

# Problemas de sistemas lineales

Ecuaciones Diferenciales (Ingeniería Industrial)

27 de abril de 2011

21. (Dibujando elipses en un centro lineal) Consideramos el sistema lineal  $X' = AX$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad -4 \leq \alpha \leq 4.$$

- (a) Probar que las trayectorias del sistema giran alrededor del origen para todo  $\alpha \in (-4, 4)$  ¿Cuál es el sentido de giro: horario o antihorario?
- (b) Calcular los números  $a, b, c$  tales que la función  $V(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  cumple la relación:
- $$\frac{d}{dt}[X(x, y)] = \alpha V(x, y).$$
- (c) Probar que la forma cuadrática  $V(x, y)$  es definida positiva (Indicación: aplicar el criterio de Sylvester).
- (d) Determinar la estabilidad del sistema en función del valor de  $\alpha$  sin usar el criterio traza-determinante ni los VAPs.
- (e) Dibujar el retrato de fases del sistema para  $\alpha = 0$  con la mayor precisión posible. Es decir, dibujar exactamente las elipses que forman las trayectorias.

22. (Pb2 Junio 2006) Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyos VAPs son:  $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = 2$ .

- (a) Calcular  $e^{tA}$ . (Consejo: Para comprobar los cálculos, verificar que  $e^{0A}$  es la matriz identidad y que  $\text{traza}(e^{tA}) = \text{traza}(e^{tD})$ , donde  $D$  es la forma diagonal de  $A$ ).
- (b) Resolver el PVI

$$X' = AX, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y encontrar la recta que contiene la solución.

- (c) Resolver el PVI

$$X' = AX, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y encontrar el plano que contiene la solución.

- (d) Dibujar la recta, el plano y las dos trayectorias que se obtienen a partir de las soluciones de ambos PVI. Marcar el sentido de giro de la trayectoria contenida en el plano. Deducir de todo lo anterior, sin necesidad de ser completamente riguroso, el aspecto que tienen las trayectorias que no están contenidas ni en el plano ni en la recta.

**23.** (Pb2 Enero 2010) Consideremos el sistema lineal 3D a coeficientes constantes

$$\left. \begin{aligned} x' &= -2x + y + z \\ y' &= -y + 4z \\ z' &= z \end{aligned} \right\}.$$

- (a) Calcular la solución general y estudiar su estabilidad.
- (b) Calcular y dibujar el plano invariante  $\pi \subset \mathbb{R}^3$  sobre el cual el sistema 3D es asintóticamente estable; es decir, cualquier trayectoria que empieza sobre  $\pi$  tiende al origen sin salirse del plano. Clasificar el sistema 2D que se obtiene sobre este plano, dibujar un croquis de sus trayectorias y explicar con precisión cómo tienden sus trayectorias al origen.
- (c) ¿Cómo se comportan las trayectorias fuera del plano  $\pi$ ? ¿Puede una trayectoria cruzar el plano  $\pi$ ? ¿Por qué? ¿Existen otros planos invariantes? ¿Cuáles? Dibujar un croquis aproximado de las trayectorias del sistema 3D.

**24.** (Pb2 enero 2009) Consideramos el sistema lineal  $X' = AX$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

siendo  $\alpha$  un parámetro real.

