2. Aproximació

1. Useu els pesos moleculars dels sis òxids de nitrogen donats aquí per a calcular els pesos atòmics del nitrogen i l'oxígen.

   NO : 30.006 N_2O : 44.013 NO_2 : 46.006
   N_2O_3 : 76.012 N_2O_5 : 108.010 N_2O_4 : 92.011

2. Hom suposa que el cometa Tentax, descobert a l'any 1968, és un objecte del Sistema Solar. En un cert sistema de coordenades polars (r, ϕ), centrat en el Sol, s'han mesurat experimentalment les següents posicions del cometa:

r	2.70	2.00	1.61	1.20	1.02
ϕ	48°	67°	83°	108°	126°

   Per les lleis de Kepler i menystinguent les pertorbacions dels planetes, el cometa es mou en una cónica que, en les coordenades polars usades, té per equació $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\phi}$ on p és un paràmetre i e l'exentricitat de la trajectòria. Ajusteu per mínims quadrats els valors de p i e, a partir de les mesures fetes.

3. El nivell de l'aigua del mar del Nord està determinat principalment per l'anomenada marea M_2, el període de la qual és al voltant de les 12 hores i, per tant, suposem que té aproximadament la forma,

   $$H(t) = h_0 + a_1 \sin\frac{2\pi}{12}t + a_2 \cos\frac{2\pi}{12}t, \qquad \text{on } t \text{ es mesura en hores.}$$

   S'han fet les següents mesures:

t	0	2	4	6	8	10	hores
$H(t)$	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8	metres

   a) Són ortogonals 1, $\cos\frac{2\pi}{12}t$ i $\sin\frac{2\pi}{12}t$?
   b) Ajusteu $H(t)$ a aquestes mesures usant mínims quadrats.
   c) Trobeu la desviació quadràtica mitja.

4. Trobeu la millor aproximació per mínims quadrats als punts $(\frac{-\pi}{2}, 1)$, $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$, $(\pi, 1)$ i que sigui del tipus, $f(\theta) = a + r\sin(\theta + \alpha)$ amb a, r reals i $\alpha \in [0, 2\pi)$.

5. Per als set planetes més propers al Sol i usant mesures de Tycho Brahe, Kepler va obtenir una taula semblant a la següent:

   ?

r	60	110	150	230	780	1430	2870	milions de km
T	90	225	365	690	4330	10750	30650	dies

   on r mesura la distancia mitjana del planeta al sol i T el període orbital.

   Useu aquests valors per a fer dibuixos de grafiques (r, T), $(\log r, T)$, etc... fins que trobeu que els resultats es disposin aproximadament en una línea recta. En cas de que sigui així, useu la taula per a fer el "millor ajust" i determinar una fórmula que relacioni r i T.

1) Usen els pesos moleculars dels sis òxids de nitrogen donats aquí per a calcular els pesos atòmics del nitrogen i l'oxigen.

$$NO: 30'006 \quad N_2O: 44'013 \quad NO_2: 46'006$$
$$N_2O_3: 76'012 \quad N_2O_5: 108'010 \quad N_2O_4: 92'011$$

Solució.

Definim x: pes atòmic (O), y: pes atòmic (N). Tenim el sistema sobredeterminat

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Óxido nítrico, } NO: & x+y = 30'006 \\ \text{Anhídrido nitroso, } N_2O_3: & 3x+2y = 76'012 \\ \text{" hiponitroso, } N_2O: & x+2y = 44'013 \\ \text{" nítrico, } N_2O_5: & 5x+2y = 108'010 \\ \text{Dióxido de nitrógeno } NO_2: & 2x+y = 46'006 \\ \text{Tetróxido " " } N_2O_4: & 4x+2y = 92'011 \end{array}\right) : Ax=b, \text{amb } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 5 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 30'006 \\ 76'012 \\ 44'013 \\ 108'010 \\ 46'006 \\ 92'011 \end{pmatrix}$$

La "solució" del sistema $Ax=b$ que fa mínim l'error quadràtic $\|Ax-b\|_2$ és $A^TAx=A^Tb$: només cal calcular el punt crític de $G(x):=\|Ax-b\|_2 = \langle Ax,Ax\rangle - 2\langle Ax,b\rangle + \langle b,b\rangle =$
$= \langle x,A^TAx\rangle - 2\langle x,A^Tb\rangle + \langle b,b\rangle$, on posem $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{m} u_iv_i = u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_mv_m$

1) Resolem directament el sistema:

$$M := A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 5 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 29 \\ 29 & 18 \end{pmatrix}, \; \det M = 167'00$$

$$f = A^Tb = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30'006 \\ 76'012 \\ 44'013 \\ 108'010 \\ 46'006 \\ 92'011 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1302'16 \\ 716'10 \end{pmatrix}$$

Per tant, cal resoldre $Mx=f \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 56 & 29 \\ 29 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1302'16 \\ 716'10 \end{pmatrix}$, que té per solució:

x = pes atòmic (O) $= 15'9992934\ldots \approx 15'999$

y = pes atòmic (N) $= 14'0069161\ldots \approx 14'007$. □

(NO) 2) Fem la descomposició QR: $A = (a_1^{(0)} | a_2^{(0)})$, amb $a_1^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{61} \end{pmatrix}$, $a_2^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{62} \end{pmatrix}$

$$s_0^2 = (a_1^{(0)})^T \cdot a_1^{(0)} = 56 : s_0 = \text{sgn}(a_{11}) \cdot \sqrt{s_0^2} = -\sqrt{56} = -7'483\,314\,773\,547\,88\ldots$$

$$u^{(0)} = a^{(0)} - s_0 e^{(1)} = \begin{pmatrix} 8'483\,314\,773\,547\,88\ldots \\ 3'000\,000\,000\,000\,00\ldots \\ 1'000\,000\,000\,000\,00\ldots \\ 5'000\,000\,000\,000\,00\ldots \\ 2'000\,000\,000\,000\,00\ldots \\ 4'000\,000\,000\,000\,00\ldots \end{pmatrix}$$

Recordem: $(u^{(0)})^T \cdot u^{(0)} = (a_1^{(0)} - s_0 e^{(1)})^T (a_1^{(0)} - s_0 e^{(1)}) = s_0^2 - 2s_0 (a_1^{(0)})^T e^{(1)} + s_0^2 = 2s_0(s_0 - a_1^{(0)})$

$$\alpha_0 = \frac{2}{(u^{(0)})^T \cdot u^{(0)}} = \frac{1}{s_0(s_0 - a_1^{(0)})} = \frac{-1}{s_0 u_1^{(0)}} = \frac{1}{\sqrt{56}(\sqrt{56}+1)} = \frac{\sqrt{56}(\sqrt{56}-1)}{56 \cdot 55} = 0'01575217052806 89\ldots$$

$P(u^{(0)})A = (P(u^{(0)})a_1^{(0)} \mid P(u^{(0)})a_2^{(0)})$:

$$P(u^{(0)})a_1^{(0)} = a_1^{(0)} - \alpha_0 u^{(0)}(u^{(0)})^T a_1^{(0)} = a_1^{(0)} - (\alpha (u^{(0)})^T a_1^{(0)})u^{(0)} = \begin{pmatrix} -7'483314773547882\ldots \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix},$$

$$P(u^{(0)})a_2^{(0)} = a_2^{(0)} - (\alpha_0 (u^{(0)})^T a_2^{(0)})u^{(0)} = \begin{pmatrix} -3'875288007730154\ldots \\ 0'275925812773578\ldots \\ 1'425308604257860\ldots \\ -0'873456978710703\ldots \\ -0'149382791484281\ldots \\ -0'298765582968562\ldots \end{pmatrix},$$

$$b^{(1)} = P(u^{(0)})b = b - (\alpha (u^{(0)})^T \cdot b)u^{(0)} = \begin{pmatrix} -174'008\,583\,014\,962\,20\ldots \\ 3'865\,231\,268\,357\,33\ldots \\ 19'964\,077\,089\,452\,44\ldots \\ -12'234\,614\,552\,737\,78\ldots \\ -2'091\,845\,821\,095\,11\ldots \\ -4'184\,691\,642\,190\,23\ldots \end{pmatrix}.$$

