que poden ser transmeses en un temps t. Shannon defineix la "capacitat" C de un sistema de transmissió (mesurat en bits per unitat de temps) mitjançant

$$C = \lim_{t\to\infty} \frac{\log_2 N_t}{t}.$$

(a) Suposeu un sistema en el qual tant el punt com el guió requereixen una sola unitat de temps per a ésser transmesos. Verifiqueu que $N_t = 2^t$ i per tant $C = 1$.

(b) Suposeu ara que el punt requereix una unitat de temps, mentre que el guió en requereix dues.

  (i) Quins són els valors de N_1 i N_2? (Recordeu que només són permesos el punt i el guió; el "blanc" no és permès).

  (ii) Justifiqueu l'equació $N_t = N_{t-1} + N_{t-2}$.

  (iii) (**) Calculeu la capacitat d'aquest sistema.
  (*Nota:* utilitzeu els números de Fibonacci.)

12. (*) (Teoria de cues.) Un petit taller treballa sota comanda, i serveix mantenint l'ordre de recepció de les comandes. Suposeu que en una hora hi ha una probabilitat p (molt petita) de rebre una comanda, i que pràcticament mai no en rep dues. Suposeu igualment que hi ha probabilitat q (també molt petita, però major que p) de que una comanda en realització sigui completada en el termini d'una hora, i que pràcticament mai no es completen dues comandes dins la mateixa hora. Es tracta de calcular, en mitjana, quantes comandes estaran en cua d'espera, pendents de completar.
Per a això, designeu per $u(n)$ la probabilitat de que la cua sigui n.

(a) Justifiqueu les relacions:

  (i) $u(n) = p\,u(n-1) + q\,u(n+1) + (1-p-q)u(n)$, $n > 0$.

  (ii) $u(0) = q\,u(1) + (1-p)u(0)$.

  (iii) $\Sigma u(n) = 1$.

(b) Calculeu $u(n)$.

(c) Calculeu $u(0)$.

(d) Justifiqueu que la mitjana demanada és $\Sigma n\,u(n)$, i calculeu-la.

(e) Deduïu quina és la mitjana mínima compatible amb $u(0) < 0'1$.

(9B) Sistemes dinàmics discrets.

1. Considereu el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{3}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{2}x_4(k) + 1 \\ x_2(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{3}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{2}x_4(k) - 1 \\ x_3(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{3}x_3(k) + \frac{1}{2}x_4(k) + 2 \\ x_4(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{3}x_4(k) - 1 \end{cases}$$

(c) Trobeu l'equació en diferències que satisfà $u(k)$, i determineu la seva solució, en el cas de la ruleta de Montecarlo, en què si surt el "0" la fitxa es reté, podent el jugador guanyar-la o perdre-la en la tirada següent (també pot continuar estant retinguda) sense que en cap cas en pugui guanyar una d'addicional.

(d) Compareu les probalitats de fer saltar la banca en el cas de jugar a color en la ruleta tradicional i en la de Montecarlo.

9. (*) (*Equació dels tres moments.*) L'anàlisi de les bigues requereix l'avaluació dels moments que actuen en els suports. Aquests moments satisfan l'anomenada "equació dels tres moments", que és la relació entre els moments que actuen en tres suports consecutius.
Una biga en voladís es recolza en N suports separats un de l'altre 3 m, i una càrrega de 227 Kg actua a l'extrem de la biga a 3 m del primer suport. Sigui $M(k)$ el moment en el suport k-èsim. Per tant, $M(0) = 681$ Kg m. Suposem que la biga està rígidament fixada en el suport $N-1$, amb la qual cosa $M(N-1) = 0$. Es satisfà l'equació dels tres moments.:

$$M(k+2) + 4M(k+1) + M(k) = 0\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-3 \qquad (*)$$

(a) Determineu la solució general de l'equació en diferències (*).

(b) Trobeu la solució particular de (*) que satisfà les condicions de frontera $M(0) = 681$, $M(N-1) = 0$ (la solució inclou N).

(c) Suposem ara que perllonguem la biga fins a l'infinit per la dreta (és a dir, $N \to \infty$). Trobeu la solució particular de (*) que satisfà les condicions de frontera $M(0) = 681$, $M(\infty) = 0$.

10. (**) (*Voltatge en una cadena d'aïllants elèctrics.*) Suposem que tenim una "filera d'aïllants", formada per $n-1$ aïllants idèntics que estan connectats per conductors metàl.lics també idèntics. El primer aïllant està connectat a terra per la unió amb la torre, l'últim està connectat a la línia de conducció, la qual porta un corrent altern de freqüència ω. Considerem ara un conductor metàl.lic qualsevol entre dos aïllants. Si denotem el voltatge del conductor k per V_k, el corrent entre el conductor $k-1$ i el conductor k és $I_k = i\omega C_1(V_{k-1} - V_k)$; entre el conductor k i el terra és $i_k = -i\omega C_2 V_k$, on C_1 és la capacitat entre dos conductors ~~contინguts~~ i C_2 és la capacitat d'un conductor respecte al terra. Es veu que $I_{k+1} = I_k + i_k$ i, per tant, contigus

$$C_1(V_{k+1} - V_k) - C_1(V_k - V_{k-1}) - C_2 V_k = 0\,.$$

Les condicions de frontera són $V_0 = 0$ i $V_n = U$, essent U el voltatge de la línia de conducció.

(a) Trobeu la distribució del voltatge al llarg de la cadena.

(b) Interpreteu el resultat obtingut.

11. (*) (*Teoria de la informació.*) Imagineu un sistema de transmissió d'informació que usa un alfabet format només de dos símbols: el punt i el guió. Els missatges es transmeten mitjançant una prèvia codificació en una "corda" d'aquests símbols.
Cada símbol requereix un cert temps per a la seva transmissió, de manera que en un temps fixat només determinades cordes poden ésser transmeses: indiquem per N_t el nombre de cordes diferents

(a) Trobeu-ne una solució particular.

(b) Doneu la solució general del sistema.

