Funcions modulars associades a classes de cobordisme de varietats

Maria Immaculada Gálvez i Carrillo

Funcions modulars associades a classes de cobordisme de varietats

Maria Immaculada Gálvez i Carrillo

Treball de Recerca de Tercer Cicle
presentat al Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona

Novembre de 1996

Director: Dr. Carles Casacuberta i Vergés

Índex

0 Introducció

El primer capítol del treball és un recordatori de definicions i resultats coneguts que farem servir més endavant, presentats de la manera més breu possible. Hi són definides les varietats spin i string, així com els anells de cobordisme amb què treballarem. Segueix una exposició un xic prolixa sobre gèneres de Hirzebruch, classes característiques i successions multiplicatives, que té com a missió fer més planera la lectura del que segueix, tot fixant una notació i un punt de vista d'entre els molts que conviuen amb relatiu èxit a la literatura sobre el tema. En aquest context, fem la nostra presentació de la sèrie característica d'un gènere i del seu logaritme. El mateix es pot dir, fins i tot amb més raó, del que segueix sobre formes modulars: només hi hem volgut posar allò que ens ha de servir. Ja en aquest capítol presentem els gèneres el·líptics i breument recordem el seu paper a les teories de cohomologia generalitzades.

El segon capítol està completament dedicat a l'estudi del gènere de Witten, definit a l'anell de cobordisme de les varietats diferenciables orientades. Aquesta és la part del treball que conté algunes aportacions originals. Hi comencem desenvolupant amb detall alguns resultats elementals i ben coneguts sobre les particions i els polinomis simètrics, per tal de fer més comprensible el camí del raonament posterior, ja que aquestes són eines tècniques omnipresents després. El gènere de Witten pren valors al que Zagier anomena l'anell de formes quasimodulars. El gènere de Witten d'una varietat és una sèrie de potències en una variable complexa q, el significat geomètric de la qual és esbrinat més endavant. Segueix a la definició del gènere de Witten tota una exposició de fórmules per al seu càlcul, que apliquem a les varietats orientades en general i spin en particular, escollint diferents bases, cadascuna de les quals fa palès algun aspecte interessant. Considerem els espais projectius complexos i quaterniònics, les varietats de Milnor i les interseccions completes. Els teoremes d'aquest capítol estableixen només dos aspectes parcials del que òbviament caldria inscriure en un context molt general. Hi ha una sistema de varietats generadores per a Ω_*^{SO}, les varietats de Milnor, en les quals el gènere de Witten té un nombre de coeficients nuls al començament del seu desenvolupament de Fourier, que depèn de la dimensió de la varietat. Gràcies a la facilitat per al desenvolupament dels càlculs, vàrem conjecturar l'existència d'una proporcionalitat a $\mathbf{Q}$ entre els gèneres d'unes certes bases. La demostració d'aquest fet és encara massa tècnica, tot i que empra fortament, com no podia ésser d'altra manera, la relació amb la funció $\wp$ de Weierstrass de la sèrie virtual del gènere de Witten per a la línia projectiva quaterniònica. Tot això fa palesa la necessitat de considerar l'objecte estable $\mathbf{HP}^\infty$. D'aquests resultats, moltes ampliacions i observacions són possibles, que no són aquí presents per manca de temps.

Segueix un esbós del que hauria d'ésser un treball més extens sobre les característiques de la imatge graduada del gènere de Witten i del seu nucli i sobre les aplicacions entre anells de cobordisme que se'n deriven.

La tercera part glossa els resultats i posa la feina feta en context, tot deixant obertes qüestions i desenvolupaments que ens portarien massa enllà. En aquesta tercera part donem també una succinta situació del significat físic del gènere de Witten i algunes aplicacions. La quarta part comença un intent de presentació més rigorosa del que Witten va fer heurísticament, basat en unes classes que va impartir Haynes Miller l'any 1995.

Els primers exemples que vàrem calcular eren els corresponents als espais projectius. Dels diferents mètodes que vàrem assajar per al càlcul de gèneres de Witten i de la seva comparació es pot dir que va néixer el treball. Tanmateix, hauria estat impossible d'arribar a cap conclusió sense l'evidència computacional que els programes per a Maple de l'Andy Tonks varen proveir. Vull destacar aquest aspecte del treball perquè ens ha permès fer matemàtica experimental però des d'un punt de vista que és també una tradició en el món de la topologia, de la qual és possible gaudir en els vells articles de Borel i Hirzebruch, en el llibre clàssic de Stong per a la teoria de cobordisme, en articles com aquell on Landweber contribuiex a reviscolar el tema (*Circle actions on Spin manifolds and characteristic numbers*), en molta de l'obra de Milnor, en tota la de Zagier i més recentment en els treballs de Gerald Höhn, Rainer Jung i Anand Dessai.

Una curta reflexió intel·ligent convencerà al lector que poca cosa de nou profund hi ha en aquest treball, i un xic de temps li farà possiblement palesa l'existència de maneres menys embolicades d'arribar als mateixos resultats. Tanmateix, aquest ha d'ésser un treball d'iniciació a la recerca i per tant més que potser en cap altre cas un treball que cal continuar. No sé si tots els treballs de recerca han estat tan útils per als que els han realitzat com aquest ho ha estat per a mi, ni tan gratificants pel que fa a l'experiència de viure la matemàtica en acció. Per la meva formació filosòfica i per la meva condició d'investigadora a temps parcial, no deixa de bocabadar-me l'experiència constant de la realitat matemàtica.

Agraïments

Aquest treball ha comptat amb l'ajuda i la col·laboració injustificada de molts individus i institucions, sense els quals no hagués estat possible.

Entre les persones, en Carles Casacuberta ha de rebre tot el meu agraïment, ja que és el responsable de tots els aspectes positius que aquest treball pugui presentar. No cal dir que de la resta jo sóc l'única responsable. D'altra banda, sense la col·laboració de l'Andy Tonks en tots els aspectes, el treball hauria estat molt més feixuc i lleig. Atribuïm-li tot el mèrit que, en una recerca experimental com ha estat aquesta, pertoca als programes i càlculs en què amb tanta paciència ha treballat amb mi. Vull dir a tots dos que tota la feina que hi han posat no quedarà aquí, ja que dóna per a molt més.

És al Centre de Recerca Matemàtica, a través del seu director, Manuel Castellet, a qui he d'agrair l'oportunitat d'iniciar-me en la recerca matemàtica en el context d'una línia de treball que m'havia il·lusionat des que tinc ús de raó matemàtica: allà on es troben la topologia i la geometria amb la teoria de grups i girant un ull cap a la física. En aquell moment, jo ignorava que moltes accions de grups s'expressen o més ben dit s'amaguen a les funcions clàssiques de la teoria de nombres. Li dec a en José Miguel Echarri la paciència de fer-me un fantàstic curs de teoria de nombres ad hoc per a mi sola durant l'any 1994 (i també a l'Enric Nart i en Paulo Ribenboim).

El CRM va tenir a bé incloure'm a la xarxa ERBCHRXCT 940441 de la Comunitat Europea, al suport de la qual dec haver pogut assistir l'any 1995, a l'Institut Max Planck de Bonn, al congrés sobre Cohomologia El·líptica on no només vaig tenir l'oportunitat de conèixer en persona Friedrich Hirzebruch i Don Zagier, sinó que vaig poder posar-me en contacte amb l'últim crit en el tema. Igualment, vull agrair les innumerables atencions que amb mi ha tingut el CRM i molt especialment la Consol i la Maria en tot moment durant el curs de Cohomologia El·líptica de l'any 1995 i altres cursos, i posteriorment posant a la meva disposició un despatx durant el calorós estiu de 1995.

Tampoc hagués estat possible aquest treball sense els consells de Charles Thomas i Haynes Miller i tot el material que ens varen proporcionar.

Mereixen el meu reconeixement el Departament de Matemàtiques de la UAB i en particular el grup de topologia algebraica per la paciència amb mi demostrada. Als topòlegs els vull agrair en particular la possibilitat que em varen donar de participar activament en els seminaris dels cursos 1994–1995 i 1995–1996. El Departament ha fet també possible que rebéssim la visita de Jorge Devoto, les orientacions i l'entusiasme de qui són fonamentals per a la direcció ulterior de les nostres recerques.

L'I.E.S. Jaume Mimó m'ha brindat no només la tranquil·litat material per escometre aquesta batalleta, sinó també un suport informàtic que hem d'agrair als desvetllaments del seu equip directiu. Això sense menystenir el recolçament, paciència i comprensió de companys i alumnes.

Vull igualment agrair a tots aquells que m'han fet arribar els seus treballs en aquest àmbit i que m'han donat els seus comentaris amables, com ara l'Anand Dessai i en Rainer Jung, aix com Gerald Höhn, Stephan Stolz, Serge Ochanine, Andy Baker, i molts d'altres. En Björn Schuster i l'Ian Leary han malgastat el seu temps amb mi, posant-me al dia del significat de la nostra línia de recerca en els contextos de l'homotopia estable i de la cohomologia de grups respectivament, i fent-me arribar les darreres novetats.

Acabaré donant alguna cosa més que les gràcies a la meva gent en general i a l'Albert i a l'Andy en particular. A ells vull dedicar-los aquest esbós del que un treball d'iniciació a la recerca hauria d'haver estat. Sé que no s'ho prendran malament.

1 Preliminars

1.1 Varietats spin i string

Si no s'especifica cap altra cosa, totes les varietats que considerarem en aquest treball seran varietats diferenciables sense vora, compactes, connexes i orientables. Sigui M una varietat de dimensió $n \geq 2$. El seu fibrat tangent $TM \downarrow M$ té com a grup d'estructura el grup lineal $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$. Si escollim una mètrica de Riemann a M, llavors podem considerar el fibrat principal $FM \downarrow M$ de les referències ortonormals amb grup d'estructura el grup ortogonal $\mathrm{O}(n)$. Sota la hipòtesi que M és orientable, es pot considerar el subfibrat de les referències ortonormals positives $F^+M \downarrow M$, amb grup d'estructura $\mathrm{SO}(n)$.

Des del punt de vista de la teoria d'homotopia, aquesta restricció del grup d'estructura es pot interpretar de la manera següent. El fibrat $FM \downarrow M$ és induït del fibrat universal sobre l'espai classificador $B\mathrm{O}(n)$ per una certa aplicació $f\colon M \to B\mathrm{O}(n)$. L'anell de cohomologia de $B\mathrm{O}(n)$ amb coeficients a $\mathbf{Z}/2$ és

$$H^*(B\mathrm{O}(n); \mathbf{Z}/2) \cong \mathbf{Z}/2[w_1, \ldots, w_n].$$

La varietat M és orientable si i només si la primera classe de Stiefel–Whitney de M, que es defineix com $w_1(M) = f^*(w_1)$, s'anul·la. En aquest cas, si pensem w_1 com una aplicació $B\mathrm{O}(n) \to K(\mathbf{Z}/2, 1)$, la composició $w_1 \circ f$ és nulhomòtopa i per tant f es pot elevar llevat d'homotopia al recobridor universal de $B\mathrm{O}(n)$, que és justament $B\mathrm{SO}(n)$. Designarem aquesta elevació per

$$f\langle 2\rangle\colon M \to B\mathrm{SO}(n).$$

Ara suposem que $n \geq 3$. Tenim $\pi_2(B\mathrm{SO}(n)) \cong \pi_1(\mathrm{SO}(n)) \cong \mathbf{Z}/2$ i

$$H^*(B\mathrm{SO}(n); \mathbf{Z}/2) \cong \mathbf{Z}/2[w_2, \ldots, w_n].$$

La varietat M s'anomena *spin* si la classe $w_2(M) = f\langle 2\rangle^*(w_2)$ s'anul·la. Aquesta condició equival al fet que l'aplicació $f\langle 2\rangle$ es pugui elevar llevat d'homotopia al recobridor 2-connex de $B\mathrm{O}(n)$, que de fet és 3-connex i és l'espai classificador del recobridor universal $\mathrm{Spin}(n)$ de $\mathrm{SO}(n)$. Cadascuna de les possibles elevacions

$$f\langle 4\rangle\colon M \to B\mathrm{Spin}(n).$$

indueix un fibrat principal $PM \downarrow M$ amb grup d'estructura $\mathrm{Spin}(n)$, que és un recobridor de dos fulls del fibrat de les referències ortonormals positives.

