

Grupoides
y
fórmulas de Faà di Bruno
para
funciones de Green

Imma Gálvez
UPC

Joachim Kock
UAB

Andrew Tonks
London Metropolitan U.

Higher Homotopy in Seville 2011
Sevilla, 24 de octubre de 2011

MTM2010-15831 Homotopía de orden superior en álgebra y
geometría

La fórmula de Faà di Bruno para $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$

- ▶ La fórmula de Faà di Bruno clásica permite calcular las derivadas superiores de la composición de dos funciones de una variable en función de las diversas derivadas de éstas.
- ▶ Consideremos una serie de potencias formal en una variable

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) z^n \in \mathbb{C}[[z]]$$

donde $f(0) = 0$ cuyos coeficientes vienen dados por las derivadas de orden superior

$$a_n(f) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

La fórmula de Faà di Bruno para $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$

- ▶ La fórmula de Faà di Bruno clásica permite calcular las derivadas superiores de la composición de dos funciones de una variable en función de las diversas derivadas de éstas.
- ▶ Consideremos una serie de potencias formal en una variable

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) z^n \in \mathbb{C}[[z]]$$

donde $f(0) = 0$ cuyos coeficientes vienen dados por las derivadas de orden superior

$$a_n(f) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

La fórmula de Faà di Bruno para $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$

- ▶ La fórmula de Faà di Bruno clásica permite calcular las derivadas superiores de la composición de dos funciones de una variable en función de las diversas derivadas de éstas.
- ▶ Consideremos una serie de potencias formal en una variable

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) z^n \in \mathbb{C}[[z]]$$

donde $f(0) = 0$ cuyos coeficientes vienen dados por las derivadas de orden superior

$$a_n(f) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

- ▶ Es costumbre considerar $f(z)$ como germen de una función C^∞ tal que $f(0) = 0$. Será un difeomorfismo si $a_1(f) \neq 0$ que preservará la orientación si $a_1(f) > 0$ y que será tangente a la identidad si $a_1(f) = 1$.

La fórmula clásica de Faà di Bruno (continuación)

- ▶ $\mathbb{C}[[z]]$ forma un monoide no conmutativo con respecto a la composición de funciones

$$(g \circ f)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) z^m \right)^n. \quad (1)$$

con unidad dada por la función identidad $\mathbf{1}(z) = z$.

La fórmula clásica de Faà di Bruno (continuación)

- ▶ $\mathbb{C}[[z]]$ forma un monoide no conmutativo con respecto a la composición de funciones

$$(g \circ f)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) z^m \right)^n. \quad (1)$$

con unidad dada por la función identidad $\mathbf{1}(z) = z$.

- ▶ Las funciones coordenadas son elementos del dual lineal de este monoide.

$$\langle a_n, f \rangle = a_n(f), \quad a_n \in \mathbb{C}[[z]]^*.$$

La fórmula clásica de Faà di Bruno (continuación)

- ▶ $\mathbb{C}[[z]]$ forma un monoide no conmutativo con respecto a la composición de funciones

$$(g \circ f)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) z^m \right)^n. \quad (1)$$

con unidad dada por la función identidad $\mathbf{1}(z) = z$.

- ▶ Las funciones coordenadas son elementos del dual lineal de este monoide.

$$\langle a_n, f \rangle = a_n(f), \quad a_n \in \mathbb{C}[[z]]^*.$$

- ▶ El anillo de polinomios en los a_n tiene una estructura de coálgebra, con counidad $\varepsilon(a_n) = \langle a_n, \mathbf{1} \rangle$ y comultiplicación dada por

$$\langle \Delta a_n, f \otimes g \rangle = \langle a_n, g \circ f \rangle$$

que es posible determinar explícitamente expandiendo (??).

La biálgebra de Faà di Bruno

- ▶ La *biálgebra de Faà di Bruno*

$$\mathcal{F} = \mathbb{C}[a_1, a_2, \dots]$$

es el álgebra libre conmutativa en los símbolos a_n , $n \geq 1$, con la cunidad y la comultiplicación que acabamos de dar.

- ▶ Es sólo una biálgebra. Es graduada, pero no conexa: \mathcal{F}_0 está generada por las potencias de a_1 , que son *group-like*.

La biálgebra de Faà di Bruno

- ▶ La *biálgebra de Faà di Bruno*

$$\mathcal{F} = \mathbb{C}[a_1, a_2, \dots]$$

es el álgebra libre conmutativa en los símbolos a_n , $n \geq 1$, con la cunidad y la comultiplicación que acabamos de dar.

- ▶ Es sólo una biálgebra. Es graduada, pero no conexa: \mathcal{F}_0 está generada por las potencias de a_1 , que son *group-like*.
- ▶ Podemos imponer la relación $a_1 = 1$, que genera un ideal, y obtener el álgebra de Hopf clásica

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}[a_2, a_3, \dots].$$

La biálgebra de Faà di Bruno

- ▶ La *biálgebra de Faà di Bruno*

$$\mathcal{F} = \mathbb{C}[a_1, a_2, \dots]$$

es el álgebra libre conmutativa en los símbolos a_n , $n \geq 1$, con la counidad y la comultiplicación que acabamos de dar.

- ▶ Podemos imponer la relación $a_1 = 1$, que genera un ideal, y obtener el álgebra de Hopf clásica

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}[a_2, a_3, \dots].$$

- ▶ La antípoda viene dada por la fórmula de inversión de Lagrange clásica.

La biálgebra de Faà di Bruno

- ▶ La *biálgebra de Faà di Bruno*

$$\mathcal{F} = \mathbb{C}[a_1, a_2, \dots]$$

es el álgebra libre conmutativa en los símbolos a_n , $n \geq 1$, con la cunidad y la comultiplicación que acabamos de dar.

- ▶ La antípoda viene dada por la fórmula de inversión de Lagrange clásica.
- ▶ A nosotros nos interesa considerar la biálgebra \mathcal{F} , sin la restricción $a_1 = 1$.

La función de Green para $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$

- ▶ La fórmula para Δ se puede sintetizar en una sola ecuación, Consideremos primero la serie formal (la *función de Green*)

$$A = \sum_{k \geq 1} \frac{A_k}{k!} = \sum_{k \geq 1} a_k \in \mathbb{C}[[a_1, a_2, a_3, \dots]]$$

La función de Green para $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$

- ▶ La fórmula para Δ se puede sintetizar en una sola ecuación, Consideremos primero la serie formal (la *función de Green*)

$$A = \sum_{k \geq 1} \frac{A_k}{k!} = \sum_{k \geq 1} a_k \in \mathbb{C}[[a_1, a_2, a_3, \dots]]$$

- ▶ La forma resultante de la fórmula de Faà di Bruno es el hilo conductor de este trabajo:

$$\Delta(A) = \sum_{k \geq 1} A^k \otimes a_k.$$

La función de Green para $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$

- ▶ La fórmula para Δ se puede sintetizar en una sola ecuación, Consideremos primero la serie formal (la *función de Green*)

$$A = \sum_{k \geq 1} \frac{A_k}{k!} = \sum_{k \geq 1} a_k \in \mathbb{C}[[a_1, a_2, a_3, \dots]]$$

- ▶ La forma resultante de la fórmula de Faà di Bruno es el hilo conductor de este trabajo:

$$\Delta(A) = \sum_{k \geq 1} A^k \otimes a_k.$$

- ▶ Los valores de Δ en los generadores individuales a_k se pueden extraer de esta fórmula.