2. Resoleu el sistema següent:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \frac{1}{3}x_2(k) + \frac{1}{4}x_3(k) \\ x_2(k+1) = \frac{2}{3}x_2(k) + \frac{1}{4}x_3(k) + 500 \\ x_3(k+1) = \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{4}x_4(k) \\ x_4(k+1) = \frac{3}{4}x_4(k) + 1000 \end{cases}$$

3. Trobeu el conjunt de solucions del sistema

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + 1 \end{cases}$$

4. Estudieu l'existència de punts d'equilibri i de solucions fitades per al sistema

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -3x_1(k) - 2x_2(k) \\ x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

5. Considereu el sistema d'equacions en diferències:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{4}x_2(k) + \frac{1}{4}x_3(k) \\ x_2(k+1) = \frac{1}{4}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{4}x_3(k) \\ x_3(k+1) = \frac{1}{4}x_1(k) + \frac{1}{4}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k) \end{cases}$$

Indiqueu quines són les solucions del sistema que són

(a) Convergents (a un punt d'equilibri).

(b) Fitades, però no convergents.

(c) Divergents.

6. Determineu els modes propis i els modes dominants per al sistema d'equacions en diferències:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{4}x_1(k) + \frac{1}{3}x_2(k) + \frac{1}{3}x_3(k) \\ x_2(k+1) = \frac{1}{3}x_1(k) + \frac{1}{4}x_2(k) + \frac{1}{3}x_3(k) \\ x_3(k+1) = \frac{1}{3}x_1(k) + \frac{1}{3}x_2(k) + \frac{1}{4}x_3(k) \end{cases}$$

7. (*) En l'estudi de Lamberson (1992) sobre la supervivència del mussol americà, va obtenir experimentalment que:

$$\begin{pmatrix} J_{k+1} \\ S_{k+1} \\ A_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} J_k \\ S_k \\ A_k \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0'33 \\ 0'18 & 0 & 0 \\ 0 & 0'71 & 0'94 \end{pmatrix},$$

on J_k, S_k i A_k indica la població "jove" (fins a 1 any), "subadulta" (entre 1 i 2 anys) i "adulta", respectivament, l'any k.

(a) Verifiqueu que els valors propis de la matriu A obtinguda són aproximadament: $0'98$, $-0'02 \pm 0'21i$.

(b) Deduïu que en aquestes condicions, l'espècie tendeix a l'extinció.

(c) Verifiqueu que si l'índex anual de supervivència dels joves fos del 30% en lloc del 18%, aleshores els valors propis resultarien: $1'01$, $-0'03 \pm 0'26i$. Deduïu igualment que aleshores la població tendiria a augmentar.
(*Nota:* l'índex de supervivència referit és efectivament millorable mitjançant polítiques forestals adients.)

(d) Calculeu quin és el mínim índex anual de supervivència dels joves, per tal d'evitar l'extinció.

(e) En les condicions de (c), calculeu la distribució poblacional entre joves, subadults i adults a la qual s'hi tendiria.

8. (*) Considereu el model simplificat pressa / depredador

$$\begin{pmatrix} D_{k+1} \\ P_{k+1} \end{pmatrix} = A_\alpha \begin{pmatrix} D_k \\ P_k \end{pmatrix}, \qquad A_\alpha = \begin{pmatrix} 0'5 & 0'4 \\ -\alpha & 1'1 \end{pmatrix},$$

on P_k i D_k indiquen respectivament la població de preses i de depredadors en l'etapa k.

(a) Demostreu que els valors propis de la matriu A_α són menors que 1 si, i només si, $\alpha > 0'125$.

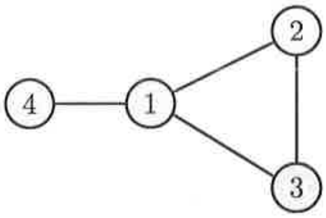
(b) Justifiqueu que aleshores ambdues espècies tendeixen a l'extinció.

(c) Justifiqueu anàlogament que per a $\alpha < 0'125$ les poblacions tendeixen a augmentar i que per a $\alpha = 0'125$, a estabilitzar-se.

(d) Calculeu la distribució de la població a la qual es tendeix per a $\alpha = 0'125$ i $\alpha = 0'104$. Interpreteu el resultat.

9. (*) Els "índex d'accessibilitat de Gould" han estat utilitzats en diversos problemes geogràfics, com ara xarxes de transport o moviments migratoris. Per a la seva determinació es configura una xarxa (o graf) representant les ciutats (o altres entitats geogràficament significatives) i les connexions entre elles.

Per exemple:



Suposant numerats els nusos o vèrtex ($i = 1, \ldots, n$), se'n diu la seva matriu d'adjacència (modificada) la matriu simètrica $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ definida per: $a_{ii} = 1$; $a_{ij} = 1$ ó 0, segons els vèrtex corresponents estiguin o no connectats per un arc. Així, per al graf anterior seria:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es demostra que el seu valor propi més gran és positiu i simple, i que podem prendre com base del seu 1-subespai propi un vector de coordenades positives, que sumin 1. Aquestes coordenades es diuen els índex d'accessibilitat de Gould dels vèrtex corresponents.

(a) Calculeu els índex d'accessibilitat de Gould per als vèrtex dels graf anterior

(b) Analitzeu si el resultat obtingut s'adiu amb la idea intuïtiva d'"accessibilitat" de cada vèrtex.

Suposem que inicialment en cada vèrtex hi ha un cert nombre (no nul) d'objectes $x_1(0), \ldots, x_n(0)$, i que en cada unitat de temps cada objecte crea una seva rèplica en cadascun dels vèrtexs adjacents. Designem per $x_1(k), \ldots, x_n(k)$ els objectes que, en el vèrtex corresponent, hi ha en l'instant k. Per exemple, seqüències possibles en l'exemple anterior serien:

$$\begin{aligned} &(1,1,1,1), (4,3,3,2), (12,10,10,6), (38,32,32,18), \ldots \\ &(1,2,3,4), (10,6,6,5), (27,22,22,15), (86,71,71,42), \ldots \\ &(4,3,2,1), (10,9.9,5), (33,28,28,15), (104,89,89,48), \ldots \end{aligned}$$

(c) Raoneu que, per a l'exemple anterior, la relació entre les situacions als instant k i $k+1$ ve donada per:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + x_4(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \\ x_3(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \\ x_4(k+1) &= x_1(k) + x_4(k) \end{aligned}$$

(d) Demostreu que, asimptòticament, el percentatge d'objectes en cada vèrtex ve donat pels índex d'accessibilitat de Gould, amb independència de la situació inicial.

