Álgebras de vértices, opéradas y complejo de De Rham quiral

Introducción a las álgebras de vértices y al complejo de De Rham quiral.

Imma Gálvez Carrillo

Terrassa, 16/12/2011

curso impartido en la Universidad de Buenos Aires, agosto de 2009

Capítulo 1

Introducción a las álgebras de vértices y al complejo de De Rham quiral.

Índice general

1. Introducción a las álgebras de vértices y al complejo de De Rham quiral. 1

1.1. Cálculo de distribuciones formales. 3

1.1.1. Distribuciones formales. 3

1.1.2. La función delta formal. 5

1.1.3. Distribuciones locales 7

1.1.4. Transformada de Fourier formal. 9

1.1.5. Distribuciones formales vistas como operadores diferenciales. 11

1.1.6. Localidad de distribuciones formales con valores en superálgebras asociativas y de Lie. 11

1.1.7. λ-productos y λ-corchetes 14

1.1.8. Fórmula de Taylor 16

1.2. Campos locales. 17

1.2.1. Campos y su producto normalmente ordenado 17

1.2.2. Álgebras de campos lineales. 20

1.2.3. El teorema de Wick y su generalización no conmutativa. 22

1.3. Álgebras de vértices. 23

1.3.1. Definición. 23

1.3.2. Fórmula de expansión en producto de operadores de Borcherds. . . 27

1.3.3. Peso conforme. 29

1.4. Ejemplos. 30

1.4.1. Álgebras generadas por distribuciones formales locales. 30

1.4.2. Representaciones por campos. 35

1.5. Complejo de De Rham quiral. 39

1.5.1. Sistema $bc - \beta\gamma$. 39

1.6. El complejo de De Rham quiral de una variedad. 44

1.1. Cálculo de distribuciones formales.

1.1.1. Distribuciones formales.

Empezaremos resumiendo el cálculo de distribuciones formales de Kac expuesto en ([16],§ 2), que sirve para formalizar los procedimientos de expansión en producto de operadores.

Definición 1.1.1 *Una expresión formal*

$$a(z, w, \dots\dots) = \sum_{m,n,\dots\in\mathbb{Z}} a_{m,n,\dots} z^m w^n \dots$$

donde $z, w, \dots$ *son variables formales y* $a_{m,n,\dots}$ *son elementos de un espacio vectorial* U *sobre* $\mathbb{C}$ *se llama una* distribución formal en las indeterminadas $z, w, \dots$ con valores en U.

Es fácil ver que las distribuciones formales forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ que denotaremos por $U\,[[z, z^{-1}, w, w^{-1}, \dots]]$.

Observación 1.1.2

- El producto de una distribución formal por una serie de Laurent está definido en general, siempre que el producto de los coeficientes lo esté.
- Sin embargo, en general no podemos multiplicar dos distribuciones formales, pues no siempre el coeficiente que correspondería a cada monomio $z^n w^m \dots$ vendrá dado por una serie de potencias finita (o convergente).

Vamos a definir algunos operadores en ciertas distribuciones formales.

Definición 1.1.3 *Sea* $a\,(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ *una distribución formal en una variable.*

- *Escribiremos la* derivada *de* $a\,(z)$ *como*

$$\partial a\,(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n a_n z^{n-1}$$

- *El* residuo *de* $a\,(z)$ *viene dado por*

$$\mathrm{Res}_z(a\,(z)) = a_{-1}$$

Sea $a(z, w) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{n,m} z^m w^n$ *una distribución en dos variables. Definiremos*

- *las* derivadas parciales

$$\partial_z a(z,w) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} m a_{m,n} z^{m-1} w^n, \quad \partial_w a(z,w) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} n a_{m,n} z^m w^{n-1}$$

Notación 1.1.4 *A menudo utilizaremos para las distribuciones formales las notaciones*

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$$

$$a(z,w) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{(m,n)} z^{-m-1} w^{-n-1}$$

etc

puesto que

$$a_{(n)} = \mathrm{Res}_z(a(z)\, z^n)$$

Definición 1.1.5 *Dada una distribución formal* $a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$*, denotamos*

$$a(z)_- = \sum_{n\geq 0} a_{(n)} z^{-n-1}$$

$$a(z)_+ = \sum_{n<0} a_{(n)} z^{-n-1}$$

Observación 1.1.6 *Se cumple que*

$$(\partial a(z))_\pm = \partial\left(a(z)_\pm\right)$$

Observación 1.1.7 *Podemos considerar una distribución en dos variables como una distribución en una de las variables con coeficientes en distribuciones en la otra variable. De tal manera tiene sentido definir* $\mathrm{Res}_z(a(z,w))$*,* $\mathrm{Res}_w(a(z,w))$ *para distribuciones formales en dos variables.*

Observación 1.1.8 *Dado que*

$$\mathrm{Res}_z(\partial a(z)) = 0$$

siempre que $a(z)b(z)$ *esté definido tendremos una fórmula de integración por partes*

$$\mathrm{Res}_z(\partial a(z)\, b(z)) = -\mathrm{Res}_z(a(z)\, \partial b(z))$$

Definición 1.1.9 *Sea* $\mathbb{C}[z,z^{-1}]$ *el álgebra de polinomios de Laurent en* z*. Existe un par no degenerado*

$$U\left[\left[z,z^{-1}\right]\right] \times \mathbb{C}\left[z,z^{-1}\right] \to U$$

definido por

$$\langle f,\varphi\rangle = \mathrm{Res}_z f(z)\, \varphi(z)$$

Este par nos permite ver los polinomios de Laurent como funciones test para las distribuciones formales, ya que dos distribuciones formales $a(z)$ y $b(z)$ son iguales si y solo si

$$\langle a, \varphi \rangle = \langle b, \varphi \rangle$$

para cualquier función test $\varphi \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$.

Definición 1.1.10 *Diremos que el espacio vectorial U admite una estructura de* superálgebra asociativa *si es una es una $\mathbb{Z}/(2)\mathbb{Z}$ -álgebra graduada asociativa con descomposición*

$$U = U_{\bar{0}} \oplus U_{\bar{1}}$$

en partes par $U_{\bar{0}}$ *e* impar $U_{\bar{1}}$*, donde $U_\alpha U_\beta \subset U_{\alpha+\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}/(2)\mathbb{Z}$.*

Ejemplo 1.1.11 *Las siguientes son superálgebras asociativas de importancia en nuestro contexto:*

- *$U = \mathrm{End}(V)$, donde V es un superespacio vectorial, con la $\mathbb{Z}/(2)\mathbb{Z}$-graduación*

$$(\mathrm{End}(V))_\alpha = \{a \in \mathrm{End}(V) \,|aV_\beta \subset V_{\alpha+\beta}\}$$

- *La superálgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ de un superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$.*

Definición 1.1.12 *Sea U una superálgebra asociativa. Sea*

$$p(a, b) = (-1)^{\alpha\beta}$$

para

$$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}/(2)\mathbb{Z}$$

El corchete $[a, b]$ *de dos elementos a,b de U es*

$$[a, b] = ab - p(a, b)\, ba$$

Observación 1.1.13 *Supondremos siempre que los coeficientes de una distribución formal $a(z)$ tienen todos la misma paridad, $p(a)$. Entonces, $p(a, b) = (-1)^{p(a)p(b)}$.*

1.1.2. La función delta formal.

Definición 1.1.14 *La* función delta formal *$\delta(z, w)$, o $\delta(z - w)$ en la notación de Kac ([16]), es la distribución formal*

$$\delta(z, w) = z^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{w}{z}\right)^n$$

Definición 1.1.15 *Sea $R(z,w)$ una función racional con polos tan solo en $z=0, w=0$ y $|z|=|w|$. Denotaremos por $i_{z,w}R$ la expansión de R en serie de potencias en el dominio $|z|>|w|$, y por $i_{w,z}R$ la expansión de R en serie de potencias en el dominio $|z|<|w|$.*

Ejemplo 1.1.16 *Si consideramos, para $j\in\mathbb{Z}_+$, $R(z,w)=\frac{1}{(z-w)^{j+1}}$,*

$$i_{z,w}\frac{1}{(z-w)^{j+1}} = \sum_{m=0}^{\infty}\binom{m}{j} z^{-m-1}w^{m-j}$$

$$i_{w,z}\frac{1}{(z-w)^{j+1}} = -\sum_{m=-1}^{-\infty}\binom{m}{j} z^{-m-1}w^{m-j}$$

Dado un operador A, denotaremos por $A^{(j)}=\frac{A^j}{j!}$. Se obtiene entonces que

$$\begin{aligned}\partial_w^{(j)}\delta(z,w) &= i_{z,w}\frac{1}{(z-w)^{j+1}} - i_{w,z}\frac{1}{(z-w)^{j+1}}\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\binom{m}{j} z^{-m-1}w^{m-j}\end{aligned}$$

que es una distribución formal con coeficientes enteros.

La función delta formal que hemos definido tiene las propiedades siguientes, cuya demostración es un sencillo ejercicio:

Proposición 1.1.17

1. Sea $f(z)\in U[[z,z^{-1}]]$. Entonces el producto $f(z)\delta(z,w)$ siempre converge y se cumple que
$$\mathrm{Res}_z f(z)\delta(z,w) = f(w) \tag{1.1}$$

2. $$\delta(z,w)=\delta(w,z)$$

3. $$\partial_z\delta(z,w) = -\partial_w\delta(z,w)$$

4. $$(z-w)\,\partial_w^{(j+1)}\delta(z,w) = \partial_w^{(j)}\delta(z,w), \quad j\in\mathbb{Z}_+$$

5. $$(z-w)^{j+1}\,\partial_w^{(j)}\delta(z,w)=0, \quad j\in\mathbb{Z}_+$$

6. $$\delta(z,w)\,a(z)=\delta(z,w)\,a(w), \quad a(z)\in U\left[\left[z,z^{-1}\right]\right]$$

7.
$$\delta(z,t)\,\delta(w,t)=\delta(w,t)\,\delta(z,w)$$

8.
$$\partial_t^n\delta(z,t)\,(-\partial_t^m)\,\delta(w,t)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\partial_w^{m-j}\delta(w,t)\,\partial_w^{n+j}\delta(z,w)$$

1.1.3. Distribuciones locales

Nos interesará saber cuando una distribución formal

$$a(z,w)=\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}a_{m,n}z^m w^n\in U\left[\left[z,z^{-1},w,w^{-1}\right]\right]$$

admite una expansión de la forma

$$a(z,w)=\sum_{j=0}^{\infty}c^j(w)\,\partial_w^{(j)}\delta(z,w)$$

Si éste es el caso, multiplicando $a(z,w)$ y la expansión por $(z-w)^n$ y tomando Res_z, utilizando las propiedades anteriores obtendremos que

$$c^n(w)=\mathrm{Res}_z a(z,w)\,(z-w)^n$$

Sea $U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]^0$ el subespacio de $U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]$ formado por aquellos elementos $a(z,w)$ para los cúales converge la serie

$$\pi a(z,w):=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\mathrm{Res}_z a(z,w)\,(z-w)^j\right)\partial_w^{(j)}\delta(z,w)$$

Sea
$$a(z,w)^{+(z)}:=\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}_+\\ n\in\mathbb{Z}}}a_{m,n}z^m w^n$$

Puede demostrarse usando lo que hemos visto hasta ahora la siguiente

Proposición 1.1.18

1. La aplicación π es un proyector ($\pi^2=\pi$) en $U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]^0$.
2. $\ker(\pi)=\left\{a(z,w)\in U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]^0\,|a(z,w)=a(z,w)^{+(z)}\right\}$

3. Cualquier $a(z,w) \in U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]^0$ admite una representación única de la forma

$$a(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} c^j(w)\,\partial_w^{(j)}\delta(z,w) + b(z,w) \tag{1.2}$$

donde $b(z,w) = b(z,w)^{+(z)}$, con

$$c^n(w) = \mathrm{Res}_z a(z,w)(z-w)^n \tag{1.3}$$

Definición 1.1.19 *Diremos que una distribución formal* $a(z,w)$ *es* holomorfa en z *si* $a(z,w) = a(z,w)^{+(z)}$.

En consecuencia, se obtiene el siguiente

Corolario 1.1.20 *Sea* $a(z,w) \in U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]$, *tal que* $a(z,w)(z-w)^N = 0$, $N \geq 1$. *Entonces*

$$a(z,w) \in \sum_{j=0}^{N-1} \partial_w^{(j)}\delta(z,w)\,U\left[\left[w,w^{-1}\right]\right]$$

y cualquier elemento de éste admite una única representación de la forma

$$a(z,w) = \sum_{j=0}^{N-1} c^j(w)\,\partial_w^{(j)}\delta(z,w)$$

donde

$$c^n(w) = \mathrm{Res}_z a(z,w)(z-w)^n$$

Observación 1.1.21 *La expansión*

$$a(z,w) = \sum_{j=0}^{N-1} c^j(w)\,\partial_w^{(j)}\delta(z,w)$$

equivale a

$$a_{(m,n)} = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{m}{j} c^j_{(m+n-j)}$$

Definición 1.1.22 *Una distribución formal* $a(z,w)$ *se llama* local *si*

$$(z-w)^N a(z,w) = 0, \text{ para } N \gg 0 \tag{1.4}$$

Como consecuencia del corolario anterior tiene entonces sentido formular la definición que sigue.

