interpolació-prob.pdf

1. Interpolació

1. Calculeu $f(3)$ per interpolació quadràtica de la taula

x	1	2	4	5
$f(x)$	0	2	12	21

   (a) Utilitzant els valors $x = 1, 2, 4$.

   (b) Utilitzant els valors $x = 2, 4, 5$.

   (c) Per interpolació cúbica.

2. Donada la següent taula de la funció $f(x) = e^x$:

x	0.0	0.2	0.4	0.6
$f(x)$	1.0000	1.2214	1.4918	1.8221

   (a) Trobeu valors aproximats de $\sqrt[3]{e}$ per interpolació lineal, utilitzant els valors $x = 0.2$ i $x = 0.4$, i per interpolació cúbica.

   (b) Doneu fites respectives dels errors deguts a la interpolació. Compareu les fites amb l'error exacte, sabent que $\sqrt[3]{e} = 1.395612425\ldots$

3. Sigui $P_1(x)$ el polinomi interpolador de $f(x) = 4x^2$ en $x_1 = 0$ i $x_2 = a$. Trobeu quin és el valor màxim de l'abscissa $a > 0$ de manera que l'error d'interpolació $\varepsilon(x) = |f(x) - P_1(x)|$ sigui menor que 10^{-2} si $x \in [0, a]$.

4. Sigui $P_1(x)$ el polinomi interpolador de $f(x) = e^{x^2}$ en els punts $x = 0$ i $x = 1$. Penseu una forma d'aproximar la integral $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$, calculeu el valor aproximat, I_a, de la integral i d'una fita de l'error $\varepsilon = |I - I_a|$. Observeu que la funció $f(x)$ no té primitiva.

5. Sigui $P_2(x)$ el polinomi interpolador de $f(x)$ en els punts $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ i $x_2 = 3$. Suposem que $|f'''(x)| \leq M$ per a $x \in [0, 3]$. Aleshores, per a quin valor de x l'error d'interpolació és màxim i quant val aquest error?

6. Construïu un polinomi de tercer grau tal que $p(0) = 1$, $p(1) = 3$, $p'(-1) = 4$, $p''(0) = 0$. És únic ?

7. Volem tabular la funció de Bessel d'ordre zero,

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\, dt,$$

   en punts equiespaiats $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

   Si usem interpolació lineal de la taula, com cal prendre l'increment h per a tal que l'error es trobi per sota de 10^{-6} ?

1) Calculeu $f(3)$ per interpolació quadràtica de la taula:

x	1	2	4	5
$f(x)$	0	2	12	21

(a) Utilitzant els valors $x=1,2,4$

(b) Utilitzant els valors $x=2,4,5$

(c) Per interpolació cúbica.

1) (a) $x=1,2,4$:

$$L_0(x)=\frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)}=\frac{1}{3}(x-2)(x-4)$$
$$L_1(x)=\frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)}=-\frac{1}{2}(x-1)(x-4)$$
$$L_2(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}=\frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$

$$: P_2(3)=L_0(3)f(1)+L_1(3)f(2)+L_2(3)f(4)=0+1\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot 12=6\approx f(3).$$

(b) $x=2,4,5$:

$$\hat{L}_0(x)=\frac{(x-4)(x-5)}{(2-4)(2-5)}=\frac{1}{6}(x-4)(x-5)$$
$$\hat{L}_1(x)=\frac{(x-2)(x-5)}{(4-2)(4-5)}=-\frac{1}{2}(x-2)(x-5)$$
$$\hat{L}_2(x)=\frac{(x-2)(x-4)}{(5-2)(5-4)}=\frac{1}{3}(x-2)(x-4)$$

$$: \hat{P}_2(3)=\hat{L}_0(3)f(2)+\hat{L}_1(3)f(4)+\hat{L}_2(3)f(5)=\frac{1}{3}+12-7=5'\hat{6}\approx f(3).$$

