9. EQUACIONS DE LA FÍSICA MATEMÀTICA

1. Resoleu

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

(Indicació: busqueu una solució particular de la equació en derivades parcials.)

S. Agafem, com solució particular $v(x,t) = \cos x$ (obviament: $v_{tt} - v_{xx} = 0 - (-\cos x) = \cos x$). Sigui:

$$w(x,t) := u(x,t) - v(x,t)$$

on $u(x,t)$ és solució del problema donat. Aleshores $w(x,t)$ així definida satisfà:

$$\left.\begin{array}{l} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = -\cos x \\ w_t(x,0) = 0 \end{array}\right\}$$ i apliquem la fórmula de d'Alembert amb $f(x) = -\cos x$, $g \equiv 0$, $c = 1$ i obtenim:

$$w(x,t) = -\frac{1}{2}\left(\cos(x+t) + \cos(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 0 \cdot dt$$

$$= -\cos x \cos t = u(x,t) - v(x,t) = u(x,t) - \cos x$$

d'on:

$$\boxed{u(x,t) = 2\cos x \sin^2 \tfrac{t}{2}}$$

Comprovació:

$$u_t = 2\cos x \sin\tfrac{t}{2}\cos\tfrac{t}{2} = \cos x \sin t, \quad u_{tt} = \cos x \cos t$$

$$u_x = -2\sin x \sin^2\tfrac{t}{2}, \quad u_{xx} = -2\cos x \sin^2\tfrac{t}{2}$$

i llavors,

$$u_{tt} - u_{xx} = \cos x \cos t + \cos x\,(1 - \cos t) = \cos x \qquad (\text{ok})$$

d'altra banda, veiem que també es satisfan les condicions a la frontera, i.e.:

$$u(x,0) = 0 \quad \text{i} \quad u_t(x,0) = \cos x \sin 0 = 0 \qquad (\text{ok})$$

2. Sigui $u(x,t)$ solució de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\,, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = x^2 + a \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Trobeu el valor de $a \in \mathbb{R}$ per a que $u(1,1) = 0$.

S. Apliquem la fórmula de d'Alembert amb $f(x) = x^2 + a$, $g \equiv 0$, $c = 1$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left((x+t)^2 + a + (x-t)^2 + a\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 0 \cdot dt = a + \frac{1}{2}\left(2x^2 + 2t^2\right) = a + x^2 + t^2.$$

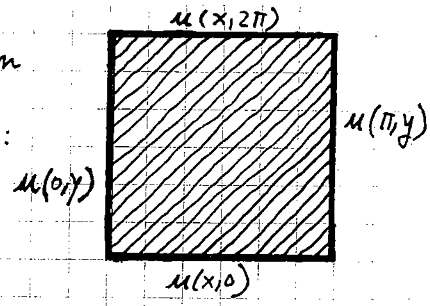
Llavors:

$$u(1,1) = a + 1 + 1 = a + 2 = 0 \Longrightarrow \boxed{a = -2}$$

Resoleu per separació de variables

$$\textbf{3.}\quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0\,, & x \in (0,\pi)\,, \quad y \in (0, 2\pi) \\ u(0,y) = g(y) \\ u(\pi, y) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(x, 2\pi) = 0 \end{cases} \qquad \text{amb} \quad g(y) = \begin{cases} \text{a)} & \sin y \\ \text{b)} & 1 + y^2 \\ \text{c)} & \cos y \end{cases}$$

S. (3) és una equació de Laplace, amb condicions de contorn de Dirichlet. Considerem 1er el problema homogeni:



$$\left.\begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(\pi, y) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,2\pi) = 0 \end{array}\right\} : (*)$$

i busquem solució per separació de variables, del tipus $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$.

Així, substituint:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$\left.\begin{array}{lll} X(\pi) = 0 & (\text{si } X(\pi) \neq 0 \Longrightarrow Y(y) \equiv 0 \ \forall y.) \\ Y(0) = 0 & (\text{si } Y(0) \neq 0 \Longrightarrow X(x) \equiv 0 \ \forall x.) \\ Y(2\pi) = 0 & (\text{si } Y(2\pi) \neq 0 \Longrightarrow X(x) \equiv 0 \ \forall x.) \end{array}\right\} : \begin{array}{l}\text{però això ens porta} \\ \text{a la solució trivial,} \\ \text{i.e., a } u(x,y) \equiv 0.\end{array}$$

tindrem:

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{només depèn de } x} = -\underbrace{\frac{Y''(y)}{Y(y)}}_{\text{només depèn de } y} = \lambda = \text{constant}.$$

$\Longrightarrow$ $X(x)$ i $Y(y)$ hauran de ser solució dels problemes a valor frontera (PVF) i a valors inicials, (PVI), (1) i (2) següents:

$$\left.\begin{array}{l} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \\ Y(0) = Y(2\pi) = 0 \end{array}\right\} : (1) \qquad \left.\begin{array}{l} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{array}\right\} : (2)$$

Busquem 1er la solució de (1):

* Si $\lambda \leq 0$ només tenim la solució trivial $Y(y) \equiv 0$. En efecte:

- Si $\lambda < 0$, la solució general de l'EDO és: $Y(y) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} t} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} t}$, i imposant les condicions a la frontera: $Y(0) = c_1 + c_2 = 0$, $Y(2\pi) = c_1 e^{2\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{-2\sqrt{-\lambda}\pi} = 0$; però aquest és un sistema homogeni, i com que el seu determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{-2\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} = -2\left(e^{2\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-2\sqrt{-\lambda}\pi}\right) = -2\sinh\left(2\sqrt{-\lambda}\pi\right) \neq 0$$

$\Longrightarrow$ $c_1 = 0 = c_2$ com solució única, i per tant el PVF (1) té només la solució trivial $Y(y) \equiv 0$.

- Si $\lambda = 0$, aleshores $Y(y) = c_1 y + c_2$ és la solució general de l'EDO. Imposant les condicions a la frontera $Y(0) = c_2 = 0$, $Y(2\pi) = 2\pi c_1 + c_2 = 0$; i aquest sistema té com solució (única) $c_1 = 0 = c_2$, la qual porta, com abans a la solució trivial $Y(y) \equiv 0$ del PVF (1).

* En canvi, si $\lambda > 0$; la solució general de l'EDO del PVF (1) és:

$$Y(y) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} y) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} y).$$

A continuació, imposant les condicions frontera:

$$Y(0) = c_1 = 0$$

$$Y(2\pi) = c_2 \sin(2\pi\sqrt{\lambda}) = 0 : \left\{\begin{array}{l} c_2 = 0 \text{ (porta, de nou a la solució trivial).} \\ \lambda = \lambda_n = n^2/4,\ n = 1, 2, 3, \ldots; \\ c_2 \in \mathbb{R},\ c_2 \neq 0 \end{array}\right.$$

i.e. el que s'obté així és:

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2}{4},\ n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{(Valors propis del PVF (1))}$$

$$Y(y) = Y_n(y) = \sin\left(\frac{ny}{2}\right),\ n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{(o qualsevol múltiple : funcions pròpies del PVF (1))}$$

NOTE BOOK

Amb aquests valors de $\lambda = \lambda_n$, resolem el PVI (2):

$$X''(x) - \frac{n^2}{4} X(x) = 0$$
$$X(\pi) = 0$$

d'on: $X(x) = c_1 e^{\frac{nx}{2}} + c_2 e^{-\frac{nx}{2}}$

$X(\pi) = c_1 e^{\frac{n\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{n\pi}{2}} = 0 \Longrightarrow c_2 = -c_1 e^{n\pi}$, $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq 0$ arbitrari.