Definición 1.1.23 *Sea $a(z,w)$ una distribución formal local. Se llama la* expansión OPE (expansión en producto de operadores) de $a(z,w)$ *a la expresión de dicha distribución en la forma*

$$a(z,w) = \sum_{j=0}^{N-1} c^j(w)\, \partial_w^{(j)} \delta(z,w)$$

Los $c^n(w)$ dados por la fórmula del residuo

$$c^n(w) = \mathrm{Res}_z a(z,w)(z-w)^n$$

se llaman entonces los coeficientes OPE de $a(z,w)$.

1.1.4. Transformada de Fourier formal.

Vamos a estudiar los coeficientes de la expansión (1.2).

Definición 1.1.24 *La* transformada de Fourier formal *de una distribución formal $a(z,w)$ viene dada mediante la fórmula*

$$F_{z,w}^{\lambda}(a(z,w)) = \mathrm{Res}_z(e^{\lambda(z-w)} a(z,w)) \tag{1.5}$$

que define una aplicación $\mathbb{C}$-lineal

$$F_{z,w}^{\lambda} : U\left[\left[z, z^{-1}, w, w^{-1}\right]\right] \to U\left[\left[w, w^{-1}\right]\right][[\lambda]]$$

El siguiente lema se deduce de las propiedades de las funciones delta formales.

Lema 1.1.25

$$F_{z,w}^{\lambda}\left(\partial_w^j \delta(z,w)\right) = \lambda^j$$

De manera que la transformada de Fourier formal (1.5) de la expansión (1.2) es

$$F_{z,w}^{\lambda}(a(z,w)) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{(n)} c^n(w)$$

con $\lambda^{(n)} = \frac{\lambda^n}{n!}$. Es decir, la transformada de Fourier formal de una distribución formal $a(z,w)$ es la serie generatriz de sus coeficientes OPE.

Se verifica fácilmente que se cumple el siguiente

Lema 1.1.26

$$e^{\lambda(z-w)} \partial_w^j \delta(z,w) = (\lambda + \partial_w)^j \delta(z,w)$$

Definición 1.1.27 *El* operador de permutación *en el espacio de distribuciones formales $U[[z, z^{-1}, w, w^{-1}]]$ viene dado por*

$$\tilde{a}(z,w) = a(w,z)$$

Es importante tener en cuenta los siguientes resultados, que no cuesta demostrar.

Lema 1.1.28 *Los operadores de derivadas parciales y de permutación preservan la localidad de las distribuciones formales.*

Lema 1.1.29 *El comportamiento de la transformada de Fourier formal con respecto a estos operadores de derivadas parciales y de permutación es el siguiente:*

$$F_{z,w}^{\lambda}\partial_z = -\lambda F_{z,w}^{\lambda} = \left[\partial_w, F_{z,w}^{\lambda}\right]$$

$$F_{z,w}^{\lambda} a\left(w,z\right) = F_{z,w}^{-\lambda-\partial_w} a\left(z,w\right) \ \ \textit{si } a\left(z,w\right) \ \ \textit{es local}$$

donde

$$F_{z,w}^{-\lambda-\partial_w}\left(a\left(z,w\right)\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\lambda+\partial_w\right)^{(n)} c^n\left(w\right)$$

Corolario 1.1.30 *Para los coeficientes OPE en*

$$\begin{aligned} a\left(z,w\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} c^j\left(w\right)\partial_w^{(j)}\delta\left(z,w\right) \\ \partial_z a\left(z,w\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} c_z^j\left(w\right)\partial_w^{(j)}\delta\left(z,w\right) \\ \partial_w a\left(z,w\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} c_w^j\left(w\right)\partial_w^{(j)}\delta\left(z,w\right) \\ \widetilde{a}\left(z,w\right) = a\left(w,z\right) &= \sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{c}^j\left(w\right)\partial_w^{(j)}\delta\left(z,w\right) \end{aligned}$$

se cumple que

$$\begin{aligned} c_z^n\left(w\right) &= -nc^{n-1}\left(w\right) \\ c_w^n\left(w\right) &= \partial_w c^n\left(w\right) + nc^{n-1}\left(w\right) \\ \widetilde{c}^n\left(w\right) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\left(-1\right)^{j+n}\partial_w^{(j)} c^{n+j}\left(w\right) \end{aligned}$$

Proposición 1.1.31 *La composición de dos transformadas de Fourier $F_{z,w}^{\lambda}F_{x,w}^{\mu}$ da una aplicación $\mathbb{C}$-lineal*

$$F_{z,w}^{\lambda}F_{x,w}^{\mu} : U\left[\left[z,z^{-1},w,w^{-1},x,x^{-1}\right]\right] \to U\left[\left[w,w^{-1}\right]\right]\left[\left[\lambda,\mu\right]\right]$$

y se cumple la relación

$$F_{z,w}^{\lambda}F_{x,w}^{\mu} = F_{x,w}^{\lambda+\mu}F_{z,x}^{\lambda}$$

1.1.5. Distribuciones formales vistas como operadores diferenciales.

Si se prefiere, en vez de hablar de distribuciones formales locales en variables z, w con valores en U, podemos hablar de operadores diferenciales de $U[[w, w^{-1}]]$ a $U[[w, w^{-1}]]$.

Definición 1.1.32 *El* operador diferencial asociado a una distribución formal $a(z, w)$ *es*

$$\left(D_{a(z,w)} f\right)(w) = \mathrm{Res}_z a(z, w) f(z)$$

donde $f(z) \in U[[w, w^{-1}]]$.

Ejercicio 1.1.33 *Compruébese que*

$$\left(D_{\partial_w^k \delta(z,w)}\right) = \partial_w^k,\ k \in \mathbb{Z}_+$$

$$a(z, w) = \sum_k c^k(w) \partial_w^{(k)} \delta(z, w)$$

se convierte entonces en

$$D_{a(z,w)} = \sum_k c^k(w) \partial_w^{(k)}$$

o también en

$$D_{a(z,w)} = \sum_k (-\partial_w)^{(k)} c^k(w)$$

1.1.6. Localidad de distribuciones formales con valores en superálgebras asociativas y de Lie.

Consideraremos ahora distribuciones formales con valores tanto en una superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como en su superálgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$.

Definición 1.1.34 *Dos distribuciones formales $a(z)$ y $b(z)$ con valores en una superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ son* mútuamente locales *si la distribución formal* $[a(z), b(w)] \in \mathfrak{g}[[z, z^{-1}, w, w^{-1}]]$ *es local, es decir, si*

$$(z - w)^N [a(z), b(w)] = 0 \text{ para } N \gg 0 \tag{1.6}$$

Observación 1.1.35 *Obsérvese que derivando con respecto a z a ambos lados del igual en esta expresión y multiplicando por $z - w$ se comprueba que de la localidad mútua de $a(z)$ y $b(z)$ se deduce la de $\partial a(z)$ y $b(z)$.*

Definición 1.1.36 *Dadas dos distribuciones formales $a(z)$ y $b(z)$, definiremos una distribución formal en z y w con coeficientes en $U(\mathfrak{g})$, llamada el* producto normalmente ordenado, *mediante*

$$: a(z) b(w) : \ := a(z)_+ b(w) + p(a, b) b(w) a(z)_-$$

Lema 1.1.37 *Se cumple que*

$$\begin{aligned} a(z)\,b(w) &= \left[a(z)_-, b(w)\right] + \ :a(z)\,b(w): \\ p(a,b)\,b(w)\,a(z) &= -\left[a(z)_+, b(w)\right] + \ :a(z)\,b(w): \end{aligned}$$

Notación 1.1.38 *Con frecuencia en la literatura, en vez de la expresión*

$$a(z)\,b(w) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(i_{z,w} \frac{1}{(z-w)^{j+1}} \right) c^j(w) + :a(z)\,b(w): \tag{1.7}$$

se escribe (abuso de notación)

$$a(z)\,b(w) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{c^j(w)}{(z-w)^{j+1}} + :a(z)\,b(w): \tag{1.8}$$

o se indica tan sólo la parte singular

$$a(z)\,b(w) \sim \sum_{j=0}^{N-1} \frac{c^j(w)}{(z-w)^{j+1}} \tag{1.9}$$

Es costumbre referirse a (1.8) o a (1.9) como la expansión en producto de operadores (OPE).

Definición 1.1.39 *Sea $n \in \mathbb{Z}_+$. El* producto n-ésimo $a(w)_{(n)}\,b(w)$ *en el espacio de distribuciones formales viene dado por la fórmula*

$$a(w)_{(n)}\,b(w) = \mathrm{Res}_z\,[a(z), b(z)]\,(z-w)^n \tag{1.10}$$

Por ello, para dos distribuciones formales locales, la OPE (1.8) puede escribirse también

$$a(z)\,b(w) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{a(w)_{(j)}\,b(w)}{(z-w)^{j+1}} + :a(z)\,b(w): \tag{1.11}$$

o bien

$$[a(z), b(w)] = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \left(a(w)_{(j)}\,b(w) \right) \partial_w^{(j)} \delta(z,w) \tag{1.12}$$

Se obtienen entonces diversas expresiones para la definición de localidad, cuya equivalencia entre sí no es difícil de demostrar.

Teorema 1.1.40 *Cada una de las siguientes propiedades equivale a (1.6)*

1.

$$\left[a\left(z\right),b\left(w\right)\right]=\sum_{j=0}^{N-1}\partial_w^{(j)}\delta\left(z,w\right)c^j\left(w\right) \tag{1.13}$$
$$c^j\left(w\right)\in\mathfrak{g}\left[w,w^{-1}\right]$$

2.

$$\left[a\left(z\right)_-,b\left(w\right)\right]=\sum_{j=0}^{N-1}\left(i_{z,w}\frac{1}{\left(z-w\right)^{j+1}}\right)c^j\left(w\right) \tag{1.14}$$
$$-\left[a\left(z\right)_+,b\left(w\right)\right]=\sum_{j=0}^{N-1}\left(i_{w,z}\frac{1}{\left(z-w\right)^{j+1}}\right)c^j\left(w\right)$$
$$c^j\left(w\right)\in\mathfrak{g}\left[w,w^{-1}\right]$$

3.

$$a\left(z\right)b\left(w\right)=\sum_{j=0}^{N-1}\left(i_{z,w}\frac{1}{\left(z-w\right)^{j+1}}\right)c^j\left(w\right)+\quad :a\left(z\right)b\left(w\right): \tag{1.15}$$
$$p\left(a,b\right)b\left(w\right)a\left(z\right)=\sum_{j=0}^{N-1}\left(i_{w,z}\frac{1}{\left(z-w\right)^{j+1}}\right)c^j\left(w\right)+\quad :a\left(z\right)b\left(w\right): \tag{1.16}$$
$$c^j\left(w\right)\in\mathfrak{g}\left[\left[w,w^{-1}\right]\right]$$

4.
$$\left[a_{(m)},b_{(n)}\right]=\sum_{j=0}^{N-1}\binom{m}{j}c^j_{(m+n-j)},\ m,n\in\mathbb{Z} \tag{loc4}$$

5.
$$\left[a_{(m)},b\left(w\right)\right]=\sum_{j=0}^{N-1}\binom{m}{j}c^j\left(w\right)w^{m-j},\ m\in\mathbb{Z} \tag{1.17}$$

6.

$$\left[a_{(m)},b_{(n)}\right]=\sum_{j=0}^{N-1}p_j\left(m\right)d^j_{m+n},\ m,n\in\mathbb{Z}$$

para ciertos polinomios $p_j\left(x\right)$ y elementos d^j_k de $\mathfrak{g}$

7.

$$a(z)\,b(w) = \left(i_{z,w}\frac{1}{(z-w)^N}\right)c(z,w)$$
$$p(a,b)\,b(w)\,a(z) = \left(i_{w,z}\frac{1}{(z-w)^N}\right)c(z,w)$$

para una distribución formal $c(z,w)$

1.1.7. λ-productos y λ-corchetes

Definición 1.1.41 *Sea U un álgebra (no necesariamente asociativa o de Lie). El λ-*producto *$a(w)_\lambda b(w)$ de dos distribuciones formales con valores en U $a(w)$ y $b(w)$ es la transformada de Fourier formal de $a(z)\,b(w)$*

$$a(w)_\lambda b(w) = F^\lambda_{z,w}(a(z)\,b(w)) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{(n)}\left(a(w)_n b(w)\right) \tag{1.18}$$

Observación 1.1.42 *Entonces, el* producto $n-$ésimo *viene dado por*

$$a(w)_n b(w) = \mathrm{Res}_z (z-w)^n a(z)\,b(w) \tag{1.19}$$

Notación 1.1.43 *Caso de que U sea una (super)álgebra de Lie, usaremos la notación del corchete para el λ-producto, y lo llameremos el λ-*corchete,

$$[a(w)_\lambda b(w)] = F^\lambda_{z,w}([a(z), b(w)]) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{(n)}\left(a(w)_{(n)} b(w)\right) \tag{1.20}$$

Lema 1.1.44 *Se cumplen*

1.

$$F^\lambda_{z,w}F^\mu_{x,w}a(z)\,(b(x)\,c(w)) = a(w)_\lambda\left(b(w)_\mu c(w)\right)$$

2.

$$F^\lambda_{z,w}F^\mu_{x,w}(a(z)\,b(x))\,c(w) = (a(w)_\lambda b(w))_{\lambda+\mu}\,c(w)$$

De las propiedades ya conocidas de la transformada de Fourier formal se deducen las propiedades siguientes:

Proposición 1.1.45

1. Sean $a(w), b(w)$ distribuciones formales con valores en U un álgebra arbitraria. Entonces,

$$\begin{aligned}(\partial_w a(w))_\lambda b(w) &= -\lambda a(w)_\lambda b(w) \\ a(w)_\lambda (\partial_w b(w)) &= (\lambda + \partial_w)(a(w)_\lambda b(w))\end{aligned}$$

y en particular ∂_w es una derivación del λ-producto.