(c)
$$\hat{L}_0(x)=\frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-4)(1-5)}=-\frac{1}{12}(x-2)(x-4)(x-5),\quad \hat{L}_1(x)=\frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-4)(2-5)}=\frac{1}{6}(x-1)(x-4)(x-5),$$
$$\hat{L}_2(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-5)}=-\frac{1}{6}(x-1)(x-4)(x-5),\quad \hat{L}_3(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-4)}=\frac{1}{12}(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$\hat{P}_3(3)=\hat{L}_0(3)f(1)+\hat{L}_1(3)f(2)+\hat{L}_2(3)f(4)+\hat{L}_2(3)\cdot f(5)=\frac{2}{6}(-6)+\frac{12}{6}4-\frac{2}{12}=-2+8-\frac{1}{6}=6-\frac{1}{6}=\frac{35}{6}=5'8\hat{3}\approx f(3).$$

2) Donada la següent taula de la funció $f(x)=e^x$:

x	0'0	0'2	0'4	0'6
$f(x)$	1'0000	1'2214	1'4918	1'8221

(a) Trobeu els valors aproximats de $\sqrt[3]{e}$ per interpolació lineal, utilitzant els valors $x=0'2$ i $x=0'4$; i per interpolació cúbica.

(b) Doneu fites respectives dels errors deguts a la interpolació. Compareu les fites amb l'error exacte, sabent que $\sqrt[3]{e}\approx 1'395612425\ldots$

Solució (a) Interpolació lineal pels valors $x=0.2$ i $x=0.4$: $L_0(x)=\frac{x-0'4}{0'2-0'4}=-5(x-0'4)=-5x+2$, $L_1(x)=\frac{x-0'2}{0'4-0'2}=5(x-0'2)=5x-1$. Aleshores $P_1(x)=L_0(x)f(0'2)+L_1(x)f(0'4)=1'352x+0'951$, d'on $P_1(\frac{1}{3})=1'352/3+0'951=0'45\hat{6}+0'951=1'40\widehat{16}\approx e^{1/3}=\sqrt[3]{e}$.

Interpolació cúbica:
$$L_0(x)=\frac{(x-0'2)(x-0'4)(x-0'6)}{(0-0'2)(0-0'4)(0-0'6)}=-\frac{125}{6}(x-0'2)(x-0'4)(x-0'6),\quad L_1(x)=\frac{(x-0'0)(x-0'4)(x-0'6)}{(0'2-0)(0'2-0'4)(0'2-0'6)}=$$
$$=\frac{125}{2}x(x-0'4)(x-0'6),\quad L_2(x)=\frac{(x-0'0)(x-0'2)(x-0'6)}{(0'4-0'0)(0'4-0'2)(0'4-0'6)}=-\frac{125}{2}x(x-0'2)(x-0'6),\quad L_3(x)=\frac{(x-0'0)(x-0'2)(x-0'4)}{(0'6-0'0)(0'6-0'2)(0'6-0'4)}=$$
$$=\frac{125}{6}x(x-0'2)(x-0'4).$$

Aleshores, el polinomi interpolador resulta:

$$P_3(x)=L_0(x)f(0)+L_1(x)f(0'2)+L_2(x)f(0'4)+L_3(x)f(0'6)$$
$$=-20'8\hat{3}(x-\tfrac{1}{5})(x-\tfrac{2}{5})(x-\tfrac{3}{5})+76'3375x(x-\tfrac{2}{5})(x-\tfrac{3}{5})-92'2375x(x-\tfrac{1}{5})(x-\tfrac{3}{5})+$$

$$+37'960416\, x\left(x-\tfrac{1}{5}\right)\left(x-\tfrac{2}{5}\right) = \frac{1}{48}\left(48+48'128x+22'86x^2+10'9x^3\right)$$

El polinomi interpolador en $x=\frac{1}{3}$ val $P_3\left(\frac{1}{3}\right)=\dfrac{113'0395}{81} \simeq 1'395549$.