La función de Green para $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$

- ▶ La fórmula para Δ se puede sintetizar en una sola ecuación, Consideremos primero la serie formal (la *función de Green*)

$$A = \sum_{k \geq 1} \frac{A_k}{k!} = \sum_{k \geq 1} a_k \in \mathbb{C}[[a_1, a_2, a_3, \dots]]$$

- ▶ La forma resultante de la fórmula de Faà di Bruno es el hilo conductor de este trabajo:

$$\Delta(A) = \sum_{k \geq 1} A^k \otimes a_k.$$

- ▶ Los valores de Δ en los generadores individuales a_k se pueden extraer de esta fórmula.

El álgebra de Connes–Kreimer Hopf de los grafos de Feynman

- ▶ *El álgebra de Hopf de Connes–Kreimer de los grafos de Feynman* está generada por el conjunto de las clases de isomorfía de 1PI-grafos de Feynman (para una determinada QFT).

El álgebra de Connes–Kreimer Hopf de los grafos de Feynman

- ▶ *El álgebra de Hopf de Connes–Kreimer de los grafos de Feynman* está generada por el conjunto de las clases de isomorfia de 1PI-grafos de Feynman (para una determinada QFT).
- ▶ La comultiplicación viene dada en los generadores por

$$\begin{aligned}\Delta : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \\ \Gamma &\longmapsto 1 \otimes \Gamma + \Gamma \otimes 1 + \sum_{\gamma \subsetneq \Gamma} \gamma \otimes \Gamma/\gamma.\end{aligned}$$

El álgebra de Connes–Kreimer Hopf de los grafos de Feynman

- ▶ *El álgebra de Hopf de Connes–Kreimer de los grafos de Feynman* está generada por el conjunto de las clases de isomorfía de 1PI-grafos de Feynman (para una determinada QFT).
- ▶ La comultiplicación viene dada en los generadores por

$$\begin{aligned}\Delta : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \\ \Gamma &\longmapsto 1 \otimes \Gamma + \Gamma \otimes 1 + \sum_{\gamma \subsetneq \Gamma} \gamma \otimes \Gamma/\gamma.\end{aligned}$$

- ▶ Aquí la suma se indexa sobre todos los subgrafos 1PI propios γ de Γ (si γ no es conexo se interpreta como un monomio en los elementos de la base);

El álgebra de Connes–Kreimer Hopf de los grafos de Feynman

- ▶ *El álgebra de Hopf de Connes–Kreimer de los grafos de Feynman* está generada por el conjunto de las clases de isomorfía de 1PI-grafos de Feynman (para una determinada QFT).
- ▶ La comultiplicación viene dada en los generadores por

$$\begin{aligned}\Delta : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \\ \Gamma &\longmapsto 1 \otimes \Gamma + \Gamma \otimes 1 + \sum_{\gamma \subsetneq \Gamma} \gamma \otimes \Gamma/\gamma.\end{aligned}$$

- ▶ Aquí la suma se indexa sobre todos los subgrafos 1PI propios γ de Γ (si γ no es conexo se interpreta como un monomio en los elementos de la base);
- ▶ Γ/γ denota el grafo obtenido contrayendo cada componente conexa de γ a un solo vértice.

► **Walter D. van Suijlekom.**

'The structure of renormalization Hopf algebras for gauge theories. I. Representing Feynman graphs on BV-algebras'.
Comm. Math. Phys., 290(1):291—319, 2009

- ▶ **Walter D. van Suijlekom.**

'The structure of renormalization Hopf algebras for gauge theories. I. Representing Feynman graphs on BV-algebras'.
Comm. Math. Phys., 290(1):291—319, 2009

- ▶ Allí, se considera el álgebra de Hopf de grafos de Feynman de Connes–Kreimer.

- ▶ **Walter D. van Suijlekom.**

'The structure of renormalization Hopf algebras for gauge theories. I. Representing Feynman graphs on BV-algebras'.
Comm. Math. Phys., 290(1):291—319, 2009

- ▶ Allí, se considera el álgebra de Hopf de grafos de Feynman de Connes–Kreimer.
- ▶ Los grafos individuales no son relevantes desde el punto de vista físico.

Motivación a partir del trabajo de van Suijlekom

- ▶ **Walter D. van Suijlekom.**

'The structure of renormalization Hopf algebras for gauge theories. I. Representing Feynman graphs on BV-algebras'.
Comm. Math. Phys., 290(1):291—319, 2009

- ▶ Allí, se considera el álgebra de Hopf de grafos de Feynman de Connes–Kreimer.
- ▶ Los grafos individuales no son relevantes desde el punto de vista físico.
- ▶ La *función de Green* asociada a ellos sí que lo es; es decir, para un tipo de vértice fijo v

$$G_v = 1 + \sum_{\text{res}(\Gamma)=v} \Gamma / \text{Aut}(\Gamma)$$

Motivación a partir del trabajo de van Suijlekom's (cont.)

- ▶ En el trabajo de van Suijlekom, aparece una fórmula de Faà di Bruno

$$\Delta(Y_v) = \sum_{n_1, \dots, n_k} Y_v Y_{v_1}^{n_1} \dots Y_{v_k}^{n_k} \otimes p_{n_1, \dots, n_k}(Y_v)$$

siendo p_{n_1, \dots, n_k} la proyección sobre los grafos que contienen n_i vértices de tipo v_i , con

$$Y_v = \frac{G_v}{\prod_{e \in v} \sqrt{G_e}}$$

donde el producto varía sobre las aristas e del vértice v .

Motivación a partir del trabajo de van Suijlekom's (cont.)

- ▶ En el trabajo de van Suijlekom, aparece una fórmula de Faà di Bruno

$$\Delta(Y_v) = \sum_{n_1, \dots, n_k} Y_v Y_{v_1}^{n_1} \dots Y_{v_k}^{n_k} \otimes p_{n_1, \dots, n_k}(Y_v)$$

siendo p_{n_1, \dots, n_k} la proyección sobre los grafos que contienen n_i vértices de tipo v_i , con

$$Y_v = \frac{G_v}{\prod_{e \in v} \sqrt{G_e}}$$

donde el producto varía sobre las aristas e del vértice v .

- ▶ Observemos que para cada tipo de arista, se tiene

$$G_e = 1 - \sum_{\text{res}(\Gamma)=e} \Gamma / \text{Aut}(\Gamma)$$

para un tipo fijo de arista.

Motivación a partir del trabajo de van Suijlekom's (cont.)

- ▶ En el trabajo de van Suijlekom, aparece una fórmula de Faà di Bruno

$$\Delta(Y_v) = \sum_{n_1, \dots, n_k} Y_v Y_{v_1}^{n_1} \dots Y_{v_k}^{n_k} \otimes p_{n_1, \dots, n_k}(Y_v)$$

siendo p_{n_1, \dots, n_k} la proyección sobre los grafos que contienen n_i vértices de tipo v_i , con

$$Y_v = \frac{G_v}{\prod_{e \in v} \sqrt{G_e}}$$

donde el producto varía sobre las aristas e del vértice v .

- ▶ Observemos que para cada tipo de arista, se tiene

$$G_e = 1 - \sum_{\text{res}(\Gamma)=e} \Gamma / \text{Aut}(\Gamma)$$

para un tipo fijo de arista.

- ▶ Nuestro objetivo es demostrar una fórmula de este tipo para *árboles*. Para conseguirlo, necesitamos *árboles operádicos*.

Árboles operádicos

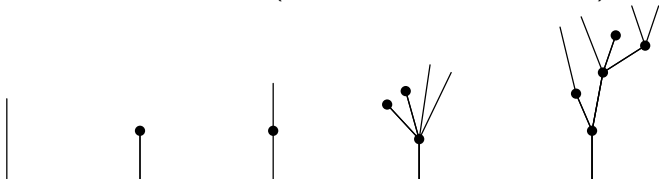
- ▶ En teoría de opéradas, los nodos representan operaciones, y los árboles son combinaciones formales de operaciones.