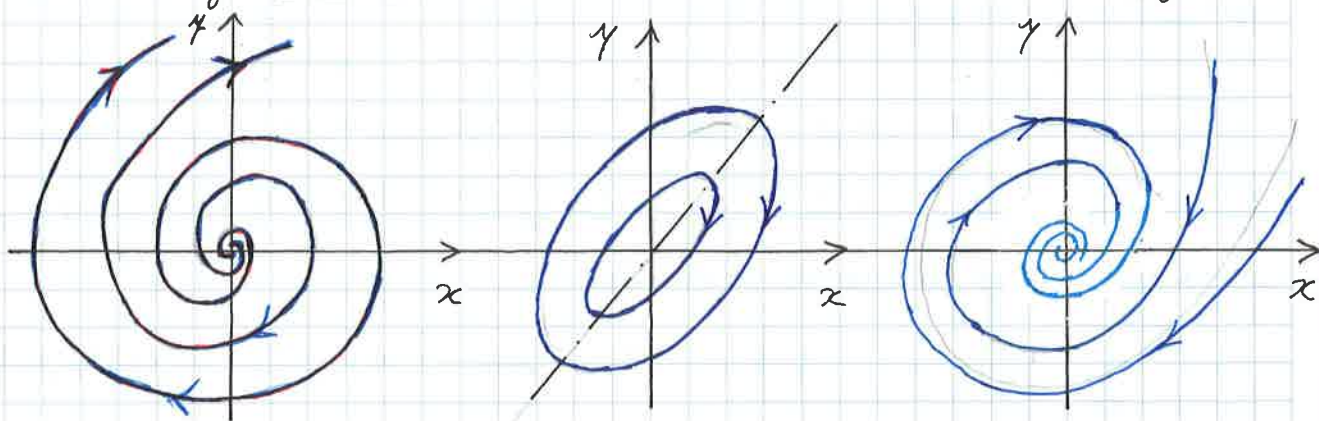
- (a) Calcular su estabilidad y clasificarlo en función de  $\alpha$ .
- (b) Dibujar un croquis de sus trayectorias en el plano  $(x_1, x_2)$  para cada uno de los siguientes valores del parámetro  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$  y  $\alpha = 2$ .
- (b.1) En uno de los tres casos anteriores hay una recta de entrada y otra de salida. En ese caso, ¿es posible que una trayectoria que empieza en el primer cuadrante llegue al tercer cuadrante? ¿Por qué?
- (b.2) En otro caso todas las trayectorias son periódicas, pero ¿de qué periodo?
- (b.3) Y en otro caso el sistema es degenerado, pero ¿es inestable? ¿Por qué?

21.a)  $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \alpha\lambda + 4$ , de donde los VAPs son  $\lambda_{\pm} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2}$ .  
Entonces  $\Delta := \alpha^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 < \alpha < 4$  y tendremos que el sistema será:

- i) Un foco inestable cuando  $0 < \alpha < 4$ ,
- ii) " " estable "  $-4 < \alpha < 0$ , y
- iii) " centro cuando  $\alpha = 0$

Así pues, todas las soluciones giran alrededor del origen para  $\alpha \in (-4, 4)$ . Para estudiar el sentido de giro, usaremos la condición suficiente deducida en el problema 15 (Test Enero 1998): en nuestro caso  $c = -1 < 0$  y las soluciones giran alrededor del origen en sentido horario.

Figura 1.



(i) foco inestable  
( $0 < \alpha < 4$ )

(iii) centro  
( $\alpha = 0$ )

(ii) foco estable  
( $-4 < \alpha < 0$ )

b)  $V(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ , y buscamos  $a, b, c$  t.g. si  $(x, y) = (x(t), y(t))$  es solución:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[V(x, y)] &= 2axx' + 2bx'y + 2bxy' + 2cyy' \\ &= 8axy + 8by^2 + 2bx(-x + \alpha y) + 2cy(-x + \alpha y) \\ &= 8axy + 8by^2 - 2bx^2 + 2\alpha bxy - 2cxy + 2\alpha cy^2 \\ &= -2bx^2 + (8a + 2\alpha b - 2c)xy + (8b + 2\alpha c)y^2 \\ &= \alpha(ax^2 + 2bxy + cy^2) \quad \forall (x, y) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b = \alpha a \\ 8a + 2\alpha b - 2c = 2\alpha b \\ 8b + 2\alpha c = \alpha c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 0 \\ 8 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema es compatible indeterminado y su solución general es:  $\begin{cases} a = s/4, \\ b = -\alpha s/8, \\ c = s. \end{cases}$  con  $s \in \mathbb{R}$  parámetro libre. Nos es suficiente conocer una solución, así que, por ejemplo, tomaremos  $s = 4$ , y entonces:  $a = 1, b = -\alpha/2, c = 4$ . y

$$V(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = x^2 - \alpha xy + 4y^2 = (x, y) \begin{pmatrix} 1 & -\alpha/2 \\ -\alpha/2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

c) La matriz de la forma cuadrática es  $B = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha/2 \\ -\alpha/2 & 4 \end{pmatrix}$  con los determinantes de los menores principales  $\Delta_1 = 1 > 0$ ,  $\Delta_2 = \det B = 4 - \alpha^2/4 > 0$ , si  $-4 < \alpha < 4$ ; y por tanto (Criterio de Sylvester) la forma cuadrática  $V(x, y) = x^2 - \alpha xy + 4y^2$  es definida positiva  $\forall \alpha \in (-4, 4)$ .