Es compleix $\pi_4(B\mathrm{Spin}(n)) \cong \mathbf{Z}$ i el grup $H^4(B\mathrm{Spin}(n);\mathbf{Z})$ està generat per una classe anomenada q_1; vegeu [31]. Si considerem la classe $q_1(M) = f\langle 4\rangle^*(q_1)$, llavors la classe $p_1(M) = 2q_1(M)$ coincideix amb la primera classe de Pontrjagin de M, i l'anul·lació de $q_1(M)$ és equivalent a l'existència d'alguna elevació llevat d'homotopia

$$f\langle 8\rangle \colon M \to B\mathrm{String}(n),$$

on $B\mathrm{String}(n)$ designa el recobridor 4-connex de $B\mathrm{O}(n)$, que de fet és 7-connex; el límit directe dels espais $B\mathrm{String}(n)$ s'acostuma a designar per $B\mathrm{O}\langle 8\rangle$, com a [96]. Si aquesta elevació de f és possible, llavors la varietat M s'anomena *string*, i cada classe d'homotopia d'elevacions es diu una estructura string a M. Podem construir un grup topològic (no compacte) $\mathrm{String}(n)$ tal que $B\mathrm{String}(n)$ sigui el seu espai classificador i que, com a grup, sigui una extensió de $\mathrm{Spin}(n)$,

$$1 \to G \to \mathrm{String}(n) \to \mathrm{Spin}(n) \to 1,$$

amb $G \simeq \mathbf{C}\mathrm{P}^\infty$; vegeu [169].

Els conceptes de varietat spin i varietat string es poden interpretar en termes de l'espai $\mathcal{L}M$ de llaços lliures diferenciables a M, és a dir, l'espai de les aplicacions diferenciables $S^1 \to M$ sense punt base. Si pensem $\mathcal{L}M$ com una varietat de dimensió infinita modelada per l'espai vectorial topològic $\mathcal{L}\mathbf{R}^n$ (vegeu [158]), llavors la condició que M sigui spin equival al fet que $\mathcal{L}M$ sigui orientable i la condició que M sigui string correspon al fet que $\mathcal{L}M$ sigui spin [137]. Això motiva el nom "string", per la relació existent amb la geometria spin de la varietat de dimensió infinita $\mathcal{L}M$ i les seves implicacions a la teoria de cordes.

1.2 Anells de cobordisme

Sigui M una varietat. Sigui $f\colon M \to B\mathrm{O}$ l'aplicació que classifica el fibrat tangent estable, on O denota el límit directe dels espais $\mathrm{O}(n)$. Si G és un grup topològic amb una aplicació $j\colon G \to \mathrm{O}$ (com per exemple SO, Spin, String, U, SU, etc), una G-estructura a M és una classe d'homotopia d'aplicacions $g\colon M \to BG$ tals que $Bj \circ g = f$. El conjunt Ω^G de classes de cobordisme de varietats amb G-estructura és un anell amb les operacions induïdes per la unió disjunta i el producte cartesià de varietats. És un anell graduat per la dimensió de les varietats. Per a cada G hi ha un espectre-anell MG tal que Ω^G és l'anell de coeficients de la teoria d'homologia associada a l'espectre,

$$\Omega_n^G \cong \pi_n(MG).$$

L'anell Ω^{SO} només conté 2-torsió, i es compleix:

$$\Omega^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbf{Q} \cong \Omega^{\mathrm{Spin}} \otimes \mathbf{Q} \cong \mathbf{Q}[\mathbf{C}\mathrm{P}^2, \mathbf{C}\mathrm{P}^4, \mathbf{C}\mathrm{P}^6, \ldots],$$

on $\mathbf{C}\mathrm{P}^{2k}$ denota (la classe de cobordisme orientat de) l'espai projectiu complex de dimensió real $4k$; vegeu [142, 18.9].

Una successió de varietats $M^4, M^8, M^{12}, M^{16}, \ldots$, on M^{4k} té dimensió $4k$, és una *base* de l'anell de cobordisme orientat si $\Omega^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbf{Q} \cong \mathbf{Q}[M^4, M^8, M^{12}, M^{16}, \ldots]$ com a anells graduats. Una base que farem servir molt és la successió $H_{3,0}, H_{3,2}, H_{3,4}, H_{3,6}, \ldots$ de varietats de Milnor, on $H_{i,j}$ és la subvarietat de $\mathbf{C}\mathrm{P}^i \times \mathbf{C}\mathrm{P}^j$ de codimensió 1 donada per l'equació $x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_ry_r = 0$ en coordenades homogènies, on $r = \min(i, j)$.

1.3 Gèneres de Hirzebruch

Sigui Λ una $\mathbf{Q}$-àlgebra commutativa. Un *gènere* (real) amb valors a Λ és un homomorfisme de $\mathbf{Q}$-àlgebres

$$\varphi \colon \Omega^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbf{Q} \to \Lambda.$$

Així doncs, podem pensar un gènere φ com una correspondència que assigna un element de l'anell Λ a cada varietat diferenciable M compacta i orientada, de manera que

- $\varphi(M_1) = \varphi(M_2)$ si M_1 i M_2 són SO-cobordants;
- $\varphi(M_1 \amalg M_2) = \varphi(M_1) + \varphi(M_2)$;
- $\varphi(M_1 \times M_2) = \varphi(M_1)\varphi(M_2)$.

Exemple 1.1 Si M és una varietat de dimensió $4n$, la *signatura* $\mathrm{sign}(M)$ és la signatura del cup-producte en dimensió $2n$ pensat com una forma bilineal simètrica $H^{2n}(M; \mathbf{Z}) \otimes H^{2n}(M; \mathbf{Z}) \to H^{4n}(M; \mathbf{Z})$. Si la dimensió de M no és múltiple de 4, llavors es defineix $\mathrm{sign}(M) = 0$. La signatura és un exemple d'un gènere amb valors a $\mathbf{Q}$ (de fet, $\mathrm{sign}(M)$ és un enter); vegeu [142, 19.3].

Hirzebruch va demostrar que la signatura d'una varietat es pot calcular a partir de les seves classes de Pontrjagin [142, 19.4]. Seguint el mateix model, es poden construir molts altres exemples de gèneres a partir de les classes de Pontrjagin de les varietats. De fet, tal com s'explicarà a continuació, tots els gèneres reals es poden calcular a partir d'elles. Hi ha una teoria anàloga de gèneres complexos, definits sobre l'anell de cobordisme unitari $\Omega^{\mathrm{U}} \otimes \mathbf{Q}$, que es poden calcular a partir de classes de Chern. Aquests gèneres complexos els tractarem amb menys detall, ja que no els farem servir de manera essencial en aquest treball.

1.4 Successions multiplicatives

Sigui Λ un anell commutatiu amb unitat (habitualment, $\mathbf{Q}$) i sigui $B^* = \bigoplus_{i\geq 0} B^i$ una Λ-àlgebra graduada, estrictament commutativa i amb unitat. L'exemple que farem servir més sovint és $B^i = H^{2i}(M;\mathbf{Q})$, on M és una varietat. Considerem el grup multiplicatiu de les sèries formals amb terme independent igual a 1,

$$B^\times = \left\{1 + b_1 + b_2 + \cdots \ , \ b_i \in B^i\right\}.$$

Sigui K una successió $\{K_r\}$ de polinomis amb coeficients a Λ i amb indeterminades x_i de grau i,

$$K_1\left(x_1\right),\ K_2\left(x_1, x_2\right), \ldots, K_r\left(x_1, x_2, \ldots, x_r\right), \ldots$$

on cada $K_r\left(x_1, x_2, \ldots, x_r\right)$ és homogeni de grau r. Aleshores la successió K actua sobre les sèries $b \in B^\times$ de la manera següent: donat un element $b = 1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$, definim un altre element $K(b)$ per

$$K(b) = 1 + K_1\left(b_1\right) + K_2\left(b_1, b_2\right) + \cdots + K_r\left(b_1, b_2, \ldots, b_r\right) + \cdots.$$

Una *successió multiplicativa* és una successió de polinomis $K = \{K_r\}$ del tipus que acabem de descriure, tal que per a qualsevol Λ-àlgebra B^* i elements $b, b' \in B^\times$ arbitraris, es compleix

$$K\left(bb'\right) = K\left(b\right) K\left(b'\right).$$

En particular, podem considerar la Λ-àlgebra $B^* = \Lambda[[t]]$, on t és de grau 1. Llavors els elements de $B^\times$ són les sèries de potències de la forma

$$P(t) = 1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \lambda_3 t^3 + \cdots, \qquad \lambda_i \in \Lambda.$$

Tal com es demostra a [142, 19.1], la correspondència que assigna a cada successió multiplicativa $K = \{K_r\}$ la sèrie

$$P(t) = K(1+t) = 1 + K_1(t) + K_2(t,0) + K_3(t,0,0) + \cdots$$

és bijectiva entre les successions multiplicatives sobre Λ i les sèries de potencies de $\Lambda[[t]]^\times$. La correspondència inversa es defineix de la manera següent. Considerem els polinomis simètrics elementals en les indeterminades $t_1, \ldots, t_n$ de grau 1,

$$\sigma_r(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_r}.$$

Aleshores, donada una sèrie de potències $P(t) = 1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \cdots \in \Lambda[[t]]^\times$, la successió multiplicativa $\{K_r\}$ associada ve determinada per l'expressió

$$\begin{aligned} P(t_1)\, P(t_2) \cdots P(t_n) &= 1 + K_1\,(\sigma_1) + K_2\,(\sigma_1, \sigma_2) + \cdots + K_n\,(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \\ &\quad + \text{termes de grau superior}, \end{aligned}$$

on cada K_r és homogeni de grau r, i l'expressió anterior està justificada pel fet que tot polinomi simètric es pot expressar en termes dels polinomis simètrics elementals.