Árboles operádicos

- ▶ En teoría de opéradas, los nodos representan operaciones, y los árboles son combinaciones formales de operaciones.
- ▶ Se admiten cabos sueltos (hojas).

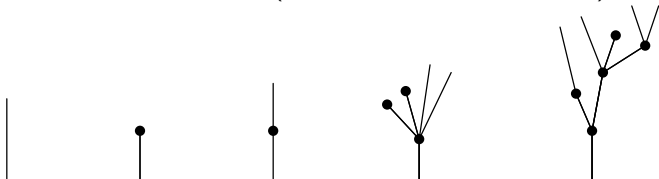
Árboles operádicos

- ▶ En teoría de opéradas, los nodos representan operaciones, y los árboles son combinaciones formales de operaciones.
- ▶ Se admiten cabos sueltos (hojas).
- ▶ La definición formal de árboles operádicos se encuentra en [Kock 2011,IMRN].
- ▶ He aquí algunos ejemplos (ignórese el aspecto planar)



Árboles operádicos

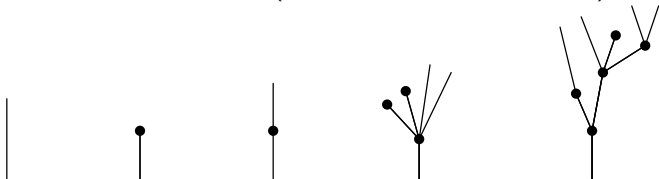
- ▶ En teoría de opéradas, los nodos representan operaciones, y los árboles son combinaciones formales de operaciones.
- ▶ Se admiten cabos sueltos (hojas).
- ▶ La definición formal de árboles operádicos se encuentra en [Kock 2011,IMRN].
- ▶ He aquí algunos ejemplos (ignórese el aspecto planar)



- ▶ Las *hojas* son las aristas que no empiezan en ningún nodo.
- ▶ La *arista raíz* no acaba en ningún nodo.

Árboles operádicos

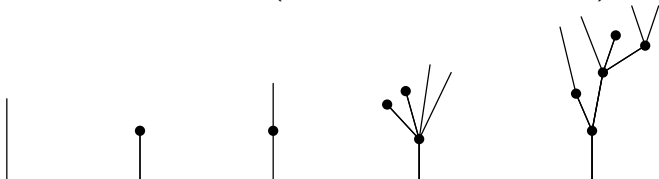
- ▶ En teoría de opéradas, los nodos representan operaciones, y los árboles son combinaciones formales de operaciones.
- ▶ Se admiten cabos sueltos (hojas).
- ▶ La definición formal de árboles operádicos se encuentra en [Kock 2011,IMRN].
- ▶ He aquí algunos ejemplos (ignórese el aspecto planar)



- ▶ Las *hojas* son las aristas que no empiezan en ningún nodo.
- ▶ La *arista raíz* no acaba en ningún nodo.
- ▶ Un nodo sin arista entrante es una operación nularia.

Árboles operádicos

- ▶ En teoría de opéradas, los nodos representan operaciones, y los árboles son combinaciones formales de operaciones.
- ▶ Se admiten cabos sueltos (hojas).
- ▶ La definición formal de árboles operádicos se encuentra en [Kock 2011,IMRN].
- ▶ He aquí algunos ejemplos (ignórese el aspecto planar)



- ▶ Las *hojas* son las aristas que no empiezan en ningún nodo.
- ▶ La *arista raíz* no acaba en ningún nodo.
- ▶ Un nodo sin arista entrante es una operación nularia.
- ▶ Las aristas entrantes que se dibujan en cada nodo sirven para registrar las aridades de las operaciones.

Árboles operádicos en pQFT

- ▶ Los árboles que aparecen en pQFT son naturalmente operádicos.

Árboles operádicos en pQFT

- ▶ Los árboles que aparecen en pQFT son naturalmente operádicos.
- ▶ Codifican los anidamientos de diagramas de Feynman 1PI.

Árboles operádicos en pQFT

- ▶ Los árboles que aparecen en pQFT son naturalmente operádicos.
- ▶ Codifican los anidamientos de diagramas de Feynman 1PI.
- ▶ Por lo tanto, poseen decoraciones por grafos 1PI primitivos en los nodos y por etiquetas de interacción en las aristas.

Árboles operádicos en pQFT

- ▶ Los árboles que aparecen en pQFT son naturalmente operádicos.
- ▶ Codifican los anidamientos de diagramas de Feynman 1PI.
- ▶ Por lo tanto, poseen decoraciones por grafos 1PI primitivos en los nodos y por etiquetas de interacción en las aristas.

Árboles operádicos en pQFT

- ▶ Los árboles que aparecen en pQFT son naturalmente operádicos.
- ▶ Codifican los anidamientos de diagramas de Feynman 1PI.
- ▶ Por lo tanto, poseen decoraciones por grafos 1PI primitivos en los nodos y por etiquetas de interacción en las aristas.
- ▶ Así, se puede recuperar el grafo a partir del árbol operádico decorado.

Árboles operádicos en pQFT

- ▶ Los árboles que aparecen en pQFT son naturalmente operádicos.
- ▶ Codifican los anidamientos de diagramas de Feynman 1PI.
- ▶ Por lo tanto, poseen decoraciones por grafos 1PI primitivos en los nodos y por etiquetas de interacción en las aristas.
- ▶ Así, se puede recuperar el grafo a partir del árbol operádico decorado.
- ▶ Los árboles operádicos permiten tener en cuenta las simetrías del grafo de Feynman original.

Árboles operádicos en pQFT

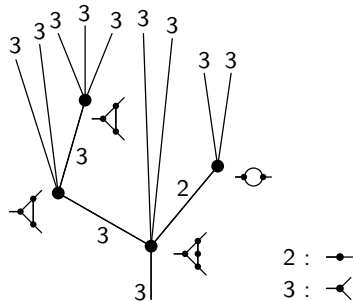
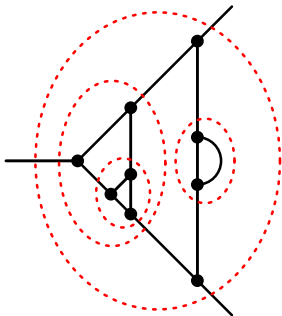
- ▶ Los árboles que aparecen en pQFT son naturalmente operádicos.
- ▶ Codifican los anidamientos de diagramas de Feynman 1PI.
- ▶ Por lo tanto, poseen decoraciones por grafos 1PI primitivos en los nodos y por etiquetas de interacción en las aristas.
- ▶ Así, se puede recuperar el grafo a partir del árbol operádico decorado.
- ▶ Los árboles operádicos permiten tener en cuenta las simetrías del grafo de Feynman original.
- ▶ Esto es importante para las funciones de Green.

Correspondencia entre grafos de Feynman y árboles

- ▶ Un grafo de Feynman se puede reconstruir a partir de un árbol decorado.

Correspondencia entre grafos de Feynman y árboles

- ▶ Un grafo de Feynman se puede reconstruir a partir de un árbol decorado.
- ▶ La decoración implica biyecciones que codifican la manera exacta como un grafo pequeño se inserta en uno grande.



La biálgebra de árboles operádicos

Consideraremos

- ▶ la categoría de árboles operádicos y sus morfismos.

La biálgebra de árboles operádicos

Consideraremos

- ▶ la categoría de árboles operádicos y sus morfismos.
- ▶ la categoría de bosques y los morfismos entre ellos.

Consideraremos

- ▶ la categoría de árboles operádicos y sus morfismos.
- ▶ la categoría de bosques y los morfismos entre ellos.

