4.1 Ecuaciones de Cauchy-Euler

Def. Una EDO de la forma

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$$

on a_i són constants i $g(x)$ és contínua en $\mathbb{R}^+$, reb el nom d'equació de Cauchy-Euler (C-E). Remarca: com que $a_n x^n = 0$ en $x = 0$, ens restringim a l'estudi a l'interval $\mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$ per estalviar-nos problemes.

El mètode per resoldre aquestes equacions és el següent

i) Càlul de l'equació auxiliar

Imposant que x^m verifiqui l'EDO homogènia s'obté una equació del tipus

$$P(m) = 0 \quad \text{amb} \quad P \in \mathbb{R}_n[x]$$

ii) Obtenir la solució complementària

Per cada arrel de l'equació auxiliar li associem k funcions (k = multiplicitat de l'arrel) i totes aquestes formen un conjunt fonamental de solucions (CFS). La taula següent dona les funcions associada a cada arrel.

Taula 4.1.

Arrel	Mult.	Funcions
$m \in \mathbb{R}$	k	$x^m,\ x^m \ln x, \dots, x^m (\ln x)^{k-1}$
$\alpha \pm \beta i\ (\beta \neq 0)$	k	$x^\alpha \cos(\beta \ln x),\ x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x), \dots, x^\alpha (\ln x)^{k-1} \cos(\beta \ln x)$ $x^\alpha \sin(\beta \ln x),\ x^\alpha \ln x \sin(\beta \ln x), \dots, x^\alpha (\ln x)^{k-1} \sin(\beta \ln x)$

Finalment la solució particular es calcula, per exemple, pel mètode de variació de paràmetres.

Exemples

1) $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 e^x$ fent servir variació de paràmetres (problema 4.7)

$y(x) = x^m$ solució de l'homogènia; d'aquí: $0 = m(m-1)x^m - 3mx^m + 3x^m =$
$= x^m [m(m-1) - 3m + 3]$; $P(m) = m^2 - 4m + 3$; Arrels de l'equació auxiliar $P(m) = 0$: $m = 1, 3$ i el CFS (de l'homogènia) és $\{y_1(x) = x,\ y_2(x) = x^3\}$

El wronskià és $W(x) = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Quan normalitzem l'edo queda: $y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x^2e^x =: f(x)$ i la fórmula de variació de paràmetres ens dóna la solució particular $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ on

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}\,dx = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x, \quad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}\,dx = e^x$$

$$\therefore \quad y(x) = c_1x + c_2x^3 + 2e^x(x-1). \qquad \square$$

2) $x^3y''' + 5x^2y'' + 7xy' + 8y = 0$ (Problema 4.4)

Al imponer $y(x) = x^m$ satisfaci l'EDO, obtenim l'equació auxiliar:

$$0 = m(m-1)(m-2) + 5m(m-1) + 7m + 8 = m^3 + 2m^2 + 4m + 8 = P(m)$$

i la taula és:

Arrels	Mult	Funcions
-2	1	x^{-2}
$\pm 2i$	1	$\cos(2\ln x)$, $\sin(2\ln x)$

amb la qual cosa la <u>solució general</u> vé donada per: $y(x) = \frac{c_1}{x^2} + c_2\cos(2\ln x) + c_3\sin(2\ln x)$ $\square$

Un segon mètode per resoldre l'EDO de C-E consisteix en transformar-la en una lineal a coef. ctnts. mitjançant un canvi de variable. Per exemple, si $n = 2$ l'EDO de tipo C-E:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x),$$

amb el canvi $x = e^t$ es transforma en,

$$a\ddot{\bar{y}} + (b-a)\dot{\bar{y}} + c\bar{y} = g(e^t),$$

on: $\dot{} = \frac{d}{dt}$; $' = \frac{d}{dx}$; $\bar{y}(t) = y(e^t)$.

En efecte, ja que aplicant la regla de la cadena s'obté:

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = e^{+t}\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{d\bar{y}}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{d\bar{y}}{dt}\right) = -e^{-2t}\frac{d\bar{y}}{dt} + e^{-2t}\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}$$

i substituint:

$$g(e^t) = ax^2y'' + bxy' + cy = ae^{2t}\left(-e^{-2t}\dot{\bar{y}} + e^{-2t}\ddot{\bar{y}}\right) + be^{t}e^{-t}\dot{\bar{y}} + c\bar{y}$$
$$= a\ddot{\bar{y}} + (b-a)\dot{\bar{y}} + c\bar{y} \iff a\ddot{\bar{y}} + (b-a)\dot{\bar{y}} + c\bar{y} = g(e^t)$$

Exemple

3) $x^2y'' - xy' + y = \ln x \xrightarrow{c.v.\ x=e^t} \ddot{\bar{y}} - 2\dot{\bar{y}} + \bar{y} = t \xrightarrow{\text{Tema 2}} \bar{y}(t) = c_1e^t + c_2te^t + t + 2$

i desfent el canvi: $y(x) = c_1x + c_2x\ln x + \ln x + 2$

Remarca: el canvi $x = e^t$ també serveix per $n \geq 2$. De fet, la taula 4.1 de la pàg. 1 s'ha generat amb aquest canvi a partir de la taula ... de la pàg....

4.2. Desenvolupament en sèrie de potències (s.d.p) al voltant de punts ordinaris.

Suposem que expressem l'EDO lineal homogènia de 2^{on} ordre:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (*)$$

s'expressa, dividint per $a_2(x)$ com

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad \text{amb } P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}, \quad Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}.$$

Def. Direm que $x = x_0$ és un punt ordinari de (*) quan $P(x)$ i $Q(x)$ són analítiques en x_0; és a dir, $P(x)$ i $Q(x)$ són desenvolupables en s.d.p. en $(x-x_0)$ amb radi de convergència $r>0$. En cas contrari, direm que x_0 és un punt singular de (*)

Exemples:

1) $y'' + e^xy' + (\sin x)y = 0$ no té punts singulars. Per exemple, si $x_0 = 0$: $P(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$,
$$Q(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{amb } r = +\infty \text{ per totes dues sèries.}$$

2) $xy'' + (\sin x)y = 0$ tampoc no té punts singulars. Per exemple, si $x_0 = 0$: $P(x) = 0$,
$$Q(x) = \frac{\sin x}{x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \quad \text{amb } r = +\infty.$$

3) $y'' + (\ln x)y = 0$. evidentment $x_0 = 0$ és un punt singular.

Lema: Si els coeficients $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ són polinomis sense factors (i.e. arrels) comunes, un punt $x=x_0$ és ordinari sii $a_2(x_0) \neq 0$.

Exemples:

1) $(x^2-1)y'' + 2xy' + 6y = 0$. Els seus punts singulars són ± 1.
2) $a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$ (equació del tipus C-E) $\Longrightarrow$ 0 és l'únic punt singular
3) $(x^2+1)y'' + 2xy' + 6y = 0$ $\Longrightarrow$ els seus punts singulars són $\pm i$ (Els punts singulars poden $\in \mathbb{C}$)

Objectiu: trobar les solucions en s.d.p. al voltant de punts ordinaris per les equacions (*). No serà necessari que els coeficients $a_j(x), j=0,1,2$ siguin polinomis, tot i que això facilita els càlculs. De fet, gairebé tots els problemes cauen sota aquestes condicions

Remarca: El mètode és aplicable a equacions d'ordre $n \geq 2$, però no ho farem.

El resultat principal d'aquesta secció és el següent

Teorema

Si $x=x_0$ és un punt ordinari de (*) llavors existeixen dues solucions linealment independents en s.d.p. del tipus

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} c_n (x-x_0)^n.$$

A més, les dues solucions tenen un radi de convergència més gran o igual que $R :=$ distància al punt singular més proper. En particular, el radi de convergència serà infinit si (*) no té punts singulars.