Aleshores:

$$A_1 := (a_1^{(1)} \mid a_2^{(1)}) = P(u^{(0)})A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \qquad a_1^{(1)} \qquad\qquad & \qquad\qquad a_2^{(1)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -7'483314773547882\ldots & -3'875\,288\,007\,730\,154\ldots \\ \begin{matrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{matrix} & \underset{\tilde{a}_2^{(1)}}{\underset{\|}{\boxed{\begin{matrix} 0'275\,925\,812\,773\,578\ldots \\ 1'425\,308\,604\,257\,860\ldots \\ -0'873\,456\,978\,710\,703\ldots \\ -0'149\,382\,791\,484\,281\ldots \\ 0'298\,765\,582\,968\,562\ldots \end{matrix}}}} \end{pmatrix} \end{array}$$

$s_1^2 = (\tilde{a}_2^{(1)})^T \cdot \tilde{a}_2^{(1)} = 2'98214285714286\ldots$; $s_1 = \mathrm{sgn}(a_{22}^{(1)})\sqrt{s_1^2} = -1'72688820053380\ldots$

(on $\tilde{a}_2^{(1)} = (a_{22}^{(1)}\ a_{32}^{(1)}\ a_{42}^{(1)}\ a_{52}^{(1)}\ a_{62}^{(1)})^T$).

$$\tilde{u}^{(1)} = \tilde{a}_2^{(1)} - s_1 \tilde{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2'002\,814\,013\,307\,376\ldots \\ 1'425\,308\,604\,257\,860\ldots \\ -0'873\,456\,978\,710\,703\ldots \\ -0'149\,382\,791\,484\,281\ldots \\ -0'298\,765\,582\,968\,562\ldots \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1 = \ldots = \frac{-1}{s_1 u_1^{(1)}} = -0'289\,131\,331\,699\,374\ldots,$$

$$\tilde{P}(\tilde{u}^{(1)})\tilde{a}_2^{(1)} = \tilde{a}_2^{(1)} - (\alpha_1 (\tilde{u}^{(1)})^T \cdot \tilde{a}_2^{(1)})u^{(1)} = \begin{pmatrix} -1'726\,888\,200\,53380 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

$$A_2 := \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{P}(\tilde{u}^{(1)}) \end{array}\right)}_{\overset{\shortparallel}{P(\tilde{u}^{(1)})}} A_1 = \left(P(\tilde{u}^{(1)})\, a_1^{(1)} \,\middle|\, P(\tilde{u}^{(1)})\, a_2^{(1)} \right) =$$

$$:= R = \begin{pmatrix} -7'483\,314\,773\,547\,882\ldots & -3'875\,288\,007\,730\,154\ldots \\ 0. & -1'726\,888\,200\,53380\ldots \\ \hline 0. & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ \hline 0. \;\; 0. \\ 0. \;\; 0. \\ 0. \;\; 0. \\ 0. \;\; 0. \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}^{(2)} := \tilde{P}(\tilde{u}^{(1)})\tilde{b}^{(1)} = \tilde{b}^{(1)} - \left(\alpha_1 (u^{(1)})^T \tilde{b}^{(1)}\right)\tilde{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} -24'188\,378\,2558062\ldots \\ \underset{\overset{\shortparallel}{\tilde{b}^{(2)}}}{\boxed{\begin{matrix} -3'583\,347\,089\,026\,74\ldots \times 10^{-4} \\ -1'820\,275\,455\,521\,88\ldots \times 10^{-5} \\ 5'733\,821\,284\,295\,00\ldots \times 10^{-4} \\ 1'467\,642\,568\,542\,26\ldots \times 10^{-4} \end{matrix}}} \end{pmatrix}$$

$$b^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline & \tilde{P}(\tilde{u}^{(1)}) \end{array}\right) b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \hline \tilde{P}(\tilde{u}^{(1)})\tilde{b}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -174'008\,583\,01496220\ldots \\ -24'188\,378\,255\,806\,2\ldots \\ \hline \tilde{b}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{Pb} \\ \hline \tilde{b}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Tenim doncs el sistema reduït: $\tilde{R}\tilde{x} = \widetilde{Pb}$: $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -7'483\,314\,773\,547\,882\ldots & -3'875\,288\,007\,730\,154\ldots \\ 0. & -1'726\,888\,200\,53380\ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -174'008\,58301496\,220\ldots \\ -24'188\,378\,2558062\ldots \end{pmatrix}.$$

Aquest sistema triangular té per solució:

x = pes atòmic (O) $= 15'999\,293\,413\,173\,6\ldots \approx 15'999$

y = " " (N) $= 14'006\,916\,167\,664\,7\ldots \approx 14'007$

$$\text{Residu} = \|Ax - b\|_2 = \|\tilde{b}^{(2)}\|_2 = \left(\sum_{k=3}^{6} \left(b_k^{(2)}\right)^2\right)^{1/2} = 6'921\,285\,402\,07727\ldots \times 10^{-4}$$

$$\approx 7'0 \times 10^{-4} \;\square$$

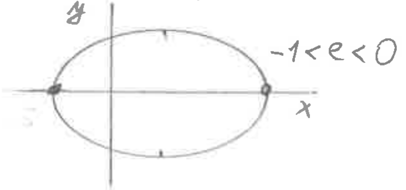
2. Hom suposa que el cometa Tentax, descobert a l'any 1968, és un objecte del Sistema Solar. En un cert sistema de coordenades polars (r, ϕ), centrat en el Sol, s'han mesurat experimentalment les següents posicions del cometa

r	2'70	2'00	1'61	1'20	1'02
ϕ	48°	67°	83°	108°	126°

Per les lleis de Kepler i menystenint les pertorbacions dels planetes, el cometa es mou en una cònica que, en les coordenades polars usades, té l'equació $r = \frac{p}{1+e\cos\phi}$ on p és un paràmetre i e és l'excentricitat de la trajectòria. Ajusteu per mínims quadrats els valors de p i e, a partir de les mesures fetes.

Solució. Notem que $r = \frac{p}{1+e\cos\phi}$ és l'equació d'una cònica: $p = r(1+e\cos\phi) = r + ex \Rightarrow$

$\Rightarrow r = p - ex \Rightarrow x^2 + y^2 = (p-ex)^2$, si $|e| < 1$ tenim una el·lipse



eq: $p = r + er\cos\phi$; $p - r\cos\phi\, e = r$: $p - r_k \cos\phi_k \cdot e = r_k$, $k = 1, \ldots, 5$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1'0 & -1'80665263716891 7\ldots \\ 1'0 & -0'78146225697854 7\ldots \\ 1'0 & -0'19620964288228 7\ldots \\ 1'0 & -0'37082039324993 7\ldots \\ 1'0 & -0'59954095733832 2\ldots \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ e \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2'70 \\ 2'00 \\ 1'61 \\ 1'20 \\ 1'02 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{b}} : Ax = b$$

Resolent directament les equacions normals: $A^T A x = A^T b$, on:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5{,}0 & -1'813963186441 49\ldots \\ -1'813963186441 49\ldots & 4'41013235800759\ldots \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 8'53 \\ -5'70026791096864\ldots \end{pmatrix}$$

