$p(m)$	arrels	Mult.	Funcions
$(m-\alpha)^k$	α	k	$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}$
$(m^2-2\alpha m+\alpha^2+\beta^2)^k$	$\alpha \pm \beta i$	k	$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ $e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Taula: polinomi característic $\longleftrightarrow$ funcions

TEOREMA (Solució d'una edo. lineal homogènia a coef. ctnts.)

Sigui l'EDO

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y^{(2)} + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (1)$$

amb $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ ctnts, i

$$p(m) = a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0$$

el corresponent polinomi característic. A cada arrel de $p(m)$ li associem K (= multiplicitat) funcions segons la taula. Aquestes funcions formen un **conjunt fonamental**. És a dir, qualsevol solució és una combinació lineal d'aquestes i, recíprocament, qualsevol combinació lineal és solució. A més, les funcions del conjunt fonamental són **linealment independents** (l.i.).

COROL·LARI

Les solucions d'una EDO lineal homogènia com (1) formen un **espai vectorial** de dimensió n. El conjunt fonamental és una base d'aquest espai.

DEFINICIÓ

Les funcions $y_1(x), \dots, y_n(x)$ són **linealment dependents (l.d.)** en un cert interval $I \subseteq \mathbb{R}$ quan existeixen $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ constants no totes nul·les tals que:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0, \ \forall\, x \in I$$

Si les funcions $y_1(x), \dots, y_n(x)$ són derivables, definim el seu **Wronskià** com el determinant:

$$W(x) = W[y_1(x), \dots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

TEOREMA (Relació entre Wronskià i independència lineal)

(a) $y_1, \dots, y_n$ l.d. $\Longrightarrow W(x) \equiv 0$

$$\left[\Longleftrightarrow \exists\, x : W(x) \neq 0 \Longrightarrow y_1, \dots, y_n \text{ l.i.} \right]$$

(b) Si $y_1, y_2, \dots, y_n$ són solucions d'una EDO lineal homogènia d'ordre n:

(b.1) $\exists\, x : W(x) \neq 0 \Longleftrightarrow W(x) \neq 0\ \forall x \Longleftrightarrow y_1, \dots, y_n$ són l.i.

(b.2) $y_1, y_2, \dots, y_n$ l.d. $\Longleftrightarrow W(x) \equiv 0$

TEOREMA (Solució d'una EDO lineal a coef. ctnts.)

La solució general de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = g(x)$$

és:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

on:

- $y_h(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ és la solució de l'EDO homogènia.
- $y_p(x)$ solució particular arbitrària.

MÈTODE DELS COEFICIENTS INDETERMINATS (O DE L'OPERADOR ANUL·LADOR)

Busquem una solució particular de l'EDO

$$P(D)y = a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = g(x)$$

on el terme no homogeni $g(x)$ és:

- Un polinomi
- Una funció exponencial: $e^{\alpha x}$
- Una funció trigonomètrica: $\cos\beta x$, $\sin\beta x$
- Sumes i productes de les anteriors: $\sum_k c_k x^{m_k} e^{\alpha_k x} \left\{ \begin{smallmatrix} \sin \\ \cos \end{smallmatrix} \right\} \beta_k x$

(*)

DEF. El polinomi $P(m)$ anul·la la funció $f(x)$ quan $P(D)f \equiv 0$. És a dir, quan $f(x)$ és solució de l'EDO homogènia $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots a_0 y = 0$.

LEMA (anul·lació de funcions)

(a) El polinomi $P = m.c.m(Q_1, Q_2)$ anul·la les c.l. de les funcions anul·lades per Q_1 i Q_2.

(b) Les funcions anul·lades per un polinomi són c.l. de les funcions anul·lades pel seus factors elementals (veure taula anterior).

COROL·LARI: Les funcions $g(x)$ del tipus (*) són anul·lades per algun polinomi $P_1(m)$.

ALGORISME PER RESOLDRE L'EDO $P(D)y=g(x)$

1) Construir la taula associada a $P(m)$; és a dir, calcular $y_h(x)$

2) Trobar el polinomi que anul·la $g(x)$: $P_1(m)$

3) Construir la taula associada al polinomi $P_1(m)P(m)$.