(e) Calculeu, en les seqüències anteriors, el percentatge d'objectes en cada vèrtex per a $k = 3$ i compareu-los amb els índex obtinguts en (a).

(f) Raoneu que en un graf qualsevol les equacions de (c) resulten $x(k+1) = Ax(k)$ i deduïu que la conclusió de (d) es generalitza a tots els grafs.

10. (*) En models de la forma $x(k+1) = A\,x(k)$ sovint es requereix la condició

$$x_1(k) + \cdots + x_n(k) = \text{ct.} \quad (= x_1(0) + \cdots + x_n(0))$$

(a) Demostreu que una condició necessària i suficient a tal efecte és: la suma dels coeficients de cada columna de A és 1.

(b) Demostreu que aleshores 1 sempre és un VAP. Trobeu-ne un VEP.

(c) Demostreu que $v=(v_1,\ldots,v_n)$ és un VEP d'un VAP $\lambda\neq 1$, aleshores $v_1+\cdots+v_n=0$.

(d) Deduïu que els únics VEPS amb coordenades totes positives són els del VAP $\lambda=1$.

11. (*) (*Epidèmia.*) Una epidèmia afecta el 10% de la població encara sana cada mes i, dels que estan malalts, es posen bons un 80%, mentre que el 20% restant moren. Determineu l'estat estacionari de la malaltia.

12. (*) (*Central d'autobusos.*) Considerem una companyia d'autobusos, amb centrals a quatre ciutats A,B,C i D. Cada setmana el moviment d'autobusos és el següent:

- Dels que hi ha a cadascuna de les centrals A i B, un terç se'n va cap a C, un terç cap a D, i l'altre terç roman a la pròpia central.
- Dels que hi ha a cadascuna de les centrals C i D, se'n va un terç cap a casascuna de les altres tres centrals.

(a) Denotem per $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$, $d(k)$ el nombre d'autobusos a les centrals A,B,C i D, respectivament, en la setmana k. Deduïu $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$ i $d(k)$ a partir de les condicions inicials $a(0)$, $b(0)$, $c(0)$ i $d(0)$.

(b) Calculeu:

- $a(k)+b(k)+c(k)+d(k)$, per a $k=1,2,\ldots$.
- $\lim(a(k),b(k),c(k),d(k))$

i interpreteu aquests resultats.

13. (*) (*Connexió en cascada de quadripols asimètrics.*) Considerem un circuït elèctric que consisteix en una cadena de n quadripols idèntics connectats, cadascun d'ells amb dues entrades i dues sortides. Posem I_k, I_{k+1} a les intensitats d'entrada i de sortida del quadripol que ocupa la posició k, i designem per E_k, E_{k+1} els potencials induïts per forces externes, sobre el mateix quadripol. Les lleis de Kirchhoff ens donen les relacions següents: $I_k=I_{k+1}$ i $E_k=E_{k+1}+CI_{k+1}$. Determineu, per a un quadripol qualsevol, la seva intensitat d'entrada i el potencial a partir de I_1 i E_1.

14. (*) (*Evolució del mercat.*) Tres marques A,B i C competeixen oferint un mateix producte. Suposarem que un client genèric no compra mai dos cops consecutius el mateix producte. Si el primer dia compra el producte de la marca A, el segon dia compra la marca B. Si en canvi ha comprat la marca B o C el primer dia, pot ser que el segon dia compri qualsevol de les altres dues marques, però la probabilitat de que compri la marca A és doble que la probabilitat de que compri l'altra marca. Estudeu quina és a la llarga la probabilitat de que compri cadascuna de les tres marques.

15. (*) (*Probabilitats.*) Suposem que tenim dues urnes, la primera amb dues boles blanques i la segona amb tres boles negres. A cada pas, procedim extraient una bola a l'atzar de cada una i intercanviant les dues boles extretes. Proveu que la probabilitat de que a la llarga a la urna primera hi hagi dues boles negres és la mateixa que si tinguéssim les cinc boles i calculéssim la probabilitat d'extreure dues boles negres per a col.locar-les a la primera urna.

9B Sistemes dinàmics discrets

9B.1 Considereu el sistema lineal.

Ull! Remarca important al final de l'exercici...

$$x_1(k+1) = \frac{1}{3}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{2}x_4(k) + 1$$
$$x_2(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{3}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{2}x_4(k) - 1$$
$$x_3(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{3}x_3(k) + \frac{1}{2}x_4(k) + 2$$
$$x_4(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{3}x_4(k) - 1$$

(a) Trobeu-ne una solució particular

(b) Doneu la solució general del sistema

Solució.-

(a) Sigui A la matriu $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2/3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}B$

amb $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2/3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$. Sigui $b = (1,-1,2,-1)^T$. Amb aquestes definicions, el sistema s'escriu:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2/3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad X(k+1) = \frac{1}{2}B\,X(k) + b$$

Solució particular. Com solució particular, buscarem la solució constant: $X_p(k) = -\left(\frac{1}{2}B - I\right)^{-1} b \quad \forall k = 0,1,2,3,\ldots \Longleftrightarrow$

$$X_p(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2/3 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -2/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -2/3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -12 & 18 & 18 & 48 \\ 18 & -12 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & -12 & 18 \\ 18 & 18 & 18 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} -12 \\ 48 \\ -42 \\ 48 \end{pmatrix}, \forall k = 0,1,2,3,\ldots$$

b) Solució general del sistema.

b.1) Solució general del sistema homogeni:

– Valors propis de la matriu B:

$$p(\lambda) = \det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2/3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2/3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2/3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2/3-\lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda-\frac{11}{3}\right)\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)^3$$

Remarca: podem fer servir que el determinant d'ordre n:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^{n-1}(a+n-1)$$

exercici: comproveu-ho!; amb $a = \frac{2}{3}-\lambda$ i $n=4$.

