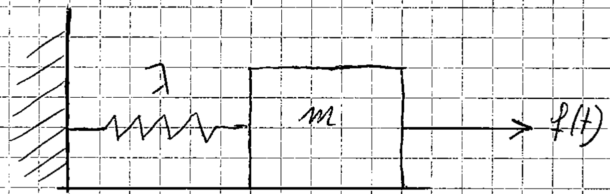
3. Oscil·lacions

Volem estudiar les oscil·lacions; és a dir, les solucions de les EDOs lineals de 2on ordre a coeficients constants de la forma: $x'' + 2Kx' + \omega^2 x = b(t)$, on:

- $\omega > 0$
- $K \geq 0$
- $b(t)$ és una funció periòdica de període mínim p: $b(t) = b(t+p)$, $\forall p \in \mathbb{R}$

Remarca: canviem la notació $y(x) \rightsquigarrow x(t)$, x: variable depenent,
t: " independent (temps)

<u>Exemple mecànic: molla</u>



$m \equiv$ massa (>0)
$\lambda \equiv$ ctnt. de Hooke (>0)
$\mu \equiv$ coeficient de fricció (≥ 0)
$f(t) \equiv$ força aplicada a la massa m

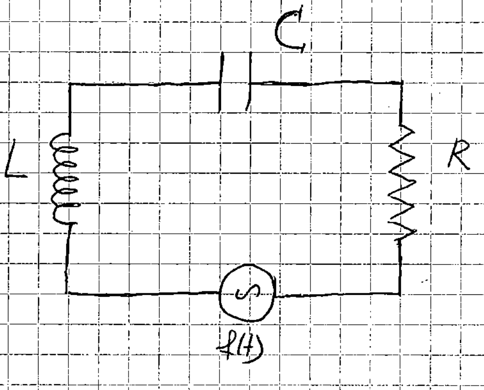
La 2ª llei de Newton ($F = m \cdot a$), ens diu que $mx'' = -\lambda x - \mu x' + f(t)$, essent:

- $-\lambda x$ és la força de recuperació de la molla
- $-\mu x'$ " " " de fricció, que s'oposa al moviment

Obtenim l'edo d'una oscil·lació amb $\omega = \sqrt{\lambda/m}$, $K = \mu/2m$, $b(t) = f(t)/m$

<u>Exemple: circuit elèctric (circuit RCL)</u>

$L \equiv$ inductància
$C \equiv$ Capacitat
$R \equiv$ Resistència
$f \equiv$ força electromotriu (f.e.m.)



La 2ª llei de Kirchoff ens diu que $Lx'' + Rx' + \frac{1}{C}x = f(t)$, essent:

- Lx'' la caiguda de potencial a través de l'inductor
- Rx' " " " " " " " la resistència
- x/C " " " " " " del capacitor.
- $x(t)$ és la càrrega a l'instant t.

Obtenim l'Edo d'una oscil·lació amb $\omega = \sqrt{1/LC}$, $K = R/2L$, $b(t) = f(t)/L$

Cas	Oscil·lacions	Propietats
$K=0$ & $b(t)\equiv 0$	Harmòniques	Totes les solucions són periòdiques (amb període $p=\frac{2\pi}{\omega}$)
$K>0$ & $b(t)\equiv 0$	Lliures esmorteïdes	Totes les solucions tendeixen a zero
$K=0$ & $b(t)\not\equiv 0$	Forçades no esmorteïdes	Pot haver-hi 0, 1 ó ∞ solucions periòdiques (veure T^a)
$K>0$ & $b(t)\not\equiv 0$	Forçades esmorteïdes	$\exists !$ una única solució periòdica (de període p) que ho atreu tot.

Taula resum (classificació)

<u>Oscil·lacions harmòniques</u> (Problemes 1-4)

$$x''+\omega^2x=0 \Longrightarrow x(t)=c_1\cos(\omega t)+c_2\sin(\omega t)=A\sin(\omega t+\varphi), \text{ on:}$$

- $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\geq 0$ és <u>l'amplitud</u>.
- $\varphi\in[0,2\pi)$, $\sin\varphi=c_1/A$, $\cos\varphi=c_2/A$ és <u>la fase</u>

Def. $p_0=2\pi/\omega$ és el període, $\omega\,[\text{rad}/s]$ és la freqüència angular; $\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{p_0}\left[\frac{\text{voltes}}{s}\right]$ és la freqüència.

Problema 1. Escriviu en forma de amplitud i fase la solució dels problemes a valor inicial següents:

a) $\frac{1}{2}x''+8x=0$; $x(0)=1$, $x'(0)=-2$

$$x(t)=c_1\cos 4t+c_2\sin 4t$$

$$\left.\begin{aligned} x(0)&=c_1=1\\ x'(0)&=4c_2=-2\end{aligned}\right\}: \begin{aligned} c_1&=1\\ c_2&=-\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

Aleshores $x(t)=\cos 4t-\frac{1}{2}\sin 4t=A\sin\varphi\cos 4t+A\cos\varphi\sin 4t=A\sin(4t+\varphi)$; identifiquem: $A\sin\varphi=1$; $A\cos\varphi=-1/2\Longrightarrow A=\sqrt{1^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\sin\varphi=2/\sqrt{5}$, $\cos\varphi=-1/\sqrt{5}$ d'on $\tan\varphi=-2$ amb $\varphi\in(\pi/2,\pi]$ llavors $\varphi\simeq 2'0344$ rad. Amb la qual cosa queda, finalment:

$$\boxed{x(t)=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(4t+2'0344)}$$

b) $x''+2x=0$; $x(0)=-1$, $x'(0)=-2\sqrt{2}$

$$x(t)=c_1\cos\sqrt{2}t+c_2\sin\sqrt{2}t$$

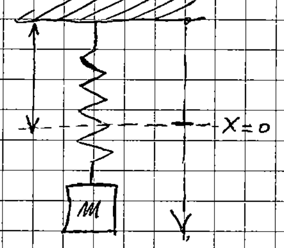
$$\left.\begin{aligned} x(0)&=c_1=-1\\ x'(0)&=\sqrt{2}c_2=-2\sqrt{2}\end{aligned}\right\}: \begin{aligned} c_1&=-1\\ c_2&=-2\end{aligned}$$

Aleshores $A=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$; $\operatorname{tg}\varphi=1/2$ amb $\varphi\in[\pi,3\pi/2)$ d'on $\varphi\simeq 3'6052$; amb la qual cosa queda, finalment:

$$\boxed{x(t)=\sqrt{5}\sin(\sqrt{2}t+3'6052)}$$

Problema 2/ Una molla en posició vertical està lligada a un sostre pel seu extrem superior, i del seu extrem inferior penja una massa de 2 Kg. Si la freqüència del moviment harmònic simple que es produeix és $2/\pi$ oscil·lacions per segon, calculeu la constant K de la molla. Si substituïm la massa per una de 8 Kg, calculeu el període del nou moviment.