d) Sea  $(x, y) = (x(t), y(t))$  solución, con  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  y definimos  $\phi(t) := V(x(t), y(t)) = x^2(t) - \alpha x(t)y(t) + 4y^2(t)$ ,  $\phi(0) = V(x(0), y(0)) = \phi_0$ . Entonces, según b),  $\phi$  es solución de la EDO:

$$\frac{d\phi}{dt} = \alpha \phi, \text{ i.e.: } \phi(t) = \phi_0 e^{\alpha t} \Leftrightarrow V(x(t), y(t)) = V(x(0), y(0)) e^{\alpha t}$$

y como  $V(x, y)$  es una forma cuadrática definida positiva se deduce de aquí que: a) Si  $0 < \alpha < 4$ , entonces el sistema es inestable (las soluciones se "expanden", girando alrededor del origen, b) Si  $\alpha = 0$ , entonces  $V(x, y)$  es una integral 1ª del sistema: el sistema es estable pero no asintóticamente estable (las soluciones se mueven sobre elipses girando alrededor del origen, ver apartado e); c) Finalmente, si  $-4 < \alpha < 0$ , entonces las soluciones se contraen girando alrededor del origen y el sistema es (asintóticamente) estable. Ver figura.

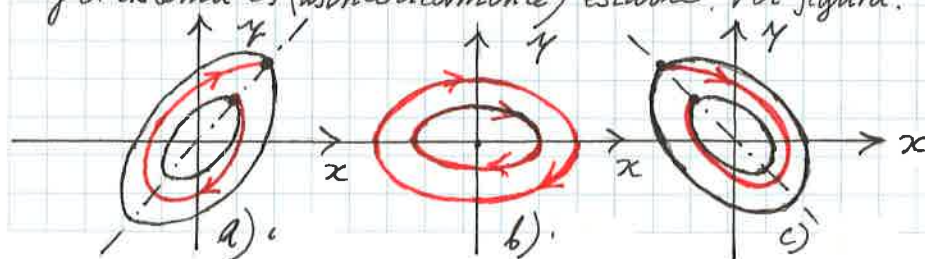


Figura 2.

e) c.p.  $\alpha=0$  (Centro):  $V(x,y) = x^2 + 4y^2 = V(x_0, y_0)$  ( $V$  es una integral primera del sistema). Por tanto, si ponemos  $V(x_0, y_0) = \phi_0$ , vemos entonces que las trayectorias se mueven sobre las elipses:

$$V(x,y) = x^2 + 4y^2 = \phi_0 (>0) \iff \frac{x^2}{\sqrt{\phi_0}^2} + \frac{y^2}{\sqrt{\phi_0/4}^2} = 1$$



Las soluciones se mueven pues sobre elipses centradas en el origen, cuyos ejes se sitúan sobre los ejes coordenados  $x$  e  $y$  y cuyo valor de la excentricidad es  $e = \sqrt{3}/2$ . Estas elipses se recorren en sentido horario, como se muestra en la figura 2(b).  $\square$

$$22. (a) \text{Nuc}(A-iI) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -i & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1-i & -1 \\ -1 & -1 & 1-i \end{pmatrix} = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -i & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1-i & -1 \\ 0 & -2+i & 2-i \end{pmatrix}$$

$$= \text{Nuc} \begin{pmatrix} -i & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1-i/2 & -1+i/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0, -1, -1)^T + i(1, 0, 0)^T \rangle,$$

$$\text{Nuc}(A-2I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 5/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \langle (0, 1, -1)^T \rangle.$$

$$\text{Entonces: } S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y:}$$

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{2t} & & \\ & \cos t & \sin t \\ & -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$e^{tA} = S e^{tD} S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & & \\ & \cos t & \sin t \\ & -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\sin t & \cos t \\ e^{2t} & -\cos t & -\sin t \\ -e^{2t} & -\cos t & -\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & 1/2 \sin t & 1/2 \sin t \\ -\sin t & 1/2 e^{2t} + 1/2 \cos t & -1/2 e^{2t} + 1/2 \cos t \\ -\sin t & -1/2 e^{2t} + 1/2 \cos t & 1/2 e^{2t} + 1/2 \cos t \end{pmatrix}$$