2. Sean $a(w), b(w)$ distribuciones formales con valores en U un álgebra arbitraria, tales que la distribución $a(z)b(w)$ es local. Sea

$$a(w) \circ_\lambda b(w)$$

el λ-producto del álgebra U^{op} (que es U con la multiplicación opuesta $a \circ b = ba$). Entonces,

$$b(w) \circ_\lambda a(w) = a(w)_{-\lambda-\partial_w} b(w)$$

3. Sean $a(w), b(w), c(w)$ distribuciones formales con valores en $\mathfrak{g}$ uns superálgebra de Lie. Entonces

$$\left[a(w)_\lambda \left[b(w)_\mu c(w)\ \right]\right] = \left[[a(w)_\lambda b(w)\ ]_{\lambda+\mu} c(w)\right] + p(a,b)\left[b(w)_\mu\ \ [a(w)_\lambda c(w)\ ]\right]$$

Observación 1.1.46 *Algunas consecuencias de estas propiedades son:*

1. *∂_w es una derivación de todos los n-productos, ya que*

$$\begin{aligned}\partial a(w)_n b(w) &= -n a(w)_{n-1} b(w) \\ a(w)_n \partial b(w) &= \partial(a(w)_n b(w)) + n a(w)_{n-1} b(w)\end{aligned}$$

2. *Si $a(w)$ y $b(w)$ son mútuamente locales,*

$$a(w)_n b(w) = -p(a,b)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+n}\partial_w^{(j)}\left(b(w)_{n+j} a(w)\right)$$

3.

$$a(w)_{(m)}\left(b(w)_{(n)} c(w)\right)$$
$$=$$
$$\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(a(w)_{(j)} b(w)\right)_{(m+n-j)} c(w) + p(a,b)\, b(w)_{(n)}\left(a(w)_{(m)} c(w)\right)$$

Corolario 1.1.47 *Sea $\mathfrak{g}$ una superálgebra de Lie.*

1. Si $a(z)$ y $b(z)$ son distribuciones formales con valores en $\mathfrak{g}$, entonces

$$\left[a_{(0)}, b(z)\right] = 0 \Longleftrightarrow a(z)_{(0)}\, b(z) = 0$$

2. Si $a(z)$ es una distribución formal impar con valores en $\mathfrak{g}$, entonces

$$a_{(0)}^2 = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Res}_z a(z)_{(0)}\, a(z) = 0$$

3. Sea $\mathcal{A}$ un espacio formado por distribuciones formales en w mútuamente locales con valores en $\mathfrak{g}$ que es ∂-invariante y cerrado con respecto a todos los n-productos, $n \in \mathbb{Z}_+$. Entonces, con respecto al 0-producto, ∂A es un ideal bilateral de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}/\partial\mathcal{A}$ es una superálgebra de Lie. Además, el 0-producto define en $\mathcal{A}$ una estructura de $\mathcal{A}/\partial\mathcal{A}$-módulo por la izquierda.

1.1.8. Fórmula de Taylor

Sea una distribución formal $a(z) = \sum\limits_n a_n z^n$. Definiremos una distribución formal en z y w que denotaremos

$$i_{z,w} a(z-w) := \sum_n a_n i_{z,w} (z-w)^n$$

y simplificaremos la notación diciendo que "consideramos la distribución formal $a(z-w)$ en z y w en el dominio $|z| > |w|$".

Proposición 1.1.48 ***(Fórmula de Taylor)*** *Sea $a(z)$ una distribución formal. Entonces en el dominio $|z| > |w|$ se cumple la igualdad de distribuciones formales en z y w*

$$a(z+w) = \sum_{j=0}^{\infty} \partial^{(j)} a(z)\, w^j \tag{1.21}$$

Demostración. Sea $a(z) = \sum\limits_n a_n z^n$, entonces $\partial^{(j)} a(z) = \sum\limits_n \binom{n}{j} a_n z^{n-j}$. Comparamos los coeficientes de a_n en (1.21). Es preciso comprobar que

$$(z+w)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} z^{n-j} w^j$$

cosa que se cumple puesto que éste es el desarrollo del binomio de Newton en el dominio $|z| > |w|$. ∎

Si en el desarrollo anterior substituimos z por w y w por $z-w$, obtenemos el desarrollo de Taylor como igualdad de distribuciones formales en w y en $z-w$ en el dominio $|z-w| < |w|$

$$a(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \partial^{(j)} a(w)\, (z-w)^j$$

Teorema 1.1.49 *Sea $a(z)$ una distribución formal y N un entero no negativo. Se cumple entonces la siguiente igualdad de distribuciones formales en z y en w,*

$$\partial_w^N \delta(z,w)\, a(z) = \partial_w^N \delta(z,w) \sum_{j=0}^{N} \partial^{(j)} a(w)(z-w)^j$$

La demostración consiste en verificar la fórmula para un polinomio de Laurent cualquiera.

$$\mathrm{Res}_z \partial^N \delta(z,w)\, a(z) f(z) = \sum_{j=0}^{N} \partial^{(j)} a(w)\, \mathrm{Res}_z \partial_w^N \delta(z,w)(z-w)^j f(z)$$

En tal caso, integrando por partes N veces se transforma la fórmula en la igualdad

$$\mathrm{Res}_z \delta(z,w)\, \partial^N a(z) f(z) = \sum_{j=0}^{N} \partial^{(j)} a(w)\, \mathrm{Res}_z \delta(z,w) \Big((z-w)^j f(z)\Big)$$

que por la fórmula de Leibniz y por (1.1) corresponde a

$$\partial^N (a(w) f(w)) = \sum_{j=0}^{N} \partial^j a(w) \binom{N}{j} \partial^{N-j} f(w)$$

que se verifica por la regla de Leibniz.

1.2. Campos locales.

1.2.1. Campos y su producto normalmente ordenado

Definición 1.2.1 *Sea $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ un superespacio vectorial, que llamaremos* espacio de estados*. Una distribución formal*

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$$

con valores en el anillo $\mathrm{End}(V)$ *se llama un* campo *si para cada $v \in V$ se cumple que*

$$a_{(n)} v = 0 \text{ para } n \gg 0$$

y por lo tanto $a(z)v$ es siempre una serie de Laurent formal en z.

Lema 1.2.2 *Si $b(w)$ es un campo, entonces en la expansión*

$$[a(z), b(w)] = \sum_{j=0}^{\infty} c^j(w)\, \partial_w^{(j)} \delta(z,w) + b(z,w)^{+(z)}$$

por la fórmula (1.3) todos los coeficientes $c^j(w)$ son también campos

$$c^j(w) = \mathrm{Res}_z [a(z), b(w)] (z-w)^j$$

Definición 1.2.3 *El* producto normalmente ordenado *de dos campos $a(z)$ y $b(z)$ viene dado por*

$$: a(z) b(z) := a(z)_+ b(z) + (-1)^{p(a)p(b)} b(z) a(z)_-$$

Observación 1.2.4 1. *Se tiene que $: a(z) b(z) :$ es una distribución formal bien definida, puesto que*

$$: a(z) b(z) :_{(n)} = \sum_{j=-1}^{-\infty} a_{(j)} b_{(n-j-1)} + (-1)^{p(a)p(b)} \sum_{j=0}^{\infty} b_{(n-j-1)} a_{(j)}$$

cuando las aplicamos a $v \in V$ cualquiera de estas dos sumas infinitas tiene tan solo un número finito de sumandos no nulos.

2. *Nótese que para distribuciones formales cualesquiera tan sólo el producto normalmente ordenado en dos variables está definido de manera general.*

3. *$: a(z) b(z) :$ es un campo también, puesto que dado $v \in V$, $b(z)v$ es una serie formal de Laurent en z, $a(z)_- v$ es un polinomio de Laurent en z, y por tanto $a(z)_+ b(z) v$ y $b(z) a(z)_- v$ son series formales de Laurent en z.*

Observación 1.2.5 *Por lo tanto, el espacio de campos forma un álgebra con respecto al producto normalmente ordenado, que en general no es ni conmutativa ni asociativa. Puede comprobarse que es un* superálgebra pre-Lie *(Radul, ver Kac ([16], p.82) Chapoton ([14])), y por lo tanto $: a(z) b(z) : -p(a,b) : b(z) a(z) :$ es el corchete de una superálgebra de Lie.*

$$: a(z) b(z) :$$

Recordemos que en una preálgebra de Lie con producto $\oslash$ se cumple para elementos cualesquiera que

$$(x \oslash y) \oslash z - x \oslash (y \oslash z) = (x \oslash z) \oslash y - x \oslash (z \oslash y)$$

Sabemos que, en general, para dos distribuciones formales cualesquiera $a(z)$, $b(w)$ podemos definir su (n) producto para $n \in \mathbb{Z}_+$, que la distribución formal

$$a(w)_{(n)} b(w) = \mathrm{Res}_z \left([a(z), b(w)] (z-w)^n \right)$$

Caso de que $a(z)$,$b(w)$ sean campos, recién acabamos de ver que $a(w)_{(n)} b(w)$ también lo será. Lo bueno es que, en caso de los campos, el producto normalmente ordenado nos permitirá también definir un (n)-productos para n negativo:

Definición 1.2.6 *Sean $a(z)$, $b(z)$ campos, sea $n \in \mathbb{Z}_+$. El $(-n-1)$-*producto *de $a(z)$ y $b(z)$ se define como*

$$a(z)_{(-n-1)}\, b(z) =: \partial^{(n)} a(z)\, b(z) :$$

Definición 1.2.7 *Una distribución formal $a(z,w)$ con valores en* $\mathrm{End}(V)$ *es un* campo en z y w *si para cualquier $v \in V$, $a(z,w)\, v \in V[[z,w]][z^{-1},w^{-1}]$. Diremos simplemente entonces que $a(z,w)$ es un campo.*

Se verifica fácilmente que

- si $a(z)$ y $b(w)$ son campos, entonces $:a(z)\, b(w):$ es un campo en z y w.
- las derivadas parciales de campos son campos.
- $a(w,w)$ es un campo en w.

Una consecuencia sencilla de estas propìedades es la siguiente

Proposición 1.2.8 *Sea $a(z,w)$ un campo, y sea N un entero positivo. Entonces existen campos $c^j(w)$ para $0 \leq j \leq n-1$ y un campo $d^N(z,w)$ tales que*

$$a(z,w) = \sum_{j=0}^{N-1} c^j(w)\,(z-w)^j + (z-w)^N d^N(z,w)$$

que quedan determinados de manera única por esta expansión, y que vienen dados por la fórmula

$$c^j(w) = \partial_z^{(j)} a(z,w)\,|_{z=w}$$

Utilizando este desarrollo de Taylor, y las definiciones de (n)-productos que hemos dado se demuestra que se cumple el siguiente:

Teorema 1.2.9 *Sean $a(z)$ y $b(z)$ campos mútuamente locales, y sea N un entero positivo. Entonces existe un campo $d^N(z,w)$ tal que en el dominio $|z| > |w|$ se cumple*

$$a(z)\, b(w) = \sum_{j \geq -N} \frac{a(w)_{(j)}\, b(w)}{(z-w)^j} + (z-w)^N d^N(z,w)$$

para $j \geq -N$ los coeficientes de $(z-w)^{-j-1}$ están determinados de manera única.

Vamos a estudiar ahora el efecto de los campos y de sus productos en ciertos vectores particulares.

Lema 1.2.10 *Dados dos campos con valores en* $\mathrm{End}(V)$, $a(z), b(z)$ *y un vector* $|\mathbf{0}\rangle \in V$ *tal que* $a_{(n)}|\mathbf{0}\rangle = 0$ *y* $b_{(n)}|\mathbf{0}\rangle = 0$ *para* $n \in \mathbb{Z}_+$, *entonces* $\left(a(z)_{(n)} b(z)\right)|\mathbf{0}\rangle$ *es una distribución formal holomorfa con valores en* V *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *cuyo término constante es* $a_{(n)}b_{(-1)}|\mathbf{0}\rangle$.

La demostración es un ejercicio.

Lema 1.2.11 ***(Fórmula de Cauchy para distribuciones formales)****. Sea* $a(z)$ *una distribución formal, sea* $k \in \mathbb{Z}_+$. *Se cumple entonces*

$$\mathrm{Res}_z\left(a(z)\, i_{z,w}\left(\frac{1}{(z-w)^{k+1}}\right)\right) = \partial^{(k)} a(w)_+$$

$$\mathrm{Res}_z\left(a(z)\, i_{w,z}\left(\frac{1}{(z-w)^{k+1}}\right)\right) = -\partial^{(k)} a(w)_-$$

El caso $k = 0$ es obvio y los demás se demuestran derivando k veces a ambos lados.

Usando este elema, en el caso de los campos, es posible dar la siguiente fórmula general para los (n)-productos.

Proposición 1.2.12 *Para todo* $n \in \mathbb{Z}$,

$$a(w)_{(n)} b(w) = Res_z\left(a(z)\, b(w)\, i_{z,w}(z-w)^n - (-1)^{p(a)p(b)}\, b(w)\, a(z)\, i_{w,z}(z-w)^n\right)$$

Lema 1.2.13 ***(de Dong para distribuciones).*** *Sean* $a(z), b(z)$ *y* $c(z)$ *distribuciones formales mútuamente locales. Entonces* $a(z)_{(n)} b(z)$ *y* $c(z)$ *son distribuciones formales mútuamente locales para todo* $n \in \mathbb{Z}_+$.

Lema 1.2.14 ***(de Dong para campos).*** *Sean* $a(z), b(z)$ *y* $c(z)$ *campos mútuamente locales dos a dos.*

1. $a(z)_{(n)} b(z)$ y $c(z)$ son campos mútuamente locales para todo $n \in \mathbb{Z}$.

2. $:a(z)\, b(z):$ y $c(z)$ son campos mutuamente locales.

1.2.2. Álgebras de campos lineales.

Definición 1.2.15 *Sea* $glf(V)$ *el* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial de los campos con valores en* $\mathrm{End}(V)$. $glf(V)$ *es cerrado bajo todas las operaciones* $a(z)_{(n)} b(z)$, $n \in \mathbb{Z}$, *y se le llama* álgebra de campos general lineal.

Definición 1.2.16 *Un subespacio* F *de* $glf(V)$ *que contenga el operador identidad de* V, I_V, *cerrado bajo todos los productos* $a(z)_{(n)} b(z)$, $n \in \mathbb{Z}$ *(y en consecuencia también cerrado bajo* ∂*) se llama un* álgebra de campos lineales, *en la notación de Kac, o una* álgebra de operadores cuánticos *en la de Lian y Zuckerman.*

Lema 1.2.17 *Un subespacio F de $glf(V)$ es un álgebra de campos lineales si y sólo si*

1. $I_V \in F$
2. $\partial F \subseteq F$
3. F es cerrada bajo el producto normalmente ordenado.
4. F es cerrada bajo expansión en producto de operadores, es decir, todos los $c^n(w) = \mathrm{Res}_z a(z,w)(z-w$
   son de F si $a(z,w)$ lo es.

Lema 1.2.18 *Diremos que una colección de campos* genera *un álgebra de campos F si F és el álgebra de campos minimal que contiene dichos campos.*

Definición 1.2.19 *Diremos que un álgebra de campos lineales F es* local *dados dos campos $a(z)$, $b(z) \in F$, éstos son mútuamente locales.*

Corolario 1.2.20 ***(del lema de Dong).*** *Un álgebra de campos lineales generada por una colección de campos mútuamente locales es local.*

Definición 1.2.21 *Sea $F \subseteq glf(V)$ un álgebra de campos lineales. Podemos entonces asociar a cada $\mathbf{a} \in F$ una distribución formal con valores en $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(F)$,*

$$Y(\mathbf{a}, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^{-n-1} \mathbf{a}_{(n)}$$

donde $\mathbf{a} = a(z)$, y para $\mathbf{b} = b(z) \in F$, $\mathbf{a}_{(n)}\mathbf{b} = a(z)_{(n)} b(z) \in F$.

Lema 1.2.22 *Se tiene que*

$$Y(a(w), x) b(w) = \mathrm{Res}_z (a(z) b(w) i_{z,w} \delta(z-w, x) - p(a,b) b(w) a(z) i_{w,z} \delta(z-w, x))$$

Lema 1.2.23 *Si F es un álgebra de campos local, la distribución $Y(a,x)$ es de hecho un campo.*

De la fórmula que acabamos de dar se deduce que:

Proposición 1.2.24 *Sean $a(z), b(z)$ elementos de un álgebra lineal de campos F y sea $N > 0$ tal que $(z-w)^N [a(z), b(w)] = 0$. Entonces,*

$$(x-y)^N [Y(a(w), x), Y(b(w), y)] = 0$$

1.2.3. El teorema de Wick y su generalización no conmutativa.

El producto normalmente ordenado de más de dos campos $a^1(z), \ldots, a^N(z)$ se define inductivamente "de derecha a izquierda"

$$:a^1(z)\ldots a^N(z):=:a^1(z)\cdots:a^{N-1}(z)\,a^N(z):\cdots:$$

y consistirá en una suma de 2^N términos de la forma

$$\pm a^{i_1}(z)_+\,a^{i_2}(z)_+\cdots a^{j_1}(z)_-\,a^{j_2}(z)_-\ldots$$

donde $i_1 < i_2 < \cdots, j_1 > j_2 > \cdots$ es una permutación del conjunto de índices $\{1, \ldots, N\}$. El signo es el de la permutación una vez extraídos los índices correspondientes a campos pares.

Cuando para todo i y j se cumpla que $\left[a^i(z)_\pm, a^j(z)_\pm\right] = 0$, el producto normalmente ordenado será superconmutativo. Notése que sin embargo tampoco entonces será asociativo.

Teorema 1.2.25 ***(de Wick)***. *Sean $a^1(z), \ldots, a^M(z)$ y $b^1(z), \ldots, b^N(z)$ dos colecciones de campos para las que se cumplen*

1. $\left[\left[a^i(z)_-, b^j(w)\right], a^k(z)_\pm\right] = 0$, y $\left[\left[a^i(z)_-, b^j(w)\right], b^k(z)_\pm\right] = 0$, para todo i, j, k.
2. $\left[a^i(z)_\pm, b^j(w)_\pm\right] = 0$ para todo i, j.

Entonces

$$:a^1(z)\ldots a^M(z)::b^1(w)\ldots b^N(w):=$$

$$\sum_{s=0}^{\mathrm{mín}(M,N)}\sum_{\substack{i_1<\ldots<i_s\\ j_1\neq\cdots\neq j_s}}\pm\left[a^{i_1}(z)_-, b^{j_1}(w)\right]\ldots\left[a^{i_s}(z)_-, b^{j_s}(w)\right]:a^1(z)\ldots a^M(z)\,b^1(w)\ldots b^N(w):_{(i_1,\ldots,i_s;j_1,\ldots,j_s)}$$

donde el signo $\pm$ es el de Koszul, y $(i_1, \ldots, i_s; j_1, \ldots, j_s)$ indica que hemos quitado los campos $a^{i_1}(z), \ldots, a^{i_s}(z), b^{j_1}(w)\ldots b^{j_s}(w)$.

Definición. Una colección de campos $\{a^\alpha(z)\}$ se llama una *teoría de campos libres* si todos los campos de la colección son mútuamente locales y todos los coeficientes de las partes singulares de las OPE son múltiplos de la identidad.

Proposición 1.2.26 *Sean $a(w)$, $b(w)$ dos campos cualesquiera, y sea $n \in \mathbb{Z}$. Se cumple que*

1. ∂_w es una derivación de todos los n-productos, ya que

$$\partial a(w)_{(n)}\,b(w) = -na(w)_{(n-1)}\,b(w)$$
$$a(w)_{(n)}\,\partial b(w) = \partial\Big(a(w)_{(n)}\,b(w)\Big) + na(w)_{(n-1)}\,b(w)$$

2. Si $a(w)$ y $b(w)$ son campos mútuamente locales, para todo $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que

$$a(w)_{(n)}\, b(w) = -p(a,b) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+n}\, \partial_w^{(j)} \left(b(w)_{(n+j)}\, a(w)\right)$$

3. Para tres campos cualesquiera $a(w), b(w)$ y $c(w)$, y para $m \in \mathbb{Z}_+$ y $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} & a(w)_{(m)} \left(b(w)_{(n)}\, c(w)\right) \\ & = \\ & \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \left(a(w)_{(j)}\, b(w)\right)_{(m+n-j)} c(w) + p(a,b)\, b(w)_{(n)} \left(a(w)_{(m)}\, c(w)\right) \end{aligned}$$

El caso $n = -1$ da la llamada fórmula de Wick no conmutativa. Esta última fórmula equivale a

$$\begin{aligned} \left[a(w)_\lambda \left(b(w)_{(n)}\, c(w)\right)\right] = & \\ & p(a,b)\, b(w)_{(n)} \left[a(w)_\lambda\, c(w)\right] \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(k)} \left[a(w)_\lambda\, b(w)\right]_{(n+k)} c(w) \end{aligned}$$

que se demuestra utilizando el siguiente

Lema 1.2.27

$$[a(z), b(x)\, c(w)] = [a(z), b(x)]\, c(w) + p(a,b)\, b(x)\, [a(z), c(w)]$$

1.3. Álgebras de vértices.

1.3.1. Definición.

Volvamos a revisar ahora la definición de álgebra de vértices que dimos el primer día.

Definición 1.3.1 *Sea V un superespacio vectorial, es decir, un espacio vectorial dotado de una descomposición en suma directa de dos subespacios, $V_{\overline{0}} + V_{\overline{1}}$, diremos que a tiene paridad $p(a) \in \mathbb{Z}/(2)$ si $a \in V_{\overline{p(a)}}$.*

Un *campo* es una serie de la forma $a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$, donde $a_{(n)} \in \operatorname{End}(V)$, y para cada $v \in V$, $a_{(n)}(v) = 0$ si $n \gg 0$. El campo $a(z)$ tiene paridad $p(a) \in \mathbb{Z}/(2)$ si $a_{(n)} V_\alpha \subset V_{\alpha + p(a)}$, $\alpha \in \mathbb{Z}/(2)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.3.2 *Un* álgebra de vértices *viene dada por los datos siguientes:*

- El espacio de *estados*, un superespacio V.
- El *vector vacío*, un vector $|0\rangle \in V_{\bar{0}}$.
- El *operador de traslación infinitesimal* T
- La *correspondencia estado-campo*, una aplicación lineal entre V y el espacio de campos (que es un subconjunto de $\mathrm{End}\,(V)\,[[z^{\pm 1}]]$), que preserva la paridad,

$$Y: \begin{array}{c} V \rightarrow \mathrm{End}\,(V)\,[[z^{\pm 1}]] \\ a \longmapsto Y\,(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1} \end{array}$$

de manera que se satisfacen los axiomas siguientes,

  - *Vacío*:

$$Y\,(|0\rangle\,, z) = \mathrm{id}_V \tag{1.22}$$
$$Y\,(a,z)\,|0\rangle_{|z=0} = a \tag{1.23}$$
$$T\,|0\rangle{=}0 \tag{1.24}$$

  - *(Co)variancia por traslación*:

$$[T, Y\,(a,z)] = \partial Y\,(a,z) \tag{1.25}$$

  - *Localidad*:

$$(z-w)^N\, Y\,(a,z)\, Y\,(b,w) = (-1)^{p(a)p(b)}\,(z-w)^N\, Y\,(b,w)\, Y\,(a,z) \quad \text{para algún } N \gg 0 \tag{1.26}$$

Los campos $Y\,(a,z)$ son conocidos como *operadores de vértices.*
Con lo que hemos visto hasta ahora puede verificarse ya que se cumple:

Teorema 1.3.3 *Toda álgebra lineal de campos local $F \subseteq glf\,(U)$ es un álgebra de vértices con*

- el vector vacío $|0\rangle = I_U$
- el operador infinitesimal de traslación ∂_z
- los operadores de vértices

$$Y\,(a\,(z)\,, x)\, b\,(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(a\,(z)_{(n)}\, b\,(z)\Big)\, x^{-n-1}$$

Proposición 1.3.4 *En un álgebra de vértices se cumplen, para todo $a, b \in V$ y $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{aligned} Y(a,z)|0\rangle &= e^{zT}(a) \\ e^{zT} Y(a,w) e^{-zT} &= Y(a, z+w), \text{ si } |z| < |w| \\ e^{zT} Y(a,w)_{\pm} e^{-zT} &= Y(a, z+w)_{\pm}, \text{ si } |z| < |w| \\ Y\left(a_{(n)}b, z\right)|0\rangle &= \Big(Y(a,z)_{(n)} Y(b,z)\Big)|0\rangle \end{aligned} \tag{1.27}$$

Proposición 1.3.5 ***(Antisimetría).***

En un álgebra de vértices se cumple, para todo $a, b \in V$

$$Y(a,z)b = (-1)^{p(a)p(b)} e^{zT} Y(b,-z)a \tag{1.28}$$

Se demuestra usando localidad, evaluando en el vacío y usando las propiedades exponenciales.

Comparando coeficientes en (1.28) se obtiene la fórmula de Borcherds original para la antisimetría: para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$a_{(n)}b = -p(a,b) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+n} T^{(j)} \left(b_{(n+j)}a\right)$$

Teorema 1.3.6 ***(de unicidad de Goddard).*** *Sea V un álgebra de vértices y sea $B(z)$ un campo con valores en $\mathrm{End}(V)$ que sea mútuamente local con todos los campos $Y(a,z)$, $a \in V$. Supongamos que para algún $b \in V$*

$$B(z)|0\rangle = e^{zT} b$$

Entonces,

$$B(z) = Y(b,z)$$

La demostración usa una vez más la definición de localidad, evaluando en el vacío y usando las propiedades exponenciales. De este teorema se deduce la siguiente proposición, aplicando el lema de Dong.

Proposición 1.3.7 *En un álgebra de vértices se cumple, para todo $a, b \in V$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$*

$$Y\left(a_{(n)}b, z\right) = Y(a,z)_{(n)} Y(b,z)$$

De esta proposición puede deducirse

Proposición 1.3.8 *Dada una colección de vectores $a^1, \ldots, a^n \in V$ y una colección $j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{Z}_+$, y elementos $a, b \in V$, $n \in \mathbb{Z}_+$ se cumple que*

1. $: \partial^{(j_1-1)} Y\left(a^1, z\right) \ldots \partial^{(j_n-1)} Y\left(a^n, z\right) := Y\left(a^1_{(-j_1)} \ldots a^n_{(-j_n)} \left|0\right\rangle, z\right)$

2. $: \partial^{(n)} Y\left(a, z\right) Y\left(b, z\right) :=: Y\left(a_{(-n-1)} b, z\right)$

3. $Y\left(Ta, z\right) = \partial Y\left(a, z\right)$

Teorema 1.3.9 ***(de existencia)*** *Sea V un superespacio vectorial, $\left|0\right\rangle$ un vector par de V, y T un endomorfismo par de V. Sea $\left\{a^\alpha\left(z\right)\right\}_{\alpha \in A}$, donde A es un conjunto de índices, una colección de campos tales que*

1. $\left[T, a^\alpha\left(z\right)\right] = \partial a^\alpha\left(z\right)$, $\left(\alpha \in A\right)$

2. $T\left|0\right\rangle = 0$, $a^\alpha\left(z\right)\left|0\right\rangle|_{z=0} = a^\alpha$, $\left(\alpha \in A\right)$

3. la aplicación lineal

$$\sum_\alpha \mathbb{C} a^\alpha\left(z\right) \to \sum_\alpha \mathbb{C} a^\alpha$$
$$a^\alpha\left(z\right) \longmapsto a^\alpha$$

   es inyectiva,

4. $a^\alpha\left(z\right)$, $a^\beta\left(z\right)$ $\left(\alpha, \beta \in A\right)$ son mútuamente locales,

5. los vectores
$$a^{\alpha_1}_{(j_1)} \ldots a^{\alpha_n}_{(j_n)} \left|0\right\rangle, \ j_s \in \mathbb{Z}, \alpha_s \in A$$
   generan V (se dice entonces que los campos $a^\alpha\left(z\right)$ $\left(\alpha \in A\right)$ forman un *conjunto de campos generador* de V, que será *fuertemente generador* si basta con tomar los $j_s < 0$).

Entonces la fórmula

$$Y\left(a^{\alpha_1}_{(j_1)} \ldots a^{\alpha_n}_{(j_n)} \left|0\right\rangle, z\right) = a^{\alpha_1}_{(j_1)}\left(z\right)\left(\ldots\left(a^{\alpha_n}_{(j_n)}\left(z\right)\left(I_V\right)\right)\right)$$

define una única estructura de álgebra de vértices en V tal que $\left|0\right\rangle$ es el vector vacío, T es el operador de traslación infinitesimal, y

$$Y\left(a^\alpha, z\right) = a^\alpha\left(z\right), \ \alpha \in A$$

1.3.2. Fórmula de expansión en producto de operadores de Borcherds.

Teorema 1.3.10 *En el dominio $|z| > |w|$ se cumple que para cualesquiera $a, b \in V$*

$$Y(a,z)\,Y(b,w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y\left(a_{(n)}b, w\right)}{(z-w)^{n+1}} + :Y(a,z)\,Y(b,w):$$

o, equivalentemente

$$[Y(a,z)\,, Y(b,w)] = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} Y(a,w)_{(n)}\,Y(b,w)\,\partial_w^{(n)}\delta(z,w)$$

...

Estas fórmulas son a su vez equivalentes a las fórmulas de conmutadores de Borcherds ($m, n \in \mathbb{Z}$):

1. $\left[a_{(m)}, b_{(n)}\right] = \sum_{j\geq 0} \binom{m}{j} \left(a_{(j)}b\right)_{(m+n-j)}$
2. $\left[a_{(m)}, Y(b,z)\right] = \sum_{j\geq 0} \binom{m}{j} Y\left(a_{(j)}b, z\right) z^{m-j}$

Teorema 1.3.11 ***(Identidad de Borcherds).*** *Sea $F(z,w)$ una función racional en z y w cuyos polos se dan sólo en $z=0$, $w=0$ y $z=w$. Sean $a, b \in V$ elementos cualesquiera de un álgebra de vértices V. Se cumple entonces que*

$$\mathrm{Res}_{z-w}\left(Y\left(Y(a,z-w)\,b,w\right) i_{w,z-w}F(z,w)\right) \tag{1.29}$$

$$= \mathrm{Res}_z\left(Y(a,z)\,Y(b,w)\,i_{z,w}F(z,w) - p(a,b)\,Y(b,w)\,Y(a,z)\,i_{w,z}F(z,w)\right) \tag{1.30}$$

Para demostrarlo, basta con ver si (1.29) se cumple para las funciones de la forma

$$F(z,w) = z^m (z-w)^n w^l, \quad m, n, l \in \mathbb{Z}$$

El cálculo de ambos lados de (1.29) dice que equivaldría a la igualdad siguiente multiplicada por w^l

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} Y\left(a_{(j)}b, w\right) w^{m-j}$$

$$=^?$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j} a_{(m+n-j)} Y(b,w)\,w^j - p(a,b) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{n+j} \binom{n}{j} Y(b,w)\,a_{(m+j)} w^{n-j}$$

Ésta sería la igualdad correspondiente a $F(z,w) = z^m (z-w)^n$. Es decir, la igualdad de Borcherds se cumplirá para $F(z,w)$ si y sólo si se cumple para $w^l F(z,w)$ para todo $l \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, basta con demostrar la fórmula para los casos

1. $F(z,w) = z^m$, $m \in \mathbb{Z}$, y en este caso la fórmula es la segunda fórmula de conmutación de Borcherds,
2. $F(z,w) = (z-w)^{-n-1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, y en este caso la fórmula es la segunda fórmula del corolario de derivaciones.

Proposición 1.3.12 ***(Presentación de Borcherds de un álgebra de vértices).***

1. La identidad de Borcherds equivale a las siguientes tres identidades:

   a) *conmutador*
   $$\left[a_{(m)}, Y(b,z)\right] = \sum_{j \geq 0} \binom{m}{j} Y\left(a_{(j)}b, z\right) z^{m-j}$$

   b) *producto normalmente ordenado*
   $$: Y(a,z) Y(b,z) := Y\left(a_{(-1)}b, z\right)$$

   c) *derivada*
   $$\partial Y(a,z) = Y(Ta, z)$$

2. El siguiente conjunto de *axiomas de Borcherds* es equivalente al conjunto de axiomas de un álgebra de vértices:

   a) *vacío parcial*
   $$\begin{aligned} Y(|0\rangle, z) &= I \\ a_{(-1)}|0\rangle &= a \end{aligned}$$

   b) *identidad de Borcherds*
   $$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} \left(a_{(n+j)}b\right)_{(m+k-j)} c \\ &= \\ &\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j} a_{(m+n-j)} \left(b_{(k+j)}c\right) \\ &- p(a,b) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+n} \binom{n}{j} b_{(n+k-j)} \left(a_{(m+j)}c\right) \end{aligned}$$
   $k, m, n \in \mathbb{Z}$

1.3.3. Peso conforme.

Definición 1.3.13 *Sea U un álgebra asociativa. Un* hamiltoniano H *de* U *es una derivación diagonalizable de* U*.*

Sea H un hamiltoniano de U. Entonces, definimos la acción de H sobre las distribuciones con valores en U coeficiente a coeficiente.

Definición 1.3.14 *Una distribución formal con valores en U se llama una* distribución propia *de H de peso conforme $\Delta \in \mathbb{C}$ si*

$$(H - \Delta - z\partial_z - w\partial_w - \dots)\, a = 0$$

Diremos entonces que

$$\mathrm{cw}\,(a) = 0$$

Proposición 1.3.15 ***(Propiedades de los pesos conformes).*** *Sean a, b distribuciones propias tales que*

$$\mathrm{cw}\,(a) = \Delta,\ \mathrm{cw}\,(b) = \Delta'$$

Entonces, $\partial_z a$, $:a(z)\, b(z):$, $a(w)_{(n)}\, b(w)$, $f(z, w, \dots)\, a(z)$ son también distribuciones propias (donde f es una función homogénea de grado j, y $n \in \mathbb{Z}_+$) cuyos pesos conformes son

$$\begin{aligned}
\mathrm{cw}\,(\partial_z a) &= \Delta + 1 \\
\mathrm{cw}\,(:a(z)\, b(z):) &= \Delta + \Delta' \\
\mathrm{cw}\left(a(w)_{(n)}\, b(w)\right) &= \Delta + \Delta' - n - 1 \\
\mathrm{cw}\,(f(z, w, \dots)\, a(z)) &= \Delta - j
\end{aligned}$$

y en la OPE

$$a(z)\, b(w) \sim \sum_{j=0}^{N-1} \frac{c^j(w)}{(z - w)^{j+1}}$$

todos los sumandos tienen peso conforme $\Delta + \Delta'$.

Notación 1.3.16 *Sea $a(z)$ una distribución propia para un hamiltoniano H, de peso conforme Δ. La escribiremos entonces*

$$a(z) = \sum_{m \in -\Delta + \mathbb{Z}} a_m z^{-m-\Delta}$$

Si el peso conforme es entero, y comparamos esta expresión con la que hemos usado hasta ahora para una distribución en general

$$a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$$

observamos que, de

$$\begin{aligned} -n-1 &= -m-\Delta \\ n &= -1+m+\Delta \\ m &= n-\Delta+1 \end{aligned}$$

se tiene que

$$a_{(n)} = a_{(m+\Delta-1)} = a_m = a_{n-\Delta+1}$$

Como se cumple que

$$(H-\Delta-z\partial_z)\, a(z) = 0$$

se verifica que

$$Ha_m = -ma_m$$

*Es decir, a_m es un autovector de H, cuyo valor propio es $-m$. Entonces, las fórmulas de (**??**) se escriben*

$$[a_m, b_n] = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{m+\Delta-1}{j} c^j_{m+n},\ m,n \in \mathbb{Z} \tag{1.31}$$

$$[a_m, b(z)] = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{m+\Delta-1}{j} c^j(z)\, z^{m+\Delta-j-1},\ m \in \mathbb{Z} \tag{1.32}$$

Proposición 1.3.17 ***Observación 1.3.18*** *En muchos casos de interés, resulta que en cualquier caso los pesos conformes $\Delta \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$, y $\Delta = 0$ si y solo si $a(z) = C$ una constante que conmuta con todo.*

1.4. Ejemplos.

1.4.1. Álgebras generadas por distribuciones formales locales.

Álgebras de corrientes.

Álgebra de osciladores $\mathfrak{s}$.

Definición 1.4.1 *Sea $\mathfrak{s}$ el álgebra de Lie cuya base es $\{\alpha_n, n \in \mathbb{Z}, K\}$, definida por*

$$\begin{aligned} [\alpha_m, \alpha_n] &= m\delta_{m.-n}K \\ [K, \alpha_m] &= 0 \end{aligned}$$

El bosón libre *es la distribución formal (par) con valores en $\mathfrak{s}$*

$$\alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\infty} \alpha_n z^{-n-1}$$

Se verifica fácilmente que

$$[\alpha(z), \alpha(w)] = \partial_w \delta(z,w) K$$

*y esto equivale a decir que la distribución $\alpha(z)$ es (*auto)local *y su OPE, considerada como distribución con valores en $U(\mathfrak{s})$ es*

$$\alpha(z)\alpha(w) \sim \frac{K}{(z-w)^2}$$

Definición 1.4.2 *Sea $\mathfrak{g}$ un superálgebra de Lie dotada de una forma bilineal supersimétrica invariante, es decir, una forma bilineal*

$$(.|.) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$$

tal que

1. $([a,b]|c) = (a|[b,c]),\ a,b,c \in \mathfrak{g}$
2. $(a|b) = (-1)^{p(a)p(b)}(b|a)$

Definición 1.4.3 *El* álgebra de lazos *asociada a $\mathfrak{g}$ es la superálgebra de Lie*

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}\left[t, t^{-1}\right] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}\left[t, t^{-1}\right]$$

donde la estructura de superálgebra de Lie viene determinada por

1. $p(t) = \bar{0}$.
2. $[a_m, b_n] = [a,b]_{m+n},\ m,n \in \mathbb{Z}, a,b \in \mathfrak{g}, a_m := a \otimes t^m$.

Definición 1.4.4 *El* álgebra de corrientes $\widehat{\mathfrak{g}}$ *es la* afinización del par $(\mathfrak{g}, (.|.))$*, es decir, la extensión central del álgebra de lazos $\widetilde{\mathfrak{g}}$ por el centro unidimensional $\mathbb{C}K$*

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \widetilde{\mathfrak{g}} + \mathbb{C}K$$

dada por las relaciones de conmutación, $m,n \in \mathbb{Z}, a,b \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} [a_m, b_n] &= [a,b]_{m+n} + m(a|b)\delta_{m,-n}K \\ [K, \mathfrak{g}] &= 0 \end{aligned}$$

Definición 1.4.5 *Una* corriente $a(z)$ *es una distribución formal con valores en $\widehat{\mathfrak{g}}$*

$$a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}}^{\infty} a_n z^{-n-1},\ a \in \mathfrak{g}$$

Se comprueba que

$$[a(z), b(w)] = \delta(z,w)[a,b](w) + \partial_w \delta(z,w)(a|b)K,\ a,b \in \mathfrak{g}$$

y esto equivale a decir que las distribuciones $a(z)$ son mútuamente locales, y su OPE, considerada como distribución con valores en $U(\widehat{\mathfrak{g}})$ es

$$a(z)b(w) \sim \frac{[a,b](w)}{(z-w)} + \frac{(a|b)K}{(z-w)^2}$$

Para este álgebra podemos tomar el hamiltoniano

$$H = -t\partial_t$$

Entonces

$$\mathrm{cw}(a) = 1$$

Definición 1.4.6 *La* superálgebra de supercorrientes $\widehat{\mathfrak{g}}$ *es la* superafinización del par $(\mathfrak{g}, (.|.))$, *es decir, la extensión central del álgebra de lazos $\widetilde{\mathfrak{g}}$ por el centro unidimensional $\mathbb{C}K$*

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{super} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}\left[t, t^{-1}, \theta\right] + \mathbb{C}K$$

donde $\theta^2 = 0$, $p(\theta) = 1$ y tal que sus distribuciones formales asociadas, las supercorrientes, *vienen dadas por*

$$\bar{a}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\infty} a_{n+\frac{1}{2}} z^{-n-1},\ a \in \mathfrak{g},\ a_{n+\frac{1}{2}} = a \otimes t^n \theta$$

de manera que las supercorrientes son locales con respecto a las corrientes, y a las OPE anteriores para las corrientes se les añaden

$$a(z)\bar{b}(w) \sim \frac{\overline{[a,b]}(w)}{(z-w)}$$
$$\bar{a}(z)\bar{b}(w) \sim \frac{(b|a)K}{(z-w)}$$

así que las supercorrientes son también locales entre sí. Para esta álgebra podemos tomar el hamiltoniano

$$H = -t\partial_t - \frac{1}{2}\theta\partial_\theta$$

Entonces

$$\mathrm{cw}(\bar{a}) = \frac{1}{2}$$

Las supercorrientes forman una subálgebra cerrada bajo OPE. Existe otra manera de construirlas.

Definición 1.4.7 *Sea A un superespacio vectorial dotado de una forma bilineal super-antisimétrica*

$$(\varphi|\psi) = (-1)^{p(\varphi)p(\psi)}(\psi|\varphi)$$

La afinización de Clifford $(A, (.|.))$ *es la superálgebra de Lie*

$$C_A = A \otimes \mathbb{C}\left[t, t^{-1}\right] + \mathbb{C}K$$

dada por las relaciones de conmutación, $m, n \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}, \varphi, \psi \in A$

$$\begin{aligned}[]
[\varphi_m, \psi_n] &= (\varphi|\psi)\,\delta_{m,-n}K \\
[C_A, K] &= 0
\end{aligned}$$

donde $\varphi_m = \varphi \otimes t^{m-\frac{1}{2}}$. Las distribuciones formales

$$\varphi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\infty} \varphi_{n+\frac{1}{2}} z^{-n-1},\ a \in \mathfrak{g},\ a_{n+\frac{1}{2}} = a \otimes t^n \theta$$

son locales entre sí y sus OPEs con valores en $U(C_A)$ son

$$\varphi(z)\,\psi(w) \sim \frac{(\varphi|\psi)\,K}{(z-w)}$$

Ejemplo 1.4.8 *Si $A = \mathbb{C}\langle\varphi\rangle$, con $p(\varphi) = 1$, y $(\varphi|\varphi) = 1$, y $K = 1$ entonces C_A es el álgebra con $\left\{\varphi_n, n \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right\}$, donde*

$$\varphi_m\varphi_n + \varphi_n\varphi_m = \delta_{m,-n},\ m, n \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$$

Definición 1.4.9 *La distribución formal*

$$\varphi(z) = \sum_{n\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}^{\infty} \varphi_n z^{-n-\frac{1}{2}}$$

se llama un fermión libre neutro, *con OPE*

$$\varphi(z)\,\varphi(w) \sim \frac{1}{(z-w)}$$

Ejemplo. Si $A = \mathbb{C}\langle\varphi^+, \varphi^-\rangle$, con $p(\varphi^+) = p(\varphi^-) = 1$, $K = 1$ y

$$\left(\varphi^+|\varphi^+\right) = 1, \left(\varphi^+|\varphi^-\right) = 0, \left(\varphi^-|\varphi^-\right) = 1$$

entonces C_A es el álgebra con $\left\{\varphi_n^+, \varphi_m^-, n, m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z},\right\}$, donde

$$\begin{aligned}
&\varphi_m^\pm\varphi_n^\mp + \varphi_n^\mp\varphi_m^\pm = \delta_{m,-n}, \\
&\varphi_m^\pm\varphi_n^\pm + \varphi_n^\mp\varphi_m^\mp = 0,\ m, n \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Definición 1.4.10 *Las distribuciones formales*

$$\varphi^{+}(z)=\sum_{n\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}^{\infty}\varphi_n^{+}z^{-n-\frac{1}{2}},\ \varphi^{-}(z)=\sum_{n\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}}^{\infty}\varphi_n^{-}z^{-n-\frac{1}{2}}$$

se llaman fermiones cargados libres*, con OPE*

$$\begin{aligned}\varphi^{\pm}(z)\,\varphi^{\mp}(w)&\sim\frac{1}{(z-w)}\\ \varphi^{\pm}(z)\,\varphi^{\pm}(w)&\sim 0\end{aligned}$$

Álgebra de Virasoro.

Consideremos una distribución propia L, con $\mathrm{cw}(L)=2$

$$L(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\infty}L_n z^{-n-2}$$

con OPE de la forma

$$L(z)\,L(w)=\frac{\frac{1}{2}C}{(z-w)^4}+\frac{a(w)}{(z-w)^3}+\frac{2b(w)}{(z-w)^2}+\frac{c(w)}{(z-w)}$$

donde C es una distribución formal constante. Entonces, puede verse que en realidad la expresión es de la forma

$$L(z)\,L(w)=\frac{\frac{1}{2}C}{(z-w)^4}+\frac{2b(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial b(w)}{(z-w)}$$

Y si además

$$\begin{aligned}[][C,L(z)]&=0\\ [L_{-1},L(z)]&=\partial L(z)\\ [L_0,L(z)]&=(z\partial+2)\,\partial L(z)\end{aligned}$$

entonces

$$L(z)\,L(w)=\frac{\frac{1}{2}C}{(z-w)^4}+\frac{2L(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial L(w)}{(z-w)}$$

que equivale al *álgebra de Virasoro* Vir

$$\begin{aligned}[][L_m,L_n]&=(m-n)\,L_{m+n}+\frac{m^3-m}{12}\delta_{m,-n}C\\ [C,L_m]&=0\end{aligned}$$

y L se llama entonces una *distribución de Virasoro con carga central C.*

Superálgebras de Lie de distribuciones formales

Definición 1.4.11 *Una superálgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *se llama una* superálgebra de Lie de distribuciones formales $(\mathfrak{g}, \mathcal{F})$ *si está generada sobre* $\mathbb{C}$ *por los coeficientes de una familia* $\mathcal{F}$ *de distribuciones formales sobre* $\mathfrak{g}$ *locales entre sí.*

Las superálgebras de Lie de distribuciones formales forman una categoría cuyos objetos son los pares $(\mathfrak{g}, \mathcal{F})$ y cuyos morfismos entre objetos $(\mathfrak{g}, \mathcal{F})$ y $(\mathfrak{g}', \mathcal{F}')$ son los homomorfismos de superálgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ tales que $\varphi(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}'$.

Ejemplo 1.4.12

1. Vir, con $\mathcal{F} = \{L(z), C\}$
2. $\widehat{\mathfrak{g}}$, con $\mathcal{F} = \{a(z), a \in \mathfrak{g}, K\}$

1.4.2. Representaciones por campos.

Construcción de representaciones por campos mediante módulos inducidos.

Definición 1.4.13 *Sea* $(\mathfrak{g}, \mathcal{F})$ *una superálgebra de Lie de distribuciones formales locales, con* $\mathcal{F} = \{a^\alpha(z), \alpha \in A\}$*, para un conjunto de índices* A*. Una representación de* $\mathfrak{g}$ *en un espacio vectorial* V *se llama una* representación por campos *si todos los* $a^\alpha(z)$ *están representados por campos, es decir,*

$$\forall v \in V, a \in A,\ a^\alpha_{(n)}(v) = 0 \text{ para } n \gg 0$$

Estos campos generan entonces un álgebra de campos lineales local, como consecuencia del Lema de Dong.

Definición 1.4.14 *Sea* $\mathfrak{g}$ *una superálgebra de Lie y sea* π *una representación de su subálgebra* $\mathfrak{p}$ *en un espacio vectorial* W*. El* $\mathfrak{g}$-módulo inducido *es el espacio vectorial*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}}\pi &:= U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} W \\ &= (U(\mathfrak{g}) \otimes W) / U(\mathfrak{g}) \langle p \otimes w - 1 \otimes \pi(p) w | p \in \mathfrak{p}, w \in W \rangle\end{aligned}$$

Aquí $g \in \mathfrak{g}$ *actúa por multiplicación en el primer factor.*

Definición 1.4.15 *Sea* $\partial = \partial_z$*. Las distribuciones formales con valores en* $\mathfrak{g}$*,* $fd(\mathfrak{g})$ *son un* $\mathbb{C}[\partial]$*-módulo. Supongamos que el* $\mathbb{C}[\partial]$*-módulo generado por* $\mathcal{F} = \{a^\alpha(z), \alpha \in A\}$ *es cerrado bajo los* (n)*-productos para* $n \in \mathbb{Z}_+$ *(veremos después que esto es razonable como consecuencia del teorema de existencia). Llamamos la* subálgebra de aniquilación de $\mathfrak{g}$ *a*

$$\mathfrak{g}_- = \mathbb{C}\left\langle \left\{ a^\alpha_{(n)}, \alpha \in A, n \in \mathbb{Z}_+ \right\} \right\rangle$$

(podemos comprobar que $\mathfrak{g}_-$ *es una subálgebra utilizando (**??**), puesto que se cumple que (1.13)).*

Sea π una representación de $\mathfrak{g}_-$ en un espacio vectorial W tal que para todo $w \in W$,

$$\pi\left(a^\alpha_{(n)}\right)(w) = 0,\ n \gg 0$$

Entonces $\mathrm{Ind}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{g}_-}\pi$ es una representación por campos. Puede comprobarse que, en este caso, utilizando (**??**) nuevamente, que

$$a^\alpha_{(n)}\left(\left(a^{\alpha_1}_{(n_1)}\dots a^{\alpha_r}_{(n_r)}\right)w\right) = 0,\ n \gg 0$$