$\det(A^T A) = 18'7601993482730\ldots$

s'obté: $p = 1'45405453130033 3\ldots \approx 1'45$

$e = -0'69446136113135 8\ldots \approx -0'694$ $\square$

(NO) Fem ara la descomposició QR. Signi $s_0^2 = a_1^{(0)T} \cdot a_1^{(0)} = 5$, $s_0 = -\sqrt{5}$,

$$u^{(0)} = a_1^{(0)} - s_0 e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ Recordem: } u^{(0)T} u^{(0)} = \left((a_1^{(0)})^T - s_0 (e^{(1)})^T\right) \cdot \left(a_1^{(0)} - s_0 e^{(1)}\right) =$$

$$= s_0^2 - 2 s_0 a_{11}^{(0)} + s_0^2 = 2 s_0 (s_0 - a_{11}^{(0)}).$$

$$\alpha_0 = \frac{2}{(u^{(0)})^T u^{(0)}} = \frac{1}{s_0(s_0 - a_{11}^{(0)})} = \frac{-1}{s_0 u_1^{(0)}} = \frac{1}{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})} = \frac{5-\sqrt{5}}{20} = 0'138196601125011\ldots$$

Ara: $P(u^{(0)}) A = \left(P(u^{(0)}) a_1^{(0)} \middle| P(u^{(0)}) a_2^{(0)} \right)$,

$$P(u^{(0)})\,a_1^{(0)} = a_1^{(0)} - \left(\alpha_0 (u^{(0)})^T a_1^{(0)}\right) u^{(0)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2'236067977499790\ldots \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

$$P(u^{(0)})\,a_2^{(0)} = a_2^{(0)} - \left(\alpha_0 (u^{(0)})^T a_2^{(0)}\right) u^{(0)} = \begin{pmatrix} 0'811228998713061\ldots \\ 0'027507657771072\ldots \\ 0'612760271867332\ldots \\ 1'179790307999556\ldots \\ 1'408510872087942\ldots \end{pmatrix}$$

$$A_1 := P(u^{(0)})A = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} = -2'236067977499790\ldots & 0'811228998713061\ldots \\ \begin{matrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{matrix} & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 0'027507657771072\ldots \\ 0'612760271867332\ldots \\ 1'179790307999556\ldots \\ 1'408510872087942\ldots \end{matrix}}}_{=:\,\tilde{a}_2^{(1)}} \end{pmatrix} = \left(a_1^{(1)} \middle| a_2^{(1)} \right)$$

$$b^{(1)} := P(u^{(0)})\,b = \begin{pmatrix} -3'8147319696146420\ldots \\ \boxed{\begin{matrix} -0'0131628924086979\ldots \\ -0'4031628924086978\ldots \\ -0'8131628924086980\ldots \\ -0'9931628924086979\ldots \end{matrix}} \end{pmatrix} =: \tilde{b}^{(1)}$$

$s_1^2 = \tilde{a}_2^{(1)T} \cdot \tilde{a}_2^{(1)} = 3'75203986965460,\ldots,\ s_1 = -\sqrt{s_1^2} = -1'93701829357768\ldots,$

$$\tilde{u}_1^{(1)} = \tilde{a}_2^{(1)} - s_1 \tilde{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1'964525951348755\ldots \\ 0'612760271867322\ldots \\ 1'179790307999556\ldots \\ 1'408510872087942\ldots \end{pmatrix};\ \text{on: } \tilde{a}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{22}^{(1)} \\ a_{23}^{(1)} \\ a_{24}^{(1)} \\ a_{25}^{(1)} \end{pmatrix},\ \tilde{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha_1 = \frac{-1}{s_1 \tilde{u}^{(1)}} = 0'262789801882236\ldots$$

$$\tilde{P}(\tilde{u}^{(1)})\,\tilde{a}_2^{(1)} = \tilde{a}_2^{(1)} - \left(\alpha_1 (u^{(1)})^T \tilde{a}_2^{(1)}\right) u^{(1)} = \begin{pmatrix} -1'937018293577683\ldots \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \tilde{P}(\tilde{u}^{(1)}) \end{array}\right)}_{\overset{\parallel}{P(\tilde{u}^{(1)})}} A_1 = \begin{pmatrix} -2'236067977499790\ldots & 0'811228998713061\ldots \\ 0. & -1'937018293577683\ldots \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{pmatrix} = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ \hline 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{pmatrix},$$

és a dir:

$$A_2 = P(\tilde{u}^{(1)}) \underbrace{P(u^{(0)})A}_{\overset{\parallel}{A_1}} = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ \hline 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{b}^{(2)} = \hat{b}^{(1)} - \alpha_1 (u^{(1)})^T \hat{b}^{(1)} u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1'345184360694429770\dots \\ 0'020522644313337347\dots \\ 0'00258857323546191\dots \\ -0'01926541207619759\dots \end{pmatrix}$$

essent $\hat{b}^{(1)} = (b_2^{(1)}\ b_3^{(1)}, b_4^{(1)}, b_5^{(1)})^T$.

$$b^{(2)} = P(u^{(1)}) \underbrace{P(\hat{u}^{(0)})\, b}_{\overset{\shortparallel}{b^{(1)}}} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \hat{P}(\hat{u}^{(1)}) \end{array} \right) \cdot P(u^{(0)}) \cdot b = \begin{pmatrix} -3'8147319696146420\dots \\ 1'3451843606942977\dots \\ 0'02052264431333735\dots \\ 0'0025885732354620\dots \\ -0'0192654120761976\dots \end{pmatrix}$$

Ara $\breve{R} x^* = \hat{Pb} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -2'236067977499790\dots & 0'811228998713061\dots \\ 0. & -1'937018293577683\dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ e \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} -3'8147319696146420\dots \\ 1'3451843606942977\dots \end{pmatrix}}^{\shortparallel\ \widehat{Pb}},$$

i aquest sistema té per solució: $p = 1'454054531300333\dots \simeq 1'45$

$e = -0'694461361131358\dots \simeq -0'694$

Residu:

$$\|Ax^* - b\|_2 = \| A_2 x^* - b^{(2)} \|_2 = \left(\sum_{k=3}^{5} \left(b_k^{(2)}\right)^2 \right)^{1/2} = 0'0282672202997445\dots$$

$$\simeq 0'028 \quad \square$$

3. El nivell de l'aigua del mar del Nord està determinat principalment per l'anomenada marea M_2, el període de la qual és al voltant de les 12 hores i, per tant, suposem que té aproximadament la forma,

$$H(t) = h_0 + a_1 \sin \frac{2\pi}{12} t + a_2 \cos \frac{2\pi}{12} t, \text{ on } t \text{ és mesura en hores.}$$

S'han fet les següents mesures:

t	0	2	4	6	8	10	hores
$H(t)$	1'0	1'6	1'4	0'6	0'2	0'8	metres.

a) Són ortogonals $1, \cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right)$ i $\sin\left(\frac{2\pi}{12}t\right)$?

b) Ajusten $H(t)$ a questes mesures usant mínims quadrats.

c) Troben la desviació quadràtica mitjana.

Solució:

a) $\langle 1, \cos \frac{2\pi}{12} t \rangle = \cos 0 + \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \pi + \cos \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

$\langle 1, \sin \frac{2\pi}{12} t \rangle = \sin 0 + \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \pi + \sin \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{3} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 -$

$- \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$

$\langle \sin \frac{2\pi}{12} t, \cos \frac{2\pi}{12} t \rangle = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$

Llavors $1, \cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right)$ i $\sin\left(\frac{2\pi}{12}t\right)$ són **ortogonals**.

b) $$h_0 = \frac{\langle 1, H(t) \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1'0 + 1'6 + 1'4 + 0'6 + 0'2 + 0'8}{6} = \frac{5'6}{6} \approx 9'3333$$

$$a_1 = \frac{\langle \sin\left(\frac{2\pi}{12}t\right), H(t) \rangle}{\langle \sin\left(\frac{2\pi}{12}t\right), \sin\left(\frac{2\pi}{12}t\right) \rangle} = \frac{0 \times 1'0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1'6 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1'4 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0'2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0'8}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0'5774$$

$$a_2 = \frac{\langle \cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right), H(t) \rangle}{\langle \cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right), \cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right) \rangle} = \frac{1 \times 1'0 + \frac{1}{2} \times 1'6 - \frac{1}{2} \times 1'4 - 1 \times 0'6 - \frac{1}{2} \times 0'2 + \frac{1}{2} \times 0'8}{3} = \frac{4}{15} \approx 2'6667$$