1.5 Classes de Chern i de Pontrjagin

Sigui $E \downarrow M$ un fibrat vectorial complex de dimensió n sobre una varietat M, i sigui

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_n(E) \;\in\; H^{2*}(M; \mathbf{Q})^\times$$

la seva classe de Chern total. Pel principi d'escissió [103], podem suposar que tenim una descomposició del fibrat E en suma directa de fibrats de línia complexos,

$$E = \ell_1 \oplus \ell_2 \oplus \cdots \oplus \ell_n.$$

Les classes $x_j = c_1(\ell_j)$ (que en general *no* són classes de cohomologia a M) s'anomenen les *arrels formals* de $c(E)$. Com que la classe de Chern total d'una suma directa és el producte de les classes de Chern totals dels seus sumands, tenim

$$c(E) = \prod_{i=1}^{n} c(\ell_i) = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i)$$

i per tant les classes $c_r(E) \in H^{2r}(M; \mathbf{Q})$ coincideixen amb el resultat d'avaluar els polinomis simètrics elementals en les classes x_j,

$$c_r(E) = \sigma_r(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Sigui ara $E \downarrow M$ un fibrat vectorial real de dimensió $4n$. La seva classe de Pontrjagin total ve donada per

$$p(E) = 1 + p_1(E) + \cdots + p_n(E) \;\in\; H^{4*}(M; \mathbf{Q})^\times$$

on $p_i(E) = (-1)^i c_{2i}(E \otimes \mathbf{C})$. La descomposició de $E \otimes \mathbf{C}$ en fibrats de línia complexos pren la forma

$$E \otimes \mathbf{C} = \ell_1 \oplus \overline{\ell}_1 \oplus \ell_2 \oplus \overline{\ell}_2 \oplus \cdots \oplus \ell_{2n} \oplus \overline{\ell}_{2n},$$

on $\overline{\ell}_j$ és el fibrat conjugat de ℓ_j. Si diem $x_j = c_1(\ell_j)$ igual que abans, tenint en compte que $c_1(\overline{\ell}_j) = -c_1(\ell_j)$, obtenim

$$c(E \otimes \mathbf{C}) = \prod_{i=1}^{2n}(1 - x_i^2), \qquad\qquad p(E) = \prod_{i=1}^{2n}(1 + x_i^2),$$

i per tant les classes de Pontrjagin de E són iguals a

$$p_r(E) = \sigma_r(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{2n}^2).$$

1.6 Sèrie característica d'un gènere

Considerem un fibrat vectorial complex $E \downarrow M$ sobre una varietat M, i sigui $K = \{K_r\}$ una successió multiplicativa amb sèrie característica associada $P(x) = K(1+x)$. Aleshores la K-*classe total* $K(E)$ del fibrat E ve donada per $K(E) = K(c(E))$; és a dir,

$$K(E) = K_1(c_1) + K_2(c_1, c_2) + K_3(c_1, c_2, c_3) + \cdots,$$

on $c(E) = 1 + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots$ és la classe de Chern total del fibrat E.

Com que $c(E \oplus E') = c(E)c(E')$ i K és una successió multiplicativa, tenim que

$$K(E \oplus E') = K(E)K(E').$$

Si suposem que E té dimensió complexa n i designem per $x_1, \ldots, x_n$ les arrels formals de $c(E)$, obtindrem

$$K(E) = \prod_{i=1}^{n} K(1 + x_i) = P(x_1)\, P(x_2) \cdots P(x_n).$$

En particular, escollint $E = TM$, podem assignar a M el nombre $K(TM)[M]$, on $[M] \in H_{2n}(M; \mathbf{Q})$ és la classe fonamental. Aquesta correspondència defineix un gènere complex, per a qualsevol successió multiplicativa K.

Exemple 1.2 Considerem la sèrie de potències $\mathrm{td}(x) \in \mathbf{Q}[[x]]$ definida per

$$\mathrm{td}(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \cdots$$

amb successió multiplicativa associada $\mathrm{Td} = \{\mathrm{Td}_r\}$. Aleshores la *classe de Todd total* d'un fibrat complex $E \downarrow M$ de dimensió n és

$$\mathrm{Td}(E) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}}$$

on $x_1, \ldots, x_n$ són les arrels formals de $c(E)$. Si posem $c_i = c_i(E)$, tindrem

$$\begin{aligned}
\mathrm{Td}_1\left(c_1\right) &= \frac{1}{2} c_1 \\
\mathrm{Td}_2\left(c_1, c_2\right) &= \frac{1}{12}\left(c_2 + c_1^2\right) \\
\mathrm{Td}_3\left(c_1, c_2, c_3\right) &= \frac{1}{24} c_1 c_2 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Si M és una varietat complexa de dimensió complexa n, llavors el *gènere de Todd* de M es defineix avaluant la classe de Todd total del fibrat tangent $TM \downarrow M$ sobre la classe fonamental $[M] \in H_{2n}\left(M; \mathbf{Q}\right)$,

$$\mathrm{Td}\left(M\right) = \mathrm{Td}_n\left(TM\right)\left[M\right].$$

Anàlogament, si $E \downarrow M$ és un fibrat vectorial *real* sobre una varietat M, podem considerar una successió multiplicativa qualsevol $K = \{K_r\}$ amb sèrie característica associada $P(x)$. Aleshores la K-*classe total* $K(E)$ del fibrat E és $K(E) = K(p(E))$, on $p(E) = 1 + p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$ és la classe de Pontrjagin total del fibrat E. Si E té dimensió real $4n$, obtindrem

$$K(E) = \prod_{i=1}^{2n} K(1 + x_i^2) = P(x_1^2)\, P(x_2^2) \cdots P(x_{2n}^2),$$

on $\pm x_1, \ldots, \pm x_{2n}$ són les arrels formals de $c(E \otimes \mathbf{C})$. Quan es treballa amb gèneres reals, és habitual d'anomenar *sèrie característica* del gènere a la sèrie de potències parelles $Q(x) = P(x^2)$,

El gènere (real) associat a una successió multiplicativa K es defineix avaluant la K-classe del fibrat tangent sobre la classe fonamental de cada varietat,

$$\varphi(M) = K(TM)[M].$$

Exemple 1.3 Considerem la sèrie de potències $\hat{a}(x) \in \mathbf{Q}[[x]]$ definida per

$$\hat{a}(x) = \frac{\sqrt{x}/2}{\sinh\left(\sqrt{x}/2\right)} = 1 - \frac{1}{24}x + \frac{7}{5760}x^2 + \cdots$$

amb successió multiplicativa associada $\hat{A} = \{\hat{A}_r\}$. Aleshores la $\hat{A}$-*classe total* d'un fibrat real $E \downarrow M$ de dimensió $4n$ és

$$\hat{A}(E) = \hat{a}\left(x_1^2\right) \cdots \hat{a}\left(x_{2n}^2\right) = \prod_{j=1}^{2n} \frac{x_j/2}{\sinh\left(x_j/2\right)},$$

on $\pm x_1, \ldots, \pm x_{2n}$ són les arrels formals de $c(E \otimes \mathbf{C})$. Si escrivim $p_i = p_i(E)$, tindrem

$$\begin{aligned}
\hat{A}_1(p_1) &= -\frac{1}{24}p_1 \\
\hat{A}_2(p_1, p_2) &= \frac{1}{5760}\left(-4p_{2+}7p_1^2\right) \\
\hat{A}_3(p_1, p_2, p_3) &= \frac{1}{967680}\left(16p_3 - 44p_2p_1 + 31p_1^3\right) \\
&\cdots
\end{aligned}$$

A vegades també es considera la successió $\{A_r\} = \{16^r \hat{A}_r\}$, associada a $a(x) = \hat{a}(16x)$.

Si M és una varietat de dimensió $4n$, aleshores el $\hat{A}$-*gènere* de M ve definit per la $\hat{A}$-classe del fibrat tangent $TM \downarrow M$ avaluada sobre la classe $[M] \in H_{4n}(M; \mathbf{Q})$,

$$\hat{A}(M) = \hat{A}_n(TM)\,[M]\,.$$

Fixem-nos que

$$\frac{x}{(1-e^{-x})} \cdot \frac{-x}{(1-e^{x})} = -\left(\frac{x/2}{\sinh(x/2)}\right)^2,$$

i per tant les classes de Todd i $\hat{A}$ compleixen la relació

$$\mathrm{Td}(E \otimes \mathbf{C}) = \hat{A}(E)^2$$

per a qualsevol fibrat vectorial real E.

1.7 Logaritme d'un gènere

Sigui Λ un anell commutatiu amb unitat. A tota sèrie de potències parella $Q(x) = P(x^2)$ amb coeficients a Λ i terme independent igual a 1 li podem associar la sèrie senar

$$f(x) = \frac{x}{Q(x)}.$$

Si g designa la inversa formal de f (és a dir, satisfà $g(f(x)) = x$) i φ designa el gènere real associat a Q, llavors es compleix

$$g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\mathbf{C}\mathrm{P}^{2k})\frac{y^{2k+1}}{2k+1},$$

tal com es detalla a [90, 1.6]. Com que les classes de cobordisme dels espais $\mathbf{C}\mathrm{P}^{2k}$ amb $k \geq 1$ generen l'anell $\Omega^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbf{Q}$, la sèrie Q i el gènere φ es determinen mútuament.

En particular, hi ha una correspondència bijectiva entre els gèneres reals i les sèries de potències parelles $Q(x)$. La sèrie $g(y)$ s'anomena el *logaritme* del gènere φ.

Si posem

$$F(u,v) = f(g(u) + g(v)),$$

llavors F satisfà els axiomes d'una llei de grup formal. Això justifica el nom de "logaritme" que hem donat a g. La sèrie g es pot recuperar a partir de la llei de grup formal F a partir de l'expressió

$$\frac{\partial F(u,0)}{\partial v} = \frac{1}{g'(u)}.$$

També es considera la *funció de duplicació* h, donada per l'expressió

$$f(2x) = 2f(x)\, f'(x)\, h(f(x))$$

i que satisfà [90, 1.7]

$$h(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\mathbf{H}\mathrm{P}^k) y^{2k},$$

on $\mathbf{H}\mathrm{P}^k$ designa l'espai projectiu quaterniònic de dimensió real $4k$.

1.8 Gèneres el·líptics

Un gènere (real) φ és el·líptic si el seu logaritme té la forma

$$g(y) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1 - 2\delta t^2 + \varepsilon t^4}},$$

per a uns certs paràmetres δ, ε, o equivalentment si la seva funció de duplicació té la forma

$$h(y) = \frac{1}{1 - \varepsilon y^4}.$$

Per a tot gènere el·líptic φ es compleix $\delta = \varphi(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)$ i $\varepsilon = \varphi(\mathbf{H}\mathrm{P}^2)$.

Exemple 1.4 La signatura és un gènere el·líptic on $\delta = \varepsilon = 1$. El $\hat{A}$-gènere també és el·líptic amb $\delta = -1/8$, $\varepsilon = 0$.

Si es volen estudiar les propietats dels gèneres el·líptics, és natural pensar δ i ε com dos paràmetres linealment independents, i considerar un gènere el·líptic "universal" que prengui valors a l'anell $\mathbf{Q}[\delta, \varepsilon]$. Per tal de descriure explícitament la sèrie característica $Q(x)$ associada a aquest gènere universal i donar-li una interpretació geomètrica, convé representar $\mathbf{Q}[\delta, \varepsilon]$ en un anell de formes modulars, tal com s'explica a continuació.

1.9 Formes modulars

Sigui $\mathfrak{H}$ el semiplà superior obert. El grup $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ actua sobre $\mathfrak{H}$ com

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Una funció $f(\tau)$ holomorfa a $\mathfrak{H}$ es pot convertir en una funció holomorfa al disc unitat sense l'origen amb el canvi de variable $q = e^{2\pi i \tau}$. Observem que $q \to 0$ quan la part imaginària de τ tendeix cap a infinit. Aquesta funció al disc unitat sense l'origen admet una extensió holomorfa al disc si i només si és fitada a l'entorn de 0. En aquest cas tindrà un desenvolupament de Fourier $\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n$, i es diu que la funció f és holomorfa a l'infinit.