b) Fita per l'error en l'interpolació lineal ($n=1$) en $x=\frac{1}{3}\in I_1=[0'2,0'4]$:

$$\left|E_1\left(\tfrac{1}{3}\right)\right| := \left|e^{1/3}-P_1\left(\tfrac{1}{3}\right)\right| \leq \sup_{\xi\in I_1}\left|D^2\exp(\xi)\right| \cdot \frac{\left|\left(\frac{1}{3}-0'2\right)\left(\frac{1}{3}-0'4\right)\right|}{2!}$$

$$= \frac{1}{2}e^{0'4}\left|\left(\tfrac{1}{3}-0'2\right)\left(\tfrac{1}{3}-0'4\right)\right| \leq \frac{e}{2}\left|\left(\tfrac{1}{3}-0'2\right)\left(\tfrac{1}{3}-0'4\right)\right| = \frac{e}{225} \simeq 0'012,$$

clarament: $\sup_{\xi\in I_1}\left|D^2\exp(\xi)\right| = e^{0'4}$.

mentre que l'error "real" és: $\left|e^{1/3}-P_1\left(\frac{1}{3}\right)\right| = 0'0061$

Per l'error en l'interpolació cúbica ($n=3$) en $x=\frac{1}{3}\in I_3=[0,0'6]$:

$$\left|E_3\left(\tfrac{1}{3}\right)\right| := \left|e^{1/3}-P_3\left(\tfrac{1}{3}\right)\right| \leq \sup_{\xi\in I_3}\left|D^4\exp(\xi)\right| \frac{\left|\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-0'2\right)\left(\frac{1}{3}-0'4\right)\left(\frac{1}{3}-0'6\right)\right|}{4!}$$

$$= \frac{1}{4!}e^{0'6}\left|\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}-0'2\right)\left(\tfrac{1}{3}-0'4\right)\left(\tfrac{1}{3}-0'6\right)\right| \leq \frac{e}{24}\left|\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}-0'2\right)\left(\tfrac{1}{3}-0'4\right)\left(\tfrac{1}{3}-0'6\right)\right|$$

clarament: $\sup_{\xi\in I_3}\left|D^4\exp(\xi)\right| = e^{0'6}$

$$= \frac{e}{30375} \simeq 0'000089.$$

En canvi, l'error "real" és, en aquest cas:

$$\left|e^{1/3}-P_3\left(\tfrac{1}{3}\right)\right| = 0'000063 \quad \square$$

3) Signi $P_1(x)$ el polinomi interpolador de $f(x)=4x^2$ en $x_1=0$; $x_2=a$. Troben quin és el valor mínim de l'abscissa $a>0$ de manera que l'error d'interpolació $\mathcal{E}(x)=|f(x)-P_1(x)|$ sigui menor que 10^{-2} si $x\in[0,a]$

S. $$\underset{n=1}{\mathcal{E}(x)}=|f(x)-P_1(x)|=\frac{f''(\xi_x)}{2!}|x(x-a)|\overset{(*)}{=}4|x(x-a)|$$

(*) $f(x)=4x^2 \Rightarrow f'(x)=8x \Rightarrow f''(x)=8$

Busquem el valor màxim de $a>0$ t.q.: $\max\limits_{x\in[0,a]} 4|x(x-a)|=\max\limits_{x\in[0,a]} 4x(a-x)\overset{(\&)}{=} 4\frac{a^2}{4}=a^2\leq 10^{-2}$

(&) $f(x)=4x(a-x)\Rightarrow f'(x)=4(a-2x)=0 \Leftrightarrow x=x^*=a/2$,
i com que $f(0)=f(a)=0$ i $f(x)\geq 0$ per $0\leq x\leq a$, aleshores:
$$\max_{x\in[0,a]} f(x)=\max_{x\in[0,a]} 4x(a-x)=4\frac{a^2}{4}=a^2$$

Així doncs, si $a>0$, el valor màxim que pot agafar perquè es verifiqui la desigualtat és $a=10^{-1}$ $\square$.