Exemple (problema 12)

$$y'' - 2xy = 0 \text{ entorn } x = x_0 = 0 \Longrightarrow y(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n,\ y'(x) = \sum_{n\geq 1} n c_n x^{n-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Llavors, quan imposem que $y(x)$ satisfaci l'EDO, obtenim:

$$0 = y'' - 2xy = \underbrace{\sum_{n\geq 2} n(n-1) c_n x^{n-2}}_{k=n-2\ (n\geq 2 \to k\geq 0)} - 2 \underbrace{\sum_{n\geq 0} c_n x^{n+1}}_{k=n+1\ (n\geq 0 \to k\geq 1)} = \sum_{k\geq 0} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k - 2 \sum_{k\geq 1} c_{k-1} x^k$$

$$= 2c_2 + \sum_{k\geq 1} \left[(k+2)(k+1)c_{k+2} - 2c_{k-1}\right] x^k \Longrightarrow \begin{cases} 2c_2 = 0 \\ (k+2)(k+1)c_{k+2} - 2c_{k-1} = 0 \\ \forall k \geq 1. \end{cases}$$

Obtenim les fórmules de recurrència: $\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_{k+2} = \dfrac{2c_{k-1}}{(k+2)(k+1)}, \forall k \geq 1 \end{cases}$

En aquest exemple (no sempre és possible fer-ho) podem obtenir una expressió tancada (c_k com a funció de k) dels coeficients, però ens limitarem a calcular els primers coeficients

$$c_0 = c_0,\ c_1 = c_1,\ c_2 = 0,\ c_3 = \frac{c_0}{3},\ c_4 = \frac{c_1}{6},\ c_5 = \frac{c_2}{10} = 0,\ c_6 = \frac{c_3}{15} = \frac{c_0}{45},$$
$$c_7 = \frac{c_4}{21} = \frac{c_1}{126}, \dots$$

I finalment escrivim la solució com:

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n = c_0 + c_1 x + \frac{c_0}{3}x^3 + \frac{c_1}{6}x^4 + \frac{c_0}{45}x^6 + \frac{c_1}{126}x^7 + O(x^9)$$
$$= c_0 \underbrace{\left[1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{45} + O(x^9)\right]}_{y_1(x)} + c_1 \underbrace{\left[x + \frac{x^4}{6} + \frac{x^7}{126} + O(x^{10})\right]}_{y_2(x)}$$

On $\left\{ y_1(x) = 1 + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^6}{45} + O(x^9),\ y_2(x) = x + \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{x^7}{126} + O(x^{10}) \right\}$ és un conjunt fonamental de solucions (CFS) amb radi de convergència $+\infty$

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \underset{x=0}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

[$W(0) \neq 0 \Rightarrow W(x) \neq 0$ $\forall x$: fórmula de Liouville]

Remarca: com ja hem dit, es pot obtenir una expressió tancada:

$$c_0 = c_0,\ c_1 = c_1,\ c_2 = 0,\ c_3 = \frac{2c_0}{2\cdot 3},\ c_4 = \frac{2c_1}{3\cdot 4},\ c_5 = \frac{2c_2}{4\cdot 5} = 0,$$
$$c_6 = \frac{2\cdot c_3}{5\cdot 6} = \frac{2^2 c_0}{2\cdot 5\cdot 3\cdot 6},\ c_7 = \frac{2c_4}{7\cdot 6} = \frac{2^2 c_1}{3\cdot 6\cdot 4\cdot 7},\ c_8 = \frac{2c_5}{8\cdot 7} = 0,$$
$$c_9 = \frac{2c_6}{9\cdot 8} = \frac{2^3 c_0}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 3\cdot 6\cdot 9},\ c_{10} = \frac{2c_7}{10\cdot 9} = \frac{2^3 c_1}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 4\cdot 7\cdot 10},\ c_{11} = \frac{2c_8}{11\cdot 10} = 0,$$
$$c_{12} = \frac{2c_9}{12\cdot 11} = \frac{2^4 c_0}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot 3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}, \dots,\ c_{3k} = \frac{2^k c_0}{2\cdot 5\cdots(3k-1)\cdot 3\cdot 6\cdots(3k)},\ c_{3k+1} = \frac{2^k c_1}{3\cdot 6\cdots(3k)\cdot 4\cdot 7\cdots(3k+1)}$$

$c_{3k+2} = 0$ per $k = 1, 2, 3, \dots$

d'on:

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x), \text{ amb: } \begin{cases} y_1(x) = 1 + \sum_{k\geq 1} \dfrac{2^k}{2\cdot 5\cdots(3k-1)3\cdot 6\cdots(3k)} x^{3k}, \\ y_2(x) = x + \sum_{k\geq 1} \dfrac{2^k}{3\cdot 6\cdots(3k)\cdot 4\cdot 7\cdots(3k+1)} x^{3k+1} \end{cases}$$

Observacions:

1) En l'exemple anterior, per calcular $y_1(x), y_2(x)$ podríem haver agafat $c_0=1, c_1=0$ (per $y_1(x)$) i després $c_0=0, c_1=1$ (per $y_2(x)$). Aquesta "tàctica" simplifica els càlculs.

2) Quan $x_0 \neq 0$ provem funcions com $y(x) = \sum_{n\geq 0} c_n (x-x_0)^n$ o bé fem el canvi $t = x - x_0$

3) Si tinguéssim un problema de Cauchy com:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'$$

es procedeix de la mateixa manera que a l'exemple que hem fet abans però imposant que $\sum_{n\geq 0} c_n (x-x_0)^n$ sigui solució fins arribar a les fórmules de recurrència. Després les aplicarem tenint en compte que $c_0 = y(x_0) = y_0$ & $c_1 = y'(x_0) = y_0'$.

4) El mètode també és aplicable a EDOs no homogènies:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Si $f(x) = \dfrac{g(x)}{a_2(x)}$ és analítica en $x = x_0$.

Exemple (Continuació): $y'' - 2xy = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. En imposar que $y(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$ satisfaci l'EDO resulta: $1 = 2c_2 + \sum_{k\geq 1} \left[(k+2)(k+1)c_{k+2} - 2c_{k-1}\right] x^k \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2c_2 = 1, \\ (k+2)(k+1)c_{k+2} - 2c_{k-1} = 0 \ \forall k \geq 1. \end{cases}$$

Fórmula de recurrència: $\begin{cases} c_2 = 1/2, \\ c_{k+2} = \dfrac{2c_{k-1}}{(k+2)(k+1)} \ \forall k \geq 1. \end{cases}$ Però les condicions inicials determinen el valor de c_0, c_1: $1 = y(0) = c_0$ & $2 = y'(0) = c_1$, per tant:

$c_0 = 1, c_1 = 2, c_2 = 1/2, c_3 = 1/3, c_4 = \frac{1}{3}, c_5 = \frac{1}{20}, \ldots$ La solució és:

$$y(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{20} + O(x^6).$$

4.3) Mètode de Frobenius

Hem vist com resoldre l'edo lineal homogènia de 2^{on} ordre

$$(*) \qquad a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

usant sèries de potències al voltant de punts ordinaris. A continuació veurem que també es pot fer si $x = x_0$ és un punt singular.

Definició. Dividint per $a_2(x)$ expressarem l'EDO com $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$. Un punt singular $x = x_0$ de l'EDO (*) s'anomena <u>punt singular regular</u> quan $(x-x_0)P(x)$ i $(x-x_0)^2 Q(x)$ són analítiques en $x = x_0$. En cas contrari diem que x_0 és un <u>punt singular irregular</u>

Exemple: $(x^2-4)^2 y'' + (x-2)y' + y = 0 \Longrightarrow P(x) = \frac{x-2}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{(x-2)(x+2)^2}$, $Q(x) = \frac{1}{(x-2)^2(x+2)^2}$

Així doncs $x = \pm 2$ són els únics punts singulars de l'EDO. El punt $x_0 = 2$ és singular regular car $(x-2)P(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ i $(x-2)^2 Q(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ són analítiques en $x = 2$. En canvi $x_0 = -2$ és singular irregular doncs $(x+2)P(x) = \frac{1}{(x-2)(x+2)}$ no és analítica en $x = -2$.

<u>Remarca</u>: Una edo de C-E com $a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$ té l'origen com p.s.r. (la resta de punts són ordinaris) i solucions del tipus $y(x) = x^r$, essent r l'arrel d'una equació auxiliar. L'estudi dels p.s.r. és una generalització d'aquest tipus d'equacions: i) Els coef. constants a_j es converteixen en funcions analítiques $a_j(x)$, ii) Les solucions seran de la forma $y(x) = \sum_{n \geq 0} c_n (x-x_0)^{n+r} = (x-x_0)^r \cdot \{$funció analítica en $x = x_0\}$ on r serà l'arrel d'una certa equació anomenada <u>equació indicial</u>.