Per tant els VAPs són: $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ (triple), $\lambda_2 = +\frac{11}{3}$

– Vectors propis:

· Associats a $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$: $Nuc\left(B+\frac{1}{3}I\right) = Nuc\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \langle (-1,1,0,0)^T, (-1,0,1,0)^T, (-1,0,0,1)^T \rangle$

· Associats a $\lambda_2 = \frac{11}{3}$: $Nuc\left(B-\frac{11}{3}I\right) = Nuc\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$

$= \ldots = Nuc\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,1,1,1)^T \rangle$

Si definim la matriu $S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ del canvi de base, llavors, la forma diagonal de B, $\widehat{B}$, s'obté:

$$\widehat{B} = S^{-1}BS = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2/3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2/3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & & & \\ & -1/3 & & \\ & & -1/3 & \\ & & & 11/3 \end{pmatrix}$$

La solució general del sistema homogeni $X_h(k)$ ve donada doncs per:

$$X_h(k) = \frac{1}{2^k} B^k X_0 = \frac{1}{2^k} S \tilde{B}^k S^{-1} X_0$$

$$= \frac{1}{2^k}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1/3)^k & & & \\ & (-1/3)^k & & \\ & & (-1/3)^k & \\ & & & (11/3)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} X_0$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 2^k \cdot 3^k}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1/3)^k & & & \\ & (-1/3)^k & & \\ & & (-1/3)^k & \\ & & & (11/3)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X_0$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 6^k}\begin{pmatrix} 11^k + 3(-1)^k & 11^k - (-1)^k & 11^k - (-1)^k & 11^k - (-1)^k \\ 11^k - (-1)^k & 11^k + 3(-1)^k & 11^k - (-1)^k & 11^k - (-1)^k \\ 11^k - (-1)^k & 11^k - (-1)^k & 11^k + 3(-1)^k & 11^k - (-1)^k \\ 11^k - (-1)^k & 11^k - (-1)^k & 11^k - (-1)^k & 11^k + 3(-1)^k \end{pmatrix} \cdot X_0$$

per $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ i amb $X_0 \in \mathbb{R}^4$ qualsevol. Per últim la solució general del sistema dinàmic lineal discret no homogeni és:

$$X_g(k) = X_h(k) + X_p(k) = X_h(k) + \begin{pmatrix} -12/35 \\ 48/35 \\ -6/5 \\ 48/35 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$\Rightarrow$ Remarca. Com que en aquest cas <u>la matriu A diagonalitza</u>, amb VAPs: $\lambda_1 = -\frac{1}{6}$ (mult 3) i $\lambda_2 = \frac{11}{6}$ (mult 1) amb els corresponents VEPs $V_1 = (-1,1,0,0)^T$, $V_2 = (-1,0,1,0)^T$, $V_3 = (-1,0,0,1)^T$, $V_4 = (1,1,1,1)^T$, podem escriure la solució general com:

$$X_g(k) = \left(-\frac{1}{6}\right)^k \left[c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + c_4 \left(\frac{11}{6}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{35}\begin{pmatrix} -12 \\ 48 \\ -42 \\ 48 \end{pmatrix}$$

amb $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries. $\square$

Ull, remarca important al final de l'exercici!!

9.B2 Resoleu el sistema següent:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \frac{1}{3}x_2(k) + \frac{1}{4}x_3(k) \\ x_2(k+1) = \frac{2}{3}x_2(k) + \frac{1}{4}x_3(k) + 500 \\ x_3(k+1) = \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{4}x_4(k) \\ x_4(k+1) = \frac{3}{4}x_4(k) + 1000 \end{cases}$$

Solució.

1er calculem una solució particular, aprofitant que la 4a equació està desacoplada respecte de les tres primeres:

$$\left(1-\frac{3}{4}\right)x_4 = \frac{1}{4}x_4 = 1000 \Longrightarrow \underline{x_4 = 4000}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)x_3 = \frac{1}{4}x_4 \iff \underline{x_3 = \frac{1}{2}x_4 = 2000}$$

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)x_2 = \frac{1}{4}x_3 + 500 \iff \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{4}2000 + 500 = 500+500 = 1000$$

$$\Longrightarrow \underline{x_2 = 3000}.$$

$$x_1(k+1) = x_1(k) + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_1(k) + \frac{1}{3}3000 + \frac{1}{4}2000$$

$$= x_1(k) + 1000 + 500 \iff x_1(k+1) = x_1(k) + 1500,$$

i una solució particular d'aquesta última EED és: $\underline{x_1(k) = 1500k}$.

A continuació calculem la solució del SDL homogeni associat:

$$x(k+1) = A\,x(k), \text{ essent } A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

- VAPs de A: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2/3,\ \lambda_3 = 1/2,\ \lambda_4 = 3/4$
- VEPs associats

$$\lambda_1 = 1:\ Nuc(A-I) = Nuc\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0,0)^T \rangle \Rightarrow \text{VEP ass.}: V_1 = (1,0,0,0)^T$$

$$\lambda_2 = 2/3:\ Nuc\left(A-\frac{2}{3}I\right) = Nuc\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/12 \end{pmatrix} = \ldots = Nuc\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,0,0)^T \rangle$$

$$\Longrightarrow \text{VEP associat}: V_2 = (1,-1,0,0)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} : Nuc\left(A - \frac{1}{2} I\right) = Nuc\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = Nuc\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= Nuc\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (-1/2, -3/2, 1, 0)^T \rangle$$

$$\Longrightarrow \text{VEP associat: } v_3 = (1, -3, 2, 0)^T$$

$$\lambda_4 = \frac{3}{4} : Nuc\left(A - \frac{3}{4} I\right) = Nuc\begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/12 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Nuc\begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1/12 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= Nuc\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 5/4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (-5, 3, 1, 1)^T \rangle \Longrightarrow \text{VEP ass: } v_4 = (-5, 3, 1, 1)^T$$