4) Signi $P_1(x)$ el polinomi interpolador de $f(x)=e^{x^2}$ en els punts $x=0$ i $x=1$. Pensen una forma d'aproximar la integral $I=\int_0^1 e^{x^2}dx$, calculen el valor aproximat, I_a, de la integral i una fita de l'error $\varepsilon=|I-I_a|$. Observeu que la funció $f(x)$ no té primitiva.

Solució: $$f(x)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}x+f(0)+\frac{f''(\xi_x)}{2!}x(x-1),\ \xi_x\in[0,1]$$
$$=(e-1)x+1+(1+2\xi_x^2)e^{\xi_x^2}x(x-1),\ \xi_x\in[0,1]$$

tenim: $f(x)=e^{x^2}$
$f'(x)=2xe^{x^2}$
$f''(x)=2(1+2x^2)e^{x^2}$

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\underbrace{\int_0^1[(e-1)x+1]dx}_{=:I_a}+\int_0^1(1+2\xi_x^2)e^{\xi_x^2}dx$$

$$I_a:=\int_0^1[(e-1)x+1]dx=\left[(e-1)\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1=\frac{e-1}{2}+1=\boxed{\frac{e+1}{2}}$$

$$\varepsilon=|I-I_a|=\left|\int_0^1(1+2\xi_x^2)e^{\xi_x^2}x(x-1)dx\right|\leq\sup_{\xi\in[0,1]}\left[(1+2\xi^2)e^{\xi^2}\right]\int_0^1 x(1-x)dx=\boxed{\frac{e}{2}}$$, ja que:

$$\sup_{\xi\in[0,1]} (1+2\xi^2)e^{\xi^2} = 3e \quad \text{(és monòtona creixent a } [0,1])$$

$$\int_0^1 x(1-x)\,dx = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \square$$

5) Sigui $P_2(x)$ un polinomi interpolador de $f(x)$ en els punts $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$. Suposem que $|f'''(x)|<M$ per a $x\in[0,3]$. Aleshores, per a quin valor de x l'error d'interpolació és màxim i quant val aquest error?

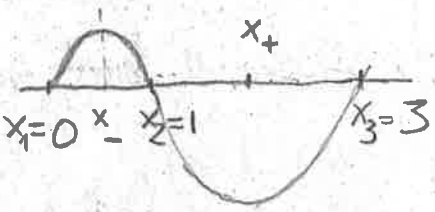
S. $n=2$: $$E(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3), \quad \xi_x \in \langle x_1,x_2,x_3,x\rangle = [0,3]$$

$$= \frac{f'''(\xi_x)}{3!}x(x-1)(x-3), \text{ amb } |f'''(\xi)|\le M,\ \xi\in[0,3]$$

aleshores:

$$|E(x)| \le \frac{M}{3!}\max_{x\in[0,3]}|x(x-1)(x-3)| = \frac{2M}{3!\,27}(10+7\sqrt{7}) = \frac{M}{81}(10+7\sqrt{7})$$

$$q(x) := x(x-1)(x-3) \Rightarrow q'(x) = (x-1)(x-3)+x(x-3)+x(x-1)$$
$$= x^2-3x-x+3+x^2-3x+x^2-x$$
$$= 3x^2-8x+3 = 0 \Leftrightarrow x = x_\pm = \frac{8\pm\sqrt{64-36}}{6} = \frac{4}{3}\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$$



$$\max_{x\in[0,3]}|q(x)| = \max_{x\in[0,3]}|x(x-1)(x-3)| = \max\{|q(x_+)|, |q(x_-)|\} \overset{(*)}{=}$$
$$= \max\left\{\frac{20}{27}+\frac{14}{27}\sqrt{7}, -\frac{20}{27}+\frac{14}{27}\sqrt{7}\right\} = \frac{2}{27}(10+7\sqrt{14})$$