Sigui Γ un subgrup d'índex finit a $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Una funció $f\colon \mathfrak{H} \to \mathbf{C}$ és una *forma modular* respecte a Γ de pes n si f és holomorfa a $\mathfrak{H}$, holomorfa a cadascuna de les puntes del domini fonamental de Γ i satisfà

$$f(A\tau) = (c\tau + d)^n f(\tau)$$

per a tota $A \in \Gamma$. Aquesta darrera condició ens diu que f dóna lloc a una funció homogènia de grau $-n$ sobre l'espai dels reticles $L = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$. Concretament, $F(\mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2) = \omega_2^{-n} f(\omega_1/\omega_2)$ és una funció ben definida, de manera que podem pensar F com una funció del reticle L. Com a tal, satisfà la condició d'homogeneïtat $F(\lambda L) = \lambda^{-n} F(L)$ per a tot $\lambda \in \mathbf{C}$ i tot reticle L. Sempre que considerem un reticle $\mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ a $\mathbf{C}$ suposarem implícitament que ω_1 i ω_2 han estat ordenats de manera que la part imaginària de ω_1/ω_2 sigui positiva.

Sigui $M(\Gamma)$ l'anell generat per les formes modulars respecte a Γ, amb la suma i el producte ordinaris. Aquest és un anell graduat pel pes: si f té pes n i g té pes m, llavors fg té pes $n + m$. L'anell $M(\Gamma)$ serà designat només per M quan $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Les formes modulars que s'anul·len a totes les puntes del domini fonamental de Γ s'anomenen *cuspidals*. Quan Γ és tot $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, una forma modular f és cuspidal si i només si el seu desenvolupament de Fourier té el terme independent $c_0 = 0$.

A continuació descriurem algunes formes modulars per a $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ que utilitzarem en aquest treball.

- Tot reticle L té associada una *sèrie d'Eisenstein*

$$E_n(L) = \sum_{w \in L'} \frac{1}{w^n},$$

on fem servir la notació $L' = L \setminus \{0\}$. Si escrivim $L = \mathbf{Z}\tau + \mathbf{Z}$, llavors podem pensar E_n com una funció de $\tau \in \mathfrak{H}$. Com a tal, si $k \geq 2$, llavors E_{2k} és una forma modular de pes $2k$. Les sèries E_{2k+1} són idènticament zero. (Atenció: hem adoptat la notació de [148] per a les sèries E_n, que és diferent de la de [90].)

- Les *sèries d'Eisenstein normalitzades* es defineixen com

$$\begin{aligned} G_{2k} &= \frac{(2k-1)!}{2(2\pi i)^{2k}} E_{2k} \\ &= -\frac{B_{2k}}{4k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n, \end{aligned}$$

on $\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$ i els B_i són els nombres de Bernoulli, que venen donats per

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} x^i.$$

Aquestes sèries tenen els coeficients de Fourier racionals i per a $k \geq 2$ la sèrie G_{2k} és una forma modular de pes $2k$ (és important insistir que G_2 no és pas modular). Per exemple,

$$\begin{aligned} G_2 &= -\frac{1}{24} + q + 3\,q^2 + 4\,q^3 + 7\,q^4 + \cdots \\ G_4 &= \frac{1}{240} + q + 9\,q^2 + 28\,q^3 + 73\,q^4 + \cdots \\ G_6 &= -\frac{1}{504} + q + 33\,q^2 + 244\,q^3 + 1057\,q^4 + \cdots \end{aligned}$$

- La funció delta de Ramanujan

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{1728}((240\,G_4)^3 - (504\,G_6)^2)) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} \\ &= q - 24\,q^2 + 252\,q^3 - 1472\,q^4 + \cdots, \end{aligned}$$

que té pes 12 i és cuspidal. A més, no s'anul·la a cap punt de $\mathfrak{H}$. Els seus coeficients s'anomenen nombres de Ramanujan. Un problema obert important és decidir si són tots diferents de zero.

La funció j de Klein es defineix per

$$j = \frac{(240\,G_4)^3}{\Delta} = \frac{1}{q} + 744 + 196884\,q + 21493760\,q^2 + \cdots.$$

És holomorfa a $\mathfrak{H}$ i té un pol d'ordre 1 a l'infinit (és a dir, a $q = 0$). Està relacionada amb la teoria de representacions pel fet que el mínim de les dimensions de les representacions no trivials del monstre de Fischer–Griess és igual a 196883. La teoria que estudia els motius i les conseqüències d'aquesta coincidència s'anomena *moonshine*. La primera explicació la va donar Borcherds [36].

Les formes G_4 i G_6 són algebraicament independents, i de fet es compleix

$$M \cong \mathbf{C}[G_4, G_6]$$

com a àlgebres graduades. La conseqüència més important d'això és que l'espai vectorial complex M_{2k} de formes modulars de pes $2k$ té dimensió finita per a tot k i està generat per les formes $(G_4)^i(G_6)^j$ amb $4i + 6j = 2k$. Així obtenim relacions com per exemple

$$\begin{aligned} G_8 &= -\frac{4\,B_8}{B_4^2}\,(G_4)^2 = 120\,(G_4)^2 \\ G_{10} &= -\frac{24\,B_{10}}{5\,B_4 B_6}\,G_4 G_6 = \frac{5040}{11}\,G_4 G_6. \end{aligned}$$

Tal com es demostra a [148, 5.4], la dimensió de l'espai vectorial M_{2k} ve donada per

$$\dim_{\mathbf{C}}(M_{2k}) = \begin{cases} [k/6] & \text{si } k \equiv 1 \bmod 6 \\ [k/6] + 1 & \text{si } k \not\equiv 1 \bmod 6. \end{cases}$$

Proposició 1.5 *Una forma modular $f \in M_{2k}$, $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, q^n$, queda completament determinada pels coeficients c_n amb $n < \dim_{\mathbf{C}} M_{2k}$.*

Demostració: Si posem $d = \dim_{\mathbf{C}} M_{2k}$, llavors es compleix

$$M_{2k} = \bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathbf{C}[G_{2k-12i}\,\Delta^i].$$

Però Δ és cuspidal, i per tant la sèrie de Fourier de $G_{2k-12i}\,\Delta^i$ comença amb q^i. Així doncs, tot element de M_{2k} està determinat pels d primers coeficients. *qed*

1.10 L'anell de formes quasimodulars

Considerem l'anell graduat

$$N = \mathbf{C}[G_2, G_4, G_6],$$

on G_2 té grau 2 i per tant, com a espai vectorial complex,

$$N_{2k} = \mathbf{C}\left\langle (G_2)^c (G_4)^a (G_6)^b \;\mid\; 2c + 4a + 6b = 2k \right\rangle.$$

Aquest anell té la particularitat següent. Podem considerar l'operador diferencial

$$D = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{d}{d\tau}$$

a l'àlgebra de les funcions diferenciables $\mathfrak{H} \longrightarrow \mathbf{C}$. Amb el canvi de variable $q = e^{2\pi i\tau}$, $dq = 2\pi i\, q\, d\tau$, ens queda

$$D = q\,\frac{d}{dq}.$$

Aquest operador D és de fet un morfisme d'anells $N \to N$ que augmenta el grau en 2 unitats.

- Si $f \in N_{2k}$, aleshores $Df \in N_{2k+2}$. En particular,

$$DG_2 = \frac{5}{6}\,G_4 - 2\,(G_2)^2.$$

- Si $f \in M_{2k}$, aleshores $Df + 4kfG_2 \in M_{2k+2}$. En particular,

$$\begin{aligned} DG_4 &= \frac{7}{10}\,G_6 - 8\,G_2G_4, \\ DG_6 &= \frac{400}{7}\,(G_4)^2 - 12\,G_2G_6. \end{aligned}$$

Com a anell graduat, $N = \mathbf{C}[G_2, DG_2, D^2G_2]$. Això es dedueix de les expressions

$$DG_2 = \frac{5}{6}\,G_4 - 2\,(G_2)^2, \qquad D^2G_2 = \frac{7}{12}\,G_6 - 10\,G_2G_4 + 8(G_2)^3$$

$$G_4 = \frac{6}{5}\left(DG_2 + 2\,(G_2)^2\right), \qquad G_6 = \frac{12}{7}\left(D^2G_2 + 12\,G_2DG_2 + 16\,(G_2)^3\right).$$

L'acció de D en aquesta nova base queda determinada per

$$D^3G_2 = 36\,(DG_2)^2 - 24\,G_2D^2G_2.$$

1.11 Gènere el·líptic universal

Tot reticle $L = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ a $\mathbf{C}$ té associada una funció $\wp$ de Weierstrass,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in L'} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right),$$

on $L' = L \setminus \{0\}$. Aquesta funció $\wp$ i la seva derivada $\wp'$ són funcions el·líptiques respecte al reticle L; és a dir, satisfan $f(z+w) = f(z)$ per a tot $w \in L$. Per tant, podem pensar-les com funcions meromorfes sobre la corba el·líptica $\mathbf{C}/L$, que com a espai topològic és homeomorfa a un tor.

La funció $\wp$ té pols d'ordre 2 a tots els punts del reticle, i és una funció parella. Satisfà

$$\wp\,(\tau, z) \;\; = \;\; \frac{1}{z^2} + 2\sum_{k=2}^{\infty} G_{2k}\,(\tau)\,\frac{z^{2k-2}}{(2k-2)!}, \tag{1.1}$$

on $\tau \in \mathfrak{H}$ i $\wp(\tau, z)$ designa la funció $\wp(z)$ respecte al reticle $L = 2\pi i\tau\mathbf{Z} + 2\pi i\mathbf{Z}$. La funció $\wp$ satisfà una equació diferencial

$$\wp'(z)^2 \;\; = \;\; 4\,\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3,$$

on els coeficients g_2 i g_3 depenen del reticle. Es compleix $g_2 = 60\,E_4,\;\; g_3 = 140\,E_6$ i a més

$$\Delta = \frac{1}{(2\pi)^{12}}\left[(g_2)^3 - 27(g_3)^2\right],$$

on $(g_2)^3 - 27(g_3)^2$ és precisament el discriminant del polinomi $4x^3 - g_2x - g_3$. Com que la funció Δ no s'anul·la a cap punt de $\mathfrak{H}$, aquest polinomi no té mai zeros múltiples.

Els zeros de la derivada $\wp'(z)$ són els punts migs $\frac{1}{2}\omega_1$, $\frac{1}{2}\omega_2$, $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ per a tot reticle $L = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$. Si escollim $(\omega_1, \omega_2) = (2\pi i\tau, 2\pi i)$ i avaluem la funció $\wp$ en els punts migs,

$$e_1 = \wp\left(\frac{\pi i}{2}\right), \qquad e_2 = \wp\left(\frac{\pi i\tau}{2}\right), \qquad e_3 = \wp\left(\frac{\pi i(\tau+1)}{2}\right),$$

llavors l'equació diferencial es converteix en

$$\wp'(z)^2 = 4\,\left(\wp(z) - e_1\right)\,\left(\wp(z) - e_2\right)\,\left(\wp(z) - e_3\right).$$

Les funcions e_1, e_2, e_3 són formes modulars de pes 2 respecte a uns certs subgrups de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. En concret, e_1 és modular respecte a

$$\Gamma_0(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \;\mid\; c \equiv 0 \bmod 2 \right\}.$$

Les funcions $\wp$ i $\wp'$ donen una parametrització de la cúbica $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ a $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$. Aquesta cúbica té associada una llei de grup formal que correspon a l'estructura natural de grup a $\mathbf{C}/L$ via la funció $\wp$.