Tenim així que la matriu amb la base de Jordan és:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ amb inversa: } S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i llavors; la forma diagonal de A, $\tilde{A}$ és:

$$\tilde{A} = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2/3 & & \\ & & 1/2 & \\ & & & 3/4 \end{pmatrix}$$

Ara, la solució general del SDL homogeni sabem que ve donada per:

$$X_h(k) = A^k X_0 = S \tilde{A}^k S^{-1} X_0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (2/3)^k & & \\ & & (1/2)^k & \\ & & & (3/4)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} X_0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (2/3)^K & & \\ & & (1/2)^K & \\ & & & (3/4)^K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1-(2/3)^K & -3/2(2/3)^K + 1/2(1/2)^K + 1 & -5(3/4)^K + 9/2(2/3)^K - 1/2(1/2)^K + 1 \\ 0 & (2/3)^K & 3/2(2/3)^K - 3/2(1/2)^K & 3(3/4)^K - 9/2(2/3)^K + 3/2(1/2)^K \\ 0 & 0 & (1/2)^K & (3/4)^K - (1/2)^K \\ 0 & 0 & 0 & (3/4)^K \end{pmatrix} X_0,$$

per $K = 0,1,2,3,\ldots$ i $X_0 \in \mathbb{R}^4$ arbitrari.

D'altra banda, al principi hem vist que $X_p(K) = \begin{pmatrix} 1500K \\ 3000 \\ 2000 \\ 4000 \end{pmatrix}$, $K = 0,1,2,3,\ldots$ és una solució particular del SDL no homogeni; així doncs la solució general d'aquest ve donada per:

$$X_g(K) = A^K X_0 + X_p(K) = S\tilde{A}^K S^{-1} X_0 + X_p(K)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1-(2/3)^K & -3/2(2/3)^K + 1/2(1/2)^K + 1 & -5(3/4)^K + 9/2(2/3)^K - 1/2(1/2)^K + 1 \\ 0 & (2/3)^K & 3/2(2/3)^K - 3/2(1/2)^K & 3(3/4)^K - 9/2(2/3)^K + 3/2(1/2)^K \\ 0 & 0 & (1/2)^K & (3/4)^K - (1/2)^K \\ 0 & 0 & 0 & (3/4)^K \end{pmatrix} X_0$$

$$+ \begin{pmatrix} 1500K \\ 3000 \\ 2000 \\ 4000 \end{pmatrix}, \text{ per } K = 0,1,2 \text{ i amb } X_0 \in \mathbb{R}^4 \text{ arbitrari.}$$

Remarca. De fet, com que la matriu del sistema diagonalitza i tenim els seus VAPs i VEPs, <u>no cal calcular A^K</u>. Així la solució general es pot escriure també com:

$$X_g(K) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \left(\tfrac{2}{3}\right)^K \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \left(\tfrac{1}{2}\right)^K \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \left(\tfrac{3}{4}\right)^K \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1500K \\ 3000 \\ 2000 \\ 4000 \end{pmatrix}$$

amb $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ arbitraris. $\square$

9B·3 Trobeu el conjunt de solucions del sistema

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k), \\ x_2(k+1) = x_2(k) + 1. \end{cases}$$

Solució:

Veiem que la segona equació està **desacoplada** respecte de la primera i que té per solució: $X_2(k) = k + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$ arbitrari. Substituint a la primera arribem a l'EED no homogènia:

$$X_1(k+1) = X_1(k) + k + C_2 \qquad (*)$$

D'aquesta, busquem solucions particulars de la forma: $X_1^p(k) = \alpha k^2 + \beta k$. Substituint i comparant coeficients:

$$X_1^p(k+1) - X_1^p(k) - k - C_2 = \alpha(k+1)^2 + \beta(k+1) - \alpha k^2 - \beta k - k - C_2$$
$$= \cancel{\alpha k^2} + 2\alpha k + \alpha + \cancel{\beta k} + \beta - \cancel{\alpha k^2} - \cancel{\beta k} - k - C_2 = (2\alpha - 1)k + \alpha + \beta - C_2 = 0$$

d'on: $\alpha = 1/2$, $\beta = C_2 - 1/2$.

Remarca: alternativament, donant valors,

$$k=0: \; X_1^p(1) = X_1^p(0) + C_2 \iff \alpha + \beta = C_2$$
$$k=1: \; X_1^p(2) = X_1^p(1) + 1 + C_2 \iff 4\alpha + 2\beta = \alpha + \beta + 1 + C_2 \iff 3\alpha + \beta = 1 + C_2$$
$$\iff \begin{array}{c} \alpha + \beta = C_2 \\ 3\alpha + \beta = 1 + C_2 \end{array} \iff \alpha = 1/2, \; \beta = C_2 - 1/2$$

i tenim que la solució particular buscada de $(*)$ és: $X_1^p(k) = C_2 k + \frac{k}{2}(k-1)$, d'on podem escriure la solució general de la mateixa equació com:

$$X_1(k) = C_1 + C_2 k + \frac{k}{2}(k-1), \text{ amb } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ arbitraris.}$$

Finalment la solució general del SDL no homogeni resulta:

$$X(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_0 + \begin{pmatrix} \frac{k}{2}(k-1) \\ k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

amb $X_0 = (C_1, C_2)^T \in \mathbb{R}^2$ arbitrari. $\square$

9B·4 Estudieu l'existència de punts d'equilibri i de solucions fitades per al sistema:

$$\begin{cases} x_1(K+1) = -3x_1(K) - 2x_2(K) \\ x_2(K+1) = 2x_1(K) + x_2(K) \end{cases}$$

Solució.