<u>Teorema</u>

Si $x = x_0$ és un p.s.r de l'EDO (*), existeix almenys una solució en sèrie de la forma

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} c_n (x-x_0)^{n+r}$$

on el nombre r és una constant a determinar. La sèrie convergeix en algun interval del tipus $x \in (x_0, x_0+R)$ amb $R>0$ (com a mínim).

Exemple (19a) $3xy''+y'-y=0$ al voltant de $x=0$ que és un p.s.r.

Busquem una solució del tipus $y(x)=\sum_{n\geq 0} c_n x^{n+r}$. Llavors.

$$y'(x)=\sum_{n\geq 0}(n+r)c_n x^{n+r-1}, \quad y''(x)=\sum_{n\geq 0}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}.$$

Així:

$$3xy''+y'-y = 3\sum_{n\geq 0}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1}+\sum_{n\geq 0}(n+r)c_n x^{n+r-1}-$$
$$-\sum_{n\geq 0}c_n x^{n+r} = 3\sum_{n\geq 0}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1}+\sum_{n\geq 0}(n+r)c_n x^{n+r-1}-$$
$$-\sum_{n\geq 1}c_{n-1}x^{n+r-1} = [3r(r-1)+r]c_0 x^{r-1}+\sum_{n\geq 1}\left[(n+r)(3n+3r-2)c_n-c_{n-1}\right]x^{n+r}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}(3r^2-2r)c_0=0\\ (n+r)(3n+3r-2)c_n-c_{n-1}=0 \quad \forall\, n\geq 1\end{cases}$$

Fixem-nos en la primera equació $0=r(3r-2)c_0$. Si $c_0=0$ llavors $c_n=0\ \forall\, n\geq 0$ i obtenim la solució nul·la. Per tant, no serveix i llavors cal $c_0\neq 0$ i

$$\underbrace{\boxed{0=3r^2-2r=(3r-2)r}}_{\text{Equació indicial}} \Longrightarrow \underbrace{\boxed{r=0,\ 2/3}}_{\text{arrels indicials}}$$

Estudiem el cas $r=0$:

c_0 lliure, $c_n=\dfrac{c_{n-1}}{n(3n-2)}$ per $n\geq 1$

d'on: $c_1=\dfrac{c_0}{1}$; $c_2=\dfrac{c_0}{1\cdot 2\cdot 4}$; $c_3=\dfrac{c_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 7}=\dfrac{c_0}{3!\,4\cdot 7}$; $c_4=\dfrac{c_0}{4!\,4\cdot 7\cdot 10}$;

$c_5=\dfrac{c_0}{5!\,4\cdot 7\cdot 10\cdot 13}$; .... $c_n=\dfrac{c_0}{n!\,4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n-2)}$ per $n\geq 1$

i generem la solució:

$$y_1(x)=\left\{1+\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n!\,4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n-2)}\right\}, \text{ si } c_0=1$$

En canvi, quan $r = \frac{2}{3}$:

$$c_0 \text{ lliure}, \quad c_n = \frac{c_{n-1}}{(n+\frac{2}{3})(3n+3\cdot\frac{2}{3}-2)} = \frac{c_{n-1}}{n(3n+2)} \quad n \geq 1.$$

d'on: $c_1 = \frac{c_0}{1!\,5}$; $c_2 = \frac{c_0}{1!\,2\cdot 5\cdot 8} = \frac{c_0}{2!\,5\cdot 8}$; $c_3 = \frac{c_0}{2!\,3\cdot 5\cdot 8\cdot 11} = \frac{c_0}{3!\,5\cdot 8\cdot 11}$;

$c_4 = \frac{c_0}{3!\,4\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot 14} = \frac{c_0}{4!\,5\cdot 8\cdot 11\cdot 14}$; $c_5 = \frac{c_0}{4!\,5\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot 14\cdot 17} = \frac{c_0}{5!\,5\cdot 8\cdot 11\cdot 14\cdot 17}$; ...

(inducció) ...; $c_n = \frac{c_0}{n!\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}$ per $n \geq 1$.

Això dóna lloc a una 2ª solució agafant $c_0 = 1$.

$$y_2(x) = \left\{ 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)} \right\} x^{2/3},$$

que és linealment independent amb la primera $y_1(x)$. A més observem que les sèries entre claus $\{\}$ tenen radis de convergència $R = +\infty$ (per exemple, calculant-lo pel criteri del quocient). La solució general de l'EDO serà doncs:

$$y(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) = A_1 \left\{ 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!\,4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n-2)} \right\} + A_2 \left\{ 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)} \right\} x^{2/3}$$

<u>Remarca important</u>. El mètode de Frobenius per trobar les dues solucions l.i. pot presentar complicacions. Si per exemple, a l'equació indicial hi haguèssin arrels dobles, només hauriem obtingut una solució seguint el mètode anterior. Veurem com arreglar aquests tipus de problemes. Abans de fer-ho, donarem una manera de calcular l'equació indicial que no impliqui imposar que una sèrie sigui solució.

Definició. L'equació indicial de l'EDO (*) en el p.s.r. $x = x_0$ és l'equació quadràtica

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0,$$

on:

$$\tilde{P}(x) = (x-x_0)P(x) = p_0 + p_1(x-x_0) + p_2(x-x_0)^2 + \dots \quad \left(\text{i.e. } p_0 = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x)\right)$$

$$\tilde{Q}(x) = (x-x_0)^2 Q(x) = q_0 + q_1(x-x_0) + q_2(x-x_0)^2 + \dots \quad \left(\text{i.e. } q_0 = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2 Q(x)\right)$$

Les seves arrels són les <u>arrels indicials</u>. Segons siguin aquestes arrels es poden trobar diferents tipus de solucions de l'EDO. El resultat és el següent.

I) $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$ i $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$

Llavors existeixen dues solucions l.i. de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^{n+r_1}, \quad y_2(x) = \sum_{n\geq 0} b_n (x-x_0)^{n+r_2} \quad (\text{amb } a_0, b_0 \neq 0)$$

II) $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$ **però** $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$. Suposem $r_1 > r_2$

Les dues solucions l.i. es poden expressar com

$$y_1(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^{n+r_1}, \quad y_2(x) = K y_1(x) \ln(x-x_0) + \sum_{n\geq 0} b_n (x-x_0)^{n+r_2} \quad (a_0, b_0 \neq 0)$$

La constant $K \in \mathbb{R}$ pot ser nul·la algunes vegades.

III) $r = r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$. La forma de la solució és:

$$y_1(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^{n+r}, \quad y_2(x) = y_1(x) \ln(x-x_0) + \sum_{n\geq 1} b_n (x-x_0)^{n+r} \quad (a_0 \neq 0)$$

IV) r_1, r_2 arrels complexes conjugades. No estudiarem aquest cas, però essencialment és igual que el tipus I [Zill, pàg. 241]

Hi ha dues formes de trobar $y_2(x)$ en els casos II) i III):

i) usar formalment la fórmula $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{\exp(-\int P(x)dx)}{y_1^2(x)} dx$ [Zill pàg. 236]

ii) Imposar que l'expressió de $y_2(x)$ verifiqui l'EDO. Només cal obtenir una recurrència pels coeficients b_n [Zill, pàg. 237]

~~Exemple~~. Problema 19.c) Trobeu la solució en $x=0$ de

$$x^2y'' - xy' + (1-x)y = 0$$

Solució:

$\tilde{P}(x) = xP(x) = -1 (=: p_0) \Longrightarrow \tilde{P}(z)$ analítica en tot $\mathbb{C}$. En particular en $z=0$.
$\tilde{Q}(x) = x^2Q(x) = 1-x$, polinomi, per tant $\tilde{Q}(z)$ analítica en tot $\mathbb{C}$, en particular en $z=0$. Buscarem doncs solucions de la forma $y^*(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+\alpha}$ d'on:

$y'(x) = \sum_{n\geq 0} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1}$, $y''(x) = \sum_{n\geq 0} (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha-2}$; i substituint a l'EDO:

$$0 = x^2y''(x) - xy'(x) + (1-x)y = \sum_{n\geq 0}(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha} - \sum_{n\geq 0}(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha}$$

$$+ \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+\alpha} - \boxed{\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+\alpha+1}} = (\alpha(\alpha-1)-\alpha+1)a_0x^\alpha +$$

$$\sum_{n\geq 1} a_{n-1} x^{n+\alpha}$$

$$+ \sum_{n\geq 1}\left\{\left[(n+\alpha)(n+\alpha-1) - (n+\alpha) + 1\right]c_n - c_{n-1}\right\} x^{n+\alpha} =$$

$$= (\alpha(\alpha-1) - \alpha + 1)a_0x^\alpha + \sum_{n\geq 1}\left[(n+\alpha-1)^2 c_n - c_{n-1}\right] x^{n+\alpha}$$

Equació indicial: $\alpha(\alpha-1) - \alpha + 1 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha-1)^2 = 0 \Longrightarrow \alpha = 1$ (arrel doble). Remarca: identificant $p_0 = -1$ i $q_0 = 1$, a partir de la forma general de l'equació indicial podriem haver obtingut directament: $\alpha(\alpha-1) + \alpha p_0 + q_0 = \alpha(\alpha-1) - \alpha + 1$ $= \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha-1)^2 = 0$.

Així, segons el resultat de la pàgina anterior les solucions seran de la forma:

$$y_1(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1}, \quad y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n\geq 1} b_n x^{n+1} \quad (a_0 \neq 0)$$

Per la primera, $y_1(x)$, tenim la relació de recurrència:

$$a_0 = a_0, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2-1+1} = \frac{a_{n-1}}{n^2} \quad \forall n \geq 1$$

$$a_0 = a_0,\quad a_1 = \frac{a_0}{1},\quad a_2 = \frac{a_1}{2^2} = \frac{a_0}{1^2 2^2},\quad a_3 = \frac{a_2}{3^2} = \frac{a_0}{1^2 2^2 3^2}, \ldots,$$

$$\ldots, a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2} = \frac{a_0}{1^2 2^2 3^2 \cdots n^2} = \frac{a_0}{(n!)^2}, \ldots$$ Llavors agafant $a_0 = 1$:

$$y_1(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{(n!)^2} = x + \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{(2!)^2} + \frac{x^4}{(3!)^2} + O(x^5)$$

Càlcul de $y_2(x)$:

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n\geq 0} b_n x^{n+1} \Rightarrow y_2'(x) = y_1'(x)\ln x + \frac{y_1(x)}{x} + \sum_{n\geq 1}(n+1) b_n x^n$$

$$\Rightarrow y_2''(x) = y_1''(x)\ln x + \frac{2y_1'(x)}{x} - \frac{y_1(x)}{x^2} + \sum_{n\geq 1} n(n+1) b_n x^{n-1}.$$

A continuació, substituint a l'EDO:

$$0 = x^2 y_2''(x) - x y_2'(x) + (1-x) y_2(x) = x^2\left\{ y_1''(x)\ln x + \frac{2y_1'(x)}{x} - \frac{y_1(x)}{x^2} + \sum_{n\geq 1} n(n+1) b_n x^{n-1}\right\}$$

$$- x\left\{ y_1'(x)\ln x + \frac{y_1(x)}{x} + \sum_{n\geq 1}(n+1) b_n x^n \right\} + (1-x)\cdot\left\{ y_1(x)\ln x + \sum_{n\geq 1} b_n x^{n+1}\right\}$$

$$= \{\overbrace{x^2 y_1''(x) - x y_1'(x) + (1-x) y_1(x)}^{(y_1\text{ solució})\ 0\ =}\}\ln x + \overset{(*)}{\boxed{2y_1'(x)\,x - 2y_1(x)}} + \sum_{n\geq 1} n(n+1) b_n x^{n+1}$$

$$- \sum_{n\geq 1}(n+1) b_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 1} b_n x^{n+1} - \boxed{\sum_{n\geq 1} b_n x^{n+2}} =$$

$$\sum_{n\geq 1} b_n x^{n+2} = \sum_{n\geq 2} b_{n-1} x^{n+1}$$

$$(*)\quad 2y_1'x - 2y_1 = 2\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{(n!)^2}x^{n+1} - 2\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{(n!)^2} = \sum_{n\geq 1}\frac{2n}{(n!)^2}x^{n+1}$$

$$= (2 + b_1)x + \sum_{n\geq 2}\left\{ \frac{2n}{(n!)^2} + \left[n(n+1) - (n+1) + 1\right] b_n - b_{n-1}\right\} x^{n+1}$$

d'on resulta la recurrència: $b_n = \dfrac{b_{n-1}}{n^2} - \dfrac{2}{n(n!)^2}\ \forall n \geq 2,\ b_1 = -2$.

d'on:

$$b_1 = -2,\ b_2 = \frac{b_1}{4} - \frac{2}{2(2!)^2} = -\frac{2}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4},\ b_3 = \frac{b_2}{9} - \frac{2}{3\cdot 6^2} = -\frac{1}{9}\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{2}{3\cdot 36} = \frac{-11}{108}$$

Solució general:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

amb:

$$y_1(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{(n!)^2} = x + \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{(2!)^2} + \frac{x^4}{(5!)^2} + O(x^5)$$

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x - 2x^2 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{11}{108}x^4 + O(x^5)$$

Exemple. Problema 19d) Troben la solució en $x=0$ de

$$xy''+4y'-xy=0$$

Solució:

$P(x)=\frac{4}{x} \Rightarrow \tilde{P}(x)=xP(x)=4=p_0$
$Q(x)=-1 \Rightarrow \tilde{Q}(x)=-x^2 \Rightarrow q_0=0$

On veiem que $\tilde{P}(z)$, $\tilde{Q}(z)$ són analítiques en tot $\mathbb{C}$. En particular en $z=0$.

Equació indicial: $r(r-1)+p_0r+q_0=r(r-1)+4r=r^2+3r=r(r+3)=0 \Rightarrow$ arrels indicials $r_1=0$, $r_2=-3$ d'on $r_1-r_2=0-(-3)=3\in\mathbb{Z}$. Segons els resultats de la 10 cal buscar solucions de la forma:

$$y_1(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^{n+0}, \quad y_2(x)=Ky_1(x)\ln x+\sum_{n\geq 0}b_nx^{n-3} \quad (a_0,b_0\neq 0)$$

Calcularem primer $y_1(x)$:

$$y_1'(x)=\sum_{n\geq 1}na_nx^{n-1}, \quad y_1''(x)=\sum_{n\geq 2}n(n-1)a_nx^{n-2}$$ i substituint a l'EDO:

$$0=\sum_{n\geq 2}n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n\geq 1}4na_nx^{n-1}-\boxed{\sum_{n\geq 0}a_nx^{n+1}}=$$

$$\sum_{n\geq 0}a_nx^{n+1}=\sum_{n\geq 2}a_{n-2}x^{n-1}$$

$$=4a_1+\sum_{n\geq 2}\left\{[n(n-1)+4n]a_n-a_{n-2}\right\}x^{n-1}=4a_1+\sum_{n\geq 2}[n(n+3)a_n-a_{n-2}]x^{n-1}$$

d'on s'obté la relació de recurrència: $\boxed{a_1=0,\ a_n=\frac{a_{n-2}}{n(n+3)}\ \forall n\geq 2}$

$$a_1=0;\ a_2=\frac{a_0}{5\cdot 2}=6\cdot\frac{2a_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=6\,\frac{2a_0}{5!},\ a_3=\frac{a_1}{3\cdot 6}=0,$$

$$a_4=\frac{a_2}{4\cdot 7}=6\,\frac{3\cancel{6\cdot 2}\cdot a_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot\cancel{4}}=6\cdot\frac{3a_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=6\cdot\frac{3a_0}{7!},\quad a_5=0,$$

$$a_6=\frac{a_4}{6\cdot 9}=6\,\frac{8\cdot 3\cdot a_0}{7!\,8\cdot 9\cdot 6}=6\,\frac{4a_0}{9!},\ \ldots,\ a_{2k-1}=0,\ a_{2k}=6\,\frac{k+1}{(2k+3)!}a_0$$

per $k\geq 0$. Aleshores, agafant $a_0=1$ s'obté:

$$y_1(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{6(k+1)}{(2k+3)!} x^{2k} = 1 + \frac{x^2}{10} + \frac{x^4}{28} + O(x^6) \qquad (1)$$