D'altra banda, la funció $f(z) = 1/\sqrt{\wp(z) - e_1}$ satisfà

$$f(2z) = \frac{2\, f(z)\, f'(z)}{1 - \varepsilon\, f(z)^4}$$

i per tant defineix un gènere el·líptic sobre $\mathbf{Q}$, amb $\delta = \frac{3}{4} e_1$, $\varepsilon = \frac{1}{16}(e_2 - e_3)^2$. D'aquí obtenim

$$\begin{aligned} \delta &= -\frac{1}{8} - 3\,(q + q^2 + 4\,q^3 + q^4 + \cdots) \\ \varepsilon &= q + 8\,q^2 + 28\,q^3 + 64\,q^4 + \cdots, \end{aligned}$$

que són totes dues formes modulars respecte a $\Gamma_0(2)$, algebraicament independents i de pesos 2 i 4 respectivament.

Amb aquesta representació, la sèrie característica del gènere el·líptic universal

$$\varphi_{\mathrm{ell}}\colon \Omega^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}[\delta, \varepsilon],$$

tal com demostra Zagier a [192], és igual a

$$Q(x) = \frac{x/2}{\sinh x/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(1-q^n)^2}{(1-q^n e^x)(1-q^n e^{-x})} \right]^{(-1)^n},$$

on δ i ε venen donades per les expressions anteriors. Observem que si fem $q = 0$ obtenim la sèrie característica del $\hat{A}$-gènere. Això vol dir que el terme independent del gènere el·líptic $\varphi_{\mathrm{ell}}(M)$ de qualsevol varietat M és igual a $\hat{A}(M)$.

També es pot fer la transformació

$$Q(x) \;=\; \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k)!}\, \widetilde{G}_{2k}\, x^{2k} \right)$$

on $\widetilde{G}_{2k}(q) = -G_{2k}(q) + 2\, G_{2k}(q^2)$; vegeu [192]. Per exemple,

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_2 &= -\frac{1}{24} - q - q^2 - 4\,q^3 - q^4 - \cdots \\ \widetilde{G}_4 &= \frac{1}{240} - q - 7\,q^2 - 28\,q^3 - 55\,q^4 - \cdots \\ \widetilde{G}_6 &= -\frac{1}{504} - q - 31\,q^2 - 244\,q^3 - 991\,q^4 - \cdots. \end{aligned}$$

Així doncs, aquest gènere el·líptic φ_{ell} pren valors a l'anell

$$M(\Gamma_0(2)) = \mathbf{C}[\delta, \varepsilon],$$

on les formes $\delta = \varphi_{\text{ell}}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)$, $\varepsilon = \varphi_{\text{ell}}(\mathbf{H}\mathrm{P}^2)$ també es poden expressar com

$$\begin{aligned} \delta &= 3\,\widetilde{G}_2 \\ \varepsilon &= 2\,(\widetilde{G}_2)^2 - \frac{5}{6}\,\widetilde{G}_4. \end{aligned}$$

Com a conseqüència de la fòrmula de duplicació, tenim

$$\varphi_{\text{ell}}(\mathbf{H}\mathrm{P}^k) = \begin{cases} 0 & k \text{ senar} \\ \varepsilon^{k/2} & k \text{ parell} \end{cases}$$

i per tant $\varphi_{\text{ell}}(\mathbf{H}\mathrm{P}^{2k}) \in q^k\mathbf{Z}[[q]]$. Oferim alguns càlculs més:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{ell}}(\mathbf{C}\mathrm{P}^4) &= \frac{3}{2}\,\delta^2 - \frac{1}{2}\,\varepsilon \\ \varphi_{\text{ell}}(\mathbf{C}\mathrm{P}^6) &= \frac{5}{2}\,\delta^3 - \frac{3}{2}\,\varepsilon\,\delta \\ \varphi_{\text{ell}}(\mathbf{C}\mathrm{P}^8) &= \frac{35}{8}\,\delta^4 - \frac{15}{4}\,\varepsilon\,\delta^2 + \frac{3}{8}\,\varepsilon^2 \\ \varphi_{\text{ell}}(\mathbf{C}\mathrm{P}^{10}) &= \frac{63}{8}\,\delta^5 - \frac{35}{4}\,\varepsilon\,\delta^3 + \frac{15}{8}\,\varepsilon^2\,\delta \\ \varphi_{\text{ell}}(\mathbf{C}\mathrm{P}^{12}) &= \frac{231}{16}\,\delta^6 - \frac{315}{16}\,\varepsilon\,\delta^4 + \frac{105}{16}\,\varepsilon^2\,\delta^2 - \frac{5}{16}\,\varepsilon^3 \\ \varphi_{\text{ell}}(\mathbf{C}\mathrm{P}^{14}) &= \frac{429}{16}\,\delta^7 - \frac{693}{16}\,\varepsilon\,\delta^5 + \frac{315}{16}\,\varepsilon^2\,\delta^3 - \frac{35}{16}\,\varepsilon^3\,\delta. \end{aligned}$$

Per a les varietats de Milnor es compleix $\varphi_{\text{ell}}(H_{i,j}) = \varphi_{\text{ell}}(H_{j,i})$. A més, resulta que $\varphi_{\text{ell}}(H_{i,j}) = 0$ si $i+j$ és parell. De l'expressió per al logaritme $g(y)$ s'obté (vegeu [90, 3.2])

$$\varphi_{\text{ell}}(H_{i,j}) = \begin{cases} \varepsilon^{j/2}\,\varphi_{\text{ell}}(\mathbf{C}\mathrm{P}^{i-j-1}) & j < i,\ \ j \text{ parell} \\ 0 & j \geq i,\ \ j \text{ parell.} \end{cases}$$

En particular, $\varphi_{\text{ell}}(H_{3,0}) = \delta$, $\varphi_{\text{ell}}(H_{3,2}) = \varepsilon$, $\varphi_{\text{ell}}(H_{3,j}) = 0$ per a $j \neq 0, 2$.

1.12 Cohomologies el·líptiques

Els coeficients de Fourier del gènere el·líptic universal $\varphi_{\rm ell}(M)$ de qualsevol varietat M pertanyen a $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ (vegeu [124]), i són tots enters quan M és una varietat spin. Així doncs, podem penser el gènere el·líptic universal com un homomorfisme

$$\varphi_{\rm ell}\colon \Omega^{\rm SO} \to \mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}][\delta, \varepsilon].$$

Per a cada element $\omega \in \mathbf{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon]$ de grau positiu, podem definir un functor sobre els CW-complexos X com

$$(\mathrm{Ell}^{\omega})_*(X) = M\mathrm{SO}_*(X) \otimes_{\Omega^{\rm SO}} \mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}][\delta, \varepsilon, \omega^{-1}].$$

Tal com demostren Landweber, Ravenel i Stong a [124] i Franke a [73], aquest functor satisfà els axiomes d'una teoria d'homologia. Això es dedueix del teorema del functor exacte de Landweber [120], i seria fals si no haguéssim localitzat l'anell de coeficients respecte d'algun element ω de grau positiu. Kreck i Stolz han donat a [115] una interpretació geomètrica d'aquestes teories de (co)homologia en termes de fibrats amb fibra $\mathbf{H}\mathrm{P}^2$.

Cal destacar l'analogia amb l'equivalència de Conner–Floyd [54]. Hi ha una aplicació d'espectres

$$M\mathrm{SO} \to K\mathrm{O}[\tfrac{1}{2}]$$

que indueix el $\hat{A}$-gènere als coeficients. Llavors es compleix

$$M\mathrm{SO}_*(X) \otimes_{\Omega^{\rm SO}} K\mathrm{O}[\tfrac{1}{2}]_* \cong K\mathrm{O}[\tfrac{1}{2}]_*(X),$$

per a tot CW-complex X, on l'estructura de mòdul a $K\mathrm{O}[\frac{1}{2}]_*$ es defineix via el $\hat{A}$-gènere.

2 Gènere de Witten

El gènere de Witten φ_W és una variant del gènere el·líptic universal, que pren valors a l'anell $\mathbf{Q}[G_2, G_4, G_6]$ de formes quasimodulars amb coeficients racionals. Si M és spin, llavors els coeficients de Fourier de $\varphi_W(M)$ són enters. Si M és string (és a dir, tal que $q_1(M) = 0$), llavors $\varphi_W(M)$ és una forma modular respecte al grup $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

2.1 Sèrie característica

Considerem la sèrie de potències parella

$$Q(x) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} G_{2k} x^{2k}\right),$$

on G_{2k} són les funcions a $\mathfrak{H}$ definides a la secció anterior (són formes modulars si $k \geq 2$). El gènere associat a aquesta sèrie s'anomena el gènere de Witten φ_W. La sèrie característica també es pot expressar com

$$Q(x) = \frac{x/2}{\sinh x/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(1-q^n)^2}{(1-q^n e^x)(1-q^n e^{-x})}\right].$$

Igual com passa amb el gènere el·líptic universal, quan $q = 0$ aquesta és la sèrie característica del $\hat{A}$-gènere. Per tant, per a tota varietat M,

$$\varphi_W(M) = \hat{A}(M) + c_1 q + c_2 q^2 + c_3 q^3 + \cdots, \qquad c_i \in \mathbf{Q}.$$

La funció $f(x) = x/Q(x)$, que a vegades designarem per $\Phi(\tau, x)$ per destacar que també depèn de la variable $\tau \in \mathfrak{H}$, és igual a

$$\Phi(\tau, x) = \sigma_L(x)\, \exp(-G_2 x^2),$$

on σ_L és la funció σ de Weierstrass associada al reticle $L = 2\pi i\tau\mathbf{Z} + 2\pi i\mathbf{Z}$, on $q = e^{2\pi i\tau}$; és a dir,

$$\sigma_L(x) = x \prod_{w \in L'} \left(\left(1 - \frac{x}{w}\right) \exp\left(\frac{x}{w} + \frac{x^2}{2w^2}\right)\right),$$

on $L' = L \setminus \{0\}$.