Aleshores: $X(x) = c_1 \left(e^{\frac{nx}{2}} - e^{\frac{n\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}}\right)$, i com que c_1 és arbitrari podem, en particular, agafar: $c_1 = \frac{1}{2} e^{-\frac{n\pi}{2}}$, d'on resulta:

$$X_n(x) = \sinh\left[\frac{n}{2}(x-\pi)\right]; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

D'aquesta manera hem trobat, pel problema homogeni (*), la família de solucions següent:

$$u_n(x,y) = X_n(x) Y_n(y) = \sinh\left[\frac{n}{2}(x-\pi)\right] \sin\left(\frac{n}{2}y\right); \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(hem posat $n=0$ per incloure la solució trivial $u_n(x,y) \equiv 0 \ \forall x, \forall y$). Veiem que compleixen:

$$u_n(0,y) = -\sinh\frac{n\pi}{2} \sin\frac{ny}{2}; \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

tanmateix, remarquem que qualsevol funció donada per una sèrie convergent $u(x,y) = \sum_{n \geq 1} d_n u_n(x,y)$ també és solució. Això és el que farem servir per resoldre els apartats a), b) i c).

a) $g(y) = \sin y$. Per resoldre (3) amb aquesta funció, buscarem una solució del problema homogeni (*) tal que $u(0,y) = \sin y$. Tenim, per $n=2$:

$u_2(0,y) = -\sinh\pi \sin y$,

amb la qual cosa és clar que la solució és:

$$\boxed{u(x,y) = -\frac{1}{\sinh\pi} u_2(x,y) = \frac{\sinh(x-\pi)}{\sinh\pi} \sin y}$$

b) $g(y) = 1+y^2$. Posant $u(x,y) = \sum_{n \geq 1} d_n u_n(x,y)$, caldrà $u(0,y) = \sum_{n \geq 1} d_n u_n(0,y)$

$$= \sum_{n \geq 1} \left(-d_n \sinh\frac{n\pi}{2}\right) \sin\frac{ny}{2} = \sum_{n \geq 1} b_n \sin\frac{ny}{2} = 1+y^2,$$

On hem definit $b_n := -d_n \sinh \frac{n\pi}{2}$, i llavors aquest són els coeficients de la sèrie de Fourier de la funció $g(y) = 1+y^2$ a l'interval $(0, 2\pi)$.

Recordem, a continuació, algunes propietats de les sèries de Fourier.

Sèries de Fourier.– La sèrie de Fourier corresponent a la funció $f(x)$, definida a l'interval $[c, c+2L]$, $c \in \mathbb{R}$, $L>0$, es defineix com:

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right],$$

amb:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \,; \; n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \,; \; n = 1, 2, 3, \dots$$

Teorema [sobre la convergència puntual de la sèrie de Fourier] de Dirichlet. Si f, f' són $CT[c, c+2L]$; és a dir, si $[c, c+2L]$ es pot dividir en un nombre finit de subintervals de tal manera que f és C^1 a l'interior de cadascun, i en els punts frontera f i/o f' presenten —com a molt—, discontinuïtats evitables o de salt. Aleshores:

1) Si $x_c \in (c, c+2L)$ és un punt de continuïtat de f: $\mathcal{F}[f](x_c) = f(x_c)$.

2) Si $x_d \in (c, c+2L)$ és un punt de discontinuïtat de f: $\mathcal{F}[f](x_d) = \frac{1}{2}\left(f(x_d^+) + f(x_d^-)\right)$.

3) Si $x = c$ ó $x = c+2L$: $\mathcal{F}[f](c) = \mathcal{F}[f](c+2L) = \frac{1}{2}\left(f(c^+) + f((c+2L)^-)\right)$.

En el c.p. $c = -L$ podem parlar de sèries de Fourier en sinus i en cosinus: si $f \in CT[0, L]$ (amb el mateix sentit que al teorema de dalt), llavors

(i) la seva sèrie de Fourier en sinus a l'interval $[0, L]$ ve donada per:

$$\mathcal{F}_S[f](x) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ amb } b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(ii) la seva sèrie de Fourier en cosinus a l'interval $[0, L]$ ve donada per:

$$\mathcal{F}_C[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ amb } a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \; n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Aplicant això a b) obtenim:

NOTE BOOK

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(1+y^2)\sin\frac{ny}{2}\,dy = -\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi}(1+y^2)\,d\left(\cos\frac{ny}{2}\right) = -\frac{2}{n\pi}\left[(1+y^2)\cos\frac{ny}{2}\right]_0^{2\pi} +$$

$$+\frac{4}{n\pi}\int_0^{2\pi} y\cos\frac{ny}{2}\,dy = \frac{2}{n\pi}\left[1-(1+4\pi^2)(-1)^n\right] + \frac{8}{n^2\pi}\int_0^{2\pi} y\,d\left(\sin\frac{ny}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{8\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{8}{n^2\pi}\left[y\sin\frac{ny}{2}\right]_0^{2\pi} - \frac{8}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\frac{ny}{2}\,dy =$$

$$= \frac{8\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{16}{n^3\pi}\left[\cos\frac{ny}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) -$$

$$-\frac{16}{n^3\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \boxed{\frac{8\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\left(1-\frac{8}{n^2}\right)},$$

i la solució és:

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n\geq 1} d_n u_n(x,y) = \sum_{n\geq 1}\frac{-b_n}{\sinh\frac{n\pi}{2}}\sinh\frac{n(x-\pi)}{2}\sin\frac{ny}{2} \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{\frac{8\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\left(1-8/n^2\right)}{\sinh\frac{n\pi}{2}}\sinh\frac{n(x-\pi)}{2}\sin\frac{ny}{2}\end{aligned}}$$

c) $g(y) = \cos y$. Com en b), calculem:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos y\sin\frac{ny}{2}\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin\left(1+\frac{n}{2}\right)y + \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)y\right]dy =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos\left(\frac{n}{2}+1\right)y}{n/2+1} + \frac{\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)}{n/2-1}\right] = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+2)\pi}{n+2} - \frac{1}{n+2} +\right.$$

$$\left.+\frac{\cos(n-2)\pi}{n-2} - \frac{1}{n-2}\right] = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n+2} - \frac{1-(-1)^n}{n-2}\right) = \frac{2n\left(1-(-1)^n\right)}{\pi(n^2-4)},$$

per $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 2$; mentre que:

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos y\sin y\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2y\,dy = 0$$

Per tant: $b_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ parell} \\ \dfrac{4n}{\pi(n^2-4)}, & \text{si } n \text{ senar}\end{cases}$, i podem posar:

$$b_{2k+1} = \frac{4(2k+1)}{\pi\left((2k+1)^2-4\right)} = -d_{2k+1}\sinh\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\pi, \quad b_{2k} = 0; \text{ per } k=0,1,2,3,\ldots$$

Finalment doncs, la solució es pot escriure com:

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{k\geq 0}\frac{-4(2k+1)}{\pi\left((2k+1)^2-4\right)\sinh\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}\sinh\left[\left(k+\tfrac{1}{2}\right)(x-\pi)\right]\sin\left[\left(k+\tfrac{1}{2}\right)y\right]} \quad \square$$

$$\textbf{4.}\quad \begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=2y\,, \quad x\in(0,\pi)\,, \quad y\in(0,2\pi) \\ u(0,y)=0 \\ u(\pi,y)=1 \\ u(x,0)=0 \\ u(x,2\pi)=2\pi x^2 \end{cases}$$

Indicació: Trobeu una solució particular $v(x,y)$ de l'equació principal que també verifiqui una de les condicions no homogènies i feu el canvi $w(x,y)=u(x,y)-v(x,y)$.

S. Una possibilitat és agafar $v(x,y)=x^2y$ i aleshores el canvi $w(x,y)=u(x,y)-v(x,y)$. Llavors, si suposem que $u(x,y)$ és solució de (4), $w(x,y)$ és solució del problema

$$\left.\begin{array}{l} w_{xx}+w_{yy}=0, \quad x\in(0,\pi),\ y\in(0,2\pi) \\ w(0,y)=0, \\ w(\pi,y)=1-\pi^2 y, \end{array}\ y\in(0,2\pi) \right. \\ \left. w(x,0)=w(x,2\pi)=0, \quad x\in(0,\pi) \right\} : (*)$$

Busquem les solucions del corresponent problema homogeni

$$\left.\begin{array}{l} w_{xx}+w_{yy}=0, \quad x\in(0,\pi),\ y\in(0,2\pi) \\ w(0,y)=0, \quad y\in(0,2\pi) \\ w(x,0)=w(x,2\pi)=0, \quad x\in(0,\pi) \end{array}\right\} : (**)$$

per separació de variables, i.e. posant $w(x,y)=X(x)Y(y)$. Això porta als problemes a valors frontera, PVF, (veure problema 3) següents:

$$\left.\begin{array}{l} Y''(y)+\lambda Y(y)=0 \\ Y(0)=Y(2\pi)=0 \end{array}\right\} : (1) \qquad \left.\begin{array}{l} X''(x)-\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0 \end{array}\right\} : (2)$$

(1) té els valors i les funcions pròpies

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda=\lambda_n=\dfrac{n^2}{4} \\ Y(y)=Y_n(y)=\sin\dfrac{ny}{2} \end{array} \quad n=0,1,2,3,\dots;}$$

com ja s'ha vist al problema 3 —aquí afegim $n=0$ per incloure les solucions trivials—. A continuació substituïm aquests valors de λ a (2) i resolem

$$\left.\begin{array}{l} X''(x)-\dfrac{n^2}{2}X(x)=0, \\ X(0)=0\,. \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Solució general: } X(x)=c_1 e^{nx/2}+c_2 e^{-nx/2} \\ X(0)=c_1+c_2=0 \Longrightarrow c_2=-c_1 \text{ amb } c_1\in\mathbb{R} \text{ arbitrari.} \end{array}$$

En particular, prenent $c_1=\frac{1}{2}$, obtenim les funcions "pròpies": $\boxed{X_n(x)=\sinh\frac{nx}{2},\ n=0,1,2,\dots}$

Així les solucions fonamentals són doncs

$$W_n(x,y) = X_n(x)\,Y_n(y) = \sinh\frac{nx}{2}\sin\frac{ny}{2}\ ;\ n=0,1,2,\dots$$

i, per linealitat també serà solució del problema homogeni (**) qualsevol serie convergent de la forma:

$$W(x,y) = \sum_{n\geq 1} a_n W_n(x,y) = \sum_{n\geq 1} a_n \sinh\frac{nx}{2}\sin\frac{ny}{2}$$

A continuació, per trobar la solució de (*) cal imposar la condició no homogènia, i.e.:

$$\sum_{n\geq 1} a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{ny}{2}\right) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin\left(\frac{ny}{2}\right) = 1-\pi^2 y,$$

on hem posat $b_n := a_n \sinh\frac{n\pi}{2}$. Ara bé, aquests són els coeficients de la sèrie de Fourier en sinus, a l'interval $(0,2\pi)$, de la funció $g(y) = 1-\pi^2 y$. Per tant:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(1-\pi^2 y)\sin\left(\frac{ny}{2}\right)dy = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{2\pi}{n}\int_0^{2\pi} y\, d\left(\cos\frac{ny}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{2\pi}{n}\left[y\cos\frac{ny}{2}\right]_0^{2\pi} - \underbrace{\frac{2\pi}{n}\int_0^{2\pi}\cos\frac{ny}{2}\,dy}_{=0} =$$

$$= \frac{4\pi^2}{n}(-1)^n + \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\ ;\ n=1,2,3,\dots$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_n = \frac{4\pi^3(-1)^n + 2\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi\sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right)} \text{ per } n=1,2,3,\dots}$$

I així la solució del problema (4) de l'enunciat queda, un cop desfet el canvi de funció que s'havia fet al principi (i.e. posant ara: $u(x,y) = x^2y + W(x,y)$):

$$\boxed{u(x,y) = x^2 y + \sum_{n\geq 1}\frac{4\pi^3(-1)^n + 2\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi\sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right)}\sinh\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{ny}{2}\right).}$$

□

NOTE BOOK

5. $\begin{cases} u_{tt}+u_t-u_{xx}=0\,, & x\in(-\pi,\pi)\,, \quad t>0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=0 \\ u_x(-\pi,t)=0 \\ u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$ amb $f(x)=\begin{cases} \text{a)} & \cos x+2\cos^2 x \\ \text{b)} & 1+\sin\frac{3}{2}x \\ \text{c)} & \sin x \end{cases}$

S. Cal considerar 1er el problema homogeni:

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt}+u_t-u_{xx}=0, \\ &u_t(x,0)=0, \\ &u_x(-\pi,t)=0, \\ &u_x(\pi,t)=0. \end{aligned}\right\} \text{———} (1)$$

al qual aplicarem separació de variables, i.e., buscarem solucions de la forma: $u(x,t)=X(x)T(t)$.
Substituint s'obté:

$$X(x)T''(t)+X(x)T'(t)-X''(x)T(t)=0,\ \forall x\in(-\pi,\pi), \forall t>0.$$

i a continuació, dividint pel producte $X(x)T(t)$ ens queda:

$$\frac{T''(t)}{T(t)}+\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda=\text{constant}\ \forall x\in(-\pi,\pi), \forall t>0: X(x)T(t)\neq 0.$$

Tanmateix, substituint a la condició inicial i a les dues condicions frontera (de Neumann):

$u_t(x,0)=X(x)T'(0) \Longrightarrow T'(0)=0$ (ó $X(x)=0\ \forall x\in(-\pi,\pi)$, però aquesta dóna lloc a la solució trivial)

$u_x(-\pi,t)=X'(-\pi)T(t) \Longrightarrow X'(-\pi)=0$ (ó $T(t)=0\ \forall t>0$, " " " " " " " " .)

$u_x(\pi,t)=X'(\pi)T(t) \Longrightarrow X'(\pi)=0$ (ó $T(t)=0\ \forall t>0$, " " " " " " " " .)

S'arriba així a un problema a valors frontera (PVF) i un problema a valors inicials (PVI), (2) i (3) següents:

$$\left.\begin{aligned} X''(x)+\lambda X(x)&=0 \\ X'(-\pi)=X'(\pi)&=0 \end{aligned}\right\} \text{———} (2) \qquad \left.\begin{aligned} T''(t)+T'(t)+\lambda T(t)&=0 \\ T'(0)&=0 \end{aligned}\right\} \text{———} (3)$$

El PVF (2) no admet cap solució diferent de la trivial (o solució nul·la: $X(x)=0$ $\forall x\in(-\pi,\pi)$) per $\lambda<0$. En efecte, quan $\lambda<0$, la solució de l'EDO del problema (2) s'escriu com:

$$X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

i imposant les condicions a la frontera:

$$X'(-\pi)=\sqrt{-\lambda}\,c_1e^{-\pi\sqrt{-\lambda}}-\sqrt{-\lambda}\,c_2e^{\pi\sqrt{-\lambda}}=0.$$
$$X'(\pi)=\sqrt{-\lambda}\,c_1e^{\pi\sqrt{-\lambda}}-\sqrt{-\lambda}\,c_2e^{-\pi\sqrt{-\lambda}}=0.$$

Aquest sistema tindrà solucions diferents de $c_1 = c_2 = 0$ si i només si s'anul·la el seu determinant, i.e.:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{-\lambda}\, e^{-\pi\sqrt{-\lambda}} & -\sqrt{-\lambda}\, e^{+\pi\sqrt{-\lambda}} \\ \sqrt{-\lambda}\, e^{\pi\sqrt{-\lambda}} & -\sqrt{-\lambda}\, e^{-\pi\sqrt{-\lambda}} \end{vmatrix} = -\lambda\left(e^{2\pi\sqrt{-\lambda}} - e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}}\right) = -2\lambda \sinh\left(2\pi\sqrt{-\lambda}\right);$$

però $-2\lambda \sinh(2\pi\sqrt{-\lambda}) > 0$ quan $\lambda < 0$. D'altra banda, quan $\lambda = 0$, la solució de l'EDO és: $X(x) = c_1 x + c_2$, amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, i imposant les condicions a la frontera: $X'(-\pi) = c_1 = 0$, $X'(\pi) = c_1 = 0$. Aleshores, la solució del PVF (2) per $\lambda = 0$ queda $X(x) \equiv b =$ constant $\forall x \in (-\pi, \pi)$. Per últim, per $\lambda > 0$ la solució de l'EDO ve donada per:

$$X(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\, x\right),$$

i, imposant les condicions a la frontera:

$$X'(-\pi) = \sqrt{\lambda}\, c_1 \sin\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) + \sqrt{\lambda}\, c_2 \cos\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) = 0,$$
$$X'(\pi) = -\sqrt{\lambda}\, c_1 \sin\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) + \sqrt{\lambda}\, c_2 \cos\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) = 0,$$

com abans, perquè aquest sistema tingui una solució diferent de $c_1 = 0 = c_2$, cal:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\lambda} \sin\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) & \sqrt{\lambda} \cos\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) \\ -\sqrt{\lambda} \sin\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) & \sqrt{\lambda} \cos\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) \end{vmatrix} = \lambda \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right) = 0 \Longleftrightarrow 2\pi\sqrt{\lambda} = n\pi$$

per $n = 1, 2, 3, \ldots$; amb la qual cosa tenim que el valors propis i les funcions pròpies del problema a valors frontera (2) són

$$(4) \qquad \boxed{\lambda_n = \frac{n^2}{4};\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots,\quad X_n(x) = \begin{cases} X_{2p}(x) = \cos px, \text{ per } n \text{ parell}: n = 2p, \\ X_{2p+1}(x) = \sin(p+\tfrac{1}{2})x, \text{ per } n \text{ senar}: n = 2p+1, \\ p = 0, 1, 2, 3, \ldots;\ x \in (-\pi, \pi). \end{cases}}$$

Remarca: notem que s'ha afegit $n = 0$ ($\Longleftrightarrow p = 0$) per incloure el vap nul $\lambda_0 = 0$ i la funció propia constant $X_0(x) \equiv 1$. A més, s'agafa en cada cas $c_1 = 1$ i $c_2 = 1$ respectivament.

A continuació, es substitueixen els valors propis $\lambda = \lambda_n = n^2/4$ amb $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ al

(1) Per exemple, a partir de la condició frontera $X'(-\pi) = \frac{n}{2}\left(c_1 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = 0$ queda clar que, si n és parell, $n = 2p$, llavors $c_2 = 0$ i $c_1 \in \mathbb{R}$ es pot agafar arbitrari, mentre que si n és senar: $n = 2p+1$, és $c_1 = 0$ i $c_2 \in \mathbb{R}$ es pot agafar arbitrari. Amb això, les funcions pròpies del PVF (2) queden com s'assenyalen en (4).

PVI (3):
$$T''(t)+T'(t)+\frac{n^2}{4}T(t)=0,\quad T'(0)=0,\quad t>0$$

Primer de tot, resoldrem l'EDO. El seu polinomi característic és: $p(\mu)=\mu^2+\mu+\frac{n^2}{4}$, $n=$
$=0,1,2,3,\dots$

$$\mu_n=\begin{cases}0,\ -1 & \text{per } n=0,\\ -\frac{1}{2}\ \ (\text{doble}) & \text{» } n=1,\\ -\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}\sqrt{n^2-1} & \text{» } n=2,3,4,\dots\ (n \text{ enter} \geq 2: n\in\mathbb{N}, n\geq 2).\end{cases}$$

D'aquesta manera, imposant també la c.i.: $T'(0)=0$.

$$\left.\begin{aligned} n=0:\ & T(t)=c_1+c_2e^{-t}\\ & T'(0)=-c_2=0\end{aligned}\right\}\Longrightarrow T_0(t)\equiv 1 \ \ (\text{agafant } c_1=1).$$

$$\left.\begin{aligned} n=1:\ & T(t)=c_1e^{-t/2}+c_2te^{-t/2}\\ & T'(0)=-\frac{c_1}{2}+c_2=0\Longrightarrow c_2=\frac{c_1}{2}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \begin{aligned} T_1(t)&=c_1e^{-t/2}(1+t/2)\\ &=e^{-t/2}(2+t),\ \text{agafant } c_1=2.\end{aligned}$$

$$n\in\mathbb{N},\ n\geq 2:\ T(t)=e^{-t/2}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2}t\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2}t\right)\right)$$

$$T'(0)=-\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}\sqrt{n^2-1}=0\Longrightarrow c_2=\frac{c_1}{\sqrt{n^2-1}}$$

d'on:
$$T_n(t)=c_1e^{-t/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2}t\right)+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\sin\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2}t\right)\right)$$
$$=e^{-t/2}\left(\sqrt{n^2-1}\cos\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2}t\right)+\sin\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2}t\right)\right),$$

on hem agafat $c_1=\sqrt{n^2-1}$.

Aleshores, les solucions del PVI (3) corresponents a cadascun dels valors propis $\lambda_n=n^2/4$, $n=0,1,2,3,\dots$ del PVF (2) són:

$$T_n(t)=\begin{cases}1, & n=0,\\ e^{-t/2}(2+t), & n=1,\\ e^{-t/2}\left(\sqrt{n^2-1}\cos\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2}t\right)+\sin\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2}t\right)\right), & n\in\mathbb{N}, n\geq 2.\end{cases}$$

A continuació, combinant les solucions del PVF (2) i del PVI (3), tindrem, per les solucions bàsiques (o funcions bàsiques) del problema homogeni (1).

NOTE BOOK

$$(5)\quad u_n(x,t) = \begin{cases} u_{2p}(x,t) = \begin{cases} 1, & p=0 \\ e^{-t/2}\left(\sqrt{4p^2-1}\,\cos\left(\frac{\sqrt{4p^2-1}}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{4p^2-1}}{2}t\right)\right)\cos(px), & p=1,2,3,\dots \end{cases} & \text{si } n \text{ parell},\ n=2p,\ p=0,1,2,3,\dots \\ u_{2p+1}(x,t) = \begin{cases} e^{-t/2}(t+2)\sin\frac{x}{2}, & p=0 \\ e^{-t/2}\left(2\sqrt{p^2+p}\,\cos\left(\sqrt{p^2+p}\,t\right) + \sin\left(\sqrt{p^2+p}\,t\right)\right)\sin(p+\frac{1}{2})x, & p=1,2,3,\dots \end{cases} & \text{si } n \text{ senar},\ n=2p+1,\ p=0,1,2,\dots \end{cases}$$

Tanmateix, per linealitat, també serà solució del mateix problema homogeni (1) qualsevol combinació lineal d'aquestes funcions bàsiques, de manera general, les sèries del tipus:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + b_0\, e^{-t/2}(t+2)\sin\frac{x}{2} + \sum_{p\geq 1} e^{-t/2}\left[a_p\left(\sqrt{4p^2-1}\cos\left(\frac{\sqrt{4p^2-1}}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{4p^2-1}}{2}t\right)\right)\cos px \right.$$
$$\left. + b_p\left(2\sqrt{p^2+p}\,\cos\left(\sqrt{p^2+p}\,t\right) + \sin\left(\sqrt{p^2+p}\,t\right)\right)\sin(p+\tfrac{1}{2})x\right],\quad x\in(-\pi,\pi),\ t>0$$

Per últim, imposarem les condicions no homogènies:

$$(6)\quad \begin{aligned} u(x,0) &= \frac{a_0}{2} + 2b_0\sin\frac{x}{2} + \sum_{p\geq 1}\left[a_p\sqrt{4p^2-1}\cos px + 2b_p\sqrt{p^2+p}\,\sin(p+\tfrac{1}{2})x\right] \\ &= \frac{a_0'}{2} + \sum_{p\geq 1}\left[a_p'\cos px + b_p'\sin(p-\tfrac{1}{2})x\right] = f(x),\quad x\in(-\pi,\pi) \end{aligned}$$

on hem posat:

$$(7)\quad a_0' = a_0;\quad a_p' = a_p\sqrt{4p^2-1},\quad b_p' = 2b_{p-1}\sqrt{p^2-p+\delta_{p,1}},\quad p=1,2,3,\dots$$

essent: $\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i\neq j \\ 1, & i=j \end{cases}$ (i.e., la δ de Kronecker).

Aplicarem (5), (6) i (7) als apartats a), b), c) de l'enunciat

a) $f(x) = \cos x + 2\cos^2 x = 1 + \cos x + \cos 2x$. Comparant coeficients segons (6) s'obté:

$$a_0' = 2,\ a_1' = 1,\ a_2' = 1;\ a_p' = 0\ \forall p\geq 3 \ \text{ i } \ b_p' = 0\ \forall p\geq 1.$$

Llavors, segons (7):

$$a_0 = 2,\ a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ a_2 = \frac{1}{\sqrt{15}},\ a_p = 0\ \forall p\geq 0 \ \text{ i } \ b_p = 0\ \forall p = 0,1,2,3,\dots,$$

i tenim per la solució del problema homogeni:

$$\boxed{u(x,t) = 1 + e^{-t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\cos x + e^{-t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{15}}{2}t + \frac{\sqrt{15}}{15}\sin\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\cos 2x,\quad x\in(-\pi,\pi),\ t>0.}$$

b) $f(x) = 1 + \sin\frac{3x}{2}$. Com abans, comparant coeficients:

$$a_0' = 2,\ a_p' = 0 \ \forall p \geq 1;\ b_2' = 1,\ b_p' = 0 \ \forall p \in \mathbb{N}, p \neq 2.$$

Aplicant (7):

$$a_0 = 2,\ a_p = 0 \ \forall p \geq 1;\ b_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ b_p = 0 \ \forall p \in \mathbb{N}\cup\{0\}, p \neq 1,$$

i tenim per la solució del problema no homogeni corresponent:

$$\boxed{u(x,t) = 1 + e^{-t/2}\left(\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\right)\sin\frac{3x}{2};\ x \in (-\pi,\pi),\ t>0}$$

c) $f(x) = \sin x$. A partir de (6)

$$u(x,0) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{p\geq 1} a_p'\cos px + b_p'\sin(p-\tfrac{1}{2})x = \sin x,\ x\in(-\pi,\pi).$$