- ▶ Una *poda* de un árbol operádico es un subárbol que contiene la raíz

$$c : S \subset T$$

Consideraremos

- ▶ la categoría de árboles operádicos y sus morfismos.
- ▶ la categoría de bosques y los morfismos entre ellos.

- ▶ Una *poda* de un árbol operádico es un subárbol que contiene la raíz

$$c : S \subset T$$

- ▶ Si un nodo está en un subárbol, también lo están sus aristas incidentes.

Consideraremos

- ▶ la categoría de árboles operádicos y sus morfismos.
- ▶ la categoría de bosques y los morfismos entre ellos.

- ▶ Una *poda* de un árbol operádico es un subárbol que contiene la raíz

$$c : S \subset T$$

- ▶ Si un nodo está en un subárbol, también lo están sus aristas incidentes.
- ▶ Para cada arista e de T , existe un *árbol-ideal* formado por e (como la nueva raíz) y todas sus aristas y nodos descendientes.

Consideraremos

- ▶ la categoría de árboles operádicos y sus morfismos.
- ▶ la categoría de bosques y los morfismos entre ellos.
- ▶ Una *poda* de un árbol operádico es un subárbol que contiene la raíz

$$c : S \subset T$$

- ▶ Si un nodo está en un subárbol, también lo están sus aristas incidentes.
- ▶ Para cada arista e de T , existe un *árbol-ideal* formado por e (como la nueva raíz) y todas sus aristas y nodos descendientes.
- ▶ P_c es el *bosque* formado por todos los árboles-ideales generados por las hojas de S .

La biálgebra de árboles operádicos (continuación)

- ▶ \mathcal{B} es la \mathbb{C} -álgebra libre generada por el conjunto de las clases de isomorfía de árboles operádicos.

La biálgebra de árboles operádicos (continuación)

- ▶ \mathcal{B} es la \mathbb{C} -álgebra libre generada por el conjunto de las clases de isomorfía de árboles operádicos.
- ▶ Se define una comultiplicación en sus generadores

$$\begin{aligned}\Delta : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \\ T &\longmapsto \sum_{c:S \subset T} P_c \otimes S,\end{aligned}$$

La biálgebra de árboles operádicos (continuación)

- ▶ \mathcal{B} es la \mathbb{C} -álgebra libre generada por el conjunto de las clases de isomorfía de árboles operádicos.
- ▶ Se define una comultiplicación en sus generadores

$$\begin{aligned}\Delta : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \\ T &\longmapsto \sum_{c:S \subset T} P_c \otimes S,\end{aligned}$$

- ▶ \mathcal{B} se convierte así en una biálgebra graduada.

La biálgebra de árboles operádicos (final)

- ▶ \mathcal{B} no es conexa.

La biálgebra de árboles operádicos (final)

- ▶ \mathcal{B} no es conexa.
- ▶ \mathcal{B}_0 está generada por el árbol trivial $|$ y todas sus potencias.

La biálgebra de árboles operádicos (final)

- ▶ \mathcal{B} no es conexa.
- ▶ \mathcal{B}_0 está generada por el árbol trivial $\begin{array}{c} | \\ \hline \end{array}$ y todas sus potencias.
- ▶ Éstos son todos elementos *group-like*, de manera que una biálgebra conexa se puede obtener a partir de ellos imponiendo que se cumpla la condición $1 = \begin{array}{c} | \\ \hline \end{array}$.

La función de Green de la biálgebra de árboles operádicos

- ▶ Consideremos el anillo completado de series de potencias de \mathcal{B} .

La función de Green de la biálgebra de árboles operádicos

- ▶ Consideremos el anillo completado de series de potencias de \mathcal{B} .
- ▶ La *función de Green* correspondiente a este anillo es la serie

$$G := \sum_T T / |\text{Aut}(T)|$$

donde la suma recorre todas las clases de isomorfía de árboles operádicos .

La función de Green de la biálgebra de árboles operádicos

- ▶ Consideremos el anillo completado de series de potencias de \mathcal{B} .
- ▶ La *función de Green* correspondiente a este anillo es la serie

$$G := \sum_T T / |\text{Aut}(T)|$$

donde la suma recorre todas las clases de isomorfía de árboles operádicos .

- ▶ Es análoga a la función de Green combinatoria de grafos de Feynman.

La función de Green de la biálgebra de árboles operádicos

- ▶ Consideremos el anillo completado de series de potencias de \mathcal{B} .
- ▶ La *función de Green* correspondiente a este anillo es la serie

$$G := \sum_T T / |\text{Aut}(T)|$$

donde la suma recorre todas las clases de isomorfía de árboles operádicos .

- ▶ Es análoga a la función de Green combinatoria de grafos de Feynman.
- ▶ Si consideramos árboles *decorados*, habrá una función de Green para cada decoración posible del vértice raíz.

La función de Green de la biálgebra de árboles operádicos

- ▶ Consideremos el anillo completado de series de potencias de \mathcal{B} .
- ▶ La *función de Green* correspondiente a este anillo es la serie

$$G := \sum_T T / |\text{Aut}(T)|$$

donde la suma recorre todas las clases de isomorfía de árboles operádicos .

- ▶ Es análoga a la función de Green combinatoria de grafos de Feynman.
- ▶ Si consideramos árboles *decorados*, habrá una función de Green para cada decoración posible del vértice raíz.
- ▶ Lo mismo sucede con la función de Green en QFT, donde hay una función de Green para cada posible tipo de residuo en la teoría.

La fórmula de Faà di Bruno para la función de Green de \mathcal{B}

Teorema

Sea g_n la función de Green de árboles con n hojas en \mathcal{B} , de manera que

$$G = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n.$$

Entonces se satisface la fórmula de Faà di Bruno siguiente:

$$\Delta(G) = \sum_{n \in \mathbb{N}} G^n \otimes g_n$$

- ▶ Para demostrar este teorema necesitaremos *grupoides*.

La fórmula de Faà di Bruno para la función de Green de \mathcal{B}

Teorema

Sea g_n la función de Green de árboles con n hojas en \mathcal{B} , de manera que

$$G = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n.$$

Entonces se satisface la fórmula de Faà di Bruno siguiente:

$$\Delta(G) = \sum_{n \in \mathbb{N}} G^n \otimes g_n$$

- ▶ Para demostrar este teorema necesitaremos *grupoides*.
- ▶ Aquí n es una clase de isomorfía del grupoide de conjuntos finitos (de hojas).

La fórmula de Faà di Bruno para la función de Green de \mathcal{B}

Teorema

Sea g_n la función de Green de árboles con n hojas en \mathcal{B} , de manera que

$$G = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n.$$

Entonces se satisface la fórmula de Faà di Bruno siguiente:

$$\Delta(G) = \sum_{n \in \mathbb{N}} G^n \otimes g_n$$

- ▶ Para demostrar este teorema necesitaremos *grupoides*.
- ▶ Aquí n es una clase de isomorfía del grupoide de conjuntos finitos (de hojas).

La fórmula de Faà di Bruno para la función de Green de \mathcal{B}

Teorema

Sea g_n la función de Green de árboles con n hojas en \mathcal{B} , de manera que

$$G = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n.$$

Entonces se satisface la fórmula de Faà di Bruno siguiente:

$$\Delta(G) = \sum_{n \in \mathbb{N}} G^n \otimes g_n$$

- ▶ Para demostrar este teorema necesitaremos *grupoides*.
- ▶ Aquí n es una clase de isomorfía del grupoide de conjuntos finitos (de hojas). Esto funciona en general para árboles decorados, considerando funtores polinomiales más generales. El grupoide **FinSet** es sustituido entonces por **FinSet**/ I donde I es el conjunto (o grupoide) de colores o decoraciones.