Es compleix

$$\frac{d^2}{dx^2} \log \Phi(\tau, x) = \frac{\Phi''\Phi - (\Phi')^2}{\Phi^2} = -\wp(\tau, x) - 2\, G_2(\tau).$$

La funció σ de Weierstrass té la propietat que qualsevol funció el·líptica es pot escriure en termes de σ; en el nostre cas, tenim

$$\wp(\tau, x_2) - \wp(\tau, x_1) = \frac{\sigma(\tau, x_1 + x_2)\, \sigma(\tau, x_1 - x_2)}{\sigma(\tau, x_1)^2\, \sigma(\tau, x_2)^2}$$

i per tant

$$\Phi(\tau, x_1 + x_2)\, \Phi(\tau, x_1 - x_2) = \Phi(\tau, x_1)^2\, \Phi(\tau, x_2)^2\, \left[\wp(\tau, x_2) - \wp(\tau, x_1)\right].$$

Així obtenim l'equació diferencial següent per a la llei de grup formal del gènere de Witten:

$$F(u, v)\, F(u, -v) = u^2 v^2 \left(\frac{u'' u - (u')^2}{u^2} - \frac{v'' v - (v')^2}{v^2} \right).$$

Fixem-nos que

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{\Phi(\tau, x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = 1, \qquad \lim_{x_2 \to x_1} \frac{\wp(\tau, x_2) - \wp(\tau, x_1)}{x_1 - x_2} = -\wp'(\tau, x_1).$$

Així doncs, per a la fórmula de duplicació tenim

$$\Phi(\tau, 2x) = -\Phi(\tau, x)^4\, \wp'(\tau, x).$$

Per a una varietat M de dimensió $4n$, amb arrels formals $\pm x_1, \ldots, \pm x_{2n}$ i classes de Pontrjagin $p_1, \ldots, p_n$, el gènere de Witten de M es calcula com

$$\varphi_W(M) = \left(\prod_{i=1}^{2n} Q(x_i) \right) [M] = K_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)[M],$$

on $[M] \in H_{4n}(M; \mathbf{Q})$ denota la classe fonamental de M, i $K = \{K_n\}$ és la successió multiplicativa associada a φ_W:

$$\begin{aligned}
K_1(x_1) &= G_2\, x_1 \\
K_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{12}\, G_4\, (x_1^2 - 2x_2) + \frac{1}{2}\, (G_2)^2\, x_1^2 \\
K_3(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{360}\, G_6\, (x_1^3 - 3x_1 x_2 + 3x_3) + \frac{1}{12}\, G_2 G_4\, x_1 (x_1^2 - 2x_2) + \frac{1}{6}\, (G_2)^3\, x_1^3 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Això ho demostrarem a l'apartat 2.4. Abans de poder donar més detalls i aplicar-ho a casos concrets, farem una anàlisi detallada de la notació necessària.

2.2 Particions

Sigui $k \geq 1$. Una *partició* I de k és una col·lecció $[i_1, i_2, \ldots, i_r]$ d'enters $i_n \geq 1$ amb $\sum_{j=1}^{r} i_n = k$. Habitualment suposarem també que $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_r$. Definim $r_1, r_2, \ldots, r_k$ com $r_a = \sharp\{j \mid i_j = a\}$, és a dir

$$I = [i_1, i_2, \ldots, i_r] = [\,\overbrace{1, \ldots, 1}^{r_1}, \overbrace{2, \ldots, 2}^{r_2}, \ldots, \overbrace{k-1, \ldots, k-1}^{r_{k-1}}, \overbrace{k, \ldots, k}^{r_k}\,].$$

Anomenarem $\mathcal{P}_k^{(r)}$ al conjunt de particions $[i_1, i_2, \ldots, i_r]$ de k, i $\mathcal{P}_k = \bigcup_{r \geq 1} \mathcal{P}_k^{(r)}$ al conjunt de totes les particions de k. El conjunt $\mathcal{P}_k$ es pot ordenar co-lexicogràficament. Siguin $I = [i_1 \leq \cdots \leq i_r]$, $J = [j_1 \leq \cdots \leq j_s]$ amb $\sum I = \sum J = k$. Aleshores $I < J$ si i només si existeix $t \geq 0$ tal que

$$\begin{cases} i_{r-a} = j_{s-a} & (0 \leq a < t) \\ i_{r-t} < j_{s-t}. \end{cases}$$

Per exemple, si $k = 4$,

$$[1,1,1,1] < [1,1,2] < [2,2] < [1,3] < [4].$$

Aquest ordre és l'ordre natural alfabètic de les paraules $i_r i_{r-1} \cdots i_1$.

Recordem que també hi ha un ordre parcial $\preceq$ a $\mathcal{P}_k$, amb $I \preceq J$ si i només si I és un refinament de J; és a dir, cada j_a, $1 \leq a \leq s$, es pot escriure com una suma $j_a = \sum_{b \in X_a} i_b$ tal que $\{1, 2, \ldots, r\}$ és la unió disjunta dels X_a. L'ordre total $\leq$ és compatible amb l'ordre parcial $\preceq$: si I és un refinament de J, aleshores $I \leq J$. Per a $k = 4$, per exemple, la diferència entre $\leq$ i $\preceq$ és que no es compleix ni $[2,2] \preceq [1,3]$ ni $[1,3] \preceq [2,2]$.

Es pot generar el conjunt de particions $\mathcal{P}_k$ inductivament a partir de $\mathcal{P}_{k-1}$ de la manera següent. Per a cada $I = [i_1 \leq \cdots \leq i_r] \in \mathcal{P}_{k-1}$, posem $I^+ = [1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_r]$. En els casos on $r = 1$ o bé $i_1 < i_2$, definim també $I^{++} = [i_1 + 1 \leq \cdots \leq i_r]$. Aquests elements I^+, I^{++} generen $\mathcal{P}_k$ sense repetició, i l'ordre a $\mathcal{P}_k$ ve induït per l'ordre a $\mathcal{P}_{k-1}$ i la relació $I^+ < I^{++}$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
[1] & \to & [1,1] & \to & [1,1,1] & \to & [1,1,1,1] & \to & [1,1,1,1,1] \\
 & & [2] & \to & [1,2] & \to & [1,1,2] & \to & [1,1,1,2] \\
 & & & & & & [2,2] & \to & [1,2,2] \\
 & & & & [3] & \to & [1,3] & \to & [1,1,3] \\
 & & & & & & & & [2,3] \\
 & & & & & & [4] & \to & [1,4] \\
 & & & & & & & & [5]
\end{array}$$

2.3 Polinomis simètrics

Ens interessarà disposar de fórmules generals per als termes de l'expressió

$$Q(x_1)\,Q(x_2)\cdots Q(x_m)$$

on $Q(x) = 1 + b_1x^2 + b_2x^4 + b_3x^6 + \cdots$ és una sèrie de potències parella qualsevol. En general, sigui

$$S\left(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_m^{k_m}\right)$$

el polinomi simètric i homogeni donat per la suma de tots els termes diferents que s'obtenen de $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_m^{k_m}$ permutant les indeterminades de totes les maneres possibles. Per a $I = [i_1, i_2, \ldots, i_r]$ una partició de k, on $r \le m$, designarem per s_I el polinomi simètric de grau k

$$s_I \;=\; S\left(x_1^{2i_1}x_2^{2i_2}\cdots x_r^{2i_r}x_{r+1}^0x_{r+2}^0\cdots x_m^0\right).$$

Aleshores

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{m} Q(x_i) &= 1 + b_1s_1 + b_1^2s_{1,1} + b_2s_2 + b_1^3s_{1,1,1} + b_1b_2s_{1,2} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m}\sum_{I\in\mathcal{P}_k} b^I s_I \;+\; \text{termes d'ordre superior,}\end{aligned}$$

on $b^I = b_{i_1}b_{i_2}\cdots b_{i_r} = b_1^{r_1}b_2^{r_2}\cdots b_k^{r_k}$. Considerem en particular les sumes de potències s_k i els polinomis simètrics elementals p_k,

$$\begin{aligned} s_k &= S(x_1^{2k}) = x_1^{2k} + x_2^{2k} + \cdots + x_m^{2k} \\ p_k &= S(x_1^2x_2^2\cdots x_k^2) = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le m} x_{i_1}^2x_{i_2}^2\cdots x_{i_k}^2 \end{aligned}$$

per a $k \le m$. Es compleix

$$\begin{aligned} s_{k-1}p_1 &= s_k + S\left(x_1^{2(k-1)}x_2^2\right) \\ s_{k-i}p_i &= S\left(x_1^{2(k-i+1)}x_2^2\cdots x_i^2\right) + S\left(x_1^{2(k-i)}x_2^2\cdots x_{i+1}^2\right), \quad 2\le i\le k-2 \\ s_1p_{k-1} &= S\left(x_1^4x_2^2\cdots x_{k-1}^2\right) + kp_k, \end{aligned}$$

d'on resulta la fórmula de Newton [142, § 16]:

$$s_k - s_{k-1}p_1 + s_{k-2}p_2 + \cdots + (-1)^{k-1}s_1p_{k-1} + (-1)^k kp_k \;=\; 0;$$

és a dir, $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i s_{k-i} p_i = 0$, on cal entendre que $s_0 = m$, $p_0 = 1$.

Considerem per exemple els casos $k = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} s_1 - p_1 &= 0 \\ s_2 - s_1 p_1 + 2p_2 &= 0 \\ s_3 - s_2 p_1 + s_1 p_2 - 3p_3 &= 0 \\ s_4 - s_3 p_1 + s_2 p_2 - s_1 p_3 + 4p_4 &= 0 \end{aligned}$$

d'on $s_1 = p_1$ i inductivament

$$\begin{aligned} s_2 &= p_1^2 - 2p_2 \\ s_3 &= p_1^3 - 3p_1 p_2 + 3p_3 \\ s_4 &= p_1^4 - 4p_1^2 p_2 + 4p_1 p_3 + 2p_2^2 - 4p_4. \end{aligned}$$

Més generalment, sigui $\mathcal{S}_m$ l'anell de polinomis simètrics en les variables $x_1^2, \ldots, x_m^2$, que està generat com a anell pels p_i o els s_i. Considerem també l'espai $\mathcal{S}_m^{2k}$ de polinomis de grau $2k$ a $\mathcal{S}_m$, que està generat com a espai vectorial pels s_I amb $I \in \mathcal{P}_k$. Tenim unes altres bases per a $\mathcal{S}_m^{2k}$, donades per

$$\begin{aligned} s^I &= s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r} &= \prod_{a=1}^{r} \left(x_1^{2i_a} + x_2^{2i_a} + \cdots + x_m^{2i_a}\right) \\ p^I &= p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_r} &= \prod_{a=1}^{r} \sum_{b_1 < \cdots < b_{i_a}} x_{b_1}^2 x_{b_2}^2 \cdots x_{b_{i_a}}^2 \\ p_I &= p^{I'} &= \prod_{a=1}^{r} \left(\sum_{b_1 < \cdots < b_a} x_{b_1}^2 x_{b_2}^2 \cdots x_{b_a}^2 \right)^{i_{r-a+1} - i_{r-a}} \qquad \text{amb } i_0 = 0, \end{aligned}$$

on la partició I' ve definida per $I = [i_1 < i_2 < \cdots < i_r]$ de la manera següent:

$$I' = [\,\overbrace{1, \ldots, 1}^{i_r - i_{r-1}}, \overbrace{2, \ldots, 2}^{i_{r-1} - i_{r-2}}, \ldots, \overbrace{r-1, \ldots, r-1}^{i_2 - i_1}, \overbrace{r, \ldots, r}^{i_1}\,].$$

La correspondència $I \mapsto I'$ es una permutació de $\mathcal{P}_k$, és a dir, els polinomis $\{p_I\}$ són els mateixos que $\{p^I = p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_r}\}$, en un ordre diferent.

Designarem per $A = \alpha_{I,J}$, $B = \beta_{I,J}$ les matrius de canvi de base:

$$\sum_J \alpha_{I,J} s_J = s^I \,, \qquad \sum_J \beta_{I,J} s_J = p_I$$

per a $I, J \in \mathcal{P}_k$. Per exemple, per a $k = 4$ tenim

$$\begin{bmatrix} 24 & 12 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1,1,1,1} \\ s_{1,1,2} \\ s_{2,2} \\ s_{1,3} \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1^4 & s_1^2 s_2 & s_2^2 & s_1 s_3 & s_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 24 & 12 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1,1,1,1} \\ s_{1,1,2} \\ s_{2,2} \\ s_{1,3} \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_4 & p_1 p_3 & p_2^2 & p_1^2 p_2 & p_1^4 \end{bmatrix}$$

Proposició 2.1 *Siguin $I, J \in \mathcal{P}_k$. Aleshores*

1. *Els $\alpha_{I,J}$ i $\beta_{I,J}$ són enters no negatius.*

2. $\alpha_{I,J} \neq 0$ *si i només si* $I \preceq J$, *i per tant si* $I > J$ *llavors* $\alpha_{I,J} = 0$.