Com que, de fet, $\{1\}\cup\{\cos px, \sin(p-\frac{1}{2})x\}_{p\in\mathbb{N}}$ formen un sistema ortogonal complet a l'interval $[-\pi,\pi]$, els coeficients a_0', a_p', b_p' $(p=1,2,3,\dots)$ vénen donats per:

$$a_0' = \frac{\langle \sin x, \frac{1}{2}\rangle}{\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle} = \frac{1}{\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\sin x\, dx = 0,$$

$$a_p' = \frac{\langle \sin x, \cos px\rangle}{\langle \cos px, \cos px\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos px\, dx = 0,$$

$$b_p' = \frac{\langle \sin x, \sin(p-\frac{1}{2})x\rangle}{\langle \sin(p-\frac{1}{2})x, \sin(p-\frac{1}{2})x\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\sin(p-\tfrac{1}{2})x\, dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(p+\tfrac{1}{2})x - \cos(p-\tfrac{3}{2})x\right]dx$$

$$= \frac{-\frac{1}{2\pi}}{p+\frac{1}{2}}\left[\sin(p+\tfrac{1}{2})x\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{\frac{1}{2\pi}}{p-\frac{3}{2}}\left[\sin(p-\tfrac{3}{2})x\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} =$$

$$= \frac{-1/\pi}{p+\frac{1}{2}}\sin\frac{(2p+1)\pi}{2} + \frac{1/\pi}{p-\frac{3}{2}}\sin\frac{(2p-3)\pi}{2} = (-1)^p\left(\frac{1}{p-\frac{3}{2}} - \frac{1}{p+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{4(-1)^p}{\pi(2p-3)(2p+1)},$$

aleshores, de (7): $b_0 = \frac{b_1'}{2\sqrt{1}} = \frac{-4}{-1\cdot 3\pi}\times\frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{2}{3\pi}$, $b_p = \frac{b_{p+1}'}{2\sqrt{p^2+p}} = \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(2p-1)(2p+3)\sqrt{p^2+p}}$,

$a_0 = 0,\ a_p = 0,\ p = 1,2,3,\dots$

NOTE BOOK

Tenim doncs, per la solució del problema no homogeni

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{2}{3\pi} e^{-t}(t+2)\sin\frac{x}{2} + \sum_{p\geq 1} \frac{2(-1)^{p+1} e^{-t/2}}{\pi(2p-1)(2p+3)}\left[2\cos\left(\sqrt{p^2+p}\,t\right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{p^2+p}} \sin\left(\sqrt{p^2+p}\,t\right)\right] \sin\left(p+\tfrac{1}{2}\right)x, \quad x \in (-\pi,\pi),\ t>0. \end{aligned}}$$

□

6. $\begin{cases} u_t - u_{xx} - u = 0, \quad x \in (0,\pi), \quad t>0 \\ u(x,0) = h(x) \\ u(0,t) = 0 \\ u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$ amb $h(x) = \begin{cases} \text{a)} & x(2\pi - x) \\ \text{b)} & x \\ \text{c)} & 1 \end{cases}$

S. Considerarem 1^er el problema homogeni:

$$\left.\begin{aligned} & u_t - u_{xx} - u = 0, \quad x \in (0,\pi),\ t>0 \\ & u(0,t) = 0 \\ & u_x(\pi,t) = 0 \end{aligned}\right\} \text{———} (1)$$

i apliquem el mètode de separació de variables: $u(x,t) = X(x)T(t)$:

$$X(x)T'(t) - X''(x)T(t) - X(x)T(t) = 0, \quad x \in (-\pi,\pi),\ t>0,$$

dividint, a continuació, pel producte $X(x)\cdot T(t)$:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - 1 = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \text{constant},$$

i imposant tot seguit les condicions de contorn s'arriba a:

$$X(0)T(t) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0 \quad (\text{ó } T(t) \equiv 0\ \forall t>0, \text{ però això porta a la solució nul·la.})$$

$$X'(\pi)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(\pi) = 0 \quad (\text{ó } T(t) \equiv 0\ \forall t>0,$$

d'on s'obtenen els problemes a valors frontera, PVF:

$$\left.\begin{aligned} & X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ & X(0) = X'(\pi) = 0 \end{aligned}\right\} \text{———} (2)$$

i l'equació

$$T'(t) + (\lambda - 1)T(t) = 0. \text{———} (3)$$

Estudiarem 1^er el PVF (2).

- Per $\lambda<0$: $X(x)=c_1 e^{+\sqrt{-\lambda}\,x}+c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$; i imposant les condicions a la frontera:

$X(0)=c_1+c_2=0 \Longrightarrow c_2=-c_1$

$X'(\pi)=c_1\sqrt{-\lambda}\,e^{\pi\sqrt{-\lambda}}-c_2\sqrt{-\lambda}\,e^{-\pi\sqrt{-\lambda}}=c_1\sqrt{-\lambda}\left(e^{\pi\sqrt{-\lambda}}+e^{-\pi\sqrt{-\lambda}}\right)=2c_1\sqrt{-\lambda}\cosh\left(\pi\sqrt{-\lambda}\right)=0$

$\Longleftrightarrow c_1=0 \ (\Longrightarrow c_2=0)$.

per tant, l'única solució possible per $\lambda<0$ és la trivial, i.e. $X(x)\equiv 0 \ \forall x\in(0,\pi)$

- Per $\lambda=0$: $X(x)=c_1x+c_2$. De nou, imposant les condicions a la frontera: $X(0)=c_2=0$, $X'(\pi)=c_1=0$, veiem que l'única solució possible és altra vegada la trivial: $X(x)\equiv 0 \ \forall x\in(0,\pi)$
- Per $\lambda>0$, la solució de l'EDO és: $X(x)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$; i amb les condicions frontera: $\begin{cases} X(0)=c_1=0 \\ X'(\pi)=-c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi)+c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\pi)\overset{c_1=0}{=}c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\pi)=0\end{cases}$

d'on, o bé $c_2=0$ (i llavors, com que $c_1=0$, porta a la solució trivial) o bé $\sqrt{\lambda}\pi=(n-\frac{1}{2})\pi$

$\Longleftrightarrow \lambda=\lambda_n=(n-\frac{1}{2})^2$, per $n=1,2,3,\ldots$ i aleshores les funcions pròpies queden:

$$\boxed{X_n(x)=\sin(n-\tfrac{1}{2})x;\quad n=1,2,3,\ldots}$$

per $x\in(0,\pi)$ i on hem agafat $c_2=1$.

Si a continuació substituïm els valors propis $\lambda_n=(n-\frac{1}{2})^2$, $n=1,2,3,\ldots$ a l'EDO (3):

$$T'(t)+(\lambda_n-1)T(t)=T'(t)+\left((n-\tfrac{1}{2})^2-1\right)T(t)=0,$$

arribem a les "funcions pròpies":

$$\boxed{T_n(t)=e^{(1-(n-\frac{1}{2})^2)t},\quad n=1,2,3,\ldots;\ t>0.}$$

En conseqüència, les funcions bàsiques vénen donades per:

$$\boxed{u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=e^{(1-(n-\frac{1}{2})^2)t}\sin(n-\tfrac{1}{2})x;\quad n=1,2,3,\ldots;\ x\in(0,\pi),\ t>0.}$$

i llavors la solució del problema homogeni (1) vindrà donada per combinacions lineals d'aquestes funcions bàsiques, i.e.; per sèries de la forma:

$$\boxed{u_n(x,t)=\sum_{n\geq 1} b_n u_n(x,t)=\sum_{n\geq 1} b_n e^{(1-(n-\frac{1}{2})^2)t}\sin(n-\tfrac{1}{2})x;\quad x\in(0,\pi),\ t>0.}$$

sempre que aquestes siguin convergents.

Per trobar les solucions del problema no homogeni imposarem les diferents condicions inicials (apartats a), b) i c)):

a) $u(x,0) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x = x(2\pi - x)$, $x \in (0,\pi)$

Tenint en compte que $\left\{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ formen un sistema ortogonal complet a $(0,\pi)$, s'obtenen els coeficients b_n:

$$b_n = \frac{\langle x(2\pi-x), \sin(n-\frac{1}{2})x\rangle}{\langle \sin(n-\frac{1}{2})x, \sin(n-\frac{1}{2})x\rangle} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(2\pi-x)\sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x\, dx =$$

$$= 4\int_0^\pi x\sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x\,dx = 4I_1 - \frac{2}{\pi}I_2$$

$$I_1 := \int_0^\pi x\sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x\,dx = \frac{-1}{n-\frac{1}{2}}\int_0^\pi x\, d\cos\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x = \frac{-1}{n-\frac{1}{2}}\underbrace{\left[x\cos\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x\right]_0^\pi}_{=0} + \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\int_0^\pi \cos\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{(n-\frac{1}{2})^2}$$

$$I_2 := \int_0^\pi x^2\sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x\,dx = \frac{-1}{n-\frac{1}{2}}\int_0^\pi x^2\, d\cos\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x = \frac{-1}{n-\frac{1}{2}}\underbrace{\left[x^2\cos\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x\right]_0^\pi}_{=0}$$

$$+ \frac{2}{n-\frac{1}{2}}\int_0^\pi x\cos\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x\,dx = \frac{2}{(n-\frac{1}{2})^2}\int_0^\pi x\, d\sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x = \frac{2}{(n-\frac{1}{2})^2}\left[x\sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x\right]_0^\pi -$$

$$- \frac{2}{(n-\frac{1}{2})^2}\int_0^\pi \sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x\,dx = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{(n-\frac{1}{2})^2} - \frac{2}{(n-\frac{1}{2})^3}$$

d'on:

$$b_n = 4I_1 - \frac{2}{\pi}I_2 = \cancel{\frac{4(-1)^{n+1}}{(n-\frac{1}{2})^2}} - \cancel{\frac{4(-1)^{n+1}}{(n-\frac{1}{2})^2}} + \frac{4/\pi}{(n-\frac{1}{2})^3} = \frac{4/\pi}{(n-\frac{1}{2})^3}.$$

Amb aquests coeficients, la solució del problema no homogeni queda doncs:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^3}\, e^{\left(1-(n-\frac{1}{2})^2\right)t}\sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x, \quad x\in(0,\pi),\ t>0.}$$

NOTE BOOK

b) $u(x,0) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(n-\frac{1}{2})x = x, \quad x \in (0,\pi).$

Per trobar els coeficients b_n, procedim com a l'apartat anterior:

$$b_n = \frac{\langle x, \sin(n-\frac{1}{2})x\rangle}{\langle \sin(n-\frac{1}{2})x, \sin(n-\frac{1}{2})x\rangle} = \int_0^{\pi} x \sin(n-\tfrac{1}{2})x\,dx = \frac{2}{\pi} I_1$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(n-\frac{1}{2})^2}.$$

Així, la solució del problema no homogeni per a aquest $h(x)=x$ és:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-\frac{1}{2})^2} e^{(1-(n-\frac{1}{2})^2)t} \sin(n-\tfrac{1}{2})x, \quad x\in(0,\pi), t>0.}$$

c) $u(x,0) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(n-\frac{1}{2})x = 1, \quad x\in(0,\pi)$

$$b_n = \frac{\langle 1, \sin(n-\frac{1}{2})x\rangle}{\langle \sin(n-\frac{1}{2})x, \sin(n-\frac{1}{2})x\rangle} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin(n-\tfrac{1}{2})x\,dx = \frac{-2}{\pi(n-\frac{1}{2})}\left[\cos(n-\tfrac{1}{2})x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi(n-\frac{1}{2})}.$$

Llavors, la solució del problema no homogeni amb $h(x)=1 \;\forall x\in(0,\pi)$:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n-\frac{1}{2}} e^{(1-(n-\frac{1}{2})^2)t} \sin(n-\tfrac{1}{2})x, \quad x\in(0,\pi), t>0.}$$

□

7. $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x\in(-\pi,\pi), \quad t>0 \\ u(x,0) = x \\ u_x(-\pi,t) = 0 \\ u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$

S. Considerem el problema homogeni:

$$\left.\begin{array}{l} u_t - u_{xx} = 0, \; x\in(-\pi,\pi), t>0 \\ u_x(-\pi,t) = 0 = u_x(\pi,t) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

i apliquem separació de variables posant $u(x,t) = X(x)T(t)$:

$$X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0 \underset{X(x)T(t)\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda = \text{constant}$$

NOTE BOOK

d'aquí se'n deriven els problemes a valors frontera i l'equació diferencial següents:

$$\left.\begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (-\pi, \pi) \\ X'(-\pi) = X'(\pi) = 0 \end{array}\right\} ; \text{―――――――――――――――――} (2)$$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \quad ; \text{―――――――――――――――――} (3)$$

El problema a valors frontera (2) no admet solucions diferents de la trivial per $\lambda < 0$, i de fet, es comprova —veure problema 5—, que els valors i les funcions pròpies de (2) vénen donades per:

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_n = \dfrac{n^2}{4}; \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\[2ex] X_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} X_{2p}(x) = \cos px, & \text{per } n \text{ parell}: n = 2p \\ X_{2p+1}(x) = \sin\left(p + \frac{1}{2}\right)x, & \text{per } n \text{ senar}: n = 2p+1 \end{array} \right. \quad p = 0, 1, 2, \ldots ; \; x \in (-\pi, \pi) \end{array}}$$

Substituint aquests valors propis $\lambda = \lambda_n = n^2/4$ a l'equació diferencial (3), s'obtenen les "funcions

$$\boxed{\begin{array}{l} T_n(t) = e^{-\frac{n^2}{4}t} = \left\{ \begin{array}{ll} T_{2p}(t) = e^{-p^2 t}, & \text{per } n \text{ parell}: n = 2p \\ T_{2p+1}(t) = e^{-(p+\frac{1}{2})^2 t}, & \text{per } n \text{ senar}: n = 2p+1 \end{array} \right. \quad p = 0, 1, 2, \ldots \\[2ex] (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \end{array}}$$

amb la qual cosa, les funcions o solucions fonamentals del problema homogeni (1) seran:

$$\boxed{u_n(x,t) = \left\{ \begin{array}{l} u_{2p}(x,t) = e^{-p^2 t} \cos px \\ u_{2p+1}(x,t) = e^{-(p+\frac{1}{2})^2 t} \sin\left(p + \frac{1}{2}\right)x \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} p = 0, 1, 2, \ldots \\ (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{array}}$$

així doncs, qualsevol sèrie convergent:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p \geq 1} a_p e^{-p^2 t} \cos(px) + b_p e^{-(p-\frac{1}{2})^2 t} \sin\left[\left(p - \tfrac{1}{2}\right)x\right]$$

és també solució de (1). Per trobar la solució del problema, imposem la condició no homogènia $u(x,0) = x, \; x \in (-\pi, \pi)$:

$$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p \geq 1} \left(a_p \cos(px) + b_p \sin\left[\left(p - \tfrac{1}{2}\right)x\right]\right) = x, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Segons ja s'ha assenyalat al problema 5, apartat c), les funcions $\{1/2\} \cup \{\cos px, \sin(p-\frac{1}{2})x\}_{p\in\mathbb{N}}$ formen un sistema ortogonal complet a $[-\pi,\pi]$ i llavors els coeficients a_0, a_p, b_p, $p=1,2,3,\ldots$ s'obtenen mitjançant:

$$a_0 = \frac{\langle 1/2, x\rangle}{\langle 1/2, 1/2\rangle} = \frac{1}{\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2}\,dx = 0$$

$$a_p = \frac{\langle \cos px, x\rangle}{\langle \cos px, \cos px\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos px\,dx = 0$$

$$b_p = \frac{\langle x, \sin(p-\frac{1}{2})x\rangle}{\langle \sin(p-\frac{1}{2})x, \sin(p-\frac{1}{2})x\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin\left[(p-\tfrac{1}{2})x\right]dx = \frac{-2}{\pi(p-\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} x\, d\cos\left[(p-\tfrac{1}{2})x\right] =$$

$$= \underbrace{\frac{-2}{\pi(p-\frac{1}{2})}\left[x\cos(p-\tfrac{1}{2})x\right]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{\pi(p-\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}\cos(p-\tfrac{1}{2})x\,dx = \frac{2}{\pi(p-\frac{1}{2})^2}\left[\sin(p-\tfrac{1}{2})x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi(p-\frac{1}{2})^2}\sin\frac{(2p-1)\pi}{2} = \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(p-\frac{1}{2})^2}$$

i llavors la solucio del problema (de Neumann) no homogeni donat és:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^{p+1}}{(p-\frac{1}{2})^2}e^{-(p-\frac{1}{2})^2 t}\sin\left[(p-\tfrac{1}{2})x\right] \qquad x\in(-\pi,\pi),\ t>0.}$$

□

8. Sigui D un domini acotat de $\mathbb{R}^2$ i $u \in C^0(D\cup\partial D)$ tal que $u_{xx}+u_{yy}=0$ en D i tal que $u(x,y)=ax+by+c$, $\forall\,(x,y)\in\partial D$. Què podem afirmar sobre $u(x,y)$?