Grupoide fibra homotópica

- ▶ Necesitaremos algunas construcciones homotópicas universales.

Grupoide fibra homotópica

- ▶ Necesitaremos algunas construcciones homotópicas universales.
- ▶ La *fibra (homotópica)* de un morfismo

$$E \xrightarrow{p} B$$

sobre $b \in B$ es el grupoide E_b con objetos

$$(e, \phi), \quad e \in E, \quad \phi : pe \xrightarrow{\cong} b$$

y flechas

$$(\epsilon, \text{Id}) : (e, \phi) \rightarrow (e', \phi')$$

donde $\epsilon : e \rightarrow e'$ tal que $\phi' \circ p\epsilon = \phi$

$$\begin{array}{ccc} pe & \xrightarrow[p\epsilon]{\cong} & pe' \\ \phi \downarrow \cong & & \phi' \downarrow \cong \\ b & \xrightarrow[\cong]{\text{Id}} & b \end{array}$$

- ▶ Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto o un grupoide X

$$G \times X \rightarrow X$$

Entonces, el *cociente débil* X/G es el grupoide obtenido añadiendo un morfismo entre x e y por cada $g \in G$ tal que $gx = y$.

- ▶ Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto o un grupoide X

$$G \times X \rightarrow X$$

Entonces, el *cociente débil* X/G es el grupoide obtenido añadiendo un morfismo entre x e y por cada $g \in G$ tal que $gx = y$.

- ▶ Con frecuencia, el cociente débil se denota por $X//G$ para distinguirlo del cociente usual, pero no necesitamos éste aquí...

- ▶ Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto o un grupoide X

$$G \times X \rightarrow X$$

Entonces, el *cociente débil* X/G es el grupoide obtenido añadiendo un morfismo entre x e y por cada $g \in G$ tal que $gx = y$.

- ▶ Con frecuencia, el cociente débil se denota por $X//G$ para distinguirlo del cociente usual, pero no necesitamos éste aquí...
- ▶ Si G actúa sobre el conjunto $\{x\}$, entonces el cociente débil $\{x\}/G$ es el grupoide con un objeto y con grupo de vértice G .

- ▶ Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto o un grupoide X

$$G \times X \rightarrow X$$

Entonces, el *cociente débil* X/G es el grupoide obtenido añadiendo un morfismo entre x e y por cada $g \in G$ tal que $gx = y$.

- ▶ Con frecuencia, el cociente débil se denota por $X//G$ para distinguirlo del cociente usual, pero no necesitamos éste aquí...
- ▶ Si G actúa sobre el conjunto $\{x\}$, entonces el cociente débil $\{x\}/G$ es el grupoide con un objeto y y con grupo de vértice G .
- ▶ Dado un grupoide X , consideraremos el grupoide $\{x\}/\text{Aut}(x)$ para cada objeto $x \in X$.

El esqueleto equivalente de un grupoide

- ▶ Todo grupoide es equivalente a su esqueleto:

$$X \simeq \sum_{x \in \pi_0 X} \{x\} / \text{Aut}(x)$$

donde la suma denota la unión disjunta de grupoides.

Fórmula integral

- ▶ Sea $f : X \rightarrow B$ un morfismo de grupoides.

Fórmula integral

- ▶ Sea $f : X \rightarrow B$ un morfismo de grupoides.
- ▶ Consideremos la fibra sobre b para cada $b \in \pi_0 B$.

Fórmula integral

- ▶ Sea $f : X \rightarrow B$ un morfismo de grupoides.
- ▶ Consideremos la fibra sobre b para cada $b \in \pi_0 B$.
- ▶ El cociente débil

$$X_b / \text{Aut}(b)$$

origina una equivalencia de grupoides

$$X \simeq \sum_{b \in \pi_0 B} X_b / \text{Aut}(b)$$

Fórmula integral

- ▶ Sea $f : X \rightarrow B$ un morfismo de grupoides.
- ▶ Consideremos la fibra sobre b para cada $b \in \pi_0 B$.
- ▶ El cociente débil

$$X_b / \text{Aut}(b)$$

origina una equivalencia de grupoides

$$X \simeq \sum_{b \in \pi_0 B} X_b / \text{Aut}(b)$$

- ▶ Denotaremos

$$\int_{b \in B} X_b := \sum_{b \in \pi_0 B} X_b / \text{Aut}(b)$$

- ▶ Dados morfismos de grupoides

$$X \xrightarrow{f} B \xrightarrow{t} I$$

se cumple que

$$\sum_{b \in \pi_0 B} X_b / \text{Aut}(b) \simeq \sum_{i \in \pi_0 I} \left(\sum_{b \in \pi_0 B_i} X_b / \text{Aut}_i(b) \right) / \text{Aut}(i)$$

- ▶ Dados morfismos de grupoides

$$X \xrightarrow{f} B \xrightarrow{t} I$$

se cumple que

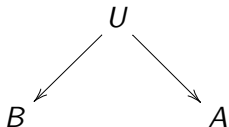
$$\sum_{b \in \pi_0 B} X_b / \text{Aut}(b) \simeq \sum_{i \in \pi_0 I} \left(\sum_{b \in \pi_0 B_i} X_b / \text{Aut}_i(b) \right) / \text{Aut}(i)$$

- ▶ En notación integral,

$$\int_{b \in B} X_b \simeq \int_{i \in I} \left(\int_{b \in B_i} X_b \right).$$

Lema de los dos recuentos

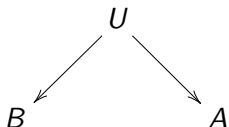
- ▶ Sean A, B, U grupoides, sean dados morfismos



y denotemos por τU , $U_S \subseteq U$ las respectivas fibras sobre $T \in B$, $S \in A$.

Lema de los dos recuentos

- ▶ Sean A, B, U grupoides, sean dados morfismos



y denotemos por ${}_T U$, $U_S \subseteq U$ las respectivas fibras sobre $T \in B$, $S \in A$.

- ▶ Entonces hay una equivalencia de grupoides

$$\int_{T \in B} {}_T U \simeq U \simeq \int_{S \in A} U_S.$$

- ▶ Un grupoide X se llama *compacto* si $\pi_0 X$ es un conjunto finito, y para cada objeto $x \in X$ el grupo fundamental $\text{Aut}(x)$ es un grupo finito.

- ▶ Un grupoide X se llama *compacto* si $\pi_0 X$ es un conjunto finito, y para cada objeto $x \in X$ el grupo fundamental $\text{Aut}(x)$ es un grupo finito.
- ▶ La *cardinalidad* (o *cardinalidad grupoidal*, o *cardinalidad homotópica*) de un grupoide compacto es el número racional

$$|X| := \sum_{x \in \pi_0 X} \frac{1}{|\text{Aut}(x)|}$$

donde $|\text{Aut}(x)|$ denota el orden del grupo de vértice en x .

- ▶ Si X es un conjunto finito considerado como grupoide, entonces la cardinalidad del grupoide coincide con la cardinalidad del conjunto.

- ▶ Si X es un conjunto finito considerado como grupoide, entonces la cardinalidad del grupoide coincide con la cardinalidad del conjunto.
- ▶ If G es un grupo considerado como grupoide con un solo objeto, entonces la cardinalidad del grupoide es la inversa del orden del grupo.

- ▶ Si X es un conjunto finito considerado como grupoide, entonces la cardinalidad del grupoide coincide con la cardinalidad del conjunto.
- ▶ If G es un grupo considerado como grupoide con un solo objeto, entonces la cardinalidad del grupoide es la inversa del orden del grupo.
- ▶ La cardinalidad grupoidal es compatible con la suma, el producto y las potencias de grupoides.

$$|X + Y| = |X| + |Y|$$

$$|X \times Y| = |X| \times |Y|$$

$$|\mathbf{Grpd}(S, X)| = |X|^{|S|} \quad (S \in \mathbf{FinSet})$$

tal y como sucede con los conjuntos finitos.