◁ Solució:



$m = 2Kg$

$m x'' = mg - Kx$

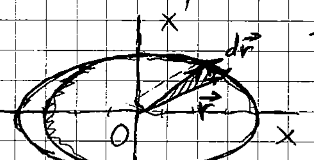
Canvi de funció: $\tilde{x} = x - \frac{mg}{K}$ d'on: $m\tilde{x}'' = mg - K\left(\tilde{x} + \frac{mg}{K}\right) = -K\tilde{x}$

$\Longrightarrow \tilde{x}(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t + \varphi\right)$, i llavors: $\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{2}} = \frac{2}{\pi}\,s^{-1} \Longrightarrow \boxed{K = 32\ \frac{N}{m}}$

$m = 2Kg \longrightarrow m' = 8Kg \longrightarrow \nu_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m'}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{32}{8}} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \Longrightarrow \boxed{P_0' = \frac{1}{\nu_0'} = \pi s}$ ▷

3) Una oscil·lació harmònica $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ es representa de vegades com la primera component d'un vector de mòdul A (vector "amplitud") que gira amb velocitat angular ω. Una altra representació interessant és la del "pla de fases" (en què les coordenades són posició i velocitat), per mitjà de la corba $(x(t), x'(t))$ (noteu que és possible definir-la encara que la llei $x(t)$ no sigui harmònica). Mostreu que en el cas harmònic la corba $(x(t), x'(t))$ és una el·lipse recorreguda amb velocitat areolar (respecte de l'origen) constant.

◁ Solució: $\left.\begin{array}{l} x(t) = A\sin(\omega t+\varphi) \\ x'(t) = A\omega\cos(\omega t+\varphi) \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{x'^2}{\omega^2 A^2} = 1$



el·lipse $\frac{x^2}{A^2} + \frac{x'^2}{\omega^2 A^2} = 1$

Velocitat areolar: $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left\|\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = \frac{1}{2}\left\|(A\sin(\omega t+\varphi), A\omega\cos(\omega t+\varphi)) \wedge (A\omega\cos(\omega t+\varphi), -A\omega^2\sin(\omega t+\varphi))\right\|$

$\vec{r} = (x(t), x'(t)) = (A\sin(\omega t+\varphi), A\omega\cos(\omega t+\varphi))$

$\vec{r}\,' = (x'(t), x''(t)) = (A\omega\cos(\omega t+\varphi), -A\omega^2\sin(\omega t+\varphi))$

la velocitat areolar queda doncs: $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|A^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi) - A^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)\right| = A^2\omega^2$

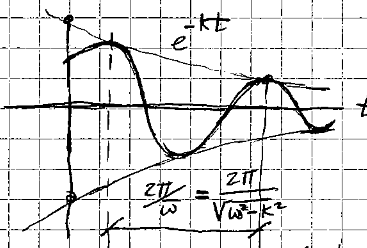
Oscil·lacions lliures esmorteïdes (Problemes 4-6)

$x'' + 2kx' + \omega^2 x = 0 \Longrightarrow P(m) = m^2 + 2km + \omega^2$ pol. carac. $\Longrightarrow m_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}$ arrels

Subcàs	Nom	Arrels	Solucions
$0 < k < \omega$	Sub-esmorteït	$m_{1,2} = -k \pm i\bar{\omega}$, $\bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 - k^2} > 0$	$x_h(t) = Ae^{-kt}\sin(\bar{\omega}t + \varphi)$
$k = \omega$	Críticament esmorteït	$m_1 = m_2 = -k < 0$	$x_h(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-kt}$
$k > \omega$	-esmorteït	$m_1 < m_2 < 0$	$x_h(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$

Remarca 1. En els tres subcasos $x_h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Remarca 2. Les oscil·lacions lliures sub-esmorteïdes són com una oscil·lació harmònica d'amplitud exponencialment decreixent



Remarca 3. Si la fricció és massa gran, ens apropem lentament a la posició d'equilibri, doncs si $k >> 1$ implica:

$$m_1 = -k-\sqrt{k^2-\omega^2} = -k-k\sqrt{1-(\omega/k)^2} = -2k+O\left(\tfrac{1}{k}\right) \underset{k>>1}{\simeq} -2k << 0$$

$\Longrightarrow e^{m_1 t}$ tendeix cap a zero molt ràpidament.

$$m_2 = -k+\sqrt{k^2-\omega^2} = -k+k\sqrt{1-\left(\tfrac{\omega}{k}\right)^2} = -\frac{\omega^2}{2k}+O\left(\tfrac{1}{k^3}\right) \simeq -\frac{\omega^2}{2k} \lesssim 0$$

$\Longrightarrow e^{m_2 t}$ tendeix cap a zero molt lentament.

4) En un sistema mecànic d'equació $mx''=-kx$, l'energia cinètica és $\frac{1}{2}m(x')^2$ i l'energia potencial elàstica és $\frac{1}{2}kx^2$. Deduïu que l'energia total es conserva al llarg del temps i ~~dedu~~ concloeu que el mòdul de la velocitat és màxim quan el mòbil passa per la posició d'equilibri. Mostreu també que en presència d'un terme de fregament ($mx''=-kx-ax'$, $a>0$) l'energia decreix estrictament, si no és que $x(t)\equiv 0$.

Solució: Sigui: $E(t) = \frac{1}{2}m(x'(t))^2+\frac{1}{2}kx(t)^2$ energia mecànica del sistema

(i) Sense fricció ($a=0$):

$$\frac{d}{dt}(E(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(x'(t))^2+\frac{1}{2}k(x(t))^2\right) = mx'(t)x''(t)+kx(t)x'(t) = x'(t)(mx''(t)+kx(t))$$

$$= x'(t)(-kx(t)+kx(t)) = 0 \Longrightarrow E(t) = \frac{1}{2}m{x'_0}^2+\frac{1}{2}kx_0^2 = E(t_0) = \text{ct}.$$

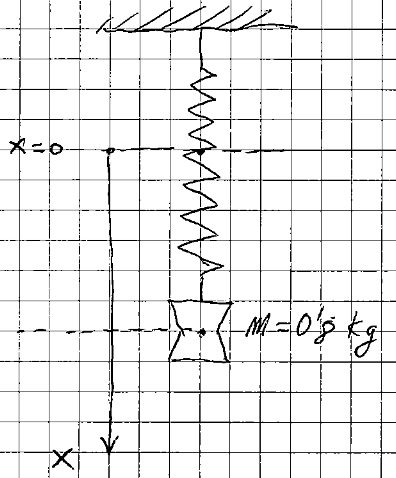
(ii) Amb fricció ($a>0$):

$$\frac{d}{dt}(E(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(x'(t))^2+\frac{1}{2}k(x(t))^2\right) = x'(t)\cdot(mx''(t)+kx(t)) = x'(t)\cdot(-kx(t)-$$

$$-ax'(t)+kx(t)) = -ax'(t)^2 \leq 0 \Longrightarrow E(t)\leq E(t_0)\ \forall t\geq t_0$$

(l'energia decreix, excepte pel cas trivial $x(t)\equiv 0$).

5) D'una molla vertical de constant 0'5 N/m es penja una massa de 0'8 kg. El medi ofereix una resistència igual a $\sqrt{2}$ vegades la velocitat instantània. El cos es deixa anar des de la posició d'equilibri amb una velocitat de 1'5 m/s dirigida cap avall. Trobeu l'instant en què el cos assoleix el seu desplaçament màxim respecte a la posició d'equilibri. Quina és la posició del cos en aquest instant?