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X(k), \text{ i.e.: } X(k+1) = AX(k) \text{ amb: } A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Polinomi característic: $p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-1)+4$
$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$: $\lambda_1 = -1$ (mult 2).

Calculem una base de Jordan: $v_1 \in \mathbb{R}^2 \setminus Nuc(A+I)$, per ex. $v_1 = (1,0)^T$,
$v_2 = (A+I)v_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. La matriu corresponent és: $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,
i la forma de Jordan; $\widehat{A}$:

$$\widehat{A} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda el càlcul successiu de les potencies de $\widehat{A}$ produeix:

$$\widehat{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\ldots, (\text{inducció})\ \widehat{A}^K = \begin{pmatrix} (-1)^K & 0 \\ (-1)^{K+1}K & (-1)^K \end{pmatrix}, \ldots$$

Amb això podem trobar la solució general. En efecte:

$$X(k) = S\widehat{A}^K S^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^K & 0 \\ (-1)^{K+1}K & (-1)^K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} X_0, \text{ amb } X_0 = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$$

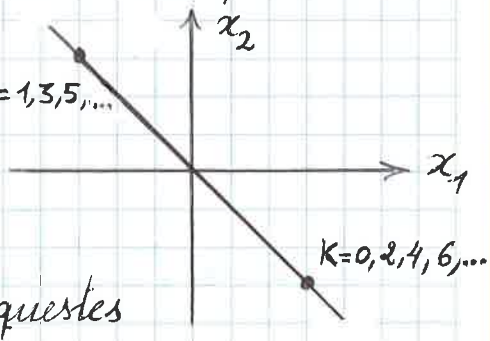
$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^K & 0 \\ (-1)^{K+1}K & (-1)^K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} X_0 = \begin{pmatrix} (-1)^K(1+2K) & -2(-1)^K \\ -2(-1)^K K & 2(-1)^K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} X_0$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^K(1+2K) & 2K(-1)^K \\ -2K(-1)^K & (-1)^K(1-2K) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(-1)^K + 2K(-1)^K(c_1+c_2) \\ -2K(-1)^K(c_1+c_2) + (-1)^K c_2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

per $K = 0, 1, 2, 3, \ldots$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris.

A la vista de la solució general $(*)$, es conclou que l'única solució constant és la corresponent a $c_1 = c_2 = 0$; la qual cosa es pot dir també d'entrada perquè la matriu del sistema, A, no té cap VAP igual a 1, i.e. $1 \notin \mathrm{Spec}(A)$. Tanmateix, de la solució general (*) es veu que una solució serà acotada sii $c_2 = -c_1$, i.e., sii la seva c.i. es troba sobre la recta $y = -x$. Això dóna lloc a una família 1-paramètrica de solucions acotades:

$$X(k) = c(-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad k = 0,1,2,3,\dots$$



i amb $c \in \mathbb{R}$ arbitrari. De fet, si $c \neq 0$, aquestes solucions són 2-periòdiques. □

9B·5 Considereu el sistema d'equacions en diferències:

$$x_1(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{4}x_2(k) + \frac{1}{4}x_3(k)$$
$$x_2(k+1) = \frac{1}{4}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{4}x_3(k)$$
$$x_3(k+1) = \frac{1}{4}x_1(k) + \frac{1}{4}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k)$$

Indiqueu quines són les solucions del sistema que són:

(a) Convergents (a un punt d'equilibri).

(b) Fitades, però no convergents.

(c) Divergents.

Solució: $X(k+1) = AX(k) = \frac{1}{4}BX(k)$,

amb: $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$;

VAPs i VEPs d'A:

$\lambda_1 = 1/4$ (doble). $\lambda_2 = 1$

- Per $\lambda_1 = 1/4$: $\mathrm{Nuc}(A - \frac{1}{4}I) = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \langle (-1,1,0)^T, (-1,0,1)^T \rangle$

• Per $\lambda_2 = 1$: $Nuc(A+I) = Nuc\begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} = \langle (1,1,1)^T \rangle$.

Tenim doncs una base de VEPs $v_1 = (1,-1,0)^T$, $v_2 = (1,0,-1)^T$ associats al VAP doble $\lambda_1 = 1/4$ i $v_3 = (1,1,1)^T$ associat al VAP simple $\lambda_2 = 1$. Per tant (veure les remarques al final dels problemes 9B1 i 9B2) podem escriure la solució general del sistema d'equacions en diferències com:

$$X(k) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^k \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k = 0,1,2,3,\ldots$$

Veiem doncs que totes les solucions són fitades: tots els VAPs són reals i cap d'ells té mòdul més gran que 1. Donada una c.i. $X_0 \in \mathbb{R}^3$, si la 3ª component de $S^{-1}X_0$, essent $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriu amb la base de VEPs, és igual a zero, llavors la solució corresponent convergeix a l'origen; en altre cas, la solució convergeix cap al punt $X_* = (0,0,1) \cdot S^{-1} X_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ □

9B6 Determineu els modes propis i els modes dominants per al sistema d'equació en diferències:

$$x_1(k+1) = \frac{1}{4} x_1(k) + \frac{1}{3} x_2(k) + \frac{1}{3} x_3(k)$$

$$x_2(k+1) = \frac{1}{3} x_1(k) + \frac{1}{4} x_2(k) + \frac{1}{3} x_3(k)$$

$$x_3(k+1) = \frac{1}{3} x_1(k) + \frac{1}{3} x_2(k) + \frac{1}{4} x_3(k)$$

Solució:

Sigui A la matriu: $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/4 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}$

Aleshores, el sistema d'equacions en diferencies s'escriu, en forma matricial com:

$$X(k+1) = A\,X(k)$$

A continuació calculem els VAPs i els VEPs d'A i resulten:

$\lambda_1 = \frac{11}{12}$ (mult 1), amb VEP associat $V_1 = (1,1,1)^T$

$\lambda_2 = -\frac{1}{12}$ (mult 2), amb VEPs associats $V_2 = (-1,1,0)^T$, $V_3 = (-1,0,1)^T$

Remarca: es comprova que $\dim \mathrm{Nuc}\left(A+\frac{1}{12}I\right) = 2$ i que $\mathrm{Nuc}\left(A+\frac{1}{12}I\right) = \langle (-1,1,0)^T, (-1,0,1)^T \rangle$.