(*) $$|q(x_+)| = \left|\left(\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\right| = \left|-\frac{20}{27}-\frac{14}{27}\sqrt{7}\right| = \frac{20}{27}+\frac{14}{27}\sqrt{7}$$

$$|q(x_-)| = \left|\left(\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\right| = \left|-\frac{20}{27}+\frac{14}{27}\sqrt{7}\right| = -\frac{20}{27}+\frac{14}{27}\sqrt{7}$$

Aleshores, l'error d'interpolació és màxim per $x=x_+=\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}$ i val $\varepsilon = \frac{M}{81}(10+7\sqrt{7})$ $\square$

6) Construïu un polinomi de tercer grau tal que $p(0)=1$, $p(1)=3$, $p'(-1)=4$, $p''(0)=0$. És únic?

Solució: $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, amb: $\left\{\begin{array}{l} p(0)=a_0=1 \\ p(1)=a_0+a_1+a_2+a_3=3 \\ p'(-1)= \quad a_1-2a_2+3a_3=4 \\ p''(0)= \quad 2a_2 \quad =0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&1\\ 1&1&1&1&3\\ 0&1&-2&3&4\\ 0&0&2&0&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&1\\ 0&1&1&1&2\\ 0&0&-3&2&2\\ 0&0&1&0&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&1\\ 0&1&1&1&2\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1 \end{array}\right)$$

Sistema compatible determinat amb solució: $a_0=1, a_1=1, a_2=0, a_3=1$. Llavors el polinomi buscat és: $p(x)=1+x+x^3$ i, obviament, és l'únic polinomi que satisfà les condicions demanades.

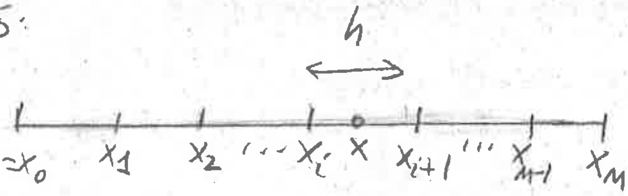
Comprovació: $p(0)=1$, $p(1)=3$, $p'(x)=1+3x^2 \Rightarrow p'(-1)=1+3(-1)^2=4$, $p''(x)=6x \Rightarrow p''(0)=0$. □

7) Volem tabular la funció de Bessel d'ordre 0.

$$J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin t)\,dt$$

en punts equidistants $x_i=x_0+ih$, $i=0,1,2,\ldots$ Com cal prendre l'increment h per tal que l'error en l'interpolació es trobi per sota de 10^{-6} en cas d'utilitzar interpolació lineal.

Solució:



amb $x_i=x_0+ih$, $i=0,1,2,\ldots,M$ (punts equiespaiats). Si $x_i\le x\le x_{i+1}$, llavors: $J_0(x)\simeq p_1(x)=J_0(x_i)+\dfrac{J_0(x_{i+1})-J_0(x_i)}{\underbrace{x_{i+1}-x_i}_{h}}(x-x_i)$

D'altra banda, la fórmula de l'error per l'interpolació lineal:

$$|J_0(x)-p_1(x)|=\frac{1}{2!}|J_0''(\xi_x)|\cdot|x-x_i|\,|x-x_{i+1}|=\frac{1}{2!}|J_0''(\xi_x)|\,W(x) \text{ amb } \xi_x\in\langle x_i,x_{i+1},x\rangle$$

i on hem definit $W(x):=|(x-x_i)(x-x_{i+1})|$. Llavors:

$$|J_0(x)-p_1(x)|\le\frac{1}{2!}\sup_{x_i\le t\le x_{i+1}}|J_0''(t)|\cdot\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}W(x)$$