Vemos que:

$$e^{0A} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \text{traza}(e^{tA}) = e^{2t} + 2\cos t = \text{traza}\left(e^{\begin{pmatrix} tD \\ \end{pmatrix}}\right). \text{ (ok!)}$$

b)  $X' = AX$ , con  $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Solución:  $X(t) = e^{tA} X(0) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,

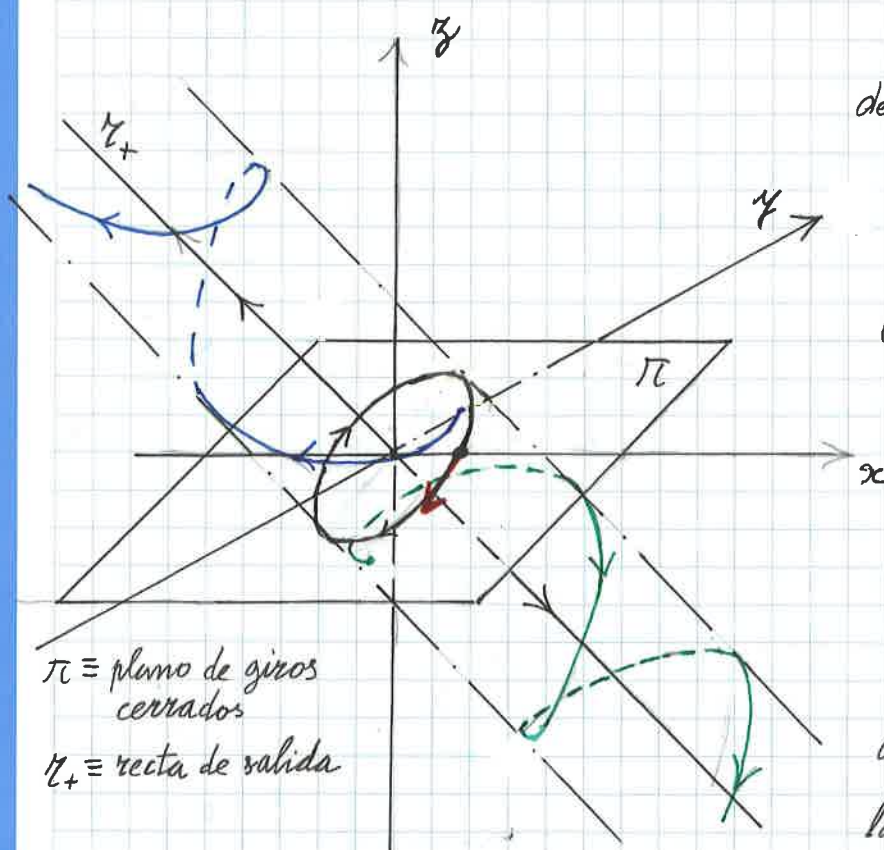
c)  $X' = AX$ , con  $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Solución:  $X(t) = e^{tA} X(0) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ .

d) El plano de giros cerrados viene generado por los vectores  $U = (0, -1, -1)^T$  y  $V = (1, 0, 0)^T$ . Un vector perpendicular será:  $W = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -e_y + e_z = (0, -1, 1)^T$ . Así pues la ecuación del plano de giros cerrados es:

$$\Pi = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0 \right\}.$$

La dirección de la recta de salida es la del vector propio asociado al  $\text{vap}$  positivo  $\lambda = \lambda_3 = 2$ , que es (apartado a))  $\mathcal{L} = (0, 1, -1)^T$ . Entonces, la ecuación de la recta de salida es

$$\mathcal{L}_+ = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x=0, y+z=0 \right\}$$



$\Pi \equiv$  plano de giros cerrados  
 $\mathcal{L}_+ \equiv$  recta de salida

Figura 3

Para determinar el sentido de giro de las soluciones sobre el plano  $\Pi$  evaluamos el campo de direcciones (vector velocidad) en el punto

$$(1, 0, 0) \in \Pi : \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

luego el sentido de giro es el indicado en la figura.