- ▶ Sea S un grupoide compacto y G un grupo finito. Dada una acción de G en S , se cumple

$$|S/G| = |S|/|G|.$$

- ▶ Sea B un grupoide tal que $\text{Aut}(b)$ sea finito para todo $b \in B$.

Cardinalidad formal

- ▶ Sea B un grupoide tal que $\text{Aut}(b)$ sea finito para todo $b \in B$.
- ▶ Sea $X \rightarrow B$ un morfismo de grupoides con fibras compactas.

Cardinalidad formal

- ▶ Sea B un grupoide tal que $\text{Aut}(b)$ sea finito para todo $b \in B$.
- ▶ Sea $X \rightarrow B$ un morfismo de grupoides con fibras compactas.
- ▶ Consideremos el espacio vectorial generado por los símbolos δ_b para $b \in \pi_0(B)$.

Cardinalidad formal

- ▶ Sea B un grupoide tal que $\text{Aut}(b)$ sea finito para todo $b \in B$.
- ▶ Sea $X \rightarrow B$ un morfismo de grupoides con fibras compactas.
- ▶ Consideremos el espacio vectorial generado por los símbolos δ_b para $b \in \pi_0(B)$.
- ▶ La *cardinalidad formal de X sobre B* es el elemento de este espacio dado por

$$|X|_B := \sum_{b \in \pi_0 B} |X_b| / |\text{Aut}(b)| \cdot \delta_b.$$

Cardinalidad formal

- ▶ Sea B un grupoide tal que $\text{Aut}(b)$ sea finito para todo $b \in B$.
- ▶ Sea $X \rightarrow B$ un morfismo de grupoides con fibras compactas.
- ▶ Consideremos el espacio vectorial generado por los símbolos δ_b para $b \in \pi_0(B)$.
- ▶ La *cardinalidad formal de X sobre B* es el elemento de este espacio dado por

$$|X|_B := \sum_{b \in \pi_0 B} |X_b| / |\text{Aut}(b)| \cdot \delta_b.$$

- ▶ Si $B = B_1 \times B_2$ es un grupoide producto, usaremos los símbolos

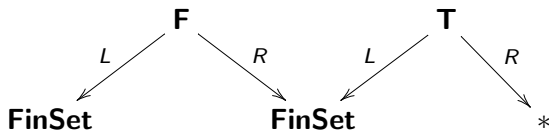
$$\delta_{(b_1, b_2)} \quad \text{as} \quad b_1 \otimes b_2$$

Los grupoides de bosques y árboles con podas

- ▶ Sean \mathbf{T} y \mathbf{F} los grupoides de árboles y bosques respectivamente.

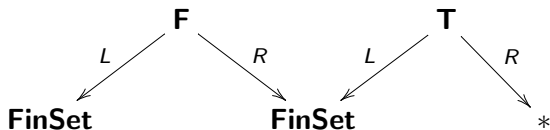
Los grupoides de bosques y árboles con podas

- ▶ Sean \mathbf{T} y \mathbf{F} los grupoides de árboles y bosques respectivamente.
- ▶ Tomando los conjuntos de hojas o de raíces da los morfismos



Los grupoides de bosques y árboles con podas

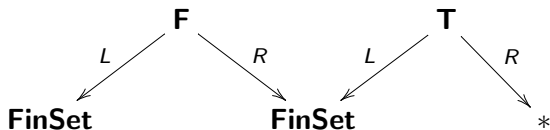
- ▶ Sean \mathbf{T} y \mathbf{F} los grupoides de árboles y bosques respectivamente.
- ▶ Tomando los conjuntos de hojas o de raíces de los morfismos



- ▶ Las fibras (de los tres primeros) se llaman ${}_n\mathbf{F}$, \mathbf{F}_n , ${}_n\mathbf{T}$.

Los grupoides de bosques y árboles con podas

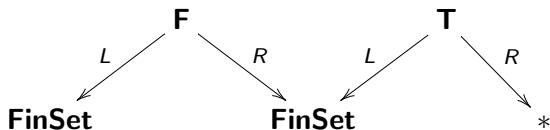
- ▶ Sean \mathbf{T} y \mathbf{F} los grupoides de árboles y bosques respectivamente.
- ▶ Tomando los conjuntos de hojas o de raíces da los morfismos



- ▶ Las fibras (de los tres primeros) se llaman ${}_n\mathbf{F}$, \mathbf{F}_n , ${}_n\mathbf{T}$.
- ▶ Sea \mathbf{C} el *grupoide de árboles y podas*, con

Los grupoides de bosques y árboles con podas

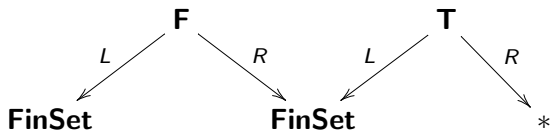
- ▶ Sean \mathbf{T} y \mathbf{F} los grupoides de árboles y bosques respectivamente.
- ▶ Tomando los conjuntos de hojas o de raíces da los morfismos



- ▶ Las fibras (de los tres primeros) se llaman ${}_n\mathbf{F}$, \mathbf{F}_n , ${}_n\mathbf{T}$.
- ▶ Sea \mathbf{C} el *grupoide de árboles y podas*, con
 - ▶ *Objetos*: inclusiones de árboles que preservan la raíz, $S \hookrightarrow T$

Los grupoides de bosques y árboles con podas

- ▶ Sean \mathbf{T} y \mathbf{F} los grupoides de árboles y bosques respectivamente.
- ▶ Tomando los conjuntos de hojas o de raíces da los morfismos



- ▶ Las fibras (de los tres primeros) se llaman ${}_n\mathbf{F}$, \mathbf{F}_n , ${}_n\mathbf{T}$.
- ▶ Sea \mathbf{C} el *grupoide de árboles y podas*, con
 - ▶ *Objetos*: inclusiones de árboles que preservan la raíz, $S \hookrightarrow T$
 - ▶ *Morfismos*: isomorfismos entre dichas inclusiones

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\tau} & T' \\ \uparrow & \cong & \uparrow \\ S & \xrightarrow{\rho} & S' \end{array}$$

Lema del doble recuento para árboles y podas

- Existen dos proyecciones $\mathbf{T} \xleftarrow{m} \mathbf{C} \xrightarrow{r} \mathbf{T}$

$$\left(T \xrightarrow{\cong} T' \right) \xleftarrow{m} \left(\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\cong} & T' \\ \uparrow & & \uparrow \\ S & \xrightarrow{\cong} & S' \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(S \xrightarrow{\cong} S' \right)$$

Lema del doble recuento para árboles y podas

- ▶ Existen dos proyecciones $\mathbf{T} \xleftarrow{m} \mathbf{C} \xrightarrow{r} \mathbf{T}$

$$\left(T \xrightarrow{\cong} T' \right) \xleftarrow{m} \left(\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\cong} & T' \\ \uparrow & & \uparrow \\ S & \xrightarrow{\cong} & S' \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(S \xrightarrow{\cong} S' \right)$$

- ▶ Por lo tanto, hay dos equivalencias de grupoides

$$\int_{T \in \mathbf{T}} {}_T \mathbf{C} \simeq \mathbf{C} \simeq \int_{S \in \mathbf{T}} \mathbf{C}_S$$

where ${}_T \mathbf{C}$, \mathbf{C}_S are the fibres of m, r over $T, S \in \mathbf{T}$.

Lema del doble recuento para árboles y podas

- ▶ Existen dos proyecciones $\mathbf{T} \xleftarrow{m} \mathbf{C} \xrightarrow{r} \mathbf{T}$

$$\left(T \xrightarrow{\cong} T' \right) \xleftarrow{m} \left(\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\cong} & T' \\ \uparrow & & \uparrow \\ S & \xrightarrow{\cong} & S' \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(S \xrightarrow{\cong} S' \right)$$

- ▶ Por lo tanto, hay dos equivalencias de grupoides

$$\int_{T \in \mathbf{T}} {}_T \mathbf{C} \simeq \mathbf{C} \simeq \int_{S \in \mathbf{T}} \mathbf{C}_S$$

where ${}_T \mathbf{C}$, \mathbf{C}_S are the fibres of m, r over $T, S \in \mathbf{T}$.

- ▶ Para cualquier árbol T la fibra ${}_T \mathbf{C}$ es un grupoide *discreto*: es equivalente al conjunto $\text{cut}(T)$ de podas de T .

El grupoide *pullback* homotópico $\mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T}$

- ▶ Recordemos los morfismos de grupoides

$$R : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{FinSet}, \quad L : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{FinSet}$$

$R(P)$ = conjunto de raíces de un bosque P ,
 $L(S)$ = conjunto de hojas de un árbol S .

El grupoide *pullback* homotópico $\mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T}$

- ▶ Recordemos los morfismos de grupoides

$$R : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{FinSet}, \quad L : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{FinSet}$$

$R(P)$ = conjunto de raíces de un bosque P ,
 $L(S)$ = conjunto de hojas de un árbol S .

- ▶ Consideremos el grupoide *pullback* homotópico

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T} & \longrightarrow & \mathbf{T} \\ \downarrow & & \downarrow L \\ \mathbf{F} & \xrightarrow{R} & \mathbf{FinSet} \end{array}$$

El grupoide *pullback* homotópico $\mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T}$

- ▶ Recordemos los morfismos de grupoides

$$R : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{FinSet}, \quad L : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{FinSet}$$

$R(P)$ = conjunto de raíces de un bosque P ,
 $L(S)$ = conjunto de hojas de un árbol S .

- ▶ Consideremos el grupoide *pullback* homotópico

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T} & \longrightarrow & \mathbf{T} \\ \downarrow & & \downarrow L \\ \mathbf{F} & \xrightarrow{R} & \mathbf{FinSet} \end{array}$$

- ▶ *Objetos*: $(P, S, R(P) \stackrel{\lambda}{\cong} L(S))$ con P bosque y S árbol,

El grupoide *pullback* homotópico $\mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T}$

- ▶ Recordemos los morfismos de grupoides

$$R : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{FinSet}, \quad L : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{FinSet}$$

$R(P)$ = conjunto de raíces de un bosque P ,
 $L(S)$ = conjunto de hojas de un árbol S .

- ▶ Consideremos el grupoide *pullback* homotópico

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T} & \longrightarrow & \mathbf{T} \\ \downarrow & & \downarrow L \\ \mathbf{F} & \xrightarrow{R} & \mathbf{FinSet} \end{array}$$

- ▶ *Objetos*: $(P, S, R(P) \cong L(S))$ con P bosque y S árbol,
- ▶ *Morfismos* $(P, S, \lambda) \rightarrow (P', S', \lambda')$: pares $(P \cong P', S \cong S')$ compatibles con las biyecciones λ, λ' , es decir, $L(\sigma) \circ \lambda = \lambda' \circ R(\pi)$.

El grupoide *pullback* homotópico $\mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T}$

- ▶ Recordemos los morfismos de grupoides

$$R : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{FinSet}, \quad L : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{FinSet}$$

$R(P)$ = conjunto de raíces de un bosque P ,
 $L(S)$ = conjunto de hojas de un árbol S .

- ▶ Consideremos el grupoide *pullback* homotópico

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T} & \longrightarrow & \mathbf{T} \\ \downarrow & & \downarrow L \\ \mathbf{F} & \xrightarrow{R} & \mathbf{FinSet} \end{array}$$

- ▶ *Objetos*: $(P, S, R(P) \cong L(S))$ con P bosque y S árbol,
- ▶ *Morfismos* $(P, S, \lambda) \rightarrow (P', S', \lambda')$: pares $(P \cong P', S \cong S')$ compatibles con las biyecciones λ, λ' , es decir, $L(\sigma) \circ \lambda = \lambda' \circ R(\pi)$.
- ▶ Necesitamos también la **fibra** sobre un árbol S .

El grupoide *pullback* homotópico $\mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T}$

- ▶ Recordemos los morfismos de grupoides

$$R : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{FinSet}, \quad L : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{FinSet}$$

$R(P)$ = conjunto de raíces de un bosque P ,
 $L(S)$ = conjunto de hojas de un árbol S .

- ▶ Consideremos el grupoide *pullback* homotópico

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T})_S & \longrightarrow & \mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T} & \longrightarrow & \mathbf{T} \\ & & \downarrow & & \downarrow L \\ & & \mathbf{F} & \xrightarrow{R} & \mathbf{FinSet} \end{array}$$

- ▶ *Objetos*: $(P, S, R(P) \cong L(S))$ con P bosque y S árbol,
- ▶ *Morfismos* $(P, S, \lambda) \rightarrow (P', S', \lambda')$: pares $(P \cong P', S \cong S')$ compatibles con las biyecciones λ, λ' , es decir, $L(\sigma) \circ \lambda = \lambda' \circ R(\pi)$.
- ▶ Necesitamos también la **fibra** sobre un árbol S .

El grupoide *pullback* homotópico $\mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T}$

- ▶ Recordemos los morfismos de grupoides

$$R : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{FinSet}, \quad L : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{FinSet}$$

$R(P)$ = conjunto de raíces de un bosque P ,

$L(S)$ = conjunto de hojas de un árbol S .

- ▶ Consideremos el grupoide *pullback* homotópico

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T})_S & \longrightarrow & \mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T} & \longrightarrow & \mathbf{T} \\ \cong \downarrow & & \downarrow & & \downarrow L \\ \mathbf{F}_{LS} & \longrightarrow & \mathbf{F} & \xrightarrow{R} & \mathbf{FinSet} \end{array}$$

- ▶ *Objetos*: $(P, S, R(P) \cong L(S))$ con P bosque y S árbol,
- ▶ *Morfismos* $(P, S, \lambda) \rightarrow (P', S', \lambda')$: pares $(P \xrightarrow{\cong} P', S \xrightarrow{\cong} S')$ compatibles con las biyecciones λ, λ' , es decir, $L(\sigma) \circ \lambda = \lambda' \circ R(\pi)$.
- ▶ Necesitamos también la **fibra** sobre un árbol S .