Així doncs tenim els modes propis:

$$X_1(k) = \left(\frac{11}{12}\right)^k \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad X_2(k) = \left(-\frac{1}{12}\right)^k \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad X_3(k) = \left(-\frac{1}{12}\right)^k \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix};$$

d'aquest $X_1(k)$ és el que correspon al valor propi dominant $\lambda_1 = \frac{11}{12}$ (ja que $|\lambda_1| = \frac{11}{12} > |\lambda_2| = \frac{1}{12}$), per tant és el mode dominant. La solució general la obtindrem com combinació lineal dels modes propis amb coeficients arbitraris (*), i.e.:

$$\begin{aligned} X(k) &= c_1 X_1(k) + c_2 X_2(k) + c_3 X_3(k) \\ &= c_1 \left(\frac{11}{12}\right)^k \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{12}\right)^k \left[c_2 \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

(*) Recordem que en aquest cas, la matriu diagonalitza. □

9B.14) (*) (Evolució del mercat). Tres marques A, B i C competeixen oferint un mateix producte. Suposarem que un client genèric no compra mai dos cops consecutius el mateix producte. Si el primer dia compra el producte de la marca A, el segon dia compra la marca B. Si en canvi ha comprat la marca B o C el primer dia, pot ser que el segon dia compri qualsevol de les altres dues marques, però la probabilitat de que compri la marca A és doble que la probabilitat de que compri l'altra marca. Estudieu quina és a la llarga la probabilitat de que compri cadascuna de les tres marques:

Solució. Definim les probabilitats:

$P_K(A), P_K(B), P_K(C)$: Probabilitat de que el dia K compri la marca A, B i C respectivament.

$P_{K+1}(A|A)$: Probabilitat de que el dia K+1 compri la marca A si el dia anterior, K, ha comprat la marca A

$P_{K+1}(A|B)$: Id si el dia anterior ha comprat la marca B.

$P_{K+1}(A|C)$: Id " " " " " " " " C

De la mateixa manera es defineixen les probabilitats condicionades:

$P_{K+1}(B|A)$, $P_{K+1}(B|B)$, $P_{K+1}(B|C)$; $P_{K+1}(C|A)$, $P_{K+1}(C|B)$, $P_{K+1}(C|C)$

Aleshores tindrem:

$$P_{K+1}(A) = P_{K+1}(A|A)\cdot P_K(A) + P_{K+1}(A|B)\cdot P_K(B) + P_{K+1}(A|C)\cdot P_K(C)$$
$$P_{K+1}(B) = P_{K+1}(B|A)\cdot P_K(A) + P_{K+1}(B|B)\cdot P_K(B) + P_{K+1}(B|C)\cdot P_K(C)$$
$$P_{K+1}(C) = P_{K+1}(C|A)\cdot P_K(A) + P_{K+1}(C|B)\cdot P_K(B) + P_{K+1}(C|C)\cdot P_K(C)$$

Matricialment:

$$\begin{pmatrix} P_{K+1}(A) \\ P_{K+1}(B) \\ P_{K+1}(C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{K+1}(A|A) & P_{K+1}(A|B) & P_{K+1}(A|C) \\ P_{K+1}(B|A) & P_{K+1}(B|B) & P_{K+1}(B|C) \\ P_{K+1}(C|A) & P_{K+1}(C|B) & P_{K+1}(C|C) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_K(A) \\ P_K(B) \\ P_K(C) \end{pmatrix}$$; P: matriu "de transició"

La matriu de transició és, en aquest cas:

$$P = \begin{pmatrix} P_{k+1}(A|A) & P_{k+1}(A|B) & P_{k+1}(A|C) \\ P_{k+1}(B|A) & P_{k+1}(B|B) & P_{k+1}(B|C) \\ P_{k+1}(C|A) & P_{k+1}(C|B) & P_{k+1}(C|C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

i llavors el sistema queda:

$$\begin{pmatrix} P_{k+1}(A) \\ P_{k+1}(B) \\ P_{k+1}(C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k(A) \\ P_k(B) \\ P_k(C) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Calculem els VAPs i VEPs de la matriu P:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -\lambda & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1/3 \\ 1/3 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{9}\right) + \frac{2}{3}\lambda + \frac{2}{9}$$

$$= -\lambda^3 + \frac{7}{9}\lambda + \frac{2}{9} = -(\lambda-1)\left(\lambda^2+\lambda+\frac{2}{9}\right) = -(\lambda-1)\left(\lambda+\frac{2}{3}\right)\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)$$

Així doncs, tenim els VAPs: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{3}$ $\left(|\lambda_1| = 1 > |\lambda_2| = \frac{2}{3} > |\lambda_3| = \frac{1}{3}\right)$.

- $\lambda_1 = 1$: $\mathrm{Nuc}(P - I) = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} -1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} -1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} -1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} -1 & 8/9 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (8/9, 1, 1/3)^T \rangle : \text{VEP } v_1 = (8/9, 1, 1/3)^T$$

- $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$: $\mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 2/9 & 4/9 \\ 0 & 2/9 & 4/9 \end{pmatrix}$

$$= \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 2 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,-2,1)^T \rangle :$$

VEP $v_2 = (1,-2,1)^T$.

