3. Integració de funcions de varies variables

3.0 Integració de funcions d'1 variable:

Def. Integral definida d'una funció d'1 variable

$$f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$I = \int_a^b f(x)\,dx \equiv$ defineix l'àrea (amb signe) limitada per la gràfica de la funció, l'eix x i les rectes $x = a$ i $x = b$

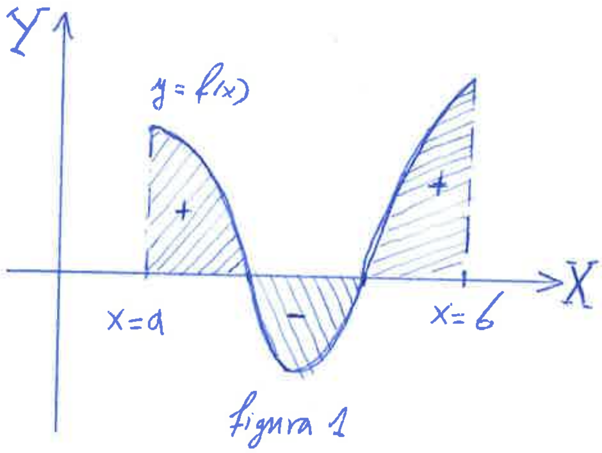


figura 1

Qüestió:

Quan està definida l'àrea?

$\Updownarrow$

Quan existeix la integral $\int_a^b f(x)\,dx$?

Remarca 1. Podem suposar que $f(x) \geq 0$. Si no és el cas, definim

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \qquad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

i aleshores: $f^+(x) \geq 0$, $f^-(x) \geq 0$ i $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ (Veure figura 2).

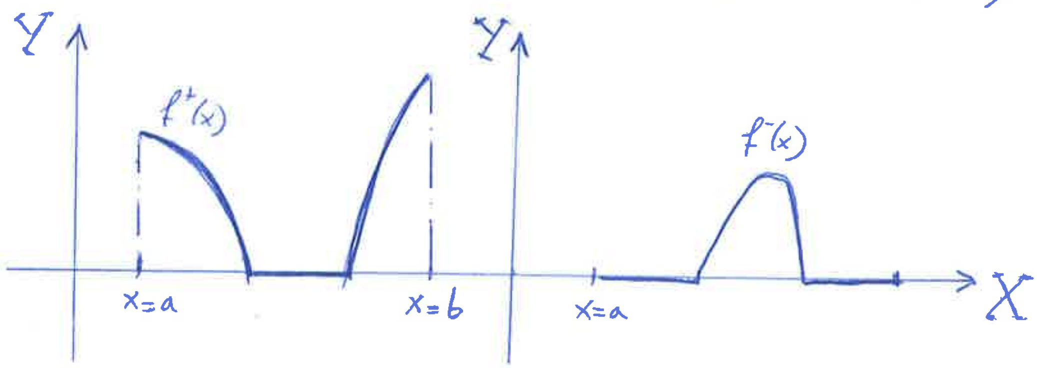


figura 2.

Llavors:

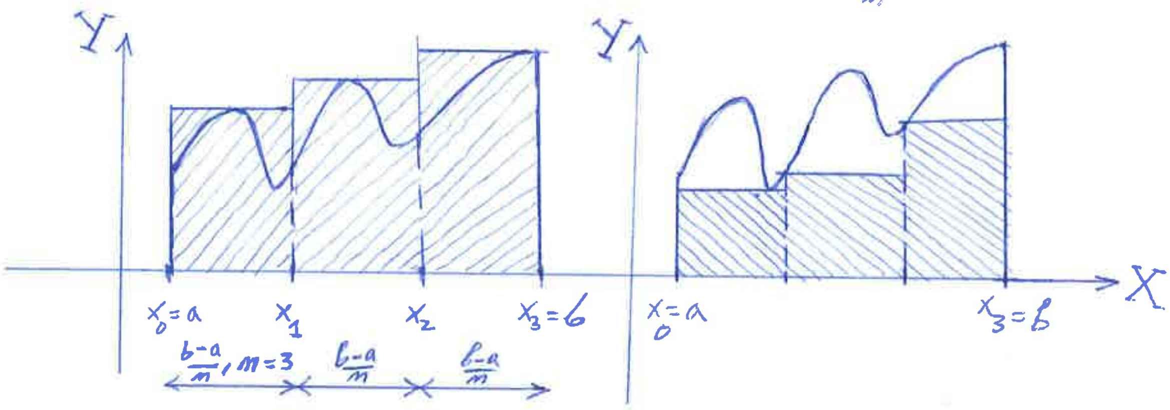
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx.$$

Def. [Sumes superiors i inferiors de Riemann]. Signi $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ acotada i $n\in\mathbb{N}$ donat. Definim:

Suma superior n-èsima de f en $[a,b]$: $S_n(f,[a,b])=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$

" inferior " " " " " : $s_n(f,[a,b])=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$

on $x_i=a+i\,\frac{b-a}{n}$, $i=0,1,2,\dots,n$. Notem que llavors $x_0=a$, $x_n=b$.



Àrea ▨ $=S_3(f,[a,b])$ Àrea ▧ $=s_3(f,[a,b])$

figura 3.

Clarament:

$$s_n(f,[a,b])\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq S_n(f,[a,b]).$$

Def. [Funció integrable]. Una funció $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ acotada. Direm que f és integrable en $[a,b]$ si existeixen i són coincidents

$$\lim_n s_n(f,[a,b])=I=\lim_n S_n(f,[a,b])$$

Llavors escriurem:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarca 2. Si f no és acotada o l'interval de definició no ho és, podem estendre aquesta construcció i introduir les anomenades integrals impròpies.

Remarca 3. No tota funció acotada, definida en un interval acotat $[a,b]$ és integrable. Per exemple, sigui: $\chi_{\mathbb{Q}} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, donada per $\chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$ (funció de Dirichlet).

Tenim que: $S_n(\chi_{\mathbb{Q}}, [0,1]) = 1$, $s_n(\chi_{\mathbb{Q}}, [0,1]) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, per tant $\chi_{\mathbb{Q}}$ no és una funció integrable a l'interval $[0,1]$. (recordem que els racionals, $\mathbb{Q}$, i els irracionals, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ són densos en $\mathbb{R}$).

Teorema [Criteri d'integrabilitat en un interval]. Sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada i contínua excepte, com a molt en un nombre finit de punts. Aleshores f és integrable en $[a,b]$. Si $x_1 < x_2 < \dots < x_{d-1}$, d finit, són els punts on (eventualment) f és discontínua en $[a,b]$, llavors denotant $x_0 = a$ i $x_d = b$, tenim:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{d} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx,$$

ja que f és contínua a cada subinterval (x_{i-1}, x_i) per $i = 1, 2, \dots, d$.

Teorema [Regla de Barrow]. Sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Sigui $F(x)$ una primitiva de $f(x)$, i.e.: $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Llavors:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$