A continuació, calcularem la 2ª: $y_2(x) = k y_1(x) \ln x + \sum_{n\geq 0} b_n x^{n-3} \Rightarrow y_2'(x) = k y_1'(x) \ln x + \frac{k y_1}{x} + \sum_{n\geq 0} (n-3) b_n x^{n-4} \Rightarrow y_2''(x) = k y_1'' \ln x + \frac{2k y_1'}{x} - \frac{k y_1}{x^2} + \sum_{n\geq 0} (n-3)(n-4) b_n x^{n-5}$; i substituint a l'EDO:

$$\begin{aligned} 0 = x y_2'' + 4y_2' - x y_2 &= k(x y_1'' + 4y_1' - x y_1)\ln x + 2k y_1' - k\frac{y_1}{x} + \sum_{n\geq 0}(n-3)(n-4) b_n x^{n-4} + \\ &+ 4k\frac{y_1}{x} + \sum_{n\geq 0} 4(n-3) b_n x^{n-4} - \underbrace{\boxed{\sum_{n\geq 0} b_n x^{n-2}}}_{= \sum_{n\geq 2} b_{n-2} x^{n-4}} = 2k y_1' - k\frac{y_1}{x} + 12\cancel{b_0} x^{-4} + 6 b_1 x^{-3} + \\ &+ 2 b_2 x^{-2} + 4k\frac{y_1}{x} - 12\cancel{b_0} x^{-4} - \\ &- 8 b_1 x^{-3} - 4 b_2 x^{-2} - b_0 x^{-2} - b_1 x^{-1} + \\ &+ \sum_{n\geq 4} \Big[\big((n-3)(n-4) + 4(n-3)\big) b_n - \\ &\qquad - b_{n-2} \Big] x^{n-4} = \end{aligned}$$

$$\overset{(*)}{=} -2b_1 x^{-3} - (2b_2 + b_0) x^{-2} + (3k - b_1) x^{-1} + k \sum_{n\geq 1} (2n+3) a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 4} \big(n(n-3) b_n - b_{n-2}\big) x^{n-4} \qquad (\&)$$

$$\boxed{(*)\quad 2k y_1' + 3k\frac{y_1}{x} = 2k \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} + \frac{3k}{x} + 3k \sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1} = \frac{3k}{x} + k \sum_{n\geq 1} (2n+3) a_n x^{n-1}}$$

de (&) tenim: $b_1 = 0$; $2b_2 + b_0 = 0 \Rightarrow b_2 = -\frac{1}{2} b_0$ (b_0 arbitrari); $3k - b_1 = 0 \xRightarrow{b_1 = 0} k = 0$;

$b_n = \frac{b_{n-2}}{n(n-3)}$ $\forall n \geq 4$. De fet veiem que b_3 no queda determinada. Podem agafar $b_3 = 0^{(**)}$

Així, per $n=4$: $b_4 = \frac{b_2}{4} = -\frac{3b_0}{432} = -\frac{3b_0}{4!}$; $n=5$: $b_5 = \frac{b_3}{2\cdot 5} = 0$; $n=6$: $b_6 = \frac{b_4}{6\cdot 3} = -\frac{5b_0}{6!}$;

$n=7$: $b_7 = \frac{b_5}{4\cdot 7} = \frac{b_3}{7\cdot 5\cdot 4\cdot 2} = 0$; $n=4$: $b_8 = \frac{b_6}{8\cdot 5} = \frac{-5b_0}{8\cdot 5\cdot 6!} = -\frac{7b_0}{8!}$; ..., $b_{2k+1} = 0$ $\forall k = 0,1,2,\ldots$;

$b_{2k} = -\frac{2k-1}{(2k)!} b_0$ $\forall k = 0,1,2,\ldots$ Agafant per ex. $b_0 = -1$ s'obté la solució: $y_2(x) =$

$$y_2(x) = = \sum_{k\geq 0} \frac{2k-1}{(2k)!} x^{2k-3} = -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{8} x - \frac{1}{144} x^3 + O(x^5) \qquad (2)$$

I tenint en compte la primera solució $y_1(x)$ donada per (1), s'obté la solució general:

$$\boxed{y(x) = c_1 \sum_{k\geq 0} \frac{k+1}{(2k+3)!} x^{2k} + c_2 \sum_{k\geq 0} \frac{2k-1}{(2k)!} x^{2k-3}, \quad x > 0}$$

(**) Si $b_3 \neq 0$ tindrem: $b_5 = \frac{b_3}{2\cdot 5} = 6\,\frac{2b_3}{5!}$, $b_7 = \frac{b_5}{4\cdot 7} = 6\,\frac{3b_3}{7!}$, ..., $b_{2k+1} = 6\,\frac{k b_3}{(2k+1)!}$, $k \geq 1$

i llavors aquests termes donarien lloc a una solució: $\hat{y}(x) = \sum_{k\geq 1} b_{2k+1} x^{2k-2} = b_3 \sum_{k\geq 0} \frac{k+1}{(2k+3)} x^{2k}$,

i.e.: recuperem la solució $y_1(x)$!!!

NOTE BOOK

4.4) Equació de Bessel

L'equació de Bessel és: $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$, on $\nu\geq 0$ és un paràmetre.

El punt $x=0$ és un p.s.r. de l'equació de Bessel:

$$\tilde{P}(x)=xP(x)=x\cdot\frac{x}{x^2}=1\Longrightarrow p_0=1,$$
$$\tilde{Q}(x)=x^2Q(x)=x^2\frac{x^2-\nu^2}{x^2}=x^2-\nu^2\Longrightarrow q_0=-\nu^2.$$

Equació indicial: $0=r(r-1)+r-\nu^2=r^2-\nu^2$

Arrels indicials: $r=\pm\nu\in\mathbb{R}$

Som al cas I) si $2\nu\notin\mathbb{N}$; II) si $2\nu\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$; III) si $\nu=0$.

Si busquem una solució del tipus $y(x)=\sum_{n\geq 0}c_nx^{n+r}$ obtenim, primer per $\underline{\underline{r=\nu}}$:

$$0=x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=x^r\Big\{(r^2-\nu^2)c_0+\sum_{n\geq 1}\left[(n+r)^2-\nu^2\right]c_nx^n+\sum_{n\geq 0}c_nx^{n+2}\Big\}=$$

$$=x^r\Big\{(r^2-\nu^2)c_0+(r+1-\nu)(r+1+\nu)c_1x+\sum_{n\geq 2}\left[(n+r+\nu)(n+r-\nu)c_n+c_{n-2}\right]x^n\Big\}$$

Cas: $r=\nu$

$$\stackrel{\text{Cas: } r=\nu}{=}x^\nu\Big\{(1+2\nu)c_1x+\sum_{n\geq 2}\left[n(n+2\nu)c_n+c_{n-2}\right]x^n\Big\}.$$

Comparant coeficients resulten les relacions de recurrència següents

$$c_0:\text{ lliure};\quad c_1=0\Longrightarrow c_{2n+1}=0\ \forall n\geq 0;\quad c_{2n}=-\frac{c_{2n-2}}{2^2n(n+\nu)}=\cdots=\frac{(-1)^nc_0}{2^{2n}n!(1+\nu)\cdots(n+\nu)}$$

Si triem $c_0=\dfrac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}$ on $\Gamma(x)$ és la funció Gamma, els coeficients queden:

$$c_{2n+1}=0,\qquad c_{2n}=\frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu}n!\,\Gamma(n+\nu+1)}$$

Remarca: hem fet servir que $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ $\forall x>0$. De fet, tot i que, a priori, la funció $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ està definida només per $x>0$; aquesta es pot estendre mitjançant la fórmula de Gauss:

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\qquad(-x\notin\mathbb{N})$$

i considerar-la definida a $\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$.