3. $\beta_{I,J} = 0$ *si i només si* $I < J$, $\beta_{I,I} = 1$.

DEMOSTRACIÓ:

1. Els $\alpha_{I,J}$ i $\beta_{I,J}$ són els coeficients de $x_1^{2j_1} x_2^{2j_2} \cdots x_s^{2j_s}$ en s^I i en p_I respectivament.

2. És clar que $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ conté el terme $x_1^{2j_1} x_2^{2j_2} \cdots x_s^{2j_s}$ si i només si I és un refinament de J.

3. Considerem les particions $J = [j_1, \ldots, j_s]$ tals que $x_1^{2j_1} x_2^{2j_2} \cdots x_s^{2j_s}$ surt en el desenvolupament de p_I. El màxim j_s que podem aconseguir és $\sum (i_{r-a+1} - i_{r-a}) = i_r$, i donat aquest j_s, el màxim j_{s-1} és $\sum_{a \geq 2} (i_{r-a+1} - i_{r-a}) = i_{r-1}$, etc. Així la màxima J possible és I, i aquest terme surt amb coeficient 1. Veiem també que tots els termes amb $J \leq I$ sí que surten. *qed*

En particular, $\det B = 1$ i la matriu B^{-1} també té coeficients enters amb uns a la diagonal i zeros al damunt. Siguin $A^{-1} = (\bar{\alpha}_{IJ})$, $B^{-1} = (\bar{\beta}_{IJ})$, i definim

$$\begin{aligned} b_J &= \sum_{I \in \mathcal{P}_k} \bar{\alpha}_{IJ}\, b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_r} \\ \kappa_J &= \sum_{I \in \mathcal{P}_k} \bar{\beta}_{IJ}\, b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_r}. \end{aligned}$$

Aleshores tenim

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{m} Q(x_i) &= 1+\sum_{k=1}^{m}\sum_{I\in\mathcal{P}_k} b_I\, s^I \;+\; \text{termes d'ordre superior}\\ &= 1+\sum_{k=1}^{m}\sum_{I\in\mathcal{P}_k} \kappa_I\, p_I \;+\; \text{termes d'ordre superior}\end{aligned}$$

i per tant

$$K_r(p_1,p_2,\dots,p_r)=\sum_{I\in\mathcal{P}_r}\kappa_I p_I.$$

Considerem ara la sèrie parella $L(x)=a_1x^2+a_2x^4+a_3x^6+\cdots$ definida per l'expressió

$$Q(x)=\exp(L(x)).$$

Obtenim el desenvolupament

$$L(x)^r=\sum_{k\geq r}\sum_{I\in\mathcal{P}_k^{(r)}}\binom{r}{r_1\,r_2\cdots r_k}\,a^I\,x^{2k}$$

on $a^I=a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_r}=a_1^{r_1}a_2^{r_2}\cdots a_k^{r_k}$, i $\displaystyle\binom{r}{r_1\,r_2\cdots r_k} = \frac{r!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$. Aleshores

$$Q(x)=\exp\left(L(x)\right)= \sum_{r\geq 0}\frac{1}{r!}\,L(x)^r = 1+\sum_{k\geq 1}\sum_{I\in\mathcal{P}_k}\frac{a^I}{r_1!r_2!\cdots r_k!}\,x^{2k}.$$

Per tant,

$$\prod_{i=1}^{m} Q(x_i)=\prod_{i=1}^{m}\exp(L(x_i))=\exp\left(\sum_{i=1}^{m}L(x_i)\right) = \exp(a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3+\cdots)$$

i d'aquí obtenim

$$\prod_{i=1}^{m} Q(x_i)=1+\sum_{k\geq 1}\sum_{I\in\mathcal{P}_k}\frac{a^I}{r_1!r_2!\cdots r_k!}s^I.$$

2.4 Fórmules per al càlcul del gènere de Witten

Considerem una varietat M^{4n} de dimensió $4n$. Observem que

$$\prod_{i=1}^{2n} Q(x_i) = \prod_{i=1}^{2n} \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{(2r)!} G_{2r}\, x_i^{2r}\right) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} L_{2r}\, s_r\right),$$

on $L_{2r} = \dfrac{2}{(2r)!} G_{2r}$ i fem servir, com abans, la notació

$$s_r = x_1^{2r} + \cdots + x_{2n}^{2r}.$$

Per tant,

$$\prod_{i=1}^{2n} Q(x_i) = 1 + \sum_{k\geq 1} \sum_{I\in\mathcal{P}_k} \prod_{j=1}^{t} \frac{1}{r_j!}\, L_{2k_j}^{r_j} s_{k_j}^{r_j}$$

on escrivim una partició arbitrària $I \in \mathcal{P}_k$ com $k = r_1k_1 + r_2k_2 + \cdots + r_tk_t$ amb $r_j \geq 1$ i $0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_t$. El gènere de Witten de M és el resultat d'avaluar el terme de grau $4n$ sobre la classe fonamental de M:

$$\begin{aligned}
\varphi_W(M^{4n}) &= \left\{\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} L_{2r}\, s_r\right)\right\}[M] \\
&= \sum_{I\in\mathcal{P}_n} \frac{L_{2k_1}^{r_1} L_{2k_2}^{r_2} \cdots L_{2k_t}^{r_t}}{r_1! r_2! \cdots r_t!} \left(s_{k_1}^{r_1} s_{k_2}^{r_2} \cdots s_{k_t}^{r_t}\right)[M].
\end{aligned}$$

Per exemple, tenim

$$\begin{aligned}
\varphi_W(M^4) &= s_1\, G_2 \\
\varphi_W(M^8) &= \frac{1}{2}\, s_1^2\, (G_2)^2 + \frac{1}{12}\, s_2\, G_4 \\
\varphi_W(M^{12}) &= \frac{1}{6}\, s_1^3\, (G_2)^3 + \frac{1}{12} s_1\, s_2\, G_2 G_4 + \frac{1}{360}\, s_3\, G_6 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

on, per simplificar la notació, entenem que les classes $s_{k_1}^{r_1} s_{k_2}^{r_2} \cdots s_{k_t}^{r_t} \in H^{4n}(M;\mathbf{Q})$ han estat avaluades a la classe fonamental $[M] \in H_{4n}(M;\mathbf{Q})$. Els desenvolupaments de Fourier corresponents són

$$\varphi_W(M^4) = -\frac{1}{24}\, s_1 + s_1\, q + 3\, s_1\, q^2 + 4\, s_1\, q^3 + 7\, s_1\, q^4 + \cdots$$

$$\begin{aligned}\varphi_W(M^8) &= \frac{1}{1152}\,{s_1}^2+\frac{1}{2880}\,s_2+\left(-\frac{1}{24}\,s_1^2+\frac{1}{12}\,s_2\right)q+\left(\frac{3}{4}\,s_2+\frac{3}{8}\,s_1^2\right)q^2\\ &+\left(\frac{7}{3}\,s_2+\frac{17}{6}\,s_1^2\right)q^3+\left(\frac{197}{24}\,s_1^2+\frac{73}{12}\,s_2\right)q^4+\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_W(M^{12}) &= -\frac{1}{181440}\,s_3-\frac{1}{69120}\,s_2\,s_1-\frac{1}{82944}\,s_1^3+\left(-\frac{1}{320}\,s_2\,s_1+\frac{1}{1152}\,s_1^3+\frac{1}{360}\,s_3\right)q\\ &+\left(\frac{11}{120}\,s_3+\frac{17}{320}\,s_2\,s_1-\frac{7}{384}\,s_1^3\right)q^2+\left(\frac{61}{90}\,s_3+\frac{13}{288}\,s_1^3+\frac{217}{240}\,s_2\,s_1\right)q^3+\cdots\end{aligned}$$

Cal tenir present que, quan $k \geq 4$, la forma modular G_{2k} es pot escriure en termes de G_4 i G_6. Alternativament, podem expressar-ho tot en termes de G_2, DG_2 i D^2G_2, on $D = q\dfrac{d}{dq}$. Per exemple,

$$\begin{aligned}\varphi_W(M^8) &= \left(\frac{1}{2}s_1^2+\frac{1}{5}s_2\right)(G_2)^2+\frac{1}{10}s_2DG_2\\ \varphi_W(M^{12}) &= \frac{1}{6}\,s_1^3\,(G_2)^3+\frac{1}{10}\,s_1\,s_2\,G_2\,DG_2+\frac{1}{5}\,s_1\,s_2\,(G_2)^3+\frac{1}{210}\,s_3\,D^2G_2\\ &+\frac{2}{35}\,s_3\,G_2\,DG_2+\frac{8}{105}\,s_3\,(G_2)^3.\end{aligned}$$

Quan la varietat M t la propietat que $p_1(M) = 0$, llavors $s_1 = 0$ i per tant els termes en G_2 desapareixen de les expressions anteriors. En aquest cas, $\varphi_W(M)$ s una forma modular respecte a $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

2.5 Gènere de Witten de varietats bàsiques

Considerem ara les següents famílies de varietats: els plans projectius complexos $\mathbf{C}\mathrm{P}^{2k}$, els plans projectius quaterniònics $\mathbf{H}\mathrm{P}^k$, les interseccions completes $V_{2k}^{(d_j)}$ i les varietats de Milnor $H_{i,j} \subset \mathbf{C}\mathrm{P}^i \times \mathbf{C}\mathrm{P}^j$.

2.5.1 Els plans projectius complexos

Les classes de Pontrjagin de $\mathbf{C}\mathrm{P}^{2k}$ venen donades per

$$p(\mathbf{C}\mathrm{P}^{2k}) = (1+g^2)^{2k+1}, \quad |g| = 2, \quad g^{2k+1} = 0.$$

D'aquí deduïm que

$$\begin{aligned}s_k[\mathbf{C}\mathrm{P}^{2k}] &= 2k+1\\ (s_{k_1}\cdots s_{k_t})[\mathbf{C}\mathrm{P}^{2k}] &= (2k+1)^t\end{aligned}$$

per a tota partició $I = [k_1, \ldots, k_t]$ de k.