Per tant, l'ajustament és: $H^*(t) = \frac{5'6}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{12}t\right) + \frac{4}{15} \cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right)$

c) Si $H^*(t)$ és l'ajustament de $H(t)$ la desviació quadràtica és $\| H(t) - H^*(t) \|_2^2$

$$\| H(t) - H^*(t) \|_2^2 = \sum_{k=0}^{6} (H(t_k) - H^*(t_k))^2 = \left(1'0 - \left(\frac{5'6}{6} + \frac{4}{15}\right)\right)^2 + \left(1'6 - \left(\frac{5'6}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{2}\right)\right)^2 +$$

$$+ \left(1'4 - \left(\frac{5'6}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(0'6 - \left(\frac{5'6}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0 - \frac{4}{15} \cdot 1\right)\right)^2 + \left(0'2 - \left(\frac{5'6}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{2}\right)\right)^2 +$$

$$+\left(0'8-\left(\frac{5'6}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{15}\cdot\frac{1}{2}\right)\right)^2=0'12.\ \square$$

Nota. Amb MATLAB/Octave es podria fer, per exemple:

```
>> t=[0 2 4 6 8 10]'
>> H=[1.0 1.6 1.4 0.6 0.2 0.8]'
>> % comprovem que les funcions 1, cos(2π/12 t), sin(2π/12 t) són ortogonals
>> ones(6,1)' * cos(2*pi*t/12)
    ans = 0
>> ones(6,1)' * sin(2*pi*t/12)
    ans = 0
>> sin(2*pi*t/12)' * cos(2*pi*t/12)
    ans = 0
>> % càlcul dels coeficients h0, a1, a2
>> h0 = ones(6;1)' * H/6
    ans = 9'3333 ≙ 5'6/6
>> a1 = sin(2*pi*t/12)' * H/(sin(2*pi*t/12)' * sin(2*pi*t/12))
    ans = 0'5774 ≙ √3/3
>> a2 = cos(2*pi*t/12)' * H/(cos(2*pi*t/12)' * cos(2*pi*t/12))
    ans = 2'6667 ≙ 4/15
>> % Calcul de la desviació quadràtica
>> HH = inline('h0+a1*sin(2*pi*t/12) + a2*cos(2*pi*t/12)', 't');
>> sigma = (H-HH(t))' * (H-HH(t))
    ans = 0.12
>> % Dibuixem la funció aproximada vs els valors de la taula:
>> x=0:0.1:10;
>> plot(t,H,'or',x,HH(x),'-b')
>> hold on
>> xlabel('t (h)')
>> ylabel('Nivell de l''aigua (m)')
```

4) Trobeu la millor aproximació per mínims quadrats als punts $\left(-\frac{\pi}{2},1\right)$, $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)$, $(\pi,1)$ i que sigui del tipus $f(\theta)=a+r\sin(\theta+\alpha)$ amb a,r reals i $\alpha\in[0,2\pi)$.

Solució. Desfem el sinus de la suma, i.e. escrivim $f(\theta)=a+r\sin\alpha\cos\theta+r\cos\alpha\sin\theta$ i anomenem $a_0=a$, $a_1=r\sin\alpha$, $b_1=r\cos\alpha$. Ara hem de trobar els coeficients a_0^*, a_1^*, b_1^* per tal que $\|F-f\|_2^2=\sum_{k=0}^{3}\left(F(\theta_k)-f(\theta_k)\right)^2$, on $\theta_k=-\frac{\pi}{2}+kh$ $\left(k=0,1,2,3,\ h=\frac{\pi}{2}\right)$ sigui mínim per $a_0=a_0^*$, $a_1=a_1^*$, $b_1=b_1^*$.

La solució del problema és la solució de les equacions normals.

$$\begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,\cos\rangle & \langle 1,\sin\rangle \\ \langle 1,\cos\rangle & \langle \cos,\cos\rangle & \langle \cos,\sin\rangle \\ \langle 1,\sin\rangle & \langle \cos\ \sin\rangle & \langle \sin,\sin\rangle \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ b_1^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \langle 1,F\rangle \\ \langle \cos,F\rangle \\ \langle \sin,F\rangle \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

on definim el producte $\langle f,g\rangle:=\sum_{k=0}^{n} f(\theta_k)\cdot g(\theta_k)$. Aleshores, en el nostre cas $n=3$; $\begin{cases}\theta_0=-\frac{\pi}{2}\\ \theta_1=0\\ \theta_2=\frac{\pi}{2}\\ \theta_3=\pi\end{cases}$

$$(\&)\begin{cases}
\langle 1,1\rangle=\sum_{k=0}^{3}1\cdot 1=4,\\
\langle 1,\cos\rangle=\sum_{k=0}^{3}1\cdot\cos\theta_k=1\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1\cos 0+1\cos\frac{\pi}{2}+1\cos\pi=1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot(-1)=0,\\
\langle 1,\sin\rangle=\sum_{k=0}^{3}1\cdot\sin\theta_k=1\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1\sin 0+1\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+1\sin\pi=1\cdot(-1)+1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 0=0,\\
\langle \cos,\cos\rangle=\sum_{k=0}^{3}\cos^2\theta_k=\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2 0+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2\pi=1^2+0^2+0^2+(-1)^2=2\\
\langle \cos,\sin\rangle=\sum_{k=0}^{3}\cos\theta_k\sin\theta_k=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos 0\cdot\sin 0+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\pi\cdot\sin\pi=0\cdot(-1)+1\cdot 0+\\
\qquad +0\cdot 1+(-1)\cdot 0=0.\\
\langle \sin,\sin\rangle=\sum_{k=0}^{3}\sin^2\theta_k=\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2 0+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2\pi=(-1)^2+0+1^2+0=2
\end{cases}$$

$$\langle 1,F\rangle=\sum_{k=0}^{3}1\cdot F(\theta_k)=1\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot\tfrac{1}{2}+1\cdot 1=\tfrac{5}{2};$$

En el nostre cas, recordem: $\begin{cases}F(\theta_0)=F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1\\ F(\theta_1)=F(0)=0\\ F(\theta_2)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\\ F(\theta_3)=F(\pi)=1\end{cases}$

$$\langle \cos,F\rangle=\sum_{k=0}^{3}\cos\theta_k F(\theta_k)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1+\cos 0\cdot 0+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}+\cos\pi\cdot 1$$
$$=0\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot\tfrac{1}{2}-1\cdot 1=-1$$

$$\langle \sin,F\rangle=\sum_{k=0}^{3}\sin\theta_k F(\theta_k)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)1+\sin 0\cdot 0+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+\sin\pi\cdot 1=-1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot\tfrac{1}{2}+0\cdot 1=-\tfrac{1}{2}$$

De (&) veiem que, amb el producte escalar donat, les funcions 1, cos, sin són ortogonals i aleshores el sistema (*) resulta: $\begin{pmatrix}4&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0^*\\a_1^*\\b_1^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2\\-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

d'on s'obté la solució: $a_0^*=5/8$, $a_1^*=-\frac{1}{2}$, $b_1^*=-\frac{1}{4}$ i per tant els coeficients a, r, α seran $a^*=a_0^*=\frac{5}{8}$, $r^*=\sqrt{(a_1^*)^2+(b_1^*)^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}=0'55901699.\simeq 0'5590.$ i

$\alpha^*=\arctan\left(\frac{a_1^*}{b_1^*}\right)+\pi=4'248741371\cdots\simeq 4'2487.$ □

5) Per als set planetes més propers al Sol i usant les mesures de Tycho Brahe, Kepler va obtenir una taula semblant a la següent:

r	60	110	150	230	780	1430	2870	10^6 Km
T	90	225	365	690	4330	10750	30650	dies

on r mesura la distància mitjana del planeta al Sol i T el període orbital.

Usen aquests valors per fer dibuixos de gràfiques (r,T), $(\log r, T)$, etc., fins que troben que els resultats es disposin aproximadament en una línea recta. En cas de que sigui així, usen la taula per fer el "millor ajust" i determinar la fórmula que relacioni r i T.