D'aquesta manera hem trobat una solució de l'equació de Bessel:

$$J_\nu(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \quad \left(=y_1(x)\right), \text{ convergent per } x>0$$

$J_\nu(x)$ reb el nom de <u>Funció de Bessel de 1a classe i ordre ν</u>

Anàlogament es poden buscar les solucions al cas $\underline{r=-\nu}$. Operant de la mateixa manera s'obté:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}, \text{ convergent a } x>0$$

(funció de Bessel de 1a classe i ordre $-\nu$). A la figura 84 es representen $J_0(x)$ i $J_1(x)$. Veiem que $J_0(x) \sim$ cosinus esmorteït, $J_1(x) \sim$ sinus esmorteït.

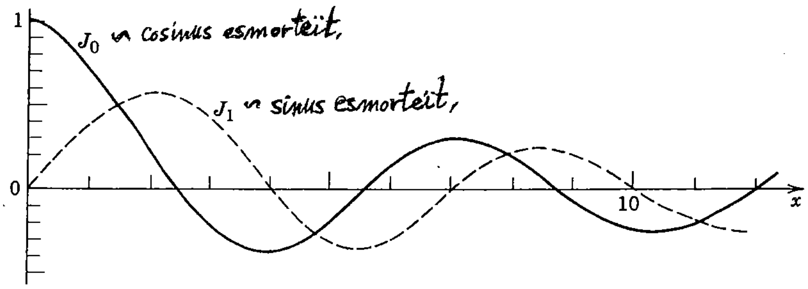


Figura 84. Funciones de Bessel de primera clase.

La qüestió és si les funcions $J_\nu(x)$ i $J_{-\nu}(x)$ són l.i. ? Si $\nu=0$ òbviament NO i quan $r_1-r_2=2\nu \notin \mathbb{N}$ la secció anterior ens diu que sí. Es pot demostrar que la resposta completa a aquesta qüestió és:

a) Si $\nu\notin\mathbb{N}$: $J_\nu(x)$, $J_{-\nu}(x)$ són l.i. i llavors la solució general, $y_g(x)$, és combinació lineal de totes dues:

$$y_g(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

b) Si $\nu = n\in\mathbb{N}$, $J_\nu(x)$ i $J_{-\nu}(x)$ són l.d. però la solució general de l'EDO de Bessel es pot expressar com

$$y_g(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x), \quad \nu = n\in\mathbb{N}$$

on $Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu$, amb $Y_\nu(x) := \dfrac{\cos(\pi\nu)\,J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}$, $(\nu\notin\mathbb{Z})$.

Y_ν és la <u>funció de Bessel de 2a classe i ordre ν</u> (veure figura 85)

Remarca: la solució general d'una EDO de Bessel es pot escriure sempre com:

$$y_g(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x), \quad x>0.$$

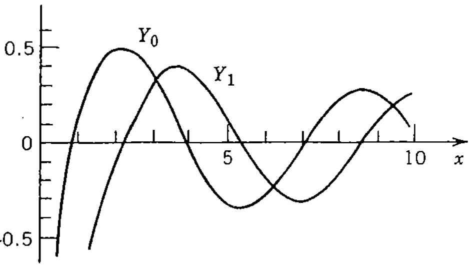


Figura 85. Funciones de Bessel de segunda clase.

Algunes propietats de les funcions de Bessel d'ordre enter

Suposem que $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$. Llavors:

1) $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ (aleshores J_{-n}, J_n són l.d.)

2) $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$ (J_n és $\left\{\begin{matrix}\text{parell}\\ \text{senar}\end{matrix}\right\}$ quan n és $\left\{\begin{matrix}\text{parell}\\ \text{senar}\end{matrix}\right\}$)

3) $J_n(0) = 0 \ \forall n>0$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$).

4) $J_0(0) = 1$ (veure figura 84).

5) $\lim_{x\to 0^+} Y_n(x) = -\infty$ (veure figura 85).

Problemes:

23) Trobeu la solució general per a $0<x<+\infty$ de l'equació:

$$x^2y'' + xy' + (k^2x^2-\nu^2)y = 0 \quad (k\neq 0).$$

◁ Solució. Fem el canvi de variable $\underline{t=|k|x}$: $\tilde{y}(t) = y(t/k) = y(x) \Longrightarrow \frac{d\tilde{y}}{dt} = \frac{1}{|k|}\frac{dy}{dx}$; d'on, formalment $\frac{d}{dx} = \frac{1}{|k|}\frac{d}{dt}$ i llavors: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{k^2}\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}$ i substituint a l'EDO,

$$0 = x^2y''+xy'+(k^2x^2-\nu^2)y = \frac{t^2}{k^2}k^2\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} + \frac{t}{|k|}|k|\frac{d\tilde{y}}{dt} + (t^2-\nu^2)\tilde{y} = t^2\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} + t\frac{d\tilde{y}}{dt} + (t^2-\nu^2)\tilde{y}$$

arribem a l'equació de Bessel:

$$t^2\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} + t\frac{d\tilde{y}}{dt} + (t^2-\nu^2)\tilde{y} = 0,$$

que té per solució general:

$$\tilde{y}(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 Y_\nu(t)$$

Per últim, desfent el canvi de variable:

$$y_g(x) = c_1 J_\nu(|k|x) + c_2 Y_\nu(|k|x), \quad x>0 \ .▷$$

24) Comproveu que la solució general de l'equació $xy''+y=0$ és

$$y(x) = c_1\sqrt{x}\, J_1(2\sqrt{x}) + c_1\sqrt{x}\, Y_1(2\sqrt{x})$$

◁ Solució. Fem primer el canvi de variable $x = t^2/4$: $y(x) = y(t^2/4) =: \tilde{y}(t)$, d'on:

$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \frac{t}{2}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{t}\frac{d\tilde{y}}{dt}$; d'on podem posar, formalment: $\frac{d}{dx} = \frac{2}{t}\frac{d}{dt}$, i llavors

també: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{t}\frac{d\tilde{y}}{dt}\right) = \frac{2}{t}\left(-\frac{2}{t^2}\frac{d\tilde{y}}{dt} + \frac{2}{t}\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}\right) = -\frac{4}{t^3}\frac{d\tilde{y}}{dt} + \frac{2}{t^2}\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}$. Substituïm:

$$0 = xy''+y = \frac{t^2}{4}\cdot\frac{4}{t^2}\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} - \frac{t^2}{4}\cdot\frac{4}{t^3}\frac{d\tilde{y}}{dt} + \tilde{y} = \frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{d\tilde{y}}{dt} + \tilde{y}$$

La "nova" EDO queda doncs:

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{d\tilde{y}}{dt} + \tilde{y} = 0 \quad (*)$$

Ara, introduïm el canvi de funció: $\tilde{y} = t\bar{y} \Rightarrow \dot{\tilde{y}} = t\dot{\bar{y}} + \bar{y} \Rightarrow \ddot{\tilde{y}} = t\ddot{\bar{y}} + 2\dot{\bar{y}}$. Substituïm a (*) per obtenir:

$$0 = \ddot{\tilde{y}} - \frac{1}{t}\dot{\tilde{y}} + \tilde{y} = t\ddot{\bar{y}} + 2\dot{\bar{y}} - \frac{1}{t}\left(t\dot{\bar{y}} + \bar{y}\right) + t\bar{y} = t\ddot{\bar{y}} + \dot{\bar{y}} + \left(t - \frac{1}{t}\right)\bar{y}.$$

Multiplicant a continuació per t, arribem a l'EDO:

$$t^2\ddot{\bar{y}} + t\dot{\bar{y}} + (t^2-1)\bar{y} = 0 \qquad \text{(Edo. de Bessel amb } \nu = 1)$$

que té per solució general: $\bar{y}(t) = d_1 J_1(t) + d_2 Y_1(t) \Rightarrow \tilde{y}(t) = d_1 t J_1(t) + d_2 t Y_1(t)$. Per últim, desfent el canvi de variable, s'arriba a la solució general de l'EDO:

$$y_g(t) = c_1\sqrt{x}\, J_1(2\sqrt{x}) + c_2\sqrt{x}\, Y_1(2\sqrt{x}), \quad (x>0). \ ▷$$

25) Comproveu que l'equació diferencial $0 = x^2y'' + (\lambda^2x^2 - \nu^2 + 1/4)y$, $x>0$, té la solució particular $y(x) = \sqrt{x}\, J_\nu(\lambda x)$, $\lambda > 0$.