Llavors tenim

$$\varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^{2k}) = \sum_{I \in \mathcal{P}_k} \frac{1}{r_1! \cdots r_t!} \, \frac{(G_{2k_1})^{r_1} \cdots (G_{2k_t})^{r_t}}{k_1^{r_1} \cdots k_t^{r_t} (2k_1 - 1)!^{r_1} \cdots (2k_t - 1)!^{r_t}} \, (2k+1)^t$$

per a particions I donades per $k = \sum_{j=1}^{t} r_j k_j$, $r_j \geq 1$, $0 < k_1 < \cdots < k_t$. En particular,

$$\begin{aligned}
\varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^2) &= 3\, G_2 \\
\varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^4) &= \frac{25}{2}\, (G_2)^2 + \frac{5}{12}\, G_4 \\
\varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^6) &= \frac{343}{6}\, (G_2)^3 + \frac{49}{12}\, G_2\, G_4 + \frac{7}{360}\, G_6.
\end{aligned}$$

Com que G_2, G_4 i G_6 generen l'anell graduat N, resulta que $\varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)$, $\varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^4)$, $\varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^6)$ també són generadors (sobre $\mathbf{Q}$):

$$\begin{aligned}
G_2 &= \frac{1}{3}\, \varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^2) \\
G_4 &= \frac{12}{5}\, \varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^4) - \frac{10}{3}\, \varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^2 \\
G_6 &= \frac{360}{7}\, \big(\varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^6) - 168\, \varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)\, \varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^4)\big) + \frac{1120}{9}\, \varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^3.
\end{aligned}$$

2.5.2 Els plans projectius quaterniònics

Les classes de Pontrjagin de $\mathbf{H}\mathrm{P}^k$ venen donades per

$$p(\mathbf{H}\mathrm{P}^k) = \frac{(1+u)^{2k+2}}{1+4u}, \quad |u| = 4, \quad u^{k+1} = 0.$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
s_k[\mathbf{H}\mathrm{P}^k] &= 2k + 2 - 4^k \\
(s_{k_1} \cdots s_{k_t})[\mathbf{H}\mathrm{P}^k] &= \prod_{r=1}^{t} \big(2k + 2 - 4^{k_r}\big)
\end{aligned}$$

per a tota partició $I = [k_1, \ldots, k_t]$ de k.

Fixem-nos que $s_1[\mathbf{H}\mathrm{P}^1] = 0$ i que, per tant, $\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^1) = 0$. En general, tenim

$$\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^k) = \sum_{I \in \mathcal{P}_k} \frac{1}{r_1! \cdots r_t!} \, \frac{(2k+2-4^{k_1})^{r_1} \cdots (2k+2-4^{k_t})^{r_t} (G_{2k_1})^{r_1} \cdots (G_{2k_t})^{r_t}}{k_1^{r_1} \cdots k_t^{r_t} (2k_1 - 1)!^{r_1} \cdots (2k_t - 1)!^{r_t}}$$

per a particions I donades per $k=\sum_{j=1}^{t} r_j k_j$, $r_j \geq 1$, $0<k_1<\cdots<k_t$. Així doncs,

$$\begin{aligned}
\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^2) &= 2\,(G_2)^2 - \frac{5}{6}\,G_4 \\
\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^3) &= \frac{32}{3}\,(G_2)^3 - \frac{8}{3}\,G_2G_4 - \frac{7}{45}\,G_6.
\end{aligned}$$

És clar que podem prendre $\varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)$, $\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^2)$ i $\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^3)$ en comptes de G_2, G_4 i G_6 com a generadors de l'anell de formes quasimodulars. Tenim $G_2=\frac{1}{3}\,\varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)$ i

$$\begin{aligned}
G_4 &= \frac{4}{15}\,\varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^2 - \frac{6}{5}\,\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^2) \\
G_6 &= \frac{64}{36}\,\varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^3 + \frac{48}{7}\,\varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)\,\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^2) - \frac{45}{7}\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^3).
\end{aligned}$$

Aquesta base té una propietat molt interessant. És conegut que el $\hat{A}$-gènere s'anul·la als espais $\mathbf{H}\mathrm{P}^k$, i per tant el terme constant del desenvolupament de Fourier de $\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^k)$ és zero. De fet, tenim

$$\begin{aligned}
\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^2) &= -q - 6\,q^2 - 12\,q^3 - 28\,q^4 - 30\,q^5 - \cdots \\
\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^3) &= -8\,q^2 - 64\,q^3 - 240\,q^4 - 640\,q^5 - \cdots \\
\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^4) &= -54\,q^3 - 567\,q^4 - 2916\,q^5 - \cdots.
\end{aligned}$$

Teorema 2.2 *El desenvolupament de $\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^k)$ com a sèrie de potències en q és un element de $q^{k-1}\mathbf{Z}[[q]]$.*

Donarem una demostració d'aquest fet a l'apartat 2.7.

2.5.3 Interseccions completes

Donats nombres enters $d_1, d_2, \ldots, d_r \geq 1$, considerem varietats

$$V_{2k}^{d_1,\ldots,d_r} = V_{2k}^{d_1} \cap \cdots \cap V_{2k}^{d_r} \quad \subset \quad \mathbf{C}\mathrm{P}^{2k+r}$$

de dimensió real $4k$, donada per les equacions

$$P_{d_j}(z_0, z_1, \ldots, z_{2k+r}) = 0 \qquad (1 \leq j \leq r),$$

on cada P_{d_j} és un polinomi homogeni de grau d_j en les coordenades z_p a $\mathbf{C}\mathrm{P}^{2k+r}$. Les classes característiques d'aquestes varietats no depenen dels polinomis P_{d_j} escollits, sempre que les hipersuperfícies $V_{2k}^{d_j}$ es tallin transversalment. Fixem-nos que $V_{2k}^{1,d_1,\ldots,d_r} \cong V_{2k}^{d_1,\ldots,d_r}$ i només hem de considerar els casos on $d_j \geq 2$. Per a $r = 0$ posem $V_{2k} = \mathbf{C}\mathrm{P}^{2k}$.

Les classes de Pontrjagin d'aquestes varietats venen donades per

$$p(V_{2k}^{d_1,\ldots,d_r}) = \frac{(1+g^2)^{2k+r+1}}{\prod_{j=1}^{r}(1+d_i^2 g^2)}, \quad |g| = 2, \quad g^{2k+r+1} = 0.$$

D'aquí resulta

$$\begin{aligned} s_k[V_{2k}^{d_1,\ldots,d_r}] &= \prod_{j=1}^{r} d_j \left(2k+r+1-\sum_{j=1}^{r} d_j^{2k}\right) \\ (s_{k_1}\cdots s_{k_t})[V_{2k}^{d_1,\ldots,d_r}] &= \prod_{j=1}^{r} d_j \prod_{n=1}^{t}\left(2k+r+1-\sum_{j=1}^{r} d_j^{2k_n}\right) \end{aligned}$$

per a tota partició $I = [k_1, \ldots, k_t]$ de k.

Per exemple, la superfície de Kummer V_2^4 satisfà $s_1[V_2^4] = -48$; per tant,

$$\varphi_W(V_2^4) = -48G_2 \;=\; 2 - 48\,q - 144\,q^2 - 192\,q^3 - 336\,q^4 - 288\,q^5 - \cdots$$

2.5.4 Varietats de Milnor

Per a cada parell i, j amb $i+j-1 = 2k$, considerem la varietat de Milnor

$$H_{i,j} \;\subset\; \mathbf{C}\mathrm{P}^i \times \mathbf{C}\mathrm{P}^j$$

de codimensió 1, donada per l'equació

$$x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_ry_r = 0,$$

on $r = \min(i,j)$, i $\{x_p\}$, $\{y_q\}$ són les coordenades homogènies a $\mathbf{C}\mathrm{P}^i$, $\mathbf{C}\mathrm{P}^j$.

Per a la classe $s_k \in H^{4k}(H_{i,j};\mathbf{Q})$ es compleix

$$\begin{aligned} s_k[H_{i,j}] &= \text{coeficient de } u^iv^j \text{ a } \left(\frac{(1+u^{2k})^{i+1}\,(1+v^{2k})^{j+1}}{1+(u+v)^{2k}}\right)(u+v) \\ &= \text{coeficient de } u^iv^j \text{ a } \left((i+1)u^{2k} + (j+1)v^{2k} - (u+v)^{2k}\right)(u+v)\,. \end{aligned}$$

Per a $I = [k_1, \ldots, k_t] \in \mathcal{P}_k$, $(s_{k_1}\cdots s_{k_t})[H_{i,j}]$ és el coeficient de u^iv^j a

$$\left\{\prod_{r=1}^{t}\left((i+1)u^{2k_r} + (j+1)v^{2k_r} - (u+v)^{2k_r}\right)\right\}(u+v)\,.$$

D'altra banda, per a $i = 0$, $j = 2k + 1$, tenim $H_{0,2k+1} \cong \mathbf{C}\mathrm{P}^{2k}$ i

$$s_k[H_{0,2k+1}] = 2k + 1; \qquad (s_{k_1} \cdots s_{k_t})[H_{0,2k+1}] = (2k + 1)^t.$$

Per a $i = 1$, $j = 2k$, tenim

Proposició 2.3 *Per a $k \geq 1$ i qualsevol $I = [k_1, \ldots, k_t] \in \mathcal{P}_k$, es compleix*

$$(s_{k_1} \cdots s_{k_t})[H_{1,2k}] \;\; = \;\; 0$$

i per tant $\varphi_W(H_{1,2k}) = 0$.

Demostració: Tenim

$$2\,u^{2k_r} + (2k+1)v^{2k_r} - (u+v)^{2k_r} = 2k\,v^{2k_r} - 2k_r\,uv^{2k_r-1} - \cdots,$$

i per tant

$$\prod_{r=1}^{t} \left(2k\,v^{2k_r} - 2k_r\,uv^{2k_r-1} - \cdots\right) = 2^t\,k^t\,v^{2\Sigma k_r} - 2^t\,k^{t-1}(\Sigma k_r)\,uv^{2\Sigma k_r - 1} - \cdots.$$

Tenint en compte que $\sum_{r=1}^{t} k_r = k$ i multiplicant per $(u+v)$ veurem que $s^I[H_{1,2k}]$ no té cap terme en uv^{2k}. *qed*

Considerem en particular el cas $i = 3$. Tenim $H_{3,0} \cong \mathbf{C}\mathrm{P}^2$, $\varphi_W(H_{3,0}) = 3G_2$, i

$$\begin{aligned}
\varphi_W(H_{3,2}) &= 2\,(G_2)^2 - \frac{5}{6}\,G_4 \\
\varphi_W(H_{3,4}) &= \frac{20}{3}\,(G_2)^3 - \frac{5}{3}\,G_2\,G_4 - \frac{7}{72}\,G_6.
\end{aligned}$$

Per tant, podem prendre les imatges de $H_{3,2k-2}$, amb $k = 1, 2, 3$, com a generadors de l'anell N. Els seus desenvolupaments de Fourier són

$$\begin{aligned}
\varphi_W(H_{3,2}) &= -q - 6\,q^2 - 12\,q^3 - 28\,q^4 - 30\,q^5 - \cdots \\
\varphi_W(H_{3,4}) &= -5\,q^2 - 40\,q^3 - 150\,q^4 - 400\,q^5 - \cdots \\
\varphi_W(H_{3,6}) &= -28\,q^3 - 294\,q^4 - 1512\,q^5 - \cdots
\end{aligned}$$

Això suggereix que $\varphi_W(H_{3,2k-2})$ sempre comença amb q^{k-1}. De fet, demostrarem un resultat encara més general:

Teorema 2.4 *El desenvolupament de $\varphi_W(H_{2r+1,2k-2r})$ com a sèrie de potències en q és un element de $q^{k-r}\mathbf{Q}[[q]]$.*

A continuació demostrem els dos teoremes d'aquesta secció.

2.6 Demostracions dels teoremes 2.2 i 2.4

Per a una sèrie de potències $a \in \mathbf{Q}[[q]]$,

$$a(q) = c_0 + c_1\, q + c_2\, q^2 + c_3\, q^3 + \cdots,$$

l'ordre de a, que designarem per $||a||$, és el grau del primer terme no nul:

$$||a|| = \min\{i \mid c_i \neq 0\}.$$

Hi ha una altra expressió per al gènere de Witten, que necessitarem per investigar ordres de sèries. Escