_2 \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{t} \log_2 \left[1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^t\right] \right)$$

$$= \log_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \log_2 (1+\sqrt{5}) - \log_2 2 = \log_2 (1+\sqrt{5}) - 1$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{\log(1+\sqrt{5})}{\log 2} - 1 = 0'694241913\dots \simeq 0'6942$$

Fórmula pel canvi de base dels logaritmes

(*) $a > 0$: $\log_a x = y \iff x = a^y$

$b > 0$: $\log_b x = \log_b a^y = y \log_b a \iff \log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

En el nostre cas, podem aplicar aquesta fórmula amb $a = 2$ i $b = e$ ó $b = 10$.

9.12) Un petit taller treballa sota comanda, i serveix mantenint l'ordre de recepció de les comandes. Suposeu que en una hora hi ha una probabilitat p (molt petita) de rebre una comanda, i que pràcticament mai no en rep dues. Suposeu igualment que hi ha una probabilitat q (també molt petita però major que p) de que una comanda en realització sigui completada en el termini d'una hora, i que pràcticament mai no es completen dues comandes dins la mateixa hora. És tracta de calcular, en mitjana, quantes comandes estan en cua d'espera, pendents de completar.

Per a això, designeu per $u(n)$ la probabilitat de que la cua sigui n

(a) Justifiqueu les relacions

(i) $u(n) = p\,u(n-1) + q\,u(n+1) + (1-p-q)\,u(n)$, $n>0$

(ii) $u(0) = q\,u(1) + (1-p)\,u(0)$

(iii) $\sum u(n) = 1$.

(b) Calculeu $u(n)$

(c) " $u(0)$

(d) Justifiqueu que la mitjana demanada és $\sum n\,u(n)$, i calculeu-la.

(e) Deduïu quina és la mitjana compatible amb $u(0) < 0'1$.

Solució.

(i) Perquè al final d'una hora hi hagi n comandes sense completar, poden passar 3 coses;

1. Que inicialment hi hagi n comandes sense completar i no entri cap més ni en surti cap

2. Que inicialment hi hagi $n-1$ comandes sense completar i entri

una més, i;

3.- Que inicialment hi hagi $n+1$ comandes sense completar i es completi una.

d'on es dedueix la relació de recurrència:

$$u(n) = p\,u(n-1) + q\,u(n+1) + (1-p)(1-q)\,u(n), \qquad (*)$$

però com que $0 < p < q << 1$, aproximem $(1-p)(1-q) = 1-p-q+pq \simeq 1-p-q$ i considerem en comptes de $(*)$, l'EED:

$$u(n) = p\,u(n-1) + q\,u(n+1) + (1-p-q)\,u(n) \qquad (**)$$

(ii) L'única manera de què al final d'una hora hi hagi 0 comandes a la cua es que:

1.- O bé a l'inici de l'hora no havia cap comanda i no ha entrat cap comanda.

2.- O bé a l'inici de l'hora havia 1 comanda i aquesta s'ha completat al llarg de l'hora.

Així doncs:

$$u(0) = q\,u(1) + (1-p)\,u(0)$$

(iii) $\sum_{n\geq 0} u(n) = 1$: evident perquè la suma de les probabilitats de tots els estats ha de ser 1: "condició de normalització"

(b) Expressem l'EED $(**)$ com:

$$q\,u(n+2) - (p+q)\,u(n+1) + p\,u(n) = 0$$

Polinomi característic $P(t) = qt^2 - (p+q)t + p$, d'on tenim que els valors característics són $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = p/q$ (<1). Aleshores, les solucions de $(**)$ són de la forma:

$$u(n) = c_1 + c_2\left(\frac{p}{q}\right)^n,$$

i de la condició (iii) $\sum_{n\geq 0} u(n) = 1$, es segueix que $c_1 = 0$ i $c_2 = 1 - p/q$.

Remarca: $c_1 = 0$ necessàriament perquè la sèrie sigui convergent i llavors

$$\sum_{n\geq 0} u(n) = c_2 \sum_{\substack{n\geq 0 \\ 0<p/q<1}} \left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{c_2}{1-p/q} = 1 \Rightarrow c_2 = 1 - p/q$$

Per tant, la solució de (∗∗) que satisfà la condició de normalització (ii) és:

$$u(n) = \left(1-p/q\right)\left(\frac{p}{q}\right)^n \qquad (\ast\ast\ast)$$

(c) De (∗∗∗): $u(0) = 1 - p/q$, $u(1) = \left(1-p/q\right) p/q$. Veiem que es satisfà $u(0) = q\,u(1) + (1-p)\,u(0)$. En efecte:

$$q\,u(1) + (1-p)\,u(0) = q\left(1-p/q\right)p/q + (1-p)\left(1-p/q\right) = \left(1-p/q\right)(1-p+p)$$
$$= 1 - p/q = u(0)$$