◁ Solució. Primer es pot fer el canvi de variable $t = \lambda x$: $y(x) = y(t/\lambda) =: \tilde{y}(t)$, d'on:
$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \frac{1}{\lambda}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lambda\frac{d\tilde{y}}{dt} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}$. Substituint a l'EDO s'obté: $0 = x^2y'' + (\lambda^2x^2 - \nu^2 + 1/4)y = \frac{t^2}{\lambda^2}\lambda^2\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} + (t^2 - \nu^2 + 1/4)\tilde{y}$. Fem, a continuació, el canvi de funció $\tilde{y}(t) = \lambda^{-1/2}t^{1/2}u(t)$.

Derivant: $\dot{\tilde{y}} = \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}t^{-1/2}u(t) + \lambda^{-1/2}t^{1/2}\dot{u}(t)$, $\ddot{\tilde{y}} = -\frac{1}{4}\lambda^{-1/2}t^{-3/2}u(t) + \frac{2}{2}\lambda^{-1/2}t^{-1/2}\dot{u}(t) +$ $+ \lambda^{-1/2}t^{1/2}\ddot{u}(t)$ i després substituint $0 = t^2\ddot{\tilde{y}} + (t^2-\nu^2+\frac{1}{4})\tilde{y} = \lambda^{-1/2}t^{5/2}\ddot{u}(t) + \lambda^{-1/2}t^{3/2}\dot{u}(t)$ $- \frac{\lambda^{-1/2}}{4}t^{1/2}u(t) + \frac{\lambda^{-1/2}}{4}t^{1/2}u(t) + (t^2-\nu^2)\lambda^{-1/2}t^{1/2}u(t)$. Multiplicant per $t^{-1/2}\lambda^{1/2}$ s'obté l'EDO:

$$t^2\ddot{u}(t) + t\dot{u}(t) + (t^2-\nu^2)u(t) = 0 \qquad \text{(Edo de Bessel)}$$

que té per solució general: $u(t) = c_1 J_1(t) + c_2 Y_1(t) \Rightarrow \tilde{y}(t) = c_1\sqrt{\frac{t}{\lambda}}\,J_\nu(t) + c_2\sqrt{\frac{t}{\lambda}}\,Y_\nu(t)$.

Per últim, desfent el canvi de variable, tenim que la solució general és:

$$y_g(x) = c_1\sqrt{x}\,J_\nu(\lambda x) + c_2\sqrt{x}\,Y_\nu(\lambda x), \quad \lambda>0,\ x>0 \ . \triangleright$$

26/ Proveu que

a) $xJ_\nu' = -\nu J_\nu + xJ_{\nu-1}$ [Indicació: $2m+\nu = 2(m+\nu)-\nu$]

b) $2J_\nu' = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}$

c) $2\nu J_\nu = xJ_{\nu+1} + xJ_{\nu-1}$

d) $\frac{d}{dx}\{x^\nu J_\nu\} = x^\nu J_{\nu-1}$

e) $\frac{d}{dx}\{x^{-\nu}J_\nu\} = -x^{-\nu}J_{\nu+1}$.

$\triangleleft$ Solució.

a) $$xJ_\nu'(x) = x\sum_{m\geq 0}\frac{(2m+\nu)(-1)^m\,\frac{1}{2}}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1} \overset{2m+\nu = 2(m+\nu)-\nu}{=} -\nu\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} +$$
$$+\, x\sum_{m\geq 0}\frac{(m+\nu)(-1)^m\,(x/2)^{2m+\nu-1}}{(m+\nu)\,m!\,\Gamma(m+\nu-1+1)} = -\nu J_\nu(x) + xJ_{\nu-1}(x).$$

b) $$2J_\nu' = 2\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m(2m+\nu)}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1}\cdot\frac{1}{2} = \sum_{m\geq 1}\frac{(-1)^m m}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1} +$$
$$+\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m(m+\nu)}{m!\,(m+\nu)\,\Gamma(m+\nu-1+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1} = \sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^{m+1}(m+1)}{(m+1)m!\,\Gamma(m+\nu+1+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu+1} +$$
$$+\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu-1+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1} = -J_{\nu+1} + J_{\nu-1}$$

c) $2\nu J_\nu = \sum_{n\geq 0} \frac{2\nu(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} = \sum_{n\geq 0} \frac{2(n+\nu)(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu-1}\cdot\frac{x}{2} +$

$+ \sum_{n\geq 1} \frac{-2n(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} = x\sum_{n\geq 0}\frac{(n+\nu)(-1)^n}{n!(n+\nu)\Gamma(n+\nu-1+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu-1} +$

$+ \sum_{n\geq 0} \frac{-2(-1)^{n+1}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu+1}\cdot\frac{x}{2} = x J_{\nu-1} + x J_{\nu+1}$

d) $\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu\right) = \nu x^{\nu-1} J_\nu + x^\nu J_\nu' = \nu x^{\nu-1} J_\nu + x^{\nu-1}\left(x J_\nu'\right) =$

$\underset{(a)}{=} \nu x^{\nu-1} J_\nu + x^{\nu-1}\left(-\nu J_\nu + x J_{\nu-1}\right) = x^\nu J_{\nu-1}$

e) $\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} J_\nu\right) = -\nu x^{-\nu-1} J_\nu + x^{-\nu} J_\nu' = -\nu x^{-\nu-1} J_\nu + x^{-\nu-1}\left(x J_\nu'\right) \overset{(a)}{=}$

$= -\nu x^{-\nu-1} J_\nu + x^{-\nu-1}\left(-\nu J_\nu + x J_{\nu-1}\right)$

$= -\nu x^{-\nu-1} J_\nu - \nu x^{-\nu-1} J_\nu + x^{-\nu} J_{\nu-1}$

$= -x^{-\nu-1}\left(2\nu J_\nu - x J_{\nu-1}\right) \overset{(c)}{=} -x^{-\nu-1}\cdot x J_{\nu+1} = -x^{-\nu} J_{\nu+1}$. ▷

27) Proveu que $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right)$

◀ Solució:

$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\frac{1}{2}+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\frac{1}{2}+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} =$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!\,\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)!!}$

$\left[\Gamma(n+\tfrac{1}{2}+1) = (n+\tfrac{1}{2})\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) \underset{\text{Inducció}}{=} \cdots = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$. ▷

$2^n n!(2n+1)!! = (2n+1)!$

cert per $n=0$: $2^0\, 0!\, 1!! = 1!$

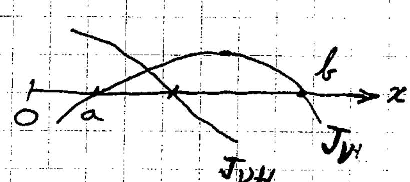
suposem-ho cert per $n=k$ i mirem si ho és també per $n=k+1$:

$2^{k+1}(k+1)!(2k+3)!! = 2(k+1)(2k+3)2^k k!(2k+1)!!$

$= (2k+3)(2k+2)(2k+1)! = (2k+3)!$ (ok)

28) Proveu que els zeros positius de dues funcions de Bessel consecutives estan entrellaçats, és a dir, que entre dos zeros consecutius de J_ν existeix un únic zero de $J_{\nu+1}$ (indicació: useu 26 d, e)

◁ Solució.