D'una banda tenim:

$$J_0'(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,\sin(x\sin t)\,dt,$$

$$J_0''(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\cos(x\sin t)\,dt \Rightarrow |J_0''(x)|\le\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,|\cos(x\sin t)|\,dt\le\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=\frac{1}{2}\ \forall x\in\mathbb{R}$$

D'altra banda:

$$W(x) = \left|(x-x_i)(x-x_{i+1})\right| = \left|(x-x_i)(x-x_i-h)\right| = \left|(x-x_i)^2 - h(x-x_i)\right| =$$
$$= h(x-x_i) - (x-x_i)^2 \quad \forall\, x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (\Leftrightarrow x_i \leq x \leq x_i + h)$$

$$W'(x) = h - 2(x-x_i) = 0 \Leftrightarrow x = x^* = h/2 + x_i = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}, \; i=0,1,2,\dots,n-1$$

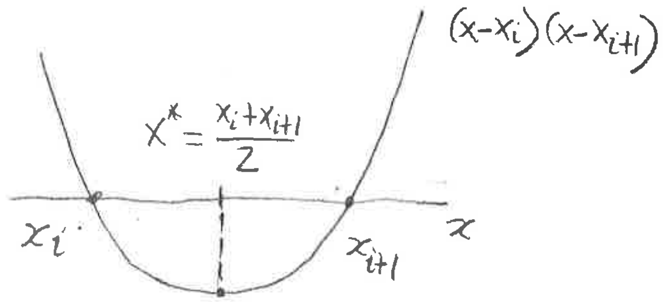
i com que $W(x_i) = W(x_{i+1}) = 0 \;\forall\, x_i \leq x \leq x_{i+1} = x_i + h$ i $W(x) \geq 0 \;\forall\, x$, resulta:

$$0 \leq W(x) \leq W(x^*) = \left|\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{2}\right| = \left|-\frac{h^2}{4}\right| = \frac{h^2}{4}.$$

aleshores:

$$|J_0(x) - p_1(x)| \leq \frac{1}{2!} \sup_{x_i \leq t \leq x_i+h} |J_0''(t)| \cdot \max_{x_i \leq x \leq x_i+h} W(x) = \frac{h^2}{16} < 10^{-6} \Leftrightarrow h^2 < 16 \cdot 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow 0 < h = x_{i+1} - x_i < 4 \cdot 10^{-3} = 0.004 \quad \square$$



8. Considereu la següent taula de valors corresponent a una funció definida a l'interval [0,3]:

x	0	1	2	3
$f(x)$	1.2	1.8	1.7	2.4

Volem trobar un spline quadràtic que interpoli aquesta taula i que escriurem de la forma,

$$s_i(x) = A_i + B_i(x-i) + \frac{C_i}{2}(x-i)^2, \quad x \in [i, i+1], \text{ on } i = 0, 1, 2.$$

a) Escriviu les condicions que imposen la continuïtat de la derivada primera.

b) Escriviu les condicions que imposen la continuïtat de la funció.

c) Suposant que $f(x)$, estesa per $x < 0$, és una funció parella, calculeu els coeficients B_i i C_i, $i = 0, 1, 2$.

9. Considereu la següent taula de valors corresponent a una funció $f(x)$ definida a l'interval [−3,3]:

x	−3	−1	1	3
$f(x)$	0.00	1.25	0.00	0.76

a) Calculeu el valor aproximat de $f(0.40)$ que s'obté aplicant interpolació de Lagrange a la taula anterior.

b) Suposant que les derivades de $f(x)$ compleixen que $|f^{(k)}(x)| \leq 1/k$, $\forall x \in [-3,3]$, $\forall k \geq 1$, doneu una fita de l'error comès en el càlcul de l'apartat (a).

c) Suposem ara que $f(x)$ sigui un polinomi de grau 4, $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, que l'aproximem amb el polinomi de Lagrange obtingut en el apartat (a). Trobeu el punt de l'interval $[-3,3]$ en el qual l'error d'aquesta aproximació és màxim i digueu quant val aquest error.