$m x'' = mg - \lambda x - a x'$ amb $\lambda = 0'5\, N/m$, $m = 0'8\,kg$, $a = \sqrt{2}$

Canvi de funció: $x = \frac{mg}{\lambda} + \bar{x}$ (desplaçament respecte la posició d'equilibri). Llavors,

$$m\bar{x}'' = mg - \lambda\left(\frac{mg}{\lambda} + \bar{x}\right) - a\bar{x}' = -mg + mg - \lambda\bar{x} - a\bar{x}'$$

$$\iff \bar{x}'' + 2\frac{a}{2m}\bar{x}' + \frac{\lambda}{m}\bar{x} = 0$$

i obtenim oscil·lacions lliures esmorteïdes amb:

$$\omega = \sqrt{\lambda/m} = \sqrt{\frac{0'5}{0'8}} = \sqrt{\frac{5}{8}}, \quad K = \sqrt{\frac{a}{2m}} = \frac{\sqrt{2}}{1'6} = \frac{5\sqrt{2}}{8}.$$

$$m_{1,2} = -K \pm \sqrt{K^2 - \omega^2} = -\frac{5\sqrt{2}}{8} \pm \sqrt{\frac{50}{64} - \frac{5}{8}} = -\frac{5\sqrt{2}}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{50-40} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(5 \mp \sqrt{5})$$

$$= \begin{cases} m_1 = -0'4886\ldots \\ m_2 = -1'2792\ldots \end{cases} \qquad m_2 = -1'2792\ldots < m_1 = -0'4886 < 0$$

[Cas sobreesmorteït]

$\bar{x}_h(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$ i introduint les c.i.: $\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ m_1 c_1 + m_2 c_2 &= 1'5 \end{aligned}\right\}$: $c_2 = -c_1 = \frac{1'5}{m_2 - m_1}$, $c_1 = \frac{1'5}{m_1 - m_2}$

s'obté: $\bar{x}_h(t) = \frac{1'5}{m_1 - m_2}\left(e^{m_1 t} - e^{m_2 t}\right)$.

Signi t^* l'instant el desplaçament màxim respecte la posició d'equilibri, llavors:

$$0 = \bar{x}_h'(t^*) = \frac{1'5}{m_1 - m_2}\left(m_1 e^{m_1 t} - m_2 e^{m_2 t}\right) \implies t^* = \frac{\log\frac{m_2}{m_1}}{m_1 - m_2} = 1'2174\ldots,$$

i en aquest instant, el desplaçament respecte la posició d'equilibri és:

$$\bar{x}_h(t^*) = \frac{1'5}{m_1 - m_2}\left(e^{m_1 t^*} - e^{m_2 t^*}\right) = 0'6469\ldots\ m$$

6) En el cas del moviment sub-esmorteït $x(t)$, mostren que els successius valors màxims relatius de $x(t)$ (o els successius mínims relatius) formen una progressió geomètrica.

Solució. $K < \omega$ (cas sub-esmorteït)

$$x_h(t) = A e^{-Kt}\sin(\Omega t + \varphi), \text{ on } \Omega = \sqrt{\omega^2 - K^2};\ K, \omega > 0$$

(i) Calculem els punts crítics, i.e. punts t.q.: $x_h'(t) = -KAe^{-Kt}\sin(\Omega t + \varphi) + A\Omega e^{-Kt}\cos(\Omega t + \varphi) = 0$,

llavors $x_h'(\tau) = 0 \iff \tan(\Omega\tau + \varphi) = \Omega/K \iff \tau = \frac{1}{\Omega}\left(\arctan\frac{\Omega}{K} - \varphi + n\pi\right), n \in \mathbb{Z}$.

Definim $\tau_n := \frac{1}{\Omega}\left(\arctan\frac{\Omega}{K} - \varphi + n\pi\right)$ amb $n = 0, 1, 2, \ldots$ i on agafem $\arctan\frac{\Omega}{K} \in [0, \pi/2]$

(ii) Discussió dels punts crítics: calculem la 2ª derivada, $x_h''(t)$ en $t = \tau_n$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$x_h''(t) = K^2 A e^{-Kt}\sin(\Omega t + \varphi) - 2K\Omega A e^{-Kt}\cos(\Omega t + \varphi) - A\Omega^2 e^{-Kt}\sin(\Omega t + \varphi)$$

$$= A(K^2 - \Omega^2)e^{-Kt}\sin(\Omega t + \varphi) - 2K\Omega e^{-Kt}\cos(\Omega t + \varphi).$$

$$x_h''(\tau_m) = A e^{-K\tau_m}\cos(\Omega\tau_m+\varphi)\left[(K^2-\Omega^2)\tan(\Omega\tau_m+\varphi)-2K\Omega\right]$$

$$= A e^{-K\tau_m}\cos(\Omega\tau_m+\varphi)\left[(2K^2-\omega^2)\cdot\frac{\Omega}{K}-2K\Omega\right]$$

$$= -\frac{A\omega^2\Omega}{K}e^{-K\tau_m}\cos\left(\arctan\frac{\Omega}{K}+m\pi\right) \overset{(*)}{=} (-1)^{m+1}\frac{\omega^2}{K}\,\frac{\Omega A e^{-K\tau_m}}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{K^2}-1}} =$$

$$= (-1)^{m+1}\omega\,\Omega A e^{\frac{K}{\Omega}\left(\varphi-\arctan\frac{\Omega}{K}\right)}\, e^{-\frac{K\pi}{\Omega}m} = (-1)^{m+1}\gamma e^{-\sigma m}$$

(*) $$\cos\left(\arctan\frac{\Omega}{K}+m\pi\right) = (-1)^m\cos\left(\arctan\frac{\Omega}{K}\right) = (-1)^m\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\Omega^2}{K^2}}} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{K^2}-1}} = \frac{K(-1)^m}{\omega}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}\;;\; -\pi<\alpha<\pi$$

essent:

$$\gamma = \gamma(\omega,K,\varphi,A) = \omega\sqrt{\omega^2-K^2}\,A\, e^{\frac{\varphi-\arctan\left(\frac{\sqrt{\omega^2-K^2}}{K}\right)}{\sqrt{\omega^2-K^2}}}$$

$$\sigma = \sigma(K,\omega) = \frac{K\pi}{\sqrt{\omega^2-K^2}}$$

m parell: $m=2p \Rightarrow \tau_p^M = \tau_{2p} \Rightarrow x_h''(\tau_p^M) = -\gamma e^{-2\sigma p} < 0$ Màx relatiu: $p=0,1,2,\ldots$

m senar: $m=2p+1 \Rightarrow \tau_p^m = \tau_{2p+1} \Rightarrow x_h''(\tau_p^m) = \gamma' e^{-2\sigma p} > 0$ Mín relatiu $p=0,1,2,\ldots$ i amb $\gamma' = \gamma e^{-\sigma}$.

Valor de x_h als màxims i mínims relatius:

$$x_p^M := x_h(\tau_p^M) = \frac{\Omega}{\omega}A e^{\frac{K}{\Omega}\left(\varphi-\arctan\frac{\Omega}{K}\right)} e^{-\frac{2K\pi}{\Omega}p} = X e^{-2\sigma p},$$

essent: $X = X(\omega,K,\varphi,A) = \frac{\Omega}{\omega}e^{\frac{K}{\Omega}\left(\varphi-\arctan\frac{\Omega}{K}\right)}$

$$x_p^m := x_h(\tau_p^m) = -X e^{-\sigma} e^{-2\sigma p} = -X' e^{-2\sigma p},$$

essent $X' = X e^{-\sigma}$

$$\frac{x_{p+1}^M}{x_p^M} = \frac{X e^{-2\sigma(p+1)}}{X e^{-2\sigma p}} = e^{-2\sigma}\;;\quad \frac{x_{p+1}^m}{x_p^m} = \frac{-X' e^{-2\sigma(p+1)}}{-X' e^{-2\sigma p}} = e^{-2\sigma}.$$

Per tant els màxims i mínims relatius formen una progressió geomètrica.

Oscil·lacions esmorteïdes forçades

$$x'' + 2Kx' + \omega^2 x = b(t) \quad \text{amb } K>0,\ \omega>0,\ b(t) \text{ contínua i } p\text{-periòdica en } \mathbb{R}\ (p>0) \quad (*)$$

Teorema 1. L'equació $(*)$ té una única solució periòdica de període p, $u(t)$ i totes les altres solucions $x(t)$ compleixen que $\lim_{t\to+\infty} |u(t)-x(t)| = 0$.

Remarca. De fet, del teorema mateix es dedueix que $u(t)$ no només és l'única solució p-periòdica sinó que és l'única solució periòdica.

La demostració d'aquest teorema requereix dos lemes previs.

Lema 1: $x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = b(t)$ amb a_1, a_0 ctnts. qualssevol; $b(t)$ contínua en $\mathbb{R}$ i p-periòdica amb $p>0$ (podria ser $b(t)\equiv 0$). Sigui $u(t)$ una solució. Aleshores $u(t)$ és p-periòdica si i només si $u(0)=u(p)$ i $u'(0)=u'(p)$.

◁ Demostració: $\Longrightarrow$ Obvi.

$\Longleftarrow$ Considerem $v(t) = u(t+p) - u(t)$. Llavors $v(t)$ és solució del PVI:

$$x'' + a_1 x' + a_0 x = 0$$
$$x(0)=0,\ x'(0)=0$$

però aquest PVI també té per solució $x(t)\equiv 0$ (i.e. $x(t)=0\ \forall t$). Llavors, per la unicitat de solucions $v(t) = u(t+p)-u(t) = 0\ \forall t \Longrightarrow u(t+p)=u(t)\ \forall t \Longrightarrow$ la solució $u(t)$ és periòdica de període p. ▷

Lema 2. Sigui $u_1(t), u_2(t)$ un CFS de $x''+a_1x'+a_0x=0$ amb a_1, a_0 ctnts. qualssevol. Sigui $p>0$. Aquesta equació té una solució periòdica de període p diferent de $x(t)\equiv 0$ si i sols si

$$\det A = 0, \quad \text{essent} \quad A = \begin{pmatrix} u_1(0)-u_1(p) & u_2(0)-u_2(p) \\ u_1'(0)-u_1'(p) & u_2'(0)-u_2'(p) \end{pmatrix}$$

◁ Demostració. $u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$. Pel lema 1 $u(t)$ p-periòdica sii:

$$\begin{matrix} c_1u_1(0)+c_2u_2(0) = c_1u_1(p)+c_2u_2(p) \\ c_1u_1'(0)+c_2u_2'(0) = c_1u_1'(p)+c_2u_2'(p) \end{matrix} \iff \begin{matrix} c_1(u_1(0)-u_1(p)) + c_2(u_2(0)-u_2(p)) = 0 \\ c_1(u_1'(0)-u_1'(p)) + c_2(u_2'(0)-u_2'(p)) = 0 \end{matrix}$$

i aquest sistema té solució diferent de la solució trivial ($c_1=0=c_2$) si i només si el determinant val 0. ▷

Demostració (del teorema 1). $\{u_1(t), u_2(t)\}$ CFS de l'edo homogènia: $x''+2Kx'+\omega^2x=0$. Com que $K>0$ aquesta equació no té cap solució no nul·la p-periòdica (totes tendeixen a zero). Per tant, pel lema 2, resulta que $\det\begin{pmatrix} u_1(0)-u_1(p) & u_2(0)-u_2(p) \\ u_1'(0)-u_1'(p) & u_2'(0)-u_2'(p)\end{pmatrix} \neq 0$. D'altra banda, una solució de (3) ve donada per $u(t)=C_1u_1(t)+C_2u_2(t)+w(t)$ on $w(t)$ és una solució particular de (*). Pel lema 1 $u(t)$ tindrà període p sii:

$$\begin{aligned} C_1u_1(0)+C_2u_2(0)+w(0) &= C_1u_1(p)+C_2u_2(p)+w(p) \\ C_1u_1'(0)+C_2u_2'(0)+w'(0) &= C_1u_1'(p)+C_2u_2'(p)+w'(p) \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} u_1(0)-u_1(p) & u_2(0)-u_2(p) \\ u_1'(0)-u_1'(p) & u_2'(0)-u_2'(p)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(p)-w(0) \\ w'(p)-w'(0)\end{pmatrix}$$

i com que aquest $\det(\ldots)\neq 0 \implies \exists!$ solució $(C_1,C_2) \implies$ l'oscil·lació (*) té una única solució periòdica de període p

Remarca 1 notem que si $x(t)$ és una altra solució de (*), llavors $u(t)-x(t)$ és solució de l'homogènia associada, que és l'EDO d'una solució lliure esmorteïda i per tant $\lim_{t\to+\infty}|u(t)-x(t)|=0 \implies u(t)$ és l'única solució periòdica.

Remarca 2. Aquest teorema ens porta a la noció de règim transitori en contraposició de règim permanent (la solució periòdica). En molts casos reals l'aproximació a la solució periòdica és tan ràpida que només s'estudia el règimen permanent.

Exemple important.

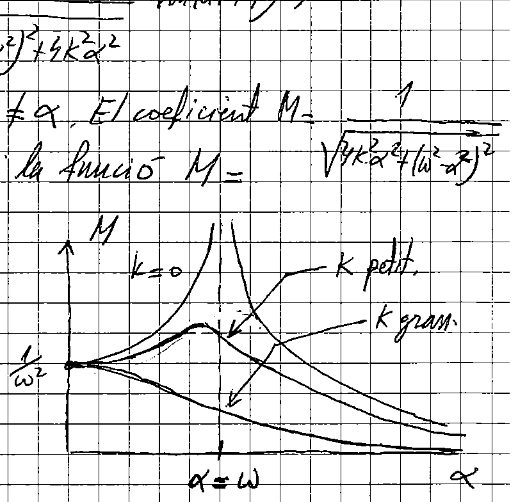
$$x''+2kx'+\omega^2x = A\sin\alpha t$$

que segons el teorema té una única solució periòdica:

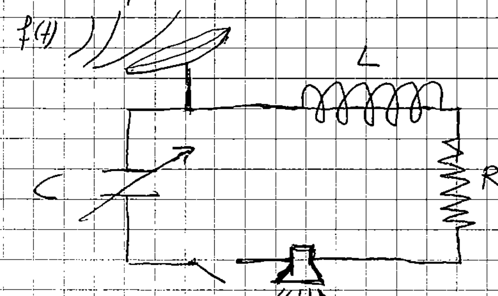
$$u(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4k^2\alpha^2}}\sin(\alpha t+\varphi),$$

on $-\pi<\varphi<0$ amb $\varphi=-\pi/2$ si $\omega=\alpha$ i $\tan\varphi=\frac{2k\alpha}{\alpha^2-\omega^2}$ si $\omega\neq\alpha$. El coeficient $M=\frac{1}{\sqrt{4k^2\alpha^2+(\omega^2-\alpha^2)^2}}$ s'anomena factor d'amplificació o magnificació de l'oscil·lació i la funció $M=F(\alpha)$ per k fixat s'anomena corba de resposta. En particular:

- $k\ll 1$ & $\alpha\simeq\omega \implies M\gg 1$ (ressonància)
- les corbes de resposta tenen un màxim $\iff 2k^2<\omega^2$



Receptor de radio elemental.



Ja sabem que l'edo és:

$$x''+2kx'+\omega^2x=b(t),\ k=\frac{R}{2L},\ \omega=\sqrt{\frac{1}{LC}},\ b(t)=\frac{f(t)}{L}$$

Suposem que $b(t)=\sum_j b_j(t)$, $b_j(t)=A_j\sin(\alpha_j t)$. L'exemple anterior ens diu que el règimen permanent de l'edo. $x''+2kx'+\omega^2x=b_j(t)$ és $u_j(t)=M_jA_j\sin(\alpha_jt+\varphi_j)$, amb $M_j=\frac{1}{\sqrt{4k^2\alpha_j^2+(\omega^2-\alpha_j^2)^2}}$, $\varphi_j\in(-\pi,0)$

Per linealitat, el "règimen permanent" de l'EDO $x''+2kx'+\omega^2x=b(t)=\sum_j b_j$ és:

$$u(t)=\sum_j u_j(t)=\sum_j\frac{A_j}{\sqrt{4k^2\alpha_j^2+(\omega^2-\alpha_j^2)^2}}\sin(\alpha_jt+\varphi_j)$$

Idea: Variant $C\longrightarrow$ Variem $\omega \longrightarrow M_j\gg 1$ si $\omega\simeq\alpha_j$ & $k\ll 1 \longrightarrow$ Sintonitzem l'emissora j.

Problema 7. Trobeu l'única solució periòdica de l'equació

$$\varepsilon^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \sin \gamma t$$

(amb $\varepsilon, \lambda, \omega > 0$) i feu $\varepsilon \to 0$. Interpreteu els resultats.

Solució. El règimen permanent (i.e. l'única solució periòdica de l'EDO) ve donat per la solució:

$$u_\varepsilon(t) = \frac{F_0}{\sqrt{4\lambda^2\gamma^2 + (\omega^2 - \varepsilon^2\gamma^2)^2}} \sin(\gamma t + \varphi_\varepsilon),$$

on $\varphi_\varepsilon \in (-\pi, 0)$; $\varphi_\varepsilon = -\pi/2$ si $\omega = \varepsilon\gamma$, $tg\, \varphi_\varepsilon = \frac{2\lambda\gamma}{\varepsilon\gamma^2 - \omega^2}$ si $\omega \neq \varepsilon\gamma$

Fent $\varepsilon \to 0$, obtenim: $u(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t) = \frac{F_0}{\sqrt{4\lambda^2\gamma^2 + \omega^4}} \sin(\gamma t + \varphi)$,

on ara $\varphi \in (-\pi/2, 0)$ amb $tg\, \varphi = \frac{2\lambda\gamma}{-\omega^2} \Longrightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{4\lambda^2\gamma^2 + \omega^4}}$ & $\sin\varphi = \frac{-2\lambda\gamma}{\sqrt{4\lambda^2\gamma^2 + \omega^2}}$

I es comprova que:

$$u(t) = \frac{F_0}{\sqrt{4\lambda^2\gamma^2 + \omega^4}} \sin(\gamma t + \varphi)$$

és l'única solució periòdica de l'EDO de 1er ordre: $2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \sin \gamma t$. (&)

$$2\lambda u'(t) + \omega^2 u(t) = \frac{2\lambda\gamma F_0}{\sqrt{4\lambda^2\gamma^2 + \omega^4}} \cos(\gamma t + \varphi) + \frac{\omega^2 F_0}{\sqrt{4\lambda^2\gamma^2 + \omega^4}} \sin(\gamma t + \varphi) =$$

$$= F_0 \sin(\gamma t + \varphi)\cos\varphi - F_0 \cos(\gamma t + \varphi)\sin\varphi = F_0 \sin(\gamma t + \varphi - \varphi) = F_0 \sin \gamma t.$$

i si $x(t)$ és qualsevol altra solució, la seva diferència és solució de l'EDO homogènia $2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$ amb $\lambda, \omega > 0$, que té per solució general $x_h(t) = c e^{-\frac{\omega^2}{2\lambda} t} \longrightarrow 0$ quan $t \to \infty$. Per tant:

$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - u(t)| = 0 \Longrightarrow u(t)$ és una solució periòdica de l'EDO de 1er ordre (&).

Oscil·lacions forçades no esmorteïdes (Problemes 8-10)

Volem trobar totes les solucions periòdiques de l'EDO: $x'' + \omega^2 x = b(t)$

Teorema 2

- $b(t)$ no és periòdica $\Longrightarrow$ no hi ha solucions periòdiques
- Si $b(t)$ és p-periòdica i $p_0 = 2\pi/\omega$ es satisfà

  $*$ $p/p_0 \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \exists!$ solució periòdica. El període d'aquesta solució és $T = p$

  $**$ $p/p_0 = m/n \in \mathbb{Q}$ amb $MCD(m,n) = 1$ (i.e. m/n fracció irreduïble) $\Longrightarrow$ Totes les solucions són periòdiques, una és de període $T = p$. Totes les altres són de període $T = mp$.

  $***$ $p/p_0 \in \mathbb{N}$ Llavors:

  — Si $\int_0^p b(t)\sin(\omega t)\,dt = \int_0^p b(t)\cos(\omega t)\,dt = 0 \Longrightarrow$ totes les solucions són p periòdiques

  — En cas contrari, totes les solucions són no acotades (ressonància no esmorteïda). En particular, no hi ha solucions periòdiques. $\square$

Remarca: Quan $\exists!$ solució periòdica de període p es calcula imposant que la funció:

$$x(t) = x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t + \frac{1}{\omega}\int_0^t b(s)\sin[\omega(t-s)]\,ds \qquad (*)$$

verifiqui: $\quad x(0) = x(p) \;\&\; x'(0) = x'(p)$. (i.e. apliquem el Lema 1). En efecte:

per variació de paràmetres veiem que la solució general de l'EDO és la funció $(*)$ doncs:

- $\{x_1(t) = \cos\omega t,\; x_2(t) = \sin\omega t\}$ és un CFS
- $W(t) = W[\cos\omega t, \sin\omega t] = \omega$ és el seu wronskià.
- $u_1(t) = -\frac{1}{\omega}\int_0^t b(s)\sin(\omega s)\,ds \;\&\; u_2 = \frac{1}{\omega}\int_0^t b(s)\cos(\omega s)\,ds$
- $x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t b(s)\sin[\omega(t-s)]\,ds$

Aleshores, d'entre totes les funcions $(*)$ hi ha una p-periòdica que podem determinar imposant que $x(0) = x(p)$ i $x'(0) = x'(p)$, i.e. resolent el sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} (1-\cos\omega p)\,c_1 - \sin(\omega p)\,c_2 &= \frac{1}{\omega}\int_0^p b(s)\sin[\omega(p-s)]\,ds \\ \omega\sin\omega p\; c_1 + \omega(1-\cos\omega p)\,c_2 &= \int_0^p b(s)\cos[\omega(p-s)]\,ds \end{aligned} \qquad (**)}$$

$x(0) = x(p) \Leftrightarrow c_1 = \cos\omega p + c_2\sin\omega p + \frac{1}{\omega}\int_0^p b(s)\sin[\omega(p-s)]\,ds \Leftrightarrow (1-\cos\omega p)\,c_1 - \sin\omega p\; c_2 = \frac{1}{\omega}\int_0^p b(s)\sin[\omega(p-s)]\,ds$

$x'(0) = x'(p) \Leftrightarrow \omega c_2 = -\omega c_1\sin\omega p + \omega c_2\cos\omega p + \int_0^p b(s)\cos[\omega(p-s)]\,ds \Leftrightarrow \omega\sin\omega p\; c_1 + (1-\cos\omega p)\,c_2 = \int_0^p b(s)\cos[\omega(p-s)]\,ds$

8. Trobeu el període mínim de cadascuna de les funcions $b(t)$. Deduïu en cada cas si l'equació $x''+x=b(t)$ té solucions periòdiques, i en cas afirmatiu calculeu-les i trobeu els seus períodes mínims:

a) $b(t)=\sin\pi t$

b) $b(t)=\sin 2t+\sin 3t$

c) $b(t)=4\sin^3 t$

d) $b(t)=2\sin^2 t$

Solució. Primer de tot, trobarem la solució ~~general~~ general

$$x''+x=0 \Rightarrow P(m)=m^2+1, \text{ arrels } m=\pm i \Rightarrow x_h(t)=c_1\cos t+c_2\sin t \text{ i } x_p(t)=\int_0^t b(s)\sin(t-s)\,ds,$$

per tant: $x_g(t)=c_1\cos t+c_2\sin t+\int_0^t b(s)\sin(t-s)\,ds$

a) $b(t)=\sin\pi t$. Signi p el període mínim de $b(t)$: $p=\frac{2\pi}{\pi}=2$, i $p_0=\frac{2\pi}{1} \Rightarrow \frac{p}{p_0}=\frac{2}{2\pi}=\frac{1}{\pi}\notin\mathbb{Q}$ i pel teorema 2 $\exists!$ solució periòdica, de període $p=2$. Per trobar-la, tenim que c_1 i c_2 compleixen el sistema

$$(1-\cos 2)c_1-\sin 2\,c_2=\frac{1}{1}\int_0^2\sin(\pi s)\sin(2-s)\,ds=\dots=\frac{\pi\sin 2}{\pi^2-1},$$

$$\sin 2\,c_1+(1-\cos 2)c_2=\int_0^2\sin(\pi s)\cos(2-s)\,ds=\dots=\frac{\pi(\cos 2-1)}{\pi^2-1},$$

que té per solució: $c_1=0$, $c_2=\frac{\pi}{1-\pi^2}$. I per tant la solució 2-periòdica buscada és:

$$u(t)=\frac{\pi}{1-\pi^2}\sin t+\int_0^t\sin(\pi s)\sin(t-s)\,ds=\frac{\pi}{1-\pi^2}\sin t+\frac{\pi\sin t-\sin\pi t}{\pi^2-1}=\frac{\sin\pi t}{1-\pi^2}.$$

Remarca. En aquest cas, $p/p_0\notin\mathbb{Q}$, podem tenir ~~...~~ la solució p-periòdica calculant, quan sigui possible, la solució particular pels mètode dels coeficients indeterminats:

$$x_p(t)=d_1\cos\pi t+d_2\sin\pi t \Rightarrow x_p'(t)=-\pi d_1\sin\pi t+\pi d_2\cos\pi t \Rightarrow x_p''(t)=-\pi^2 d_1\cos\pi t-$$

$$-\pi^2 d_2\sin\pi t \Rightarrow \sin\pi t=x_p''(t)+x_p(t)=-\pi^2 d_1\cos\pi t-\pi^2 d_2\sin\pi t+d_1\cos\pi t+d_2\sin\pi t=$$

$$=(1-\pi^2)d_1\cos\pi t+(1-\pi^2)d_2\sin\pi t \Rightarrow d_1=0,\ d_2=\frac{1}{1-\pi^2}.$$

Aleshores la solució 2-periòdica ve donada directament per aquesta solució particular, i.e. $u(t)=x_p(t)=\frac{\sin\pi t}{1-\pi^2}$.

NOTE BOOK

b) $b(t) = \sin 2t + \sin 3t$. Veiem que aquesta funció és la suma de dues funcions periòdiques: $b_1(t) = \sin 2t$, de període $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$, i $b_2(t) = \sin 3t$, de període $T_2 = \frac{2\pi}{3}$. Com que T_1 i T_2 són commesurables (i.e., el seu quocient és racional): $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{2\pi/3} = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$, la suma $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$ serà periòdica amb període p igual al mínim dels múltiples comuns de T_1 i T_2; i.e.: $p = \min\limits_{k_1, k_2 \in \mathbb{N}} \{k_1 T_1 = k_2 T_2\}$.

m	1	2	3
mT_1	π	2π	3π
mT_2	$2\pi/3$	$4\pi/3$	2π

Segons aquesta taula: $p = 2\pi$ ($k_1 = 2$, $k_2 = 3$); aleshores el quocient $\frac{p}{p_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \in \mathbb{N}$. Segons el teorema 2 —pàg. 10— hem de mirar si s'anul·len simultàniament les integrals $\int_0^p b(t) \sin \omega t \, dt$ i $\int_0^p b(t) \cos \omega t \, dt$:

$$\int_0^{2\pi} (\sin 2s + \sin 3s) \sin s \, ds = \int_0^{2\pi} \sin 2s \sin s \, ds + \int_0^{2\pi} \sin 3s \sin s \, ds = 0, \text{ i també:}$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin 2s + \sin 3s) \cos s \, ds = \int_0^{2\pi} \sin 2s \cos s \, ds + \int_0^{2\pi} \sin 3s \cos s \, ds = 0.$$

I els resultats esmentats ens asseguren que, sota aquestes condicions, totes les solucions són periòdiques de període $p = 2\pi$. D'acord amb això, si escrivim la solució general (fórmula (*) pàg. 10)

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \int_0^t (\sin 2s + \sin 3s) \sin(t-s) \, ds = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{25}{24} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t - \frac{1}{8} \sin 3t,$$

amb la qual cosa queda clar que totes les solucions

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t - \frac{1}{8} \sin 3t; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

són 2π-periòdiques.

Remarca. Es clar que aquí també podríem haver calculat $x_p(t) = -\frac{1}{3} \sin 2t - \frac{1}{8} \sin 3t$ pel mètode dels coeficients indeterminats.

c) $b(t) = 4 \sin^3 t = 4 \sin t \sin^2 t = 2 \sin t (1 - \cos 2t) = 2 \sin t - 2 \sin t \cos 2t = 2 \sin t - [\sin(2t+t) + \sin(t-2t)] = 2 \sin t - \sin 3t + \sin t = 3 \sin t - \sin 3t$.

Per tant $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$ amb $b_1(t) = 3 \sin t$ ($T_1 = 2\pi$), $b_2(t) = -\sin 3t$ ($T_2 = \frac{2\pi}{3}$); i com que $\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi/3}{2\pi} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, $b(t)$ és periòdica i resulta que el seu període és $p = 2\pi$ (veure taula)

Llavors:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \in \mathbb{N}.$$

m	1	2	3
mT_1	2π	4π	6π
mT_2	$2\pi/3$	$4\pi/3$	2π

Però en aquest cas les corresponents integrals no s'anul·len. Així, per exemple:

$$\int_0^p b(t)\sin(\omega t)\,dt = \int_0^{2\pi} 4\sin^3 s \sin s\,ds = 4\int_0^{2\pi}\sin^4 s\,ds \neq 0 \Rightarrow$$ el problema no té cap solució periòdica. De fet, si calculem la solució general:

$$x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + \frac{1}{1}\int_0^t 4\sin^3 s\,\sin(t-s)\,ds = c_1\cos t + c_2\sin t + 4\left(\int_0^t \sin^3 s\cos s\,ds\right)\sin t -$$

$$-4\left(\int_0^t \sin^4 s\,ds\right)\cos t \overset{(*)}{=} c_1\cos t + c_2\sin t + \frac{9}{8}\sin t + \frac{1}{8}\sin 3t - \frac{3t}{2}\cos t$$

(*)

$$\int_0^t \sin^3 s\cos s\,ds = \left[\frac{\sin^4 s}{4}\right]_0^t = \frac{\sin^4 t}{4} = \frac{3}{32} - \frac{\cos 2t}{8} + \frac{\cos 4t}{32}.$$

$$\int_0^t \sin^4 s\,ds = \frac{3t}{8} - \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 4t}{32}.$$

$$\therefore\ x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + \frac{1}{8}\sin 3t - \frac{3t}{2}\cos t,\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

veiem que totes les solucions són no acotades (ressonància no esmorteïda)

d) $b(t) = 2\sin^2 t = 1-\cos 2t \Rightarrow p = \pi \Rightarrow \frac{p}{p_0} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

Segons el ~~problema~~ teorema 2, el problema té una única solució π-periòdica, i totes les altres són periòdiques de període 2π. En efecte:

$$(1-\cos\pi)\,c_1 - \sin\pi\, c_2 = \frac{1}{1}\int_0^\pi 2\sin^2 s\,\sin(\pi-s)\,ds = \frac{8}{3} \Rightarrow c_1 = 4/3,$$

$$\sin\pi\, c_1 + (1-\cos\pi)\,c_2 = \int_0^\pi 2\sin^2 s\cos(\pi-s)\,ds = 0 \Rightarrow c_2 = 0,$$

i aleshores la solució π-periòdica buscada és:

$$u(t) = 4/3\cos t + \frac{1}{1}\int_0^t 2\sin^2 s\,\sin(t-s)\,ds = \cancel{\tfrac{4}{3}\cos t} - \cancel{\tfrac{4}{3}\cos t} + \frac{1}{3}\cos(2t) + 1$$

$$\therefore\ u(t) = 1 + \frac{1}{3}\cos(2t)$$

i totes les altres solucions:

$$x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + 1 + \frac{1}{3}\cos(2t)$$

són periòdiques, de període mínim 2π (si c_1, c_2 no són zero simultàniament).

9) a) Mostreu que la solució de

$$x'' + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t$$
$$x(0) = x'(0) = 0$$

es pot escriure de la forma

$$x(t) = \frac{-2F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \sin \tfrac{1}{2}(\gamma - \omega)t \, \sin \tfrac{1}{2}(\gamma + \omega)t$$

(si $\omega^2 \neq \gamma^2$).

b) Calculeu $\lim\limits_{\gamma \to \omega} x(t)$

c) Mostreu que si $\varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma - \omega)$ és prou petit, $x(t)$ és aproximadament $\frac{F_0}{2\varepsilon\omega} \sin \varepsilon t \sin \omega t$ (es considera ω fixa i $\gamma \to \omega$).

d) Feu $\varepsilon \to 0$ en aquesta aproximació i representeu-la gràficament (fenòmen de "polsació").

Solució: a) Busquem una solució particular de la forma: $x_p(t) = d_1 \cos \gamma t + d_2 \sin \gamma t$:

$$F_0 \cos \gamma t = -d_1 \gamma^2 \cos \gamma t - d_2 \gamma^2 \sin \gamma t + \omega^2 d_1 \cos \gamma t + \omega^2 d_2 \sin \gamma t = d_1(\omega^2 - \gamma^2)\cos \gamma t + d_2(\omega^2 - \gamma^2) \sin \gamma t$$

$$\Longrightarrow \quad d_2 = 0, \; d_1 = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \quad (\text{si } \omega^2 \neq \gamma^2) \Longrightarrow x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \gamma t$$

d'on:

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \gamma t$$

c.i.: $x(0) = c_1 + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} = 0 \Longrightarrow c_1 = -\frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}$.

$x'(0) = c_2 \omega = 0 \Longrightarrow c_2 = 0$.

La solució del PVI resulta doncs:

$$x(t) = -\frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \gamma t = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \{ \cos \gamma t - \cos \omega t \} =$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{-2F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \sin \tfrac{1}{2}(\gamma - \omega)t \, \sin \tfrac{1}{2}(\gamma + \omega)t$$

(*) $\left.\begin{array}{l} \gamma t = a + b \\ \omega t = a - b \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} a = (\gamma t + \omega t)/2 \\ b = (\gamma t - \omega t)/2 \end{array}$ i llavors: $\cos \gamma t - \cos \omega t = \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b$ $= -2 \sin \frac{(\gamma - \omega)t}{2} \sin \frac{(\gamma + \omega)t}{2}$.

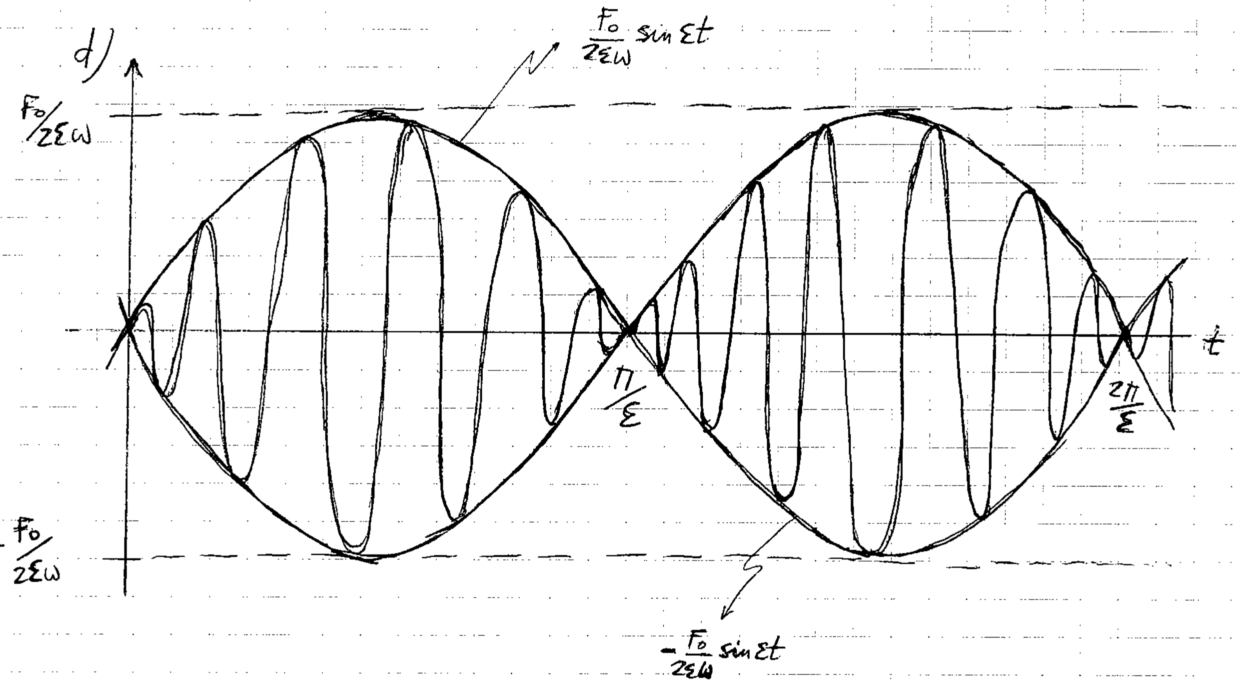
b) $$\lim_{\gamma \to \omega} x(t) = \lim_{\gamma \to \omega} \frac{2F_0 t}{\gamma + \omega} \sin\left[\tfrac{1}{2}(\gamma + \omega)t\right] \frac{\sin\left[\frac{1}{2}(\gamma - \omega)t\right]}{\frac{1}{2}(\gamma - \omega)t} = \frac{F_0 t}{2\omega} \sin(\omega t).$$

c) $\varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma-\omega) \Leftrightarrow 2\varepsilon = \gamma-\omega \Leftrightarrow \gamma = 2\varepsilon+\omega \Leftrightarrow \gamma+\omega = 2(\varepsilon+\omega)$. Aleshores:

$$x(t) = \frac{2F_0}{(\gamma-\omega)(\gamma+\omega)} \sin \tfrac{1}{2}(\gamma-\omega)t \sin \tfrac{1}{2}(\gamma+\omega)t = \frac{F_0}{2\varepsilon(\varepsilon+\omega)} \sin[(\omega+\varepsilon)t] \sin \varepsilon t \underset{0<\varepsilon<<\omega}{\simeq}$$

$$\simeq \frac{F_0}{2\varepsilon\omega} \sin \omega t \sin \varepsilon t$$

d)



10) Considerem la funció $f(t) = \sin at + \sin bt$, de manera que a/b és irracional. Demostreu que $f(t)$ no és periòdica.

Solució. Suposem que hi ha $p>0$ t.q. $f(t+p) = f(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Equivalentment:

$$\sin(a+p)t + \sin(b+p)t = \sin at \cos pt + \cos at \sin pt + \sin bt \cos pt + \cos bt \sin pt$$
$$= \sin at + \sin bt$$

i si agrupem: $\sin at(1-\cos ap) + \sin bt(1-\cos bp) - \sin ap \cos at - \sin bp \cos bt = 0$, i com que les funcions $\sin at, \sin bt, \cos at, \cos bt$ són l.i. en $\mathbb{R}$ cal:

$\cos ap = 1$ & $\sin ap = 0$ & $\cos bp = 1$ & $\sin bp = 0$.

De les dues primeres tenim que, necessàriament $ap = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; mentre que de les dues segones tenim que $bp = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, necessàriament. Però, aleshores el quocient:

$$\frac{a}{b} = \frac{ap}{bp} = \frac{2k\pi}{2m\pi} = \frac{k}{m} \in \mathbb{Q} \quad \text{(contradicció)}.$$

Problema 2.16/ Trobeu l'equació lineal homogènia d'ordre mínim que té per solucions fonamentals

a) $y_1 = x$, $y_2 = 1/x$, $x > 0$

b) $y_1 = e^x$, $y_2 = \cosh x$, $y_3 = \sinh x$, $x \in \mathbb{R}$.

Solució

a) Com que hi és la funció $y_2 = 1/x$ no pot ser una EDO a coef. constants. Busquem doncs una EDO de 2^{on} ordre com: $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$.

Imposem que $y_1 = x$ signi solució: $a(x) + b(x)x = 0$
" " $y_2 = 1/x$ " " : $-a(x) + b(x)x = -2/x$

$$\left.\begin{array}{l} a(x)+b(x)x=0 \\ -a(x)+b(x)x=-2/x \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{sol.}} \begin{array}{l} a(x) = 1/x \\ b(x) = -1/x^2 \end{array}$$

I llavors l'EDO buscada és:

$$\therefore \quad x^2y'' + xy' - y = 0$$

(que segons veurem és una equació de Cauchy-Euler). Qüestió: podria trobar-se una EDO d'ordre més baix? Raoneu la resposta.

b) El polinomi $p_1(\lambda) = \lambda - 1$ anul·la e^x
" " $p_2(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)$ anul·la $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
" " $p_3(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)$ " $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

d'on $p(\lambda) = m.c.m\{p_1(\lambda), p_2(\lambda), p_3(\lambda)\} = m.c.m\{\lambda-1, (\lambda-1)(\lambda+1), (\lambda-1)(\lambda+1)\} = (\lambda-1)(\lambda+1)$ anul·la les combinacions lineals de y_1, y_2, y_3. Per tant l'operador $P(D) = D^2 - I$ anul·la y_1, y_2, y_3 i per tant aquestes tres funcions són solució de l'EDO:

$$y'' - y = 0$$

Qüestió: podria ~~trobarse~~ una edo d'ordre més baix, encara que no fos a coeficients constants? Raoneu la resposta.