El lema clave

Lema

Existe una equivalencia de grupoides

$$\mathbf{C} \xrightarrow{\cong} \mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T}$$
$$(S \rightrightarrows T) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{podar}} \\ \xleftarrow{\text{injertar}} \end{array} (P = (P_\rho)_{\rho \in RP}, S, \lambda : RP \cong LS)$$

El lema clave

Lema

Existe una equivalencia de grupoides

$$\mathbf{C} \xrightarrow{\cong} \mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T}$$
$$(S \rightrightarrows T) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{podar}} \\ \xleftarrow{\text{injertar}} \end{array} (P = (P_\rho)_{\rho \in RP}, S, \lambda : RP \cong LS)$$

Idea de la demostración

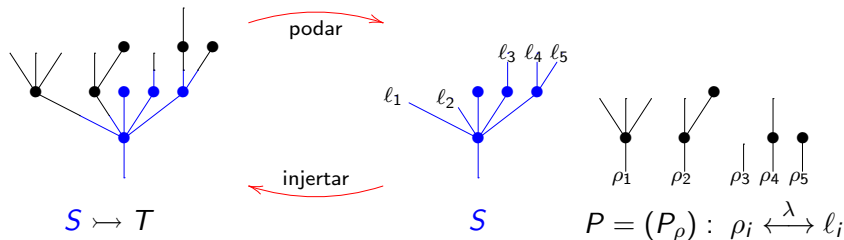
El lema clave

Lema

Existe una equivalencia de grupoides

$$\mathbf{C} \xrightarrow{\cong} \mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T}$$
$$(S \rightrightarrows T) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{podar}} \\ \xleftarrow{\text{injertar}} \end{array} (P = (P_\rho)_{\rho \in RP}, S, \lambda : RP \cong LS)$$

Idea de la demostración



Las fibras sobre un subárbol fijado S

- ▶ Hemos identificado las fibras del *pullback* homotópico

$$(\mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T})_S \simeq \mathbf{F}_{LS}$$

Las fibras sobre un subárbol fijado S

- ▶ Hemos identificado las fibras del *pullback* homotópico

$$(\mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T})_S \simeq \mathbf{F}_{LS}$$

- ▶ Por lo tanto, por el lema clave,

$$\mathbf{C}_S \simeq \mathbf{F}_{LS}$$

Las fibras sobre un subárbol fijado S

- ▶ Hemos identificado las fibras del *pullback* homotópico

$$(\mathbf{F} \times_{\mathbf{FinSet}} \mathbf{T})_S \simeq \mathbf{F}_{LS}$$

- ▶ Por lo tanto, por el lema clave,

$$\mathbf{C}_S \simeq \mathbf{F}_{LS}$$

- ▶ Por el lema de recuento doble,

$$\int_T \text{cut}(T) \simeq \int_T T \mathbf{C} \simeq \mathbf{C} \simeq \int_{S \in \mathbf{T}} \mathbf{C}_S \simeq \int_{S \in \mathbf{T}} \mathbf{F}_{LS}$$

Aplicación del principio de Fubini

- ▶ Ahora podemos considerar las diversas fibras según la composición

$$\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{T} \xrightarrow{L} \mathbf{FinSet}$$

Aplicación del principio de Fubini

- ▶ Ahora podemos considerar las diversas fibras según la composición

$$\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{T} \xrightarrow{L} \mathbf{FinSet}$$

- ▶ Por lo tanto, se tiene

$$\int_T \text{cut}(T) \simeq \mathbf{C} \simeq \int_S \mathbf{C}_S \quad \text{doble recuento}$$

Aplicación del principio de Fubini

- ▶ Ahora podemos considerar las diversas fibras según la composición

$$\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{T} \xrightarrow{L} \mathbf{FinSet}$$

- ▶ Por lo tanto, se tiene

$$\int_T \text{cut}(T) \simeq \mathbf{C} \simeq \int_S \mathbf{C}_S \quad \text{doble recuento}$$
$$\simeq \int_S \mathbf{F}_{LS} \quad \text{lema clave}$$

Aplicación del principio de Fubini

- ▶ Ahora podemos considerar las diversas fibras según la composición

$$\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{T} \xrightarrow{L} \mathbf{FinSet}$$

- ▶ Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} \int_T \text{cut}(T) &\simeq \mathbf{C} \simeq \int_S \mathbf{C}_S && \text{doble recuento} \\ &\simeq \int_S \mathbf{F}_{LS} && \text{lema clave} \\ &\simeq \int_n \int_{S \in_n \mathbf{T}} \mathbf{F}_n && \text{Fubini} \end{aligned}$$

Aplicación del principio de Fubini

- ▶ Ahora podemos considerar las diversas fibras según la composición

$$\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{T} \xrightarrow{L} \mathbf{FinSet}$$

- ▶ Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} \int_T \text{cut}(T) &\simeq \mathbf{C} \simeq \int_S \mathbf{C}_S && \text{doble recuento} \\ &\simeq \int_S \mathbf{F}_{LS} && \text{lema clave} \\ &\simeq \int_n \int_{S \in {}_n\mathbf{T}} \mathbf{F}_n && \text{Fubini} \\ &\simeq \int_n \mathbf{F}_n \times {}_n\mathbf{T} && \text{integral de una constante} \end{aligned}$$

- ▶ Esta es la versión para grupoides del teorema de Faà di Bruno.

Aplicación del principio de Fubini

- ▶ Ahora podemos considerar las diversas fibras según la composición

$$\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{T} \xrightarrow{L} \mathbf{FinSet}$$

- ▶ Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} \int_T \text{cut}(T) &\simeq \mathbf{C} \simeq \int_S \mathbf{C}_S && \text{doble recuento} \\ &\simeq \int_S \mathbf{F}_{LS} && \text{lema clave} \\ &\simeq \int_n \int_{S \in_n \mathbf{T}} \mathbf{F}_n && \text{Fubini} \\ &\simeq \int_n \mathbf{F}_n \times_n \mathbf{T} && \text{integral de una constante} \end{aligned}$$

- ▶ Esta es la versión para grupoides del teorema de Faà di Bruno.
- ▶ Es una equivalencia de grupoides sobre $\mathbf{F} \times \mathbf{T}$.

Hacia la fórmula de Faà di Bruno

Por lo tanto, hemos demostrado

Teorema

$$\int_{T \in \mathbf{T}} \text{cut}(T) \simeq \int_{n \in \mathbf{FinSet}} \mathbf{F}_n \times {}_n\mathbf{T}$$

- ▶ Ambos lados son grupoides sobre $\mathbf{F} \times \mathbf{T}$.

Hacia la fórmula de Faà di Bruno

Por lo tanto, hemos demostrado

Teorema

$$\int_{T \in \mathbf{T}} \text{cut}(T) \simeq \int_{n \in \mathbf{FinSet}} \mathbf{F}_n \times_n \mathbf{T}$$

- ▶ Ambos lados son grupoides sobre $\mathbf{F} \times \mathbf{T}$.
- ▶ La cardinalidad formal del conjunto $\text{cut}(T)$ es

$$|\text{cut}(T)| = \sum_{c \in \text{cut}(T)} P_c \otimes S_c$$

Hacia la fórmula de Faà di Bruno

Por lo tanto, hemos demostrado

Teorema

$$\int_{T \in \mathbf{T}} \text{cut}(T) \simeq \int_{n \in \mathbf{FinSet}} \mathbf{F}_n \times {}_n\mathbf{T}$$

- ▶ Ambos lados son grupoides sobre $\mathbf{F} \times \mathbf{T}$.
- ▶ La cardinalidad formal del conjunto $\text{cut}(T)$ es

$$|\text{cut}(T)| = \sum_{c \in \text{cut}(T)} P_c \otimes S_c$$

- ▶ Por otra parte, la cardinalidad formal de $\mathbf{F}_n \times {}_n\mathbf{T}$ es

$$|\mathbf{F}_n \times {}_n\mathbf{T}| = |\mathbf{T}|^n \otimes |{}_n\mathbf{T}| = G^n \otimes G_n$$

Teorema: La fórmula de Faà di Bruno

Por lo tanto

$$\sum_{T \in \pi_0 \mathbf{T}} \sum_{c \in \text{cut}(T)} P_c \otimes S_c / |\text{Aut}(T)| = \sum_{n \in \pi_0 \mathbf{FinSet}} G^n \otimes G_n / |\text{Aut}(n)|$$

Es decir,

$$\sum_{T \in \pi_0 \mathbf{T}} \Delta(T) / |\text{Aut}(T)| = \sum_n G^n \otimes g_n$$

Por lo tanto, hemos demostrado

Teorema: La fórmula de Faà di Bruno

$$\Delta(G) = \sum_n G^n \otimes g_n$$