Definición 1.4.16 *Si $\mathfrak{g}$ tiene un hamiltoniano H, de manera que*

$$H\left(a^\alpha(z)\right) = \left(z\partial_z + \Delta_\alpha\right)a^\alpha(z)$$

para todo $\alpha \in A$, con $\Delta_\alpha \in \mathbb{R}$ decimos que $\mathfrak{g}$ es (conformemente) graduada*. $a^\alpha(z)$ es un autovector de $(H - z\partial_z)$ de valor propio Δ_α, diremos entonces que*

$$\mathrm{cw}\left(a^\alpha(z)\right) = \Delta_\alpha$$

y escribiremos

$$a^\alpha(z) = \sum_{n\in\Delta_\alpha+\mathbb{Z}}^{\infty} a^\alpha_n z^{-n-\Delta_\alpha} \tag{1.33}$$

de manera que

$$Ha^\alpha_n = -na^\alpha_n$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \oplus_n \mathfrak{g}_n \\ [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_m] &\subseteq \mathfrak{g}_{n+m} \\ \mathfrak{g}^{\geq 0} &= \oplus_{n\geq 0}\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}^{>0} = \oplus_{n>0}\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}^{<} = \oplus_{n<0}\mathfrak{g}_n \\ \mathfrak{g} &= \mathfrak{g}^{>0} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}^{<0} \end{aligned} \tag{1.34}$$

es la descomposición triangular*. Vemos (1.34) como consecuencia de (1.33).*

Definición 1.4.17 *Una representación π de $\mathfrak{g}$ en V se llamará* acotada *si $\mathfrak{g}^{<0}$ actúa nilpotentemente en V. El $\mathfrak{g}$-módulo V será graduado si $V = \oplus_j V_j$, con $\mathfrak{g}_n V_j \subseteq V_{j+n}$.*

Definición 1.4.18 *Dada una representación π de $\mathfrak{g}_0$, extiéndase a $\mathfrak{g}^{\geq 0}$ poniendo $\pi\left(\mathfrak{g}^{>0}\right) = 0$. Sea entonces la representación acotada*

$$\widetilde{V}(\pi) = \mathrm{Ind}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{g}^{\geq 0}}(\pi)$$

y el módulo $\widetilde{V}(\pi)$ se llama el módulo de Verma *de π, cuya graduación viene inducida por (1.34).*

$$\widetilde{V}(\pi) = \oplus_n \widetilde{V}(\pi)_n$$

con π la representación de $\mathfrak{g}_0$ en $\widetilde{V}(\pi)_n$.

Sea $J(\pi) =$ suma de todos los $\mathfrak{g}$ -submódulos contenidos en $\oplus_{n>0}\widetilde{V}(\pi)_n$. $J(\pi)$ es un $\mathfrak{g}$ -submódulo graduado. Entonces,

$$V(\pi) = \widetilde{V}(\pi)/J(\pi)$$

es un submódulo graduado.

Definición 1.4.19 *Sea V un $\mathfrak{g}$ -módulo. $v \in V$ se llama* singular *si* $\mathfrak{g}^{>0}v = 0$.

Se tiene que un $\mathfrak{g}$ -módulo graduado es irreducible si todos sus vectores singulares tienen grado mínimo d y la representación de $\mathfrak{g}_0$ en V_d lo es, y hay una biyección entre las clases de isomorfismo de $\mathfrak{g}_0$-módulos irreducibles y las clases de isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos acotados módulo suspensión.

Superbosones libres.

Sea $\mathfrak{h}$ un superespacio vectorial de dimensión finita dotado de una forma bilineal simétrica no degenerada $(.|.)$. Consideramos $\mathfrak{h}$ como superálgebra de Lie conmutativa y consideramos su afinización.

$$\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}\left[t, t^{-1}\right] + \mathbb{C}K$$

que llameremos la *afinización de Weyl de* $\mathfrak{h}$, dada por las relaciones de conmutación, $m, n \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} [a_m, b_n] &= m\,(a|b)\,\delta_{m,-n}K,\ a_m = at^m \\ [K, \mathfrak{h}] &= 0 \end{aligned}$$

Sus corrientes

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\infty} a_n z^{-n-1},\ \ a \in \mathfrak{h}$$

son mútuamente locales, con OPEs

$$a(z)\,b(w) \sim \frac{(a|b)\,K}{(z-w)^2} \tag{1.35}$$

Consideremos una representación π de $\widehat{\mathfrak{h}}$ en un superespacio V. Entonces se obtiene así un conjunto de campos locales entre sí con OPEs 1.35, que llamaremos *sistema de bosones libres*. Caso de que $\widehat{\mathfrak{h}} = \widehat{\mathfrak{h}}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{h}}_1$, con $\widehat{\mathfrak{h}}_1 \neq 0$.

Lema 1.4.20 *Los sistemas de bosones libres satisfacen las condiciones del teorema de Wick.*

Sean $\{a^i\}$ y $\{b^i\}$ bases *duales* de $\mathfrak{h}$ como superespacio vectorial (teniendo en cuenta la $\mathbb{Z}/(2)\,\mathbb{Z}$ graduación), es decir, tales que

$$\left(b^i|a^j\right) = \delta_{i,j}$$

Las expresiones de un elemento cualquiera $h \in \mathfrak{h}$ en dichas bases serán

$$h = \sum_i \left(b^i|h\right) a^i = \sum_i \left(h|a^i\right) b^i \tag{1.36}$$

Definición 1.4.21 *S viene definida por*

$$S(z) = \frac{1}{2}\sum_i : a^i(z)\, b^i(z) : \tag{1.37}$$

Lema 1.4.22

$$\begin{aligned} S(z)\, a(w) &\sim \frac{a(z)}{(z-w)^2} K \\ &\sim \frac{a(w)}{(z-w)^2} K + \frac{\partial a(w)}{(z-w)} K \end{aligned}$$

Definición 1.4.23 *Sea $K = kI_V$, $k \neq 0$. Diremos que k es la* carga central afín.

Definición 1.4.24 *El* campo de Virasoro

$$L(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$$

viene dado por

$$L(z) = \frac{1}{k} S(z)$$

Lema 1.4.25 *Sea $a \in \mathfrak{h}$, entonces,*

$$\begin{aligned} L(z)\, a(w) &\sim \frac{a(z)}{(z-w)^2} \\ &\sim \frac{a(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial a(w)}{(z-w)} \end{aligned}$$

y

$$[L_m, a_n] = -na_{n+m},\ m, n \in \mathbb{Z}$$

1.5. Complejo de De Rham quiral.

1.5.1. Sistema $bc - \beta\gamma$.

El álgebra de vértices de Heisenberg.

Se fija un entero $N > 0$. Sea H_N el álgebra de Lie cuya base como espacio vectorial viene dada por los elementos pares

$$\begin{gathered} a_n^i, b_n^i,\ i = 1, \dots, N; n \in \mathbb{Z} \\ C \end{gathered}$$

con los corchetes siguientes

$$\left[a_m^j, b_n^i\right] = \delta_{i,j}\delta_{m,-n}C$$

y los restantes corchetes cero.

Se obtendrá un álgebra de vértices con $\mathbb{Z}/(2)$-graduación trivial (es decir, totalmente par), V_N, que como espacio vectorial será la *representación del vacío* de H_N. Como H_N-módulo, viene generada por un vector $|0\rangle$, sujeto a las relaciones

$$\begin{aligned} b_n^i\,|0\rangle &= 0 \text{ si } n > 0, \\ a_m^i\,|0\rangle &= 0 \text{ si } m \geq 0, \\ C\,|0\rangle &= |0\rangle \end{aligned}$$

Se identificará V_N con el anillo conmutativo de polinomios en las variables a_m^j, b_n^i, $n \leq 0$, $m < 0$, $i, j = 1, \dots, N$ vía la aplicación

$$P\left(b_n^i, a_m^j\right) \longmapsto P\left(b_n^i, a_m^j\right)|0\rangle$$

y con $|0\rangle$ como su vector vacío. Los campos correspondientes a los elementos de V_N serán definidos por inducción sobre el grado de los monomios. Para monomios de grado 1, los campos se definen de la manera siguiente:

$$b_0^i(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n^i z^{-n},\ i = 1, \dots, N \tag{1.38}$$

$$a_{-1}^j(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^j z^{-n-1},\ j = 1, \dots, N \tag{1.39}$$

donde b_n^i, a_n^j en el lado derecho de la igualdad son considerados como operadores sobre V_N vía multiplicación. Se tiene, entonces, para $n > 0$,

$$\begin{aligned} b_{-n}^i(z) &= \partial_z^{(n)} b_0^i(z) \\ a_{-n-1}^j(z) &= \partial_z^{(n)} a_{-1}^i(z) \end{aligned}$$

Los campos correspondientes a monomios de grado > 1 se definirán por inducción, usando el producto normalmente ordenado. Los operadores b_n^i, $n > 0$, y a_n^j $n \geq 0$, serán operadores de aniquilación. Entonces, podemos definir, si x es uno de los b_n^i, o a_n^j, $n \in \mathbb{Z}$, y $b \in \mathrm{End}\,(V_N)$, el producto normalmente ordenado $: xb :$, que vendrá dado por

$$: xb := \left\{ \begin{array}{ll} bx & \text{si } x \text{ es un operador de aniquilación} \\ xb & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$

Definimos por inducción

$$: x_1 \cdot \dots \cdot x_k :=: x_1 \cdot (: x_2 \cdot \dots \cdot x_k :) :$$

para $x_p = b_n^i$, o a_n^j, $p = 1, \dots, k$.
Denotaremos

$$b^i\,(z) = b_0^i\,(z)$$
$$a^j\,(z) = a_{-1}^j\,(z)$$

El producto de operadores de estos campos básicos será entonces

$$a^j\,(z)\, b^i\,(w) \sim \frac{\delta_{ij}}{z - w}$$
$$b^i\,(z)\, b^j\,(w) \sim 0$$
$$a^i\,(z)\, a^j\,(w) \sim 0$$

El campo de Virasoro viene entonces dado por

$$L\,(z) = \sum_{i=1}^{N} : \partial b^i\,(z)\, a^i\,(z) :$$

y la carga central es entonces $2N$.

El álgebra de vértices de Clifford.

Sea Cl_N el álgebra de Lie cuya base como espacio vectorial viene dada por los elementos impares ϕ_n^i,ψ_n^i, $i = 1, \dots, N$, $n \in \mathbb{Z}$, y por C, con los corchetes

$$\left[\phi_m^j, \psi_n^i\right] = \delta_{i,j}\delta_{m,-n}C$$

y todos los restantes corchetes 0. Para construir el *álgebra de vértices de Clifford* Λ_N seguimos el procedimiento anterior, pero ahora utilizando los campos impares

$$\phi^i\,(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n^i z^{-n}$$

$$\psi^i\,(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n^i z^{-n-1}$$

con los cambios de signos precisos. Entonces Λ_N es generada por los campos impares $\phi^i(z), \psi^i(z)$, sujetos a las relaciones

$$\phi^i(z)\,\psi^j(w) \sim \frac{\delta_{ij}}{z-w}$$
$$\phi^i(z)\,\phi^j(w) \sim 0$$
$$\psi^i(z)\,\psi^j(w) \sim 0$$

El campo de Virasoro, cuya carga central será igual a $-2N$ viene dado por

$$L(z) = \sum_{i=1}^{N} :\partial\phi^i(z)\,\psi^i(z):$$

Producto tensorial.

Lema 1.5.1 *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras de vértices, su producto tensorial $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ admite una estructura canónica de álgebra de vértices, cuyo elemento de Virasoro viene dado por*

$$L_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} = L_{\mathcal{A}} \otimes 1 + 1 \otimes L_{\mathcal{B}}$$

Consideramos el álgebra de vértices

$$\Omega_N = V_N \otimes \Lambda_N$$

cuya carga central de Virasoro es 0.

Álgebras de vértices topológicas.

Definición 1.5.2 *Un* álgebra de vértices topológica de rango d *es un álgebra de vértices conforme $\mathcal{A}$ cuya carga central de Virasoro es 0, equipada con un elemento par J de peso conforme 1 y dos elementos impares Q de peso conforme 1 y G, de peso conforme 2, para la cúal se satisfacen las siguientes expansiones en producto de operadores*

$$L(z)\,L(w) \sim \frac{2L(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial L(w)}{(z-w)}$$

$$J(z)\,J(w) \sim \frac{d}{(z-w)^2}$$

$$L(z)\,J(w) \sim -\frac{d}{(z-w)^3} + \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{(z-w)}$$

$$G(z)\,G(w) \sim 0$$
$$L(z)\,G(w) \sim \frac{2G(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial G(w)}{(z-w)}$$

$$J(z)\,G(w) \sim -\frac{G(w)}{(z-w)}$$

$$\begin{aligned}
Q(z)\,Q(w) &\sim 0 \\
L(z)\,Q(w) &\sim \frac{Q(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial Q(w)}{(z-w)}
\end{aligned}$$

$$J(z)\,Q(w) \sim \frac{Q(w)}{(z-w)}$$

$$Q(z)\,G(w) \sim \frac{d}{(z-w)^3} + \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{L(w)}{z-w}$$

de manera que

$$[Q_0, G(z)] = L(z)$$

El complejo de De Rham quiral de un espacio afín.