Solució: Dibuixant $(\log r, \log T)$ aconseguim aproximadament una línea recta, llavors intentarem ajustar les dades a la recta: $\log T=\alpha\log r+\log\beta$ ($\Leftrightarrow T=\beta r^\alpha$) i determinar, per mínims quadrats α i β. Considerem doncs el sistema:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\log 60 & 1\\ \log 110 & 1\\ \log 150 & 1\\ \log 230 & 1\\ \log 780 & 1\\ \log 1430 & 1\\ \log 2870 & 1\\ \overset{\shortparallel}{a_1^{(0)}} & \overset{\shortparallel}{a_2^{(0)}}\end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{A}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha\\ \log\beta\end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{x}}=\underbrace{\begin{pmatrix}\log 90\\ \log 225\\ \log 365\\ \log 690\\ \log 4330\\ \log 10750\\ \log 30650\end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{b}}$$

Plantegem les equacions normals: $MX=f$, amb:

$$M:=A^TA=\begin{pmatrix}254'06452608538066\cdots & 41'13033048272523\cdots\\ 41'13033048275525\cdots & 7'0000000000000\end{pmatrix}$$

$$f:=A^Tb=\begin{pmatrix}314'44550933973 07\\ 50'3388708196252\end{pmatrix}$$

que té per solució:

$x_1=\alpha=1'50625696837047\simeq 1'5$

$x_2=\log\beta=-1'65913944019430\cdots$

$\Rightarrow\beta=\exp(x_2)=0'190302676490458\cdots$

$\simeq 0'1903$

Aleshores $T=0'190302\cdots r^{1'506256\cdots}$. De fet, la 3ª llei de Kepler (1618) estableix que $T^2/r^3=$ constant, que coincideix força bé amb resultat obtingut si arrodonim $\alpha=1'506\cdots\simeq\frac{3}{2}$. □

Nota. Amb MATLAB/Octave es podria fer:

```
>> r=[60,110,...,2870]'; T=[90,225,...,30650]'; plot(log(r),log(T),'o-b');
>> P=polyfit(log(r),log(T),1): P= (1'506)..,(-1'659139..)
```

$P=\underset{\overset{\shortparallel}{\alpha}}{\boxed{1'506}}\cdots,\underset{\overset{\shortparallel}{\log\beta}}{\boxed{-1'659139\ldots}}$

(No) Fem la descomposició QR:

$$s_0^2 = \left(a_1^{(0)}\right)^T \cdot a_1^{(0)} = 2'540645260853807\ldots \times 10^{-2}, \; s_0 = -15'939401685301135\ldots$$

$$u^{(0)} = a_1^{(0)} - s_0 e^{(1)} = \begin{pmatrix} 20'0337462475232 36\ldots \\ 4'70048036579241 7\ldots \\ 5'01063529409625 6\ldots \\ 5'43807930892319 6\ldots \\ 6'65929391196836 38\ldots \\ 7'26542972325 3953\ldots \\ 7'962067308753666\ldots \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = \ldots = \frac{-1}{s_0 u_1^{(0)}} = 0'003131596623140\ldots$$

$$\text{Ara: } A_1 := P(u^{(0)})A = \left(P(u^{(0)})a_1^{(0)} \,\middle|\, P(u^{(0)})a_2^{(0)}\right) = \begin{array}{cc} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} \\ \left(\begin{array}{cc} -15'939401685301135\ldots & -2'580418719270651\ldots \\ \begin{matrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{matrix} & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 0'159933060780982\ldots \\ 0'404520364122817\ldots \\ 0'028109834577037\ldots \\ -0'190144884165548\ldots \\ -0'298473099503287\ldots \\ -0'422975737245294\ldots \end{matrix}}}_{\overset{\|}{\hat{a}_2^{(1)}}} \end{array}\right) \end{array}$$

on, recordem:

$$a_1^{(1)} = a_1^{(0)} - \left(\alpha_0 (u^{(0)})^T \cdot a_1^{(0)}\right) u^{(0)} = \ldots$$

$$a_2^{(1)} = a_2^{(0)} - \left(\alpha_0 (u^{(0)})^T a_2^{(0)}\right) u^{(0)} = \ldots$$

$$b^{(1)} := P(u^{(0)})b = b - \left(\alpha_0 (u^{(0)})^T b\right) u^{(0)} = \begin{pmatrix} -19'727560390783264\ldots \\ \underbrace{\boxed{\begin{matrix} -0'268\ 322\ 065\ 766\ 598\ldots \\ -0'159\ 604\ 150\ 104\ 286\ldots \\ -0'039\ 729\ 916\ 944\ 700\ldots \\ 0'320\ 052\ 297\ 125\ 107\ldots \\ 0'496\ 373\ 517\ 308\ 131\ldots \\ 0'701\ 637\ 094\ 801\ 274\ldots \end{matrix}}}_{\overset{\|}{\hat{b}^{(1)}}} \end{pmatrix}$$

$$s_1^2 = \left(\hat{a}_2^{(1)}\right)^T \cdot \hat{a}_2^{(1)} = 0'341\ 439\ 233\ 237\ 609\ldots \Rightarrow s_1 = \text{sgn}\left(\hat{a}_{22}^{(1)}\right) \cdot \sqrt{s_1^2} = -0'584328018528642\ldots$$

$$\hat{u}^{(1)} = \hat{a}_2^{(1)} - s_1 \hat{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0'744\ 261\ 079\ 309\ 624\ldots \\ 0'104\ 502\ 364\ 122\ 817\ldots \\ 0'028\ 109\ 834\ 577\ 037\ldots \\ -0'190\ 144\ 884\ 165\ 548\ldots \\ -0'298\ 473\ 099\ 503\ 287\ldots \\ -0'422\ 975\ 737\ 245\ 294\ldots \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \ldots = -\frac{1}{s_1 \hat{u}_1^{(1)}} = 2'299418283955067\ldots$$

$$\hat{P}(\hat{u}^{(1)})\hat{a}_2^{(1)} = \hat{a}_2^{(1)} - \left(\alpha_1 (\hat{u}^{(1)})^T \hat{a}_2^{(1)}\right)\hat{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} -0'584\ 328\ 018\ 528\ 642\ldots \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \tilde{P}(\tilde{u}^{(1)}) \end{array}\right)}_{\overset{\shortparallel}{P(\tilde{u}^{(1)})}} A_1 = \begin{pmatrix} -15'939401685301135\ldots & -2'580418719270651\ldots \\ 0. & -0'584328018528642\ldots \\ \hline 0. & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{pmatrix} = R$$

és a dir:

$$P(\tilde{u}^{(1)}) \cdot \underbrace{P(u^{(0)}) A}_{\overset{\shortparallel}{A_1}} = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ \hline O \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \tilde{R} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ \text{triangular superior} \\ O \in M_{5\times 2}(\mathbb{R}) \end{array}$$

D'altra banda:

$$b^{(2)} = P(\tilde{u}^{(1)}) \underbrace{P(u^{(0)}) b}_{\overset{\shortparallel}{b^{(1)}}} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \tilde{P}(\tilde{u}^{(1)}) \end{array}\right) b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \hline \tilde{P}(\tilde{u}^{(1)}) \tilde{b}^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -19{\cdot}727\,560\,390\,783\,264\ldots \\ 0{\cdot}969\,481\,661\,551\,437\ldots \\ 0{\cdot}014\,196\,978\,855\,404\ldots \\ 0{\cdot}007\,020\,422\,393\,245\ldots \\ 0{\cdot}003\,816\,431\,924\,561\ldots \\ 0{\cdot}000\,026\,368\,887\,770\ldots \\ -0{\cdot}001\,826\,996\,876\,036\ldots \end{pmatrix}, \text{ on: } \tilde{P}(\tilde{u}^{(1)}) \tilde{b}^{(1)} = \tilde{b}^{(1)} - \left(\alpha_1 (\tilde{u}^{(1)})^T \cdot \tilde{b}^{(1)}\right) \tilde{u}^{(1)} = \ldots$$