Las soluciones que no están contenidas ni en el plano  $\Pi$  ni en la recta  $\mathcal{L}_+$  giran alrededor de  $\mathcal{L}_+$  al tiempo que se alejan del origen (ver figura)

$$23 \text{ a) } p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2) \Rightarrow \text{VAPs: } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$$

$$\lambda_1 = 1: \text{Nuc}(A-I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1, 2, 1)^T \rangle$$

$$\lambda_2 = -1: \text{Nuc}(A+I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1, 1, 0)^T \rangle$$

$$\lambda_3 = -2: \text{Nuc}(A+2I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \langle (1, 0, 0)^T \rangle$$

VAPs

VEPs

$$\lambda_1 = 1 \quad v_1 = (1, 2, 1)^T$$

$$\lambda_2 = -1 \quad v_2 = (1, 1, 0)^T$$

$$\lambda_3 = -2 \quad v_3 = (1, 0, 0)^T$$

Solución general:

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} \text{ con } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \text{ libres.}$$

El sistema es inestable: uno de sus VAPs es positivo.

b)  $\Pi$  es el plano generado por los vectores  $v_2 = (1, 1, 0)$  y  $v_3 = (1, 0, 0)$ , luego  $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ , es decir, coincide con el plano  $xy$ .

El sistema restringido sobre  $\Pi$  es un nodo propio estable (atractor) cuyas trayectorias tienden tangencialmente al origen según la dirección lenta (la indicada por el VEP asociado al VAP con valor absoluto más pequeño. En nuestro caso, como  $\lambda_3 = -2 < \lambda_2 = -1 < 0$ , tenemos  $|\lambda_2| = 1 < |\lambda_3| = 2$ , luego la dirección lenta es la del VEP asociado a  $\lambda_2 = -1$ , esto es, a  $v_2 = (1, 1, 0)^T$ ). El retrato de fases del sistema restringido al plano invariante  $\Pi$  queda pues como se indica en la figura 4.

$$\Pi = \{z=0\}$$

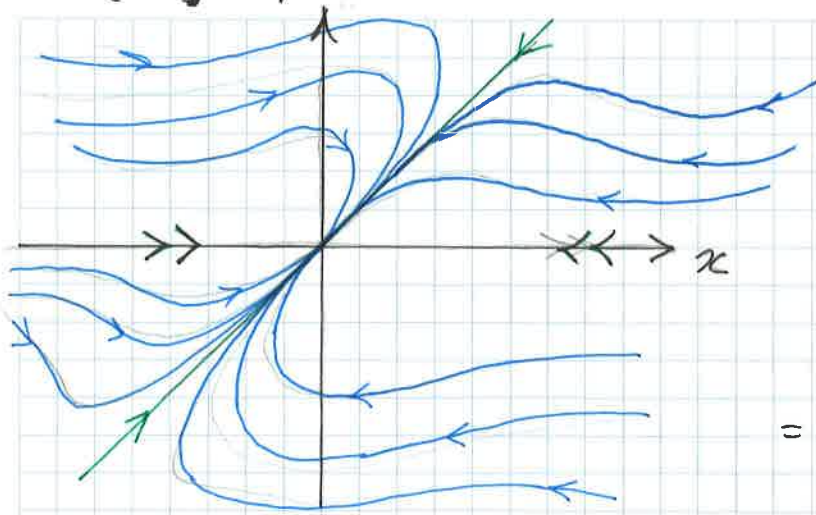


Figura 4

c) Si la trayectoria empieza fuera del plano  $\Pi$ , entonces la solución escapa a infinito acercándose a la recta de salida  $r_1 = [(1, 2, 1)^T] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - 2x = 0, z - x = 0\}$ . Una trayectoria no puede cruzar  $\Pi$ , pues es un plano invariante y tenemos unicidad de soluciones.

Existen otros 2 planos invariantes:

• El determinado por la recta de salida  $r_1$  y la recta de entrada  $r_2$  ( $r_1 = [(1, 2, 1)^T]$ ,  $r_2 = [(1, 1, 0)^T]$ ),  $\hat{\Pi}$ :

$$\hat{\Pi}: \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -e_x + e_y - e_z = (-1, 1, -1)^T$$

luego:  $\hat{\Pi} = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$

• El determinado por la recta de salida  $r_1 = [(1, 2, 1)^T]$  y la recta de entrada  $r_3 = [(1, 0, 0)^T]$ , plano  $\hat{\hat{\Pi}}$

$$\hat{\hat{\Pi}}: \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = e_y - 2e_z = (0, 1, -2)^T$$

luego:  $\hat{\hat{\Pi}} = \{(x, y, z) : y - 2z = 0\}$

La restricción del sistema sobre los planos  $\hat{\Pi}$  y  $\hat{\hat{\Pi}}$  corresponde en ambos casos a una silla, pues hay una dirección de entrada y una dirección de salida.