S. Notem que $u(x,y)=ax+by+c$ és solució de l'equació de Laplace $u_{xx}+u_{yy}=0$. Per la unicitat de solució de l'equació de Laplace amb condicions de Dirichlet (veure problema 11), resulta que $u(x,y)=ax+by+c$ també $\forall\,(x,y)\in D$.

NOTE BOOK

9. Sigui $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2+y^2| < 1\}$ i sigui $u(x,y)$ tal que $u_{xx}+u_{yy}=0$ en D i $u(x,y) = x^2-y^2$, $\forall\,(x,y) \in \partial D$, i sigui $u \in C^{\circ}(D \cup \partial D)$. Deduïu quant val $u(x,y)$ per a $(x,y) \in D$ i trobeu una cota superior i inferior de $u(x,y)$ per a $(x,y) \in D \cup \partial D$.

S. Com que $u(x,y) = x^2-y^2$ és solució de l'equació de Laplace $u_{xx}+u_{yy}=0$, per la unicitat de solució de l'equació de Laplace amb condicions de Dirichlet —problema 11—, resulta que $u(x,y) = x^2+y^2$ $\forall\,(x,y) \in D$.

Aplicant el principi del màxim

$$-1 = \min_{x^2+y^2=1}\left\{x^2-y^2\right\} \leq u(x,y) \leq \max_{x^2+y^2=1}\left\{x^2-y^2\right\} = 1, \quad \forall\,(x,y) \in D \cup \partial D \qquad \square$$

Nota: $$u\Big|_{\partial D = \{x^2+y^2=1\}} = u(r\cos\theta, r\sin\theta)\Big|_{\substack{r=1\\ 0\leq\theta<2\pi}} = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta \Longrightarrow \begin{cases} \max\limits_{(x,y)\in\partial D} u = 1 \\ \min\limits_{(x,y)\in\partial D} u = -1. \end{cases}$$

10. Sigui $D = [0,1]\times[0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ i sigui $u(x,y) = ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$; trobeu els valors màxim i mínim de $u(x,y)$, $(x,y) \in D$, en els casos on sigui possible usant el principi del màxim.

S. Com que u és una funció contínua i $D=[0,1]\times[0,1]$ és un compacte, u atany el seu màxim i el seu mínim absolut a D. Per tant, per tal que "en els casos on sigui possible" tingui sentit a l'enunciat del problema, suposarem $u(x,y) = ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ $\forall\,(x,y)\in\partial D$. Aleshores, per la unicitat de solució de l'equació de Laplace: $u(x,y) = ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ $\forall\,(x,y)\in\mathring{D} \Longleftrightarrow a=-c$. En efecte, donat que $u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y) = 2a+2c = 0 \Longleftrightarrow a=-c$.

Aplicant ara el principi del màxim per l'equació de Laplace, resulta que:

$$\max_{(x,y)\in D} u(x,y) = \max_{(x,y)\in\partial D} u(x,y) = \max\left\{M_1, M_2, M_3, M_4\right\}$$

i

$$\min_{(x,y)\in D} u(x,y) = \min_{(x,y)\in\partial D} u(x,y) = \min\left\{m_1, m_2, m_3, m_4\right\},$$

amb:

$$M_1 = \max_{0\leq x\leq 1} u(x,0) = \max_{0\leq x\leq 1}\left\{ax^2+dx+f\right\}, \quad M_2 = \max_{0\leq x\leq 1} u(x,1) = \max_{0\leq x\leq 1}\left\{a(x^2-1)+(b+d)x+f+e\right\}$$

$$M_3 = \max_{0\leq y\leq 1} u(0,y) = \max_{0\leq y\leq 1}\left\{-ay^2+ey+f\right\}, \quad M_4 = \max_{0\leq y\leq 1} u(1,y) = \max_{0\leq y\leq 1}\left\{a(1-y^2)+(b+e)y+f+d\right\}$$

i m_1, m_2, m_3 i m_4 es calcularien de la mateixa manera que M_1, M_2, M_3 i M_4 substituint màx per mín. $\square$

11. Sigui D un domini acotat de $\mathbb{R}^2$ i $u(x,y)$, $v(x,y)$ dues funcions contínues en $D\cup\partial D$ tals que

a) $u_{xx}+u_{yy}=v_{xx}+v_{yy}=f(x,y) \quad \forall\,(x,y)\in D$.

b) $u(x,y)=v(x,y)=g(x,y) \quad \forall\,(x,y)\in\partial D$.

Quina relació hi ha entre u i v?

S. Definim $\phi(x,y)=u(x,y)-v(x,y)$, $(x,y)\in D\cup\partial D$. Obviament ϕ és solució del problema de Dirichlet:

$$W_{xx}+W_{yy}=0, \quad (x,y)\in D$$
$$W(x,y)=0, \quad (x,y)\in\partial D.$$

Pel principi del màxim aplicat a ϕ i a $-\phi$ tenim que el màxim i el mínim absoluts d'aquesta funció a $D\cup\partial D$ s'atanyen a la vora ∂D. Però d'altra banda $\phi(x,y)=0$ $\forall\,(x,y)\in\partial D$. Així doncs:

$$\max_{(x,y)\in D\cup\partial D}\phi(x,y)=\min_{(x,y)\in D\cup\partial D}\phi(x,y)=0 \Longrightarrow \phi(x,y)=0 \;\forall\,(x,y)\in D$$

$$\Longrightarrow u(x,y)=v(x,y) \;\forall\,(x,y)\in D.$$

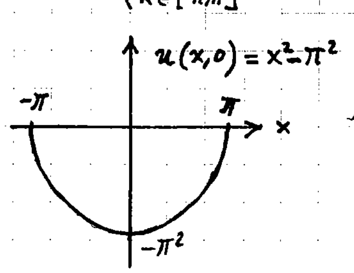
12. Trobeu el màxim i el mínim de la funció $u(x,t)$ solució de

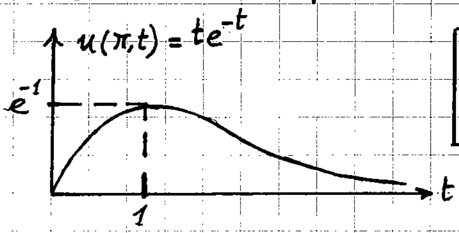
$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,, & x\in(-\pi,\pi)\,, \quad t>0 \\ u(x,0)=(x+\pi)(x-\pi) \\ u(-\pi,t)=\sin t \\ u(\pi,t)=te^{-t} \end{cases}$$

S. Aplicant el principi del màxim per l'equació de la calor a u i $-u$ es té:

$$\max_{\substack{x\in[-\pi,\pi]\\ t\geq 0}} u(x,t)=\max\Big(\max_{x\in[-\pi,\pi]}u(x,0),\ \sup_{\substack{x\in\{-\pi,\pi\}\\ t\geq 0}}u(x,t)\Big)$$

$$=\max\Big(\max_{x\in[-\pi,\pi]}(x+\pi)(x-\pi),\ \sup_{t\geq 0}\{\sin t,\ te^{-t}\}\Big)=\max\{0,1,1/e\}=1$$





Nota: $f(t)=te^{-t} \Longrightarrow f'(t)=(t-1)e^{-t}$ i llavors $f(t)\leq f(1)=e^{-1}\ \forall\, t$

d'altra banda: $$\min_{\substack{x\in[-\pi,\pi]\\ t\geq 0}}(-u(x,t))=-\max\Big(\max_{x\in[-\pi,\pi]}-(x+\pi)(\pi-x),\ \sup_{t\geq 0}\{-\sin t,\ -te^{-t}\}\Big)=-\max\{\pi^2,1,0\}=$$
$$=-\pi^2.$$

APÈNDIX

13. **Resoleu:**

$$\left.\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=2\,\dfrac{\pi-x}{\pi}\cos 2t,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=\sin x \\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=\sin^2 t \\ u(\pi,t)=0 \end{array}\right\}; \qquad (1)$$

S. L'equació és no-homogènia, però veiem que

$$v(x,t)=\frac{\pi-x}{\pi}\sin^2 t,$$

satisfà l'equació i les tres últimes condicions (la 2ª condició inicial i les dues condicions de contorn). En efecte:

$$v_t(x,t)=2\,\frac{\pi-x}{\pi}\sin t\cos t=\frac{\pi-x}{\pi}\sin 2t,\quad v_{tt}=2\,\frac{\pi-x}{\pi}\cos 2t,\quad v_{xx}(x,t)=0.$$

d'on:

$$v_{tt}-v_{xx}=2\,\frac{\pi-x}{\pi}\cos 2t,$$
$$v_t(x,0)=0,$$
$$v(0,t)=\sin^2 t,$$
$$v(\pi,t)=0.$$