(d) $\sum_{n\geq 0} n\,u(n)$: esperança matemàtica: és el nombre de comandes pendents multiplicat per la seva probabilitat. Donarà la mitjana esperada de comandes a la cua. Considerem la suma:

$$A_N := \sum_{n=1}^{N} n\,a^n = a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + N a^N; \quad N\in\mathbb{N}, N<\infty, \mathbb{R}\ni a\neq 1$$

(progressió aritmètico-geomètrica). Per trobar la seva suma, primer ens adonem de que:

$$A_{N+1} - A_N = (N+1)\,a^{N+1} \quad \text{amb } \overbrace{A_1 = a}^{\text{condició inicial.}}; \qquad (\&)$$

que és una EED de 1er ordre a coeficients constants no homogènia. És clar que l'EED homogènia associada a (&), $A_{N+1} - A_N = 0$ té per solució general:

$$y_h(N) = c, \quad c\in\mathbb{R} \text{ lliure.}$$

Com solució particular de l'EED no homogènia buscarem una funció del tipus,

$$y_p(N) = \alpha a^N + \beta N a^N$$

on $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ són constants que determinarem per substitució i comparació de coeficients a l'EED completa (i.e. no homogènia) (&). En efecte:

$$y_p(N+1) - y_p(N) = \alpha a^{N+1} + \beta(N+1) a^{N+1} - \alpha a^N - \beta N a^N$$

$$[(a-1)\alpha + a\beta]\, a^N + (a-1)\beta N a^N = a a^N + a N a^N$$

$\forall N \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)\alpha + a\beta = a, \\ (a-1)\beta = a. \end{cases}$ d'on tenim: $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{a}{(a-1)^2}, \\ \beta = \dfrac{a}{a-1}. \end{cases}$ (solució única).

Llavors la solució general de l'EED (&) vindrà donada per:

$$y(N) = c \underbrace{- \frac{a}{(a-1)^2}}_{\alpha} a^N + \underbrace{\frac{a}{a-1}}_{\beta} N a^N.$$

A continuació, per determinar c, imposem la condició inicial $y(1) = A_1 = a$:

$$y(1) = c - \frac{a}{(a-1)^2} a + \frac{a}{a-1} a = c + \frac{a^2(a-1) - a^2}{(a-1)^2} = c + \frac{a^3 - 2a^2}{(a-1)^2} = a$$

$$\Leftrightarrow \quad c(a-1)^2 + a^3 - 2a^2 = a(a-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{a}{(a-1)^2}.$$

Llavors la solució buscada (terme general d'una progressió — o suma — aritmètico-geomètrica), s'escriu:

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} n a^n = a\,\frac{1 - a^N + (a-1) N a^N}{(a-1)^2} = a\,\frac{N a^{N+1} - (N+1) a^N + 1}{(a-1)^2} \qquad (\&\&)$$

Remarca 1. Hem suposat $a \neq 1$. Quant valdria la mateixa suma si $a = 1$? (exercici).

Remarca 2. Hem trobat (&&) resolent el PVI (&). Hi ha però altres mètodes directes d'obtenir aquesta suma. Reviseu el tema de Sèries Numèriques a Càlcul I on probablement ja heu trobat aquest resultat.

Si considerem ara la sèrie corresponent (sèrie aritmètico-geomètrica), aquesta convergeix sii $|a|<1$ ($a\in\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Llavors la seva suma es calcula fàcilment a partir de (**). En efecte:

$$A=\sum_{n\geq 0} n a^{N} = \lim_{N} A_N = \lim_{N} \sum_{n=1}^{N} n a^{n} = \lim_{N} a\,\frac{a^{N+1}-(N+1)a^{N}+1}{(1-a)^2} = \frac{a}{(1-a)^2},$$

$|a|<1$

En el nostre cas, tenim que $a = p/q < 1$ (recordem que $0<p<q$ segons l'enunciat), llavors l'esperança matemàtica buscada és:

$$\sum_{n\geq 0} n\,u(n) = \sum_{n\geq 0} n\left(1-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^{n} = \left(1-\frac{p}{q}\right)\sum_{n\geq 0} n\left(\frac{p}{q}\right)^{n}$$

$$= \left(1-\frac{p}{q}\right)\frac{p/q}{\left(1-p/q\right)^2} = \frac{p/q}{1-p/q} = \frac{p}{q-p}$$

(e) De l'apartat (c) tenim $u(0)=1-p/q$. Si $u(0)=1-p/q<0'1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow p/q > 1-0'1 = 0'9$. Aleshores la mitjana:

$$\sum_{n\geq 0} n\,u(n) = \frac{p/q}{1-p/q} > \frac{0'9}{0'1} = 9$$

És a dir, la mitjana serà compatible amb la c.i $u(0)=0'1$ sii és >9 □