En la figura 5 se representa un croquis con algunas trayectorias del sistema 3D.

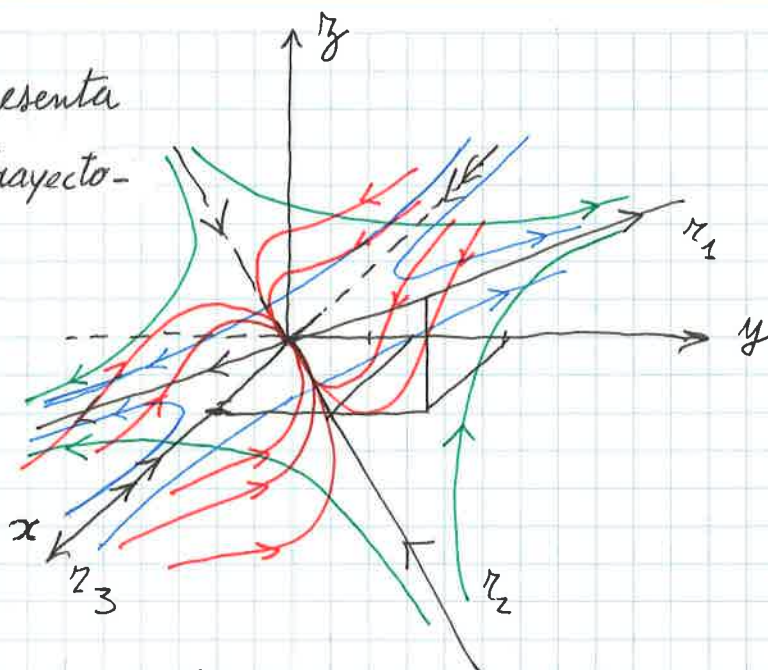


Figura 5

24 a)  $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 - \alpha^2 = 0$ , de donde los VAPs son  $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{\alpha^2 - 1}$   
 Ahorares:

a.1) Si  $|\alpha| > 1 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ,  $\lambda_{+}, \lambda_{-} \in \mathbb{R}$  amb  
 $\lambda_{-} = -\sqrt{\alpha^2 - 1} < 0 < \lambda_{+} = \sqrt{\alpha^2 - 1}$ : el sistema és una sella. Els  
 VEPs corresponents són:

$$V_{-} = (-1, \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^T \text{ i } V_{+} = (-1, \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})^T$$

a.2) Si  $|\alpha| < 1$ , entonces  $\lambda_{+}, \lambda_{-} \in \mathbb{C}$  con  $\lambda_{-} = \bar{\lambda}_{+}$  y  $\text{Re}(\lambda_{\pm}) = 0$ .  
 El sistema corresponde a un centro y las soluciones giran alrededor  
 del origen en sentido horario (aplíquese el problema 15, con  $C = -1 < 0$ ).

a.3) Finalmente, si  $\alpha = \pm 1$  el sistema es degenerado:  $\lambda_{\pm} = 0$ . En  
 particular:

Para  $\alpha = 1$  la recta  $y = -x$  es una recta de puntos fijos. La solución del  
 sistema es  $x(t) = (x_0 + y_0)t + x_0$ ,  $y(t) = -(x_0 + y_0)t + y_0$ , lo que correspon-  
 de a las trayectorias:  $\dot{y} = -x + x_0 + y_0$ , moviéndose "hacia abajo" cuando  
 $y_0 > -x_0$  y "hacia arriba" cuando  $y_0 < -x_0$ . (ver figura 6 en el apartado b)

• Para  $\alpha = -1$  la recta  $y = x$  es una recta de puntos fijos. La solución del sistema es:

$$x(t) = (y_0 - x_0)t + x_0, \quad y(t) = (y_0 - x_0)t + y_0$$

luego las trayectorias se mueven sobre las rectas:

$$y = x - x_0 + y_0$$

"hacia arriba" cuando  $y_0 > x_0$  y "hacia abajo" cuando  $y_0 < x_0$ .