8. Considereu la següent taula de valors corresponent a una funció definida a l'interval $[0,3]$

x	0	1	2	3
$f(x)$	1·2	1·8	1·7	2·4

Volem trobar un spline quadràtic que interpoli aquesta taula i que escriurem de la forma

$$S_i(x) = A_i + B_i(x-i) + \frac{C_i}{2}(x-i)^2, \; x \in [i, i+1], \text{ on } i = 0,1,2$$

a) Escriviu les condicions que imposen la continuïtat de la derivada primera

b) " " " " " " " de la funció

c) Suposant que $f(x)$, estesa per $x<0$ és una funció parella, calculeu els coeficients B_i i C_i, $i = 0,1,2$.

Solució.

a) $S_i'(x) = B_i + C_i(x-i), \; x \in [i, i+1], \; i = 0,1,2.$

agafant $x = i+1$, tindrem $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$, per $i = 0,1,2$; o sigui:

$$B_i + C_i = B_{i+1} \iff \boxed{C_i = B_{i+1} - B_i; \quad \text{per } i = 0,1,2} \qquad (1)$$

b) $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}); \; i = 0,1,2 \iff f_i + B_i + \frac{C_i}{2} = f_{i+1}$

$$\iff B_i = (f_{i+1} - f_i) - \frac{C_i}{2}, \; i = 0,1,2.$$

on $f_i = f(i) = S_i(i) = A_i$, per $i = 0,1,2$. Combinant això amb l'apartat anterior es té:

$$\boxed{B_{i+1} = B_i + 2(f_{i+1} - f_i) - 2B_i = 2(f_{i+1} - f_i) - B_i, \text{ per } i = 0,1,2} \qquad (2)$$

c) Si $f: [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$, amb $a>0$ és una funció parella i derivable, llavors, de $f(x) = f(-x) \; \forall x \in [-a,a] \Rightarrow f'(x) = -f'(-x) \; \forall x \in (-a,a)$ i, en particular, per $x = 0$ tindrem: $f'(0) = -f'(0) \iff f'(0) = 0$. Imposant això al nostre cas queda: $S_0'(0) = B_0 = 0$ i llavors, aplicant les recurrències (1) i (2) dels apartats anteriors:

$$\left\| \begin{array}{l} B_1 = 2\cdot(f_1 - f_0) - B_0 = 2\cdot(1'8 - 1'2) - 0 = 2 \times 0'6 = 1'2 \\ B_2 = 2\cdot(f_2 - f_1) - B_1 = 2\cdot(1'7 - 1'8) - 1'2 = 2 \times (-0'1) - 1'2 = -1'4 \\ B_3 = 2\cdot(f_3 - f_2) - B_2 = 2\cdot(2'4 - 1'7) + 1'4 = 1'4 + 1'4 = 2'8 \end{array} \right. \quad \left\| \begin{array}{l} C_0 = B_1 - B_0 = B_1 = 1'2 \\ C_1 = B_2 - B_1 = -1'4 - 1'2 = -2'6 \\ C_2 = B_3 - B_2 = 2'8 + 1'4 = 4'2 \end{array} \right.$$

9. Considereu la següent taula de valors corresponents a la funció $f(x)$ definida a l'interval $[-3,3]$

x	-3	-1	1	3
$f(x)$	0'0	1'25	0'0	0'76

a) Calculeu el valor aproximat de $f(0'40)$ que s'obté aplicant l'interpolació de Lagrange a la taula anterior

b) Suposant que les derivades de $f(x)$ compleixen que $|f^{(k)}(x)| \le 1/k$ $\forall x \in [-3,3]$ $\forall k \geq 1$, doneu una fita de l'error en el càlcul de l'apartat (a)

c) Suposem que $f(x)$ sigui un polinomi de grau 4, $f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ que aproximem pel polinomi de Lagrange obtingut a l'apartat (a). Trobeu el punt de l'interval $[-3,3]$ en el qual l'error d'aquesta aproximació és màxim i digueu quant val aquest error.