A més $v(x,0)=0$. Introduïm dones el canvi $w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$ i llavors (1) es transforma en:

$$\left.\begin{array}{l} w_{tt}-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=\sin x \\ w_t(x,0)=0 \\ w(0,t)=0 \\ w(\pi,t)=0 \end{array}\right\}; \qquad (2)$$

$x\in(0,\pi)$, $t>0$; aplicant separació de variables al problema homogeni corresponent, i.e., substituint: $w(x,t)=X(x)\,T(t)$ a:

$$\left.\begin{array}{l} w_{tt} - w_{xx} = 0\,,\ x \in (0,\pi),\, t > 0 \\ w_t(x,0) = 0 \\ w(0,t) = 0 \\ w(\pi,t) = 0 \end{array}\right\} : \text{———————————————— (3)}$$

s'obté, (derivant i substituint en l'equació a derivades parcials): $T''(t)X(x) - T(t)X''(x) = 0$

$$\underset{X(x)\cdot T(t) \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \text{constant},$$ i d'aquí se'n deriven:

$$\left.\begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{array}\right\} : (4)$$

Problema a valors frontera: en aquest cas només hi ha solució diferent de la trivial $(X(x) \equiv 0 \,\forall x \in (0,\pi))$ si $\lambda > 0$ (comprove-ho!); llavors resulten els valors propis i les funcions pròpies:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda = \lambda_n = n^2, & \text{(valors propis)}, \\ X(x) = X_n(x) = \sin(nx),\ x \in (0,\pi), & \text{(funcions pròpies)}. \\ (n = 1,2,3,\dots) & \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} T''(t) + \lambda T(t) = 0 \\ T'(0) = 0 \end{array}\right\} : (5)$$

Problema a valors inicials. Substituint els valors propis $\lambda = \lambda_n = n^2$; $n = 1,2,3,\dots$ s'obté d'una banda, per la solució de l'equació diferencial:

$$T_n(t) = d_1 \cos(nt) + d_2 \sin(nt),$$

i imposant la condició inicial: $T'(0) = n d_2 = 0$, $(n = 1,2,3,\dots) \Longrightarrow d_2 = 0$, $d_1 \in \mathbb{R}$ arbitrari (agafem, per exemple, $d_1 = 1$); tenim les "funcions pròpies":

$$\boxed{T_n(t) = \cos(nt),\quad n = 1,2,3,\dots;\ t > 0.}$$

Així les solucions fonamentals de (3) són:

$$\boxed{\begin{array}{l} w_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) = \sin(nx)\cos(nt), \\ n = 1,2,3,\dots;\ x \in (0,\pi),\ t > 0. \end{array}}$$

Per tant, la solució general ve donada per les sèries convergents del tipus:

$$w(x,t) = \sum_{n\geq 1} f_n w_n(x,t) = \sum_{n\geq 1} f_n \sin(nx)\cos(nt);$$

per trobar la solució de (2), imposem la condició no homogènia $w(x,0) = \sin x$, i llavors és clar que $f_1 = 1$, $f_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n>1$. La solució del problema no homogeni (2) queda doncs:

$$w(x,t) = \sin x \cos t,$$

ara, desfent el canvi, tenim finalment, per la solució del problema no homogeni (1):

$$\boxed{u(x,t) = w(x,t) + v(x,t) = \sin x \cos t + \frac{\pi - x}{\pi}\sin^2 t; \quad x\in(0,\pi),\ t>0}$$

14. (Problema d'examen 23/01/2006). Considerem el problema:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & u_t - 4u_{xx} = 0, \quad x\in(0,\pi),\ t>0 \\ (2) & u(x,0) = \sin x + x - \pi/2, \quad x\in(0,\pi) \\ (3) & u(0,t) = -\pi/2, \quad t>0, \\ (4) & u(\pi,t) = \pi/2, \quad t>0. \end{array}\right\} : \text{———} (*)$$

a) l'equació (1) és una equació de Laplace, de calor, o d'ones? Les condicions de contorn són de tipus Dirichlet o Neumann?

b) Trobeu una funció $v(x)$ que només depengui de x que sigui solució de $(1)+(3)+(4)$

c) Definim $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$. Trobeu $f_1(x,t)$, $f_2(x)$, $f_3(t)$, $f_4(x)$ de forma que $w(x,t)$ sigui solució de:

$$\left.\begin{aligned} &w_t - 4w_{xx} = f_1(x,t), && x\in(0,\pi),\ t>0,\\ &w(x,0) = f_2(x), && x\in(0,\pi),\\ &w(0,t) = f_3(t), && t>0,\\ &w(\pi,t) = f_4(t), && t>0. \end{aligned}\right\}: \qquad (**)$$

d) Resoleu $(**)$ pel mètode de separació de variables

e) Deduïu la solució de $(*)$ i trobeu el límit per a $t\to+\infty$.

S. a) Equació de la calor amb condicions de Dirichlet

b) $V(x) = ax+b$: $V(0) = b = -\pi/2$, $V(\pi) = a\pi - \pi/2 = \pi/2 \Longrightarrow a = 1$

$\Longrightarrow V(x) = x - \pi/2$.

c) $w(x,t) = u(x,t) - V(x)$

$w_t - 4w_{xx} = u_t - 4u_{xx} - (V_t - V_{xx}) = 0 = f_1(x,t)$, $x\in(0,\pi)$, $t>0$.

$w(x,0) = u(x,0) - V(x) = \sin x + x - \pi/2 - x + \pi/2 = \sin x = f_2(x)$, $x\in(0,\pi)$.

$w(0,t) = u(0,t) - V(0) = -\pi/2 - (-\pi/2) = 0 = f_3(t)$, $t>0$,

$w(\pi,t) = u(\pi,t) - V(\pi) = \pi/2 - \pi/2 = 0 = f_4(t)$, $t>0$.

d) $w(x,t) = X(x)T(t)$,

$w_t(x,t) - 4w_{xx}(x,t) = X(x)T'(t) - 4X''(x)T(t) = 0 \underset{X(x)T(t)\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{4}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$,

λ = constant, això dóna el problema a valors frontera:

$$\left.\begin{aligned} &X''(x) + \lambda X(x) = 0\\ &X(0) = 0 = X(\pi) \end{aligned}\right\}:$$ Si $\lambda\leq 0$, no hi ha cap solució diferent de la trivial; mentre que si $\lambda>0$: $X(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$;

i imposant les condicions a la frontera $X(0) = c_1 = 0$, $X(\pi) = c_2\sin(\sqrt{\lambda}x) = 0$

$\Longrightarrow c_2 = 0$ ($\Longrightarrow$ solució trivial $X(x)\equiv 0\ \forall x\in(0,\pi)$) o bé $\pi\sqrt{\lambda} = n\pi$, i els valors propis corresponents són $\lambda = \lambda_n = n^2$, $n = 1,2,3,\ldots$ amb les funcions pròpies associades $X_n(x) = \sin(nx)$, $n = 1,2,3,\ldots$ D'altra banda:

$T' + 4\lambda_n T = T'(t) + 4n^2T(t) = 0 \Longrightarrow T_n(t) = e^{-4n^2t}$, $n = 1,2,3,\ldots$;

i d'aquí:

NOTE BOOK

$$W_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) = e^{-4n^2t}\sin(nx)\ ; \quad n = 1,2,3,\dots$$

son les funcions o solucions bàsiques de (**). La solució general[1] ve donada per sèries convergents de la forma $W(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n W_n(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n e^{-4n^2t}\sin(nx)$. Imposant la condició restant, $W(x,0) = \sin x$, podem determinar els coeficients b_n:

$$W(x,0) = \sum_{n\geq 1} b_n W_n(x,0) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nx) = \sin x,$$

d'on, clarament, es segueix que $b_1 = 1$, $b_n = 0\ \forall\, \mathbb{N} \ni n \geq 2$, i llavors:

$$W(x,t) = e^{-4t}\sin x = u(x,t) - v(x) = u(x,t) - x + \pi/2$$

i finalment,

$$\boxed{u(x,t) = e^{-4t}\sin x + x - \frac{\pi}{2}\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0}$$

és la solució de l'equació de la calor amb condicions de contorn de Dirichlet (*).

e) $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \lim_{t\to+\infty}\left(e^{-4t}\sin x + x - \frac{\pi}{2}\right) = x - \frac{\pi}{2}\quad \forall\, x\in(0,\pi)$.

---

(1) de la part homogènia del problema (**), és a dir, de l'equació a derivades parcials i les darreres dues condicions de contorn.