4) Escriure $y_p(x)$ com una c.l. de les «noves» funcions.

5) Determinar els coeficients en $y_p(x)$ imposant que $P(D)y_p = g(x)$.

Exemple: Troben la solució general de l'EDO lineal:

$$y''-4y = e^{2x}+6e^{3x}$$

Pas 1) $P(m) = m^2-4 = (m-2)(m+2)$

Arrels	Mult.	Funcions CFS (de $P(D)y=0$)
$m=2$	1	$y_1(x) = e^{2x}$
$m=-2$	1	$y_2(x) = e^{-2x}$

Taula 6.1

Solució general de l'homogènia:

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x},$$

Pas 2) $g(x) = e^{2x}+6e^{3x}$, busquem $P_1(m)$ t.q.: $P_1(D)g(x) \equiv 0$. Mirant la de la transparencia 1 veiem que:

- e^{2x} és una solució associada a l'arrel $m=2$ amb multiplicitat $1 \Rightarrow m-2$ anul·la e^{2x}.
- e^{3x} " " " " " l'arrel $m=3$ " " $1 \Rightarrow m-3$ " e^{3x}

Per tant, tenint en compte el punt (a) del LEMA de la transparència 4:

$$P_1(m) = m.c.m\{m-2, m-3\} = (m-2)\cdot(m-3)$$

EDO "homogeneïtzada"

Pas 3) $P_1(m)P(m) = (m-2)^2(m-3)(m+2)$

Arrels	Mult.	Funcions del CFS (de $P_1(D)P(D)y=0$)
$m=2$	2	$y_1(x) = e^{2x}$ $y_4(x) = \boxed{xe^{2x}}$
$m=-2$	1	$y_2(x) = e^{-2x}$
$m=3$	1	$y_4(x) = \boxed{e^{3x}}$

Taula 6.2

"Noves" funcions: les que no hi són al CFS de $P(D)y=0$ (Taula 6.1)

Pas 4) Buscarem doncs $y_p(x)$ de la forma:

$$y_p(x) = c_3 x e^{2x} + c_4 e^{3x}$$

Pas 5) $P(D)y_p = g(x) \iff y_p''(x) - 4y_p(x) = 4c_3(1+x)e^{2x} + 9c_4 - 4(c_3 x e^{2x} + c_4 e^{3x}) =$

$$= 4c_3 e^{2x} + 5c_4 e^{3x} = e^{2x} + 6e^{3x}$$

$y_p'(x) = c_3(e^{2x}+2xe^{2x}) + 3c_4 e^{3x},$

$y_p''(x) = c_3(4e^{2x}+4xe^{2x}) + 9c_4 e^{3x} = 4c_3(1+x)e^{2x} + 9c_4 e^{3x}$

$$\iff 4c_3 = 1 \;\&\; 5c_4 = 6$$

Aleshores: $c_3 = 1/4$ i $c_4 = 6/5$ i llavors la solució particular que hem trobat és: $y_p(x) = \frac{x}{4}e^{2x} + \frac{6}{5}e^{3x}$, amb la qual cosa, la solució general de l'EDO és:

$$\therefore \boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{x}{4}e^{2x} + \frac{6}{5}e^{3x}}$$

COEFICIENTS VARIABLES:

La majoria dels resultats que hem vist són valids per qualsevol EDO lineal. En particular:

EDOs LINEALS

- La relació entre el Wronskià d'un conjunt de solucions i la seva independència lineal (Teorema de la transp. 2, cas (b))
- L'estructura de les solucions: formen un e.v. al cas homogeni (corol·lari transp. 1) i són de la forma $y = y_h + y_p$ al cas no homogeni (teorema transp. 3)
- El mètode de variació de paràmetres
- La fórmula de reducció de l'ordre.

En canvi, son específics de les EDOs lineals a COEF. constants

- El mètode del polinomi característic per trobar un CFS al cas homogeni (teorema i taula de la transp. 1)
- El mètode dels coeficients indeterminats — o de l'operador anul·lador — per calcular una solució particular (transp. 4 i 5)

EDOs LINEALS a COEF. CTNTS.