Ara: $\tilde{R}^T \cdot x^* = \tilde{P}b \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -15'939\,401\,685\,301\,135\ldots & -2'580\,418\,799\,270\,651\ldots \\ 0. & -0'584\,328\,018\,528\,642\ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \log\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19'727\,560\,390\,783\,264\ldots \\ 0'969\,481\,661\,551\,437\ldots \end{pmatrix}$$

i aquest sistema triangular superior té per solució:

$$\alpha = 1'506\,256\,968\,370\,466\ldots \approx 1'51$$

$$\log\beta = -1'659\,139\,440\,194\,270\ldots \Rightarrow \beta = \exp(\ldots) = 0'190\,302\,676\,490\,462 \approx 0'19.$$

Residu:

$$\|Ax^* - b\|_2 = \|Rx^* - b^{(2)}\|_2 = \left(\sum_{k=3}^{7} \left(b_k^{(2)}\right)^2\right)^{1/2} = 0'016393422605986\ldots \approx 0'02. \square$$

6. a) Donades les abcises $x_0 = -2,\ x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$, determineu a, b i c per a tal que els polinomis,

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = x + a, \quad \phi_2(x) = x^2 + bx + c,$$

siguin ortogonals respecte d'elles.

b) Amb els polinomis $\phi_i(x)$ obtinguts, trobeu c_0, c_1 i c_2 de manera que,

$$p(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x),$$

sigui la millor aproximació per mínims quadrats de la taula,

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	0	3	4	0

Solució:

a) $\phi_0 := \left(\phi_0(-2), \phi_0(-1), \phi_0(0), \phi_0(1), \phi_0(2)\right)^T = (1,1,1,1,1)^T,$

$\phi_1 := \left(\phi_1(-2), \phi_1(-1), \phi_1(0), \phi_1(1), \phi_1(2)\right)^T = (-2+a, -1+a, a, 1+a, 2+a)^T,$

$\phi_2 := \left(\phi_2(-2), \phi_2(-1), \phi_2(0), \phi_2(1), \phi_2(2)\right)^T = (4-2b+c, 1-b+c, c, 1+b+c, 4+2b+c)^T$

Volem que:

$$<\phi_0, \phi_1> := \phi_0(-2)\phi_1(-2) + \phi_0(-1)\phi_1(-1) + \phi_0(0)\phi_1(0) + \phi_0(1)\phi_1(1) + \phi_0(2)\phi_1(2) = 5a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$<\phi_0, \phi_2> := \phi_0(-2)\phi_2(-2) + \phi_0(-1)\phi_2(-1) + \phi_0(0)\phi_2(0) + \phi_0(1)\phi_2(1) + \phi_0(2)\phi_2(2) = 10 + 5c = 0 \Rightarrow c = -2$$

$$<\phi_1, \phi_2> := \phi_1(-2)\phi_2(-2) + \phi_1(-1)\phi_2(-1) + \phi_1(0)\phi_2(0) + \phi_1(1)\phi_2(1) + \phi_1(2)\phi_2(2) = \underset{a=0,\ c=-2}{10b = 0} \Rightarrow b = 0$$

Aleshores els polinomis:

$\phi_0(x) = 1,\ \phi_1(x) = x$ i $\phi_2(x) = x^2 - 2$ i llavors: $\phi_0 = (1,1,1,1,1)^T$, $\phi_1 = (-2,-1,0,1,2)^T$, $\phi_2 = (2,-1,-2,-1,2)^T$

són ortogonals respecte del producte escalar definit per:

$$<\phi_i, \phi_j> = \phi_i(-2)\phi_j(-2) + \phi_i(-1)\phi_j(-1) + \phi_i(0)\phi_j(0) + \phi_i(1)\phi_j(1) + \phi_i(2)\phi_j(2) \ ; i,j = 0,1,2$$

b) Tenim:

$$\left(\phi_0 \mid \phi_1 \mid \phi_2\right)\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sistema sobre-determinat. Les corresponents equacions normals són:

$$\begin{pmatrix} \phi_0^T \\ \hline \phi_1^T \\ \hline \phi_2^T \end{pmatrix} \cdot \left(\phi_0 \mid \phi_1 \mid \phi_2\right) \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0^T \\ \hline \phi_1^T \\ \hline \phi_2^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} <\phi_0,\phi_0> & & \\ & <\phi_1,\phi_1> & \\ & & <\phi_2,\phi_2> \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pàg. següent.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 10 & \\ & & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

d'où : $c_0 = 7/5$, $c_1 = 2/5$, $c_2 = -5/7$

$\square$

6. a) Donades les abcises $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, determineu a, b i c per a tal que els polinomis,

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = x + a, \quad \phi_2(x) = x^2 + bx + c,$$

siguin ortogonals respecte d'elles.

b) Amb els polinomis $\phi_i(x)$ obtinguts, trobeu c_0, c_1 i c_2 de manera que,

$$p(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x),$$

sigui la millor aproximació per mínims quadrats de la taula,

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	0	3	4	0

.

7. La concentració a la sang d'un medicament, mesurat a intèrvals de 30 min ve donada per la taula següent:

temps (min.)	30	60	90	120
Concentració (mg / L)	60.6	36.8	22.3	13.6

a) Assumint que la concentració d'aquest medicament a la sang en un instant t es pot modelar per un procés de decaïment exponencial,

$$C_t = C_0 e^{-Kt},$$

ajusteu els paràmetres C_0 i K per mínims quadrats.

b) Sabent que la vida mitjana d'una substancia es defineix com el temps necessari per tal que la seva concentració disminueixi a la meitat, calculeu la vida mitjana d'aquesta substància.

c) Calculeu una base de polinomis ortogonals fins a grau 2 usant els temps donats a la taula.

6 a) Donades les abscisses $x_0=-2$, $x_1=-1$, $x_0=2$, $x_3=1$, $x_4=2$, determineu a, b, c per tal que els polinomis

$$\phi_0(x)=1, \quad \phi_1(x)=x+a, \quad \phi_2(x)=x^2+bx+c$$

siguin ortogonals respecte d'elles.

b) Amb els polinomis $\phi_i(x)$ obtinguts, troben c_0, c_1 i c_2 de manera que,

$$p(x)=c_0\,\phi_0(x)+c_1\,\phi_1(x)+c_2\,\phi_2(x),$$

sigui la millor aproximació per mínims quadrats de la taula

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	0	3	4	0

Solució

a) $\phi_0 := (\phi_0(-2), \phi_0(-1), \phi_0(0), \phi_0(1), \phi_0(2))^T = (1, 1, 1, 1, 1)^T,$

$\phi_1 := (\phi_1(-2), \phi_1(-1), \phi_1(0), \phi_1(1), \phi_1(2))^T = (-2+a, -1+a, a, 1+a, 2+a)^T,$

$\phi_2 := (\phi_2(-2), \phi_2(-1), \phi_2(0), \phi_2(1), \phi_2(2))^T = (4-2b+c, 1-b+c, c, 1+b+c, 4+2b+c)^T$

Volem que:

$$\langle\phi_0,\phi_1\rangle := \phi_0(-2)\cdot\phi_1(-2)+\phi_0(-1)\cdot\phi_1(-1)+\phi_0(0)\cdot\phi_1(0)+\phi_0(1)\cdot\phi_1(1)+\phi_0(2)\cdot\phi_1(2)$$
$$= 5a = 0 \Rightarrow a=0.$$

$$\langle\phi_0,\phi_2\rangle := \phi_0(-2)\cdot\phi_2(-2)+\phi_0(-1)\cdot\phi_2(-1)+\phi_0(0)\,\phi_2(0)+\phi_0(1)\cdot\phi_2(1)+\phi_0(2)\cdot\phi_2(2)$$
$$= 10+5c=0 \Rightarrow c=-2.$$

$$\langle\phi_1,\phi_2\rangle := \phi_1(-2)\cdot\phi_2(-2)+\phi_1(-1)\cdot\phi_2(-1)+\phi_1(0)\cdot\phi_2(0)+\phi_1(1)\cdot\phi_2(1)+\phi_1(2)\cdot\phi_2(2)$$
$$= 10b=0 \Rightarrow b=0.$$