- $\lambda_3 = -\frac{1}{3}$: $\mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,1,-1)^T \rangle$ d'on podem agafar: $v_3 = (0,1,-1)^T$.

$$S = \begin{pmatrix} 8/9 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$: La matriu P diagonalitza i la seva forma diagonal

ve donada per:

$$\hat{P} = S^{-1} P S = \begin{pmatrix} 8/9 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8/9 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9/20 & 9/20 & 9/20 \\ 3/5 & -2/5 & -2/5 \\ 3/4 & -1/4 & -5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8/9 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2/3 & \\ & & -1/3 \end{pmatrix}$$

I la solució del Sistema Dinàmic lineal $(*)$ és doncs:

$$P_k = \begin{pmatrix} P_k(A) \\ P_k(B) \\ P_k(C) \end{pmatrix} = S \hat{P}^k S^{-1} P_0 = \begin{pmatrix} 8/9 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (-2/3)^k & \\ & & (-1/3)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8/9 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8/9 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (-2/3)^k & \\ & & (-1/3)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9/20 & 9/20 & 9/20 \\ 3/5 & -2/5 & -2/5 \\ 3/4 & -1/4 & -5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/5 + \frac{2}{10}\left(-\frac{2}{3}\right)^k \\ \frac{9}{20} - \frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^k \\ \frac{3}{20} + \frac{2}{10}\left(-\frac{2}{3}\right)^k \end{pmatrix} \xrightarrow[k \to \infty]{} P_\infty = \begin{pmatrix} P_\infty(A) \\ P_\infty(B) \\ P_\infty(C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 9/20 \\ 3/20 \end{pmatrix}$$

9B.15 (*) (Probabilitats) Suposem que tenim dues urnes, la primera amb dues boles blanques i la segona amb tres boles negres. A cada pas, procedim extreient una bola a l'atzar de cada una i intercanviant les dues boles extretes. Proveu que la probabilitat de que a la llarga a la urna primera hi hagi dues boles negres és la mateixa que si tinguéssim les cinc boles i calculéssim la probabilitat d'extreure dues boles negres per col·locar-les a la primera urna.

Considerem les configuracions.

1) BB | NNN
2) BN | BNN
3) NN | BBN

Experiment: agafem una bola de cada urna i la intercanviem. Signi $X_1(k)$, $X_2(k)$, $X_3(k)$ les probabilitats de les configuracions 1, 2, i 3 respectivament; tanmateix signi p_{ij} la probabilitat d'assolir l'estat i si prèviament (i.e. a l'iterat anterior) el sistema estava a l'estat j. Per exemple p_{32} denota la probabilitat d'atànyer l'estat 3, NN|BBN a l'iterat $k+1$ si a l'iterat anterior, k, l'estat era el 2, i.e.: BN|BNN.

Per l'experiment què tractem es calcula fàcilment:

$$\left.\begin{array}{l} p_{11}=0,\ p_{21}=1,\ p_{31}=0 \\ p_{12}=\frac{1}{6},\ p_{22}=\frac{1}{2},\ p_{32}=\frac{1}{3} \\ p_{13}=0,\ p_{23}=\frac{2}{3},\ p_{33}=\frac{1}{3} \end{array}\right\} \quad P:=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$: matriu "de transició".

Per exemple, des de l'estat 2: BN | BNN

1) Assolirem l'estat 1 BB|NNN al següent iterat amb una probabilitat:
$p_{12}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$,

2) Assolirem l'estat 2: BN|BNN de nou al següent iterat amb una probabilitat
$p_{22}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, etc.

D'aquesta manera, les probabilitats dels estats 1, 2, 3 a l'iterat $k+1$ vénen relacionades amb les probabilitats respectives a l'iterat anterior, k, a través de la matriu de transició:

$$X(k+1) = P\,X(k) \iff \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+2) \\ x_3(k+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ 1 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}$$

VAPs de $P = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{3}, \lambda_3 = \frac{1}{6}\}$, i els respectius VEPs:

VEP associat al VAP $\lambda_1 = 1$: $v_1 = \left(\frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10}\right)^T$

" " " " $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$: $v_2 = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)^T$

" " " " $\lambda_3 = \frac{1}{6}$: $v_3 = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)^T$

$$S = \begin{pmatrix} 1/10 & 1/2 & 2/5 \\ 3/5 & -1 & 2/5 \\ 3/10 & 1/2 & -4/5 \end{pmatrix}$$

$$J_A = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{6} \end{pmatrix}; \quad J_A^k = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & \\ & & \left(\frac{1}{6}\right)^k \end{pmatrix}$$

Nota: inicialment, per $k=0$, tenim urna amb dues boles blanques i tres boles negres. Per tant posem: $X(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T = (1,0,0)^T$

$$X(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} = S J_A^k S^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/10 & 1/2 & 2/5 \\ 3/5 & -1 & 2/5 \\ 3/10 & 1/2 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (-3)^{-k} & \\ & & 6^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/10 & 1/2 & 2/5 \\ 3/5 & -1 & 2/5 \\ 3/10 & 1/2 & -4/5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/10 & 1/2 & 2/5 \\ 3/5 & -1 & 2/5 \\ 3/10 & 1/2 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (-3)^{-k} & \\ & & 6^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1/3 \\ 1 & \frac{1}{6} & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^k \\ \frac{3}{5} - \left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^k \\ \frac{3}{10} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^k \end{pmatrix} \xrightarrow[k \to \infty]{} \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Veiem que, a la llarga, la probabilitat de que a la primera urna hi hagi 2 boles negres és $\lim_k x_3(k) = \frac{3}{10}$. D'altra banda la probabilitat d'extreure dues boles negres per posar-les a la primera urna és: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$. Aleshores, es veu que les dues probabilitats coincideixen.

Nota. Amb MAPLE 

```
> with(MTM):
> A := Matrix([[0,1/6,0],[1,1/2,2/3],[0,1/3,1/3]]);
> S,J := jordan(A);
```

$$\begin{pmatrix} 1/10 & 1/2 & 2/5 \\ 3/5 & -1 & 2/5 \\ 3/10 & 1/2 & -4/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1/3 & \\ & & 1/6 \end{pmatrix}$$

```
> Jk := Matrix([[1,0,0],[0,(-3)^(-k),0],[0,0,6^(-k)]]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^{-k} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{-k} \end{pmatrix}$$

```
> Ak := S.Jk.S^(-1).<1,0,0>;
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^k \\ \frac{3}{5} - \left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^k \\ \frac{3}{10} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^k \end{pmatrix} \xrightarrow[k \to \infty]{} \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$