Annex 1. <u>Mètode de variació de paràmetres</u> en el cas particular $n=2$, i.e., per:

$$a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = g(x) \qquad (*)$$

Sigui: $\{y_1(x), y_2(x)\}$ un CFS de l'edo homogènia associada a $(*)$, i.e. un CFS de: $a_2(x)\,y''+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=0$. Aleshores:

Teorema: Si $u_1(x), u_2(x)$ són funcions derivables que satisfan:

$$\begin{aligned} u_1'(x)y_1 + u_2'(x)y_2 &\equiv 0, \\ u_1'(x)y_1' + u_2'(x)y_2' &\equiv f(x), \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \forall x, \qquad (\&)$$

on $f(x) := \dfrac{g(x)}{a_2(x)}$. Llavors:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$$

és una solució particular de l'EDO $(*)$

Solució. En efecte, derivant i substituint:

$$y_p' = \underbrace{u_1'(x)y_1 + u_2'(x)y_2}_{\overset{(\&)}{=}0} + u_1(x)y_1' + u_2(x)y_2' = u_1(x)y_1' + u_2(x)y_2'$$

$$y_p'' = \underbrace{u_1'(x)y_1' + u_2'(x)y_2'}_{=f(x)} + u_1(x)y_1'' + u_2(x)y_2'' = f(x) + u_1(x)y_1'' + u_2(x)y_2''$$

$$\begin{aligned} a_2(x)y_p'' + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p &= a_2(x)\left(f(x) + u_1(x)y_1'' + u_2(x)y_2''\right) + a_1(x)\left(u_1(x)y_1' + u_2(x)y_2'\right) + \\ &+ a_0(x)\left(u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2\right) = u_1(x)\left(a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1\right) + u_2(x)\left(a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2\right) \\ &+ a_2(x)f(x) = g(x). \end{aligned}$$

Remarca 1 Com que $y_1(x), y_2(x)$ formen un CFS (i llavors són l.i.), $(\&)$ és, per cada x, un sistema lineal compatible determinat, que podem resoldre, per exemple, per Cramer:

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= \frac{W_1(x)}{W(x)} = \frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = -\frac{y_2 f(x)}{W(x)} \Longrightarrow u_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(x)}\,dx, \\ u_2'(x) &= \frac{W_2(x)}{W(x)} = \frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \frac{y_1 f(x)}{W(x)} \Longrightarrow u_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(x)}\,dx, \end{aligned} \qquad (\&\&)$$

essent $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ el determinant de la matriu del sistema $(\&)$, el qual veiem que coincideix amb el Wronskià del CFS $\{y_1(x), y_2(x)\}$ i aleshores $W(x) = W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0$ $\forall x$ (Teorema transp. 2 ítem (b.1)).

Remarca 2. No cal afegir constants d'integració a les integrals que apareixen a $(\&\&)$. Per què?

Remarca 3. La generalització a n qualsevol és immediata (exercici).

Annex 2. Fórmula de Liouville (per EDOs lineals).

Sigui $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ solucions de l'EDO lineal homogènia:

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

i denotem per $W(x)$, el seu Wronskià, i.e.:

$$W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

aleshores:

$$W'(x) = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}\, W(x), \qquad (*)$$

Per provar $(*)$ ens limitarem al cas $n=2$ (la generalització és immediata: exercici)

$$W'(x) = \underbrace{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_1'' \\ y_2 & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & -\frac{a_1(x)}{a_2(x)} y_1' - \frac{a_0(x)}{a_2(x)} y_1 \\ y_2 & -\frac{a_1(x)}{a_2(x)} y_2' - \frac{a_0(x)}{a_2(x)} y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} - \frac{a_0(x)}{a_2(x)} \underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_2 & y_2 \end{vmatrix}}_{=0} = -\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}\, W(x)$$

Remarca: Veiem doncs que el Wronskià d'un conjunt de solucions satisfà l'EDO: $y' = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}\, y$.
Per tant, si $I \subseteq \mathbb{R}$ és l'interval de definició de les solucions, i $x_0 \in I$, llavors $W(x)$ satisfà:

$$\boxed{W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}\, dt}, \quad x_0 \in I}$$

que es coneix com fórmula de Liouville.