Aleshores els polinomis

$$\phi_0(x)=1, \quad \phi_1(x)=x \quad i \quad \phi_2(x)=x^2-2$$

i llavors:

$$\phi_0 = (1,1,1,1,1)^T, \quad \phi_1 = (-2,-1,0,1,2)^T, \quad \phi_2 = (2,-1,-2,-1,2)^T$$

són ortogonals respecte del producte escalar definit per:

$$<f,g> := f(-2)\,g(-2) + f(-1)\cdot g(-1) + f(0)\cdot g(0) + f(1)\cdot g(1) + f(2)\cdot g(2)$$

D'altra banda, tenim:

$$<\phi_0;\phi_0> = 1^2+1^2+1^2+1^2+1^2 = 5,$$

$$<\phi_1,\phi_1> = (-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2 = 10,$$

$$<\phi_2,\phi_2> = 2^2+1^2+(-2)^2+(-1)^2+2^2 = 14,$$

b| Tenim

$$\left(\phi_0 \mid \phi_1 \mid \phi_2\right)\cdot\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

, sistema sobre-determinat. Les corresponents equacions normals són

$$\begin{pmatrix} \phi_0^T \\ \hline \phi_1^T \\ \hline \phi_2^T \end{pmatrix}\cdot\left(\phi_0 \mid \phi_1 \mid \phi_2\right)\cdot\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0^T \\ \hline \phi_1^T \\ \hline \phi_2^T \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} <\phi_0,\phi_0> & & \\ & <\phi_1,\phi_1> & \\ & & <\phi_2,\phi_2> \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 10 & \\ & & 14 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

, d'on $c_0 = 7/5$, $c_1 = 2/5$, $c_2 = -5/7$

Remarca. Alternativament, a l'apartat (a) podríem haver usat el mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt

$x_0 = -2, \; x_1 = -1, \; x_2 = 0, \; x_3 = 1, \; x_4 = 2$

$\varphi_0(x) = 1, \; \varphi_1(x) = x, \; \varphi_2(x) = x^2$: base estandard a $\mathbb{R}_2[x]$

Mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt

- $\phi_0(x) = \varphi_0(x) = 1$
- $\phi_1(x) = \varphi_1(x) - \dfrac{\langle \varphi_1, \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0, \phi_0 \rangle} \phi_0(x) = x - \dfrac{0}{5} \cdot 1 = x.$

$$\langle \phi_0, \phi_0 \rangle = \left(\phi_0(-2), \phi_0(-1), \phi_0(0), \phi_0(1), \phi_0(2)\right) \cdot \begin{pmatrix} \phi_0(-2) \\ \phi_0(-1) \\ \phi_0(0) \\ \phi_0(1) \\ \phi_0(2) \end{pmatrix}$$

$$= (1, 1, 1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5,$$

$$\langle \varphi_1, \phi_0 \rangle = \left(\varphi_1(-2), \varphi_1(-1), \varphi_1(0), \varphi_2(1), \varphi_2(2)\right) \cdot \begin{pmatrix} \phi_0(-2) \\ \phi_0(-1) \\ \phi_0(0) \\ \phi_0(1) \\ \phi_0(2) \end{pmatrix}$$

$$= (-2, -1, 0, 1, 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

- $\phi_2(x) = \varphi_2(x) - \dfrac{\langle \varphi_2, \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0, \phi_0 \rangle} \phi_0(x) - \dfrac{\langle \varphi_2, \phi_1 \rangle}{\langle \phi_1, \phi_1 \rangle} \phi_1(x) = x^2 - \dfrac{10}{5} 1 - \dfrac{0}{5} x = x^2 - 2$

$$\langle \phi_1, \phi_1 \rangle = (-2, -1, 0, 1, 2) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \varphi_2, \phi_0 \rangle = (4, 1, 0, 1, 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 10$$

$$\langle \varphi_2, \phi_1 \rangle = (4, 1, 0, 1, 4) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Així doncs, els polinomis ortogonals buscats són:

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = x, \quad \phi_2(x) = x^2 - 2$$

i llavors comparant coeficients, resulta: $a=0$, $b=0$, $c=-2$.

7] La concentració a la sang d'un medicament, mesurat a intervals de 30 min ve donada per la taula següent:

temps (min)	30	60	90	120
Concentració (mg/L)	60·6	36·8	22·3	13·6

a] Assumint que la concentració d'aquest medicament a la sang en un instant t es pot modelar per un procés de decaïment exponencial

$$C_t = C_0 e^{-kt},$$

ajusteu els paràmetres C_0 i k per mínims quadrats.

b] Sabent que la vida mitjana d'una substància es defineix com el temps necessari per tal que la seva concentració disminueixi a la meitat, calculeu la vida mitjana d'aquesta substància.

c] Calculeu una base de polinomis ortogonals fins a grau 2 usant els temps donats a la taula.

Solució

a] Prenent logaritmes: $\log C_t = \log C_0 - kt$. Definim $c = (c_1, c_2)$, amb $c_1 = \log C_0$, $c_2 = -k$. El sistema sobre-determinat que voldrem 'resoldre' per mínims quadrats és:

$$Ac = b, \text{ amb: } A = \begin{pmatrix} 1 & 30 \\ 1 & 60 \\ 1 & 90 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \log C_t(0) \\ \log C_t(1) \\ \log C_t(2) \\ \log C_t(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{4'104,294,893,075,27} \\ \text{3'605,497,845,174,89} \\ \text{3'104,586,678,466,07} \\ \text{2'610,069,792,742,01} \end{pmatrix}$$

- Ortogonalització de Gram-Schmidt.

$$q_1 = a_1 = (1,1,1,1)^T,\ r_{11} = 1$$

$$q_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1 = (30, 60, 90, 120)^T - \frac{300}{4}(1,1,1,1)^T$$

$$= (30,60,90,120)^T - (75,75,75,75) = (-45,-15,15,45)^T,\ r_{22} = 1$$

$$\langle q_1, q_1\rangle = (1,1,1,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 4$$

$$r_{12} = \frac{\langle a_2, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} = \frac{1}{4}\cdot(30,60,90,120)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}(30+60+90+120) = \frac{300}{4} = 75$$

$$Q = (q_1 | q_2) = \begin{pmatrix}1 & -45\\1 & -15\\1 & 15\\1 & 45\end{pmatrix},\quad R = \begin{pmatrix}1 & 75\\ & 1\end{pmatrix}$$

$$A = Q\cdot R = \begin{pmatrix}1 & -45\\1 & -15\\1 & 15\\1 & 45\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 75\\ & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 30\\1 & 60\\1 & 90\\1 & 120\end{pmatrix},$$

$$D = Q^T\cdot Q = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\-45 & -15 & 15 & 45\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -45\\1 & -15\\1 & 15\\1 & 45\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & \\ & 4.500\end{pmatrix}$$

Aleshores:

- $Ac = b \Leftrightarrow QRc = b \Leftrightarrow D\cdot Rc = Q^T b \Leftrightarrow Rc = D^{-1}Q^T b$

$$\begin{pmatrix}1 & 75\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4 & \\ & 1/4500\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\-45 & -15 & 15 & 45\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4'104,294,893,075,27\\3'605,497,845,174,89\\3'104,586,678,466,07\\2'610,069,792,742,01\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3'356,112,302,364,558,7\\-0'016,611,954,892,362,0\end{pmatrix}$$

$c_2 = -0'016,611,954,892,362,0$, d'on: $K = -c_2 = 0'016,611,954,892,362,0$

$c_1 = 3'356,112,302,364,558,7 - 75\cdot c_2 = 4'602,008,919,291,709,1$,

dóm: $C_0 = \exp c_2 = 99'684,372,484,593,0$

Aleshores: $K \overset{n}{\simeq} 0'0167 \; min^{-1}$

$C_0 \overset{n}{\simeq} 99'68 \; mg/L$.