Ahora introduciremos una estructura de álgebra de vértices topológica de rango N en el álgebra de vértices conforme Ω_N anteriormente construida. Dotada de esta estructura, Ω_N se llama el *álgebra de De Rham quiral del espacio afín* $\mathbb{C}^N$. Junto con el elemento de Virasoro dado por

$$L = \sum_{i=1}^{N} \left(b_{-1}^i a_{-1}^i + \phi_{-1}^i \psi_{-1}^i \right)$$

definiremos elementos J, Q, G vía

$$\begin{aligned}
J &= \sum_{i=1}^{N} \phi_0^i \psi_{-1}^i \\
Q &= \sum_{i=1}^{N} a_{-1}^i \phi_0^i \\
G &= \sum_{i=1}^{N} \psi_{-1}^i b_{-1}^i
\end{aligned}$$

cuyos campos correspondientes serán

$$L(z) = \sum_{i=1}^{N} \left(: \partial b^i(z)\, a^i(z) : + : \partial \phi^i(z)\, \psi^i(z) : \right)$$
$$J(z) = \sum_{i=1}^{N} : \phi^i(z)\, \psi^i(z) :$$
$$Q(z) = \sum_{i=1}^{N} : a^i(z)\, \phi^i(z) :$$
$$G(z) = \sum_{i=1}^{N} : \psi^i(z)\, \partial b^i(z) :$$

Definiremos el *operador de carga fermiónica* F actúando en Ω_N, vía

$$F := J_0 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{n\in\mathbb{Z}} : \phi_n^i \psi_{-n}^i :$$

de manera que

$$F|0\rangle = 0$$
$$\left[F, \phi_n^i\right] = \phi_n^i$$
$$\left[F, \psi_n^i\right] = -\psi_n^i$$
$$\left[F, a_n^i\right] = 0$$
$$\left[F, b_n^i\right] = 0$$

Definamos ahora

$$\Omega_N^p = \{\omega \in \Omega_N : F\omega = p\omega\}$$

y por lo tanto

$$\Omega_N = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} \Omega_N^p$$

Definiremos un endomorfismo $d_{\mathrm{DR}}^{\mathrm{ch}}$, la *diferencial de De Rham quiral*, del espacio Ω_N vía

$$d_{\mathrm{DR}}^{\mathrm{ch}} := -Q_0 = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{n\in\mathbb{Z}} : a_n^i \phi_{-n}^i :$$

y se obtiene que

$$\left(d_{\mathrm{DR}}^{\mathrm{ch}}\right)^2 = 0$$

Dentro del complejo de De Rham quiral podemos identificar el complejo de De Rham algebraico habitual $\Omega\left(\mathbb{C}^N\right) = \oplus_{p=0}^{N} \Omega^p\left(\mathbb{C}^N\right)$ del espacio afín $\mathbb{C}^N$. Identificaremos las funciones coordenadas con las variables $b_0^1, \ldots, b_0^N$, y sus diferenciales con las variables fermiónicas $\phi_0^1, \ldots, \phi_0^N$. Por lo tanto, tendremos una identificación de álgebras diferenciales graduadas

$$\Omega\left(\mathbb{C}^N\right) = \mathbb{C}\left[b_0^1, \ldots, b_0^N\right] \otimes \Lambda\left(\phi_0^1, \ldots, \phi_0^N\right)$$

de dicho complejo como producto tensorial de un álgebra polinomial por un álgebra exterior, con la graduación obtenida al asignar a los símbolos b_0^i grado 0 y a los símbolos ϕ_0^j grado 1. La diferencial de De Rham habitual vista en este contexto será

$$d_{DR} = \sum_{i=1}^{N} a_0^i \phi_0^i$$

Proposición Hay una inclusión de complejos (compatible por tanto con las diferenciales)

$$i : \left(\Omega_N\left(\mathbb{C}^N\right), d_{DR}\right) \to \left(\Omega_N, d_{\mathrm{DR}}^{\mathrm{ch}}\right)$$

que es un cuasiisomorfismo.

1.6. El complejo de De Rham quiral de una variedad.

Sea X una variedad suave compleja. Malikov-Schechtman-Vaintrob ([**?**]) construyeron el *complejo de De Rham quiral de* X, un haz de álgebras de vértices en la topología de Zariski. Haces similares existen en los casos C^∞ y complejo-analítico.

Para cada abierto $U \subseteq X$, $\Gamma\left(U; \Omega_X^{\mathrm{ch}}\right)$ es un álgebra de vértices, y las restricciones son morfismos de álgebras de vértices.

Después es preciso considerar una localización de esta álgebra de vértices, en la cúal permitiremos expresiones de la forma

$$f\left(b^1(z), \ldots, b^n(z)\right)$$

donde $f\left(x^1, \ldots, x^n\right)$ es una función algebraica/suave arbitraria definida en U. Se construye así un haz (de Zariski) en $\mathbb{C}^n$. Si pasamos a la completación formal, podemos considerar una función (cualquiera) definida en el disco formal

$$\mathrm{Spf}\left(\mathbb{C}\left[x_1, \ldots, x_n\right]\right)$$

Para ver si se pueden pegar estos haces, debemos analizar como se transforman bajo cambios de coordenadas del disco formal estos generadores. Sea $\widetilde{x} = g^i(x)$ un cambio de coordenadas, cuyo inverso es $x = f^i(\widetilde{x})$. Los campos generadores se transforman entonces de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
\widetilde{b}^i &= g^i(b) \\
\widetilde{\phi}^i &= \frac{\partial g^j(b)}{\partial b^i}\phi^j \\
\widetilde{\psi}^i &= \frac{\partial f^j(g(b))}{\partial \widetilde{b}^i}\psi^j \\
\widetilde{a}^i &= a^j \frac{\partial f^j(g(b))}{\partial \widetilde{b}^i} + \frac{\partial^2 f^k(g(b))}{\partial \widetilde{b}^j \partial \widetilde{b}^l}\frac{\partial g^l(b)}{\partial b^r}\phi^r \psi^k
\end{aligned}$$

Esta información puede organizarse en términos de supercampos ([**?**])

$$B^i(z,\theta) = b^i(z) + \theta\phi^i(z)$$
$$\Psi^i(z,\theta) = \psi^i(z) + \theta a^i(z)$$

$$\widetilde{B}^i = g^i(B)$$
$$\widetilde{\Psi}^i = \frac{\partial f^j(g(B))}{\partial \widetilde{B}^i}\Psi^j$$

es decir, bajo cambios de coordenadas B se transforma como una función y Ψ cambia como un campo vectorial.

El efecto de los cambios de coordenadas en los campos distinguidos es, en la misma notación

$$\widetilde{L}(z) = L(z) \tag{1.40}$$
$$\widetilde{J}(z) = J(z) + \partial\left(\operatorname{tr}\left(\log\left(\frac{\partial g^i}{\partial b^j}(z)\right)\right)\right) \tag{1.41}$$
$$\widetilde{Q}(z) = Q(z) + \partial\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{b}_r}\left[\operatorname{tr}\left(\log\left(\frac{\partial f^i}{\partial \widetilde{b}^j}(z)\right)\right)\right]\widetilde{\phi}^r(z)\right) \tag{1.42}$$
$$\widetilde{G}(z) = G(z) \tag{1.43}$$

Por lo tanto, gracias a (1.40) para una variedad suave X cualquiera, el campo $L(z)$ es una sección global bien definida del haz $\operatorname{End}\left(\Omega_X^{\mathrm{ch}}\right)[[z,z^{-1}]]$ y Ω_X^{ch} tiene una estructura canónica de haz de álgebras de vértices conformes. También el campo $G(z)$ (la .$^{\mathrm{es}}$tructura superconforme") está bien definido. Además, debido a (1.41) y (1.42) los modos $F = J_0$ y $d_{\mathrm{DR}}^{\mathrm{ch}} = -Q_0$ son endomorfismos bien definidos del haz Ω_X^{ch}, con $d_{\mathrm{DR}}^{\mathrm{ch}} = 0$. De esta manera, $\left(\Omega_X^{\mathrm{ch}}, d_{\mathrm{DR}}^{\mathrm{ch}}\right)$ es un complejo de haces de álgebras de vértices conformes, y se generaliza la demostración local a una inclusión de complejos

$$(\Omega_X, d_{\mathrm{DR}}) \hookrightarrow \left(\Omega_X^{\mathrm{ch}}, d_{\mathrm{DR}}^{\mathrm{ch}}\right)$$

que es un cuasiisomorfismo. La diferencial $d_{\mathrm{DR}}^{\mathrm{ch}}$ respeta el peso conforme y el subcomplejo Ω_X, que coincide con la componente de peso conforme 0 de Ω_X^{ch}. El producto exterior puede recuperarse del producto de operadores en Ω_X^{ch}.

En el caso de las variedades de Calabi-Yau, para las cúales se tiene que $\mathrm{c}_1(\mathcal{T}X) = 0$, donde $\mathcal{T}X$ es el fibrado tangente, las fórmulas (1.41) y (1.42) definen globalmente los campos $J(z)$ y $Q(z)$. Es decir, en este caso Ω_X^{ch} admite una estructura canónica de *haz de álgebras de vértices topológicas.*

En el caso de una X general, la obstrucción a la existencia de esta estructura puede ser expresada en términos de la primera clase de Chern de $\mathcal{T}_X$.

En ([28]) se sugirió la existencia de una relación entre el álgebra de vértices $R\Gamma\left(U;\Omega_X^{\mathrm{ch}}\right)$y la teoría de compos conformes correspondiente al modelo"A-"de Witten correspondiente a X que ha sido confirmada por Witten([31]).

Bibliografía

[1] Arakawa, Malikov

[2] A. Beĭlinson and J. Bernstein, Localisation de $\mathfrak{g}$ -modules, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292 (1981), 15–18.

[3] Beilinson, Drinfeld Chiral Algebras.

[4] A. Belavin, A. Polyakov and A. Zamolodchikov - Infinite conformal symmetries in two-dimensional quantum field theory, Nucl. Phys. B241 (1984) 333-380

[5] Ben-Zvi, Heluani

[6] Ben-Zvi, Heluani

[7] Borcherds, Arbeitstagung 97, Bonn, MPI

[8] Borcherds, Kyoto

[9] L. A. Borisov, Vertex algebras and mirror symmetry, Comm. Math. Phys. 215 (2001), 517–557.

[10] L.Borisov, Introduction to the vertex algebra approach to mirror symmetry, preprint math.AG/9912195.

[11] L. A. Borisov, Vertex algebras and mirror symmetry, Comm. Math. Phys. 215 (2001), 517–557.

[12] L.Borisov, A.Libgober, Elliptic Genera of singular varieties, orbifold elliptic genus and chiral deRham complex, Mirror symmetry, IV (Montreal, QC, 2000), 325–342, AMS/IP Stud. Adv. Math., 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[13] L.Borisov, A. Libgober, Elliptic genera of toric varieties and applications to mirror symmetry, Invent. Math. 140 (2000), no. 2, 453–485.

[14] Chapoton

[15] M. Eichler and D. Zagier, The Theory of Jacobi Forms, Progr. Math. 55, Birkhäuser, Boston, 1985.

[16] V. Kac, Vertex algebras for beginners, AMS, 1997.

[17] V. Gorbounov, F. Malikov and V. Schechtman, Gerbes of chiral differential operators I, Math. Res. Lett., 7(1):55-66, 2000.

[18] V. Gorbounov, F. Malikov and V. Schechtman, Gerbes of chiral differential operators II, Inv. Math., 2004.

[19] V. Gorbounov, F. Malikov and V. Schechtman, Gerbes of chiral differential operators III, Feigin Proceedings.

[20] G.Höhn, Komplexe elliptische Geschlechter und S^1-äquivariante Kobordismustheorie Diplomarbeit Universität Bonn, 1991.

[21] Hirzebruch, Berger, Jung: Manifolds and modular forms, Vieweg, 1992.

[22] Kapustin

[23] Kontsevich Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture

[24] Kimura, Stasheff, Voronov On operad structures of moduli spaces and string theory 1995, CMP

[25] Leinster

[26] B.H. Lian and G.J. Zuckerman, New perspectives on the BRST-algebraic structure in string theory, hepth/9211072, Commun. Math. Phys. 154 (1993) 613.

[27] Malikov,

[28] F. Malikov, V. Schechtman, and A. Vaintrob, Chiral de Rham complex, Comm. Math. Phys. 204 (1999), 439–473.

[29] F. Malikov, V. Schechtman, Chiral de Rham complex. II, in Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 194, 149–188, Amer. Math. Soc., 1999.V. Kac, Vertex algebras for beginners, AMS, 1997.

[30] B. Totaro, Chern numbers of singular varieties and elliptic homology, Ann. of Math. (2) 151 (2000), 757–791.

[31] E.Witten, Two-Dimensional Models With (0,2) Supersymmetry: Perturbative Aspects,hep-th/0504078, 58 pp.Two-dimensional models with (0,2) supersymmetry: perturbative aspects in Adv. Theor. Math. Phys. Volume 11, Number 1 (2007), 1-63.