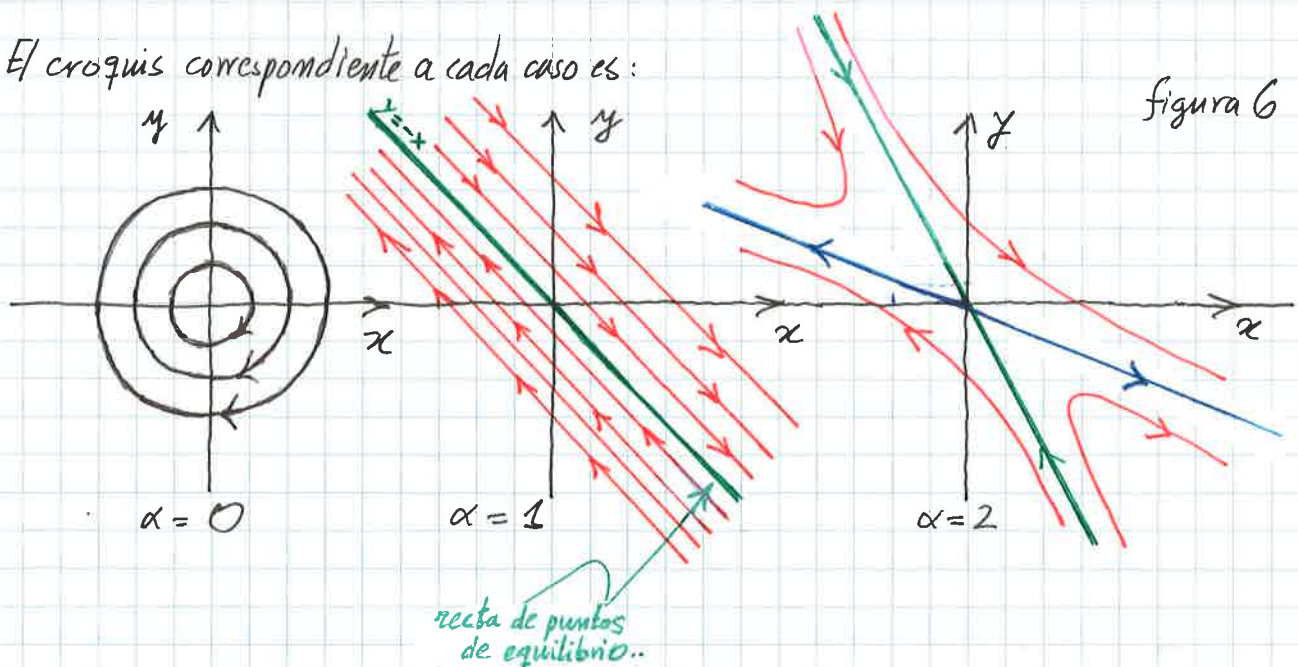
Los puntos de equilibrio sobre las rectas  $y = -x$  ( $\alpha = 1$ ),  $y = x$  ( $\alpha = -1$ ) son inestables puesto que cualquier solución que comience en un entorno de cualquiera de estos puntos (que no esté sobre la correspondiente recta) 'escapa' a infinito (ver figura 6)

b) para  $\alpha = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow$  el sistema se reduce a:  $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X$ , luego las soluciones se mueven sobre circunferencias centradas en el origen y, en este caso, recorridas en sentido horario (ver apartado a.2)

Para  $\alpha = 1$  el sistema es degenerado,  $\lambda_{\pm} = 0$  (véase apartado a.3)

Para  $\alpha = 2$  el sistema corresponde a una silla (apartado a.1), con  $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{3}$  y  $V_{\pm} = (-1, 2 \mp \sqrt{3})$

El croquis correspondiente a cada caso es:



b.1) Para  $\alpha = 2$  tenemos rectas de entrada y de salida (el sistema corresponde a una silla). En la figura vemos que ambas rectas dividen el 2° y el 4° cuadrante. Como estas rectas son invariantes, debido a la unicidad de soluciones, ninguna solución que comience en el 1° cuadrante puede llegar al 3° cuadrante, ya que tendría que "atravesar" dichas rectas.

b.2) Para  $\alpha = 0$  (El sistema corresponde a un centro), con periodo  $p = \frac{2\pi}{|\lambda+1|} = 2\pi$

b.3) Todos los puntos de la recta  $y = -x$  (recta de puntos de equilibrio, ver figura 6) son inestables. Ver comentario al final del apartado a.3.

Blank header box