· Ortogonalització de Householder. Agafem: $A_1 = A$, $b_1 = b$ (NO)

$$s_1 = -sgn(a_{11}^{(1)}) \cdot \|\overset{\frown}{a}_1^{(1)}\|_2 = -1 \cdot \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = -2$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{s_1(s_1 - a_{11}^{(1)})} = \frac{1}{6},$$

$$\overset{\frown}{u}_1 = \overset{\frown}{a}_1^{(1)} - s_1 \overset{\frown}{e}_1 = (1-(-2), 1, 1, 1)^T = (3,1,1,1)$$

$$P_1 = \overset{\frown}{P}(\overset{\frown}{u}_1) = I_4 - \alpha_1 \overset{\frown}{u}_1 \overset{\frown}{u}_1^T = I_4 - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot (3,1,1,1)$$

$$= \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}9&1&1&1\\3&1&1&1\\3&1&1&1\\3&1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2&-1/2&-1/2&-1/2\\-1/2&5/6&-1/6&-1/6\\-1/2&-1/6&5/6&-1/6\\-1/2&-1/6&-1/6&5/6\end{pmatrix}$$

$$A_2 = P_1 A_1 = \left(\begin{array}{c|c}2&-150\\ \hline 0&0\\0&30\\0&60\end{array}\right), \quad A_2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right)_{\substack{1\le i\le 4\\1\le j\le 2}} = \left(a_1^{(2)} \middle| a_2^{(2)}\right)$$

$$b_2 = P_1 b_1 = \begin{pmatrix}-6'712,224,604,727,12\\-8'654,093,243,126,63\cdot 10^{-6}\\-5'009,198,208,020,56\cdot 10^{-1}\\-9'954,367,065,261,22\cdot 10^{-1}\end{pmatrix}, \quad b_2 = \left(b_i^{(2)}\right)_{1\le i\le 4}$$

$$s_2 = -sgn(a_{22}^{(2)}) \|\overset{\frown}{a}_2^{(2)}\|_2 = -\sqrt{\sum_{k=2}^{4}(a_{k,2}^{(2)})^2} = -\sqrt{4.500} = -67,082,039,324,993,7$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{s_2(s_2 - a_{22}^{(2)})} = \frac{1}{4.500}$$

$$\overset{\frown}{u}_2 = \overset{\frown}{a}_2^{(2)} - s_2 \overset{\frown}{e}_2 = (+\sqrt{4.500}, 30, 60)^T$$

$$\overset{\frown}{P}_2(\overset{\frown}{u}_2) = I_3 - \alpha_2 \cdot \overset{\frown}{u}_2 \cdot \overset{\frown}{u}_2^T =$$

$$= \begin{pmatrix}0 & -4'472,135,954,999,58\cdot 10^{-1} & -8'944,271,909\cdots 10^{-1}\\-4'472,135,954,999,58\cdot 10^{-1} & 8'000,000,000,000,00\cdot 10^{-1} & -4'000,000,000\cdots 10^{-1}\\-8'944,271,909,999,16\cdot 10^{-1} & -4'000,000,000,000,00\cdot 10^{-1} & 2'000,000,000\cdots 10^{-1}\end{pmatrix}$$

$$P_2 := \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \tilde{P}_2 \end{array}\right)$$

$$A_3 = P_2 A_2 = \left(\begin{array}{cc} 2 & -1'500{,}000{,}000{,}000{,}00\cdot 10^{1} \\ 0 & -6'708{,}203{,}932{,}499{,}37\cdot 10^{1} \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$b_3 = P_2 b_2 = \begin{pmatrix} -6'712{,}224{,}604{,}729{,}117{,}42 \\ 1'114{,}363{,}811{,}354{,}449{,}17 \\ -0'002{,}557{,}303{,}803{,}040{,}77 \\ 0'001{,}288{,}327{,}471{,}907{,}66 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = \frac{b_2^{(3)}}{a_{2,2}^{(3)}} = -0'016{,}611{,}954{,}892{,}362{,}0 \quad \text{d'on: } K = -c_2 \cong 0'0167 \text{ min}^{-1}$$

$$c_1 = \frac{1}{a_{1,1}^{(3)}}\left(b_1^{(3)} - a_{1,2}^{(3)} \cdot c_2\right) = 4'602{,}008{,}919{,}291{,}709{,}1,$$

$$\text{d'on } C_0 = \exp(c_1) \cong 99'68 \text{ mg}/L$$

---

b] Busquem τ t.q.: $C_\tau = C_0 e^{-K\tau} = C_0/2 \Leftrightarrow e^{-K\tau} = 1/2$

$$\Leftrightarrow \tau = \frac{\log 2}{\log K} = 41'725{,}804{,}401{,}181{,}4 \cong 41'73 \text{ min.}$$

c] De nou fem servir ortogonalització de Gram-Schmidt, ara per trobar una base de polinomis ortogonals.

Partirem de la base canònica dels polinomis en $\mathbb{R}_2[x]$: $\varphi_0(t)=1$, $\varphi_1(t)=t$, $\varphi_2(t)=t^2$.

$$\psi_0(t) = \varphi_0(t) = 1$$

$$\psi_1(t) = \varphi_1(t) - \frac{\langle \varphi_1, \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle}\psi_0(t) = t - \frac{300}{4}\cdot 1 = t - 75$$

$$\langle \psi_0, \psi_0 \rangle = (1,1,1,1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 4,$$

$$\langle \varphi_1, \psi_0 \rangle = (30,60,90,120)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 30+60+90+120 = 300.$$

$$\psi_2(t) = \varphi_2(t) - \frac{\langle \varphi_2, \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle}\psi_0(t) - \frac{\langle \varphi_2, \psi_1 \rangle}{\langle \psi_1, \psi_1 \rangle}\psi_1(t) = t^2 - \overset{6750}{\overset{\shortparallel}{\frac{27000}{4}}}1 - \overset{150}{\overset{\shortparallel}{\frac{675000}{4500}}}(t-75)$$

$$= t^2 - 6750 - 150t + 11250$$

$$= \underline{t^2 - 150t + 4500}$$

$$\langle \varphi_2, \psi_0 \rangle = \left(\varphi_2(30), \varphi_2(60), \varphi_2(90), \varphi_2(120)\right) \cdot \begin{pmatrix} \psi_0(30) \\ \psi_0(60) \\ \psi_0(90) \\ \psi_0(120) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\varphi_2(x)=x^2}{=} \left(900, 3600, 8100, 14400\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 27.000$$

$$\langle \varphi_2, \psi_1 \rangle = \left(\varphi_2(30), \varphi_2(60), \varphi_2(90), \varphi_2(120)\right) \cdot \begin{pmatrix} \psi_1(30) \\ \psi_1(60) \\ \psi_1(90) \\ \psi_1(120) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\varphi_2(x)=x^2 \\ \psi_1(x)=x-75}}{=} \left(900, 3600, 8100, 14400\right) \cdot \begin{pmatrix} -45 \\ -15 \\ 15 \\ 45 \end{pmatrix} = 675.000$$

$$\langle \psi_1, \psi_1 \rangle = \left(\psi_1(30), \psi_1(60), \psi_1(90), \psi_1(120)\right) \cdot \begin{pmatrix} \psi_1(30) \\ \psi_1(60) \\ \psi_1(90) \\ \psi_1(120) \end{pmatrix}$$

$$= 45^2 + 15^2 + 15^2 + 45^2 = 2025 + 225 + 2025 + 225 = 4500$$

I així els polinomis ortogonals, respecte de les abscisses donades, resulten:

$$\underline{\psi_0(t) = 1, \ \psi_1(t) = t - 75, \ \psi_2(t) = t^2 - 150t + 4.500.}$$