Existència: $J_\nu(a) = J_\nu(b) = 0 \Longrightarrow a^{-\nu} J_\nu(a) = b^{-\nu} J_\nu(b)$. Llavors, pel lema de

$$\text{Rolle } \exists\, c \in (a,b) \text{ t.q. } \frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right)_{x=c} \overset{26(e)}{=} \left(-x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\right)_{x=c} =$$

$$= -c^{-\nu} J_{\nu+1}(c) = 0 \Longrightarrow J_{\nu+1}(c) = 0$$

Unicitat: $\exists\, c_1, c_2 \in (a,b),\ c_1 < c_2 : J_{\nu+1}(c_1) = J_{\nu+1}(c_2) = 0 \Longrightarrow c_1^{\nu+1} J_{\nu+1}(c_1) =$

$$= c_2^{\nu+1} J_{\nu+1}(c_2) \xrightarrow{\text{lema de Rolle}} \exists\, d \in (c_1, c_2) : \frac{d}{dx}\left(x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)\right)_{x=d} \overset{26(d)}{=}$$

$$= \left(x^{\nu+1} J_\nu(x)\right)_{x=d} = d^{\nu+1} J_\nu(d) = 0 \Longrightarrow J_\nu(d) = 0 : \text{contradicció ja}$$

que es suposa que els zeros $x=a$, $x=b$ de J_ν són consecutius. ▷

4.5) Equació de Legendre

L'equació de Legendre és $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (equació de Legendre d'ordre α). El punt $x=0$ és un <u>punt ordinari</u>, llavors existeixen solucions analítiques a l'origen del tipus $y(x) = \sum_{k\geq 0} c_k x^k$. Una de les propietats d'aquesta EDO és que quan $\alpha = n \in \mathbb{N}$ té una solució polinomial de grau (exactament) n. Aquestes solucions es coneixen com <u>polinomis de Legendre</u>.

Efectivament, imposant que $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, derivant i substituint:

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^n - 2\sum_{n\geq 1} n a_n x^n + \alpha(\alpha+1) \sum_{n\geq 0} a_n x^n =$$

$$= \sum_{n\geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n\geq 2} \cdots - 2\sum_{n\geq 1} \cdots + \alpha(\alpha+1)\sum_{n\geq 0} \cdots =$$

$$= \left(2\cdot 1\, a_2 + \alpha(\alpha+1) a_0 + 3\cdot 2\, a_3 + (\alpha(\alpha+1)-2) a_1\right) x +$$

$$+ \sum_{n\geq 2} \left((n+2)(n+2) a_{n+2} - \left(n(n-1) + 2n - \alpha(\alpha+1)\right) a_n\right) x^n = 0$$

$$\left[\begin{aligned} \alpha^2+\alpha-2 &= \alpha^2-1+\alpha-1 = (\alpha-1)(\alpha+1)+\alpha-1 \\ &= (\alpha-1)(\alpha+2) \\ n^2+n-\alpha^2-\alpha &= (n-\alpha)(n+\alpha)+n-\alpha \\ &= (n-\alpha)(n+\alpha+1) \end{aligned}\right]$$

Comparant coeficients tenim:

$$a_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}a_0, \quad a_3 = -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3\cdot 2}a_1,$$

$$a_{n+2} = -\frac{(\alpha-n)(n+\alpha+1)}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad n \geq 2$$

d'on podem determinar recursivament els coeficients a_n:

$$n=2: \quad a_4 = -\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{4\cdot 3}a_2 = \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}a_0,$$

$$n=3: \quad a_5 = -\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{5\cdot 4}a_3 = \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+4)(\alpha+2)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}a_1,$$

$$n=4: \quad a_6 = -\frac{(\alpha-4)(\alpha+5)}{6\cdot 5}a_4 = \frac{-\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}a_0,$$

$$n=5: \quad a_7 = -\frac{(\alpha-5)(\alpha-6)}{7\cdot 6}a_5 = -\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha-5)(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+6)}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}a_1,$$

$$\vdots$$

i per inducció es prova que:

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\cdots(\alpha-2n+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2n-1)}{(2n)!}a_0, \quad n \geq 1$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2n+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2n)}{(2n+1)!}a_1, \quad n \geq 1$$

Agafant $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ tenim la solució

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\cdots(\alpha-2n+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2n-1)}{(2n)!}x^{2n}$$

i recíprocament, si es prem $a_0 = 0$ i $a_1 = 1$:

$$y_2(x) = x + \sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2n+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

La solució general vindrà donada doncs per

$$y_g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (*)$$

NOTA: Pel teorema sabem que aquestes dues solucions $y_1(x)$, $y_2(x)$ tenen radis de convergència $r \geq 1$ (distància de $x=0$ a la singularitat més propera, $x=\pm 1$). De fet, un càlcul directe dóna que totes dues són convergents per $-1<x<1$. A més formen un CFS donat que:

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow y_1(x), y_2(x) \text{ l.i.}$$

Així doncs la solució general de l'EDO de Legendre d'ordre α vindrà donada per $(*)$

- Casos particulars. Si α és:
  - i) $\alpha = 0$; positiu parell; negatiu senar $\Rightarrow y_1$ es redueix a un polinomi
  - ii) positiu senar; negatiu parell $\Rightarrow y_2$ es redueix a un polinomi.

Si a més agafem a_0, a_1 t.q. $y_1(1) = 1$ & $y_2(1) = 1$, tenim els polinomis de Legendre. En particular, els set primers polinomis de Legendre són:

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$

$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$

$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-5x)$

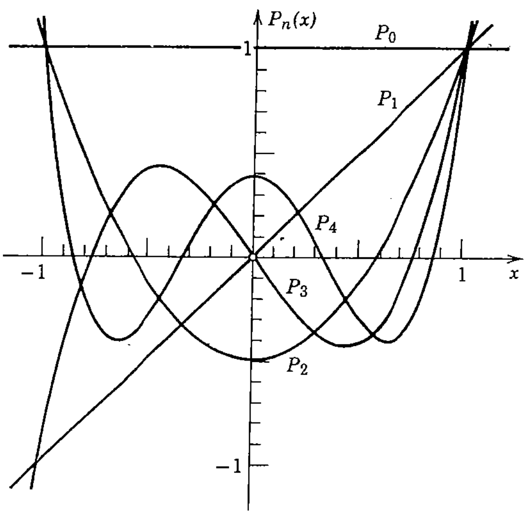


Figura 82. Polinomios de Legendre.

Propietats dels polinomis de Legendre

1) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, llavors P_n és $\left\{\begin{matrix}\text{parell}\\ \text{senar}\end{matrix}\right\}$ quan n és $\left\{\begin{matrix}\text{parell}\\ \text{senar}\end{matrix}\right\}$.

2) $P_n(1) = 1$ & $P_n(-1) = (-1)^n$.

3) $P_n(0) = 0$, si n és senar & $P_n'(0) = 0$ si n és parell

4) $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x)$ si $n \geq 2$ (fórmula de recurrència)

29) Proveu que l'equació $(\sin\eta)\dfrac{d^2y}{d\eta^2}+(\cos\eta)\dfrac{dy}{d\eta}+n(n+1)(\sin\eta)\,y=0$ es transforma en l'equació de Legendre mitjançant el canvi $x=\cos\eta$.

◁. Solució: $x=\cos\eta$: $\tilde{y}(x)=y(\arccos x)=y(\eta)$

$$\frac{d\tilde{y}}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{d\eta}\Longrightarrow\frac{dy}{d\eta}=-\sqrt{1-x^2}\,\frac{d\tilde{y}}{dx}=-(1-x^2)^{1/2}\frac{d\tilde{y}}{dx}$$

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dx^2}=-(1-x^2)^{1/2}\left\{\tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}2x\frac{d\tilde{y}}{dx}-(1-x^2)^{1/2}\frac{d^2\tilde{y}}{dx^2}\right\}=$$

$$=(1-x^2)\frac{d^2\tilde{y}}{dx^2}-x\frac{d\tilde{y}}{dx}$$

$$0=(\sin\eta)\frac{d^2y}{d\eta^2}+(\cos\eta)\frac{dy}{d\eta}+n(n+1)(\sin\eta)y=(1-x^2)^{+3/2}\frac{d^2\tilde{y}}{dx^2}-x(1-x^2)^{1/2}\frac{d\tilde{y}}{dx}-$$

$$-x(1-x^2)^{1/2}\frac{d\tilde{y}}{dx}+n(n+1)(1-x^2)^{1/2}\tilde{y}=(1-x^2)^{1/2}\left[(1-x^2)\frac{d^2\tilde{y}}{dx^2}-2x\frac{d\tilde{y}}{dx}+n(n+1)\tilde{y}\right]$$

$$\underset{-1<x<1}{\Longrightarrow}\quad(1-x^2)\frac{d^2\tilde{y}}{dx^2}-2x\frac{d\tilde{y}}{dx}+n(n+1)\tilde{y}=0$$ EDO de Legendre d'ordre n ▷