Solució:

a)
$$L_0(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(-3+1)(-3-1)(-3-3)} = -\frac{1}{48}(x+1)(x-1)(x-3) = -\frac{1}{48}(x^3-3x^2-x+3)$$

$$L_1(x) = \frac{(x+3)(x-1)(x-3)}{(-1+3)(-1-1)(-1-3)} = \frac{1}{16}(x+3)(x-1)(x-3) = \frac{1}{16}(x^3-x^2-9x+9)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+3)(x+1)(x-3)}{(1+3)(1+1)(1-3)} = -\frac{1}{16}(x+3)(x+1)(x-3) = -\frac{1}{16}(x^3+x^2-9x-9)$$

$$L_3(x) = \frac{(x+3)(x+1)(x-1)}{(3+3)(3+1)(3-1)} = \frac{1}{48}(x+3)(x+1)(x-1) = \frac{1}{48}(x^3+3x^2-x-3)$$

El polinomi interpolador de Lagrange corresponent és doncs:

$$P_3(x) = \overset{=0}{f(x_0)}L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \overset{=0}{f(x_2)}L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$
$$= \frac{5}{64}(x^3-x^2-9x+9) + \frac{19}{1200}(x^3-3x^2-x-3) =$$
$$= \frac{1}{4800}(451x^3-147x^2-3451x+3147).$$

d'on tenim que el valor aproximat de $f(0'40)$ és:

$$f(0'40) \cong P_3(0'40) = 0'369155$$

Fent servir MATLAB, amb la funció lagrange_interp.m, que podreu trobar a www.ma1.upc.edu/~joanr/svc/numeric/lagrange_interp.m, faríem:

```
>> x = [-3,-1, 1, 3];
>> f = [0.0,1.25, 0.0, 0.76];
>> format long
>> pxx = lagrange_interp(x,f,0.40)
pxx = 0.369155
```

I si volem dibuixar el polinomi interpolador i els punts de la taula:

```
>>xx = linspace(-3,3,1000);
>> yy = lagrange_interp(x,f,xx);
>> plot(x,f,'ro', xx,yy,'b-');
>> hold on
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
>> hold off
```

b) D'acord amb la fórmula de l'error en l'interpolació de Lagrange $\exists\, \xi \in [-3,3]$ tal que:

$$f(0'40) - P_3(0'40) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(0'4+3)\cdot(0'4+1)\cdot(0'4-1)(0'4-3)$$

i com que $|f^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{k}\ \forall\, x \in [-3,3]$, obtenim la fita següent:

$$|f(0'40) - P_3(0'40)| \leq \frac{1}{4\cdot 4!}\left|(0'4+3)(0'4+1)(0'4-1)(0'4-3)\right| = 0'07735.$$

c) Si $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, llavors per tot $x \in [-3,3]$ $\exists\, \xi_x \in [-3,3]$ t.q.:

$$\mathcal{E}(x) := f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$= \frac{\cancel{4!}\,a}{\cancel{4!}}(x+3)(x+1)(x-1)(x-3) = a\overbrace{(x^4 - 10x^2 + 9)}^{\substack{p(x)\\ \shortparallel}}$$

tenim que: $\mathcal{E}'(x) = a(4x^3 - 20x) = 4ax(x^2 - 5) = 0 \iff x = 0,\ x = \pm\sqrt{5}$

Alashores, l'error màxim a l'interval $[-3,3]$ ve donat per:

$$e := \max_{x \in [-3,3]} |\mathcal{E}(x)| = \max\{|\mathcal{E}(0)|, |\mathcal{E}(\sqrt{5})|, |\mathcal{E}(-\sqrt{5})|\} = \max\{9|a|, 16|a|\} = 16|a|$$

i s'assoleix per $x = \pm\sqrt{5} \simeq \pm 2'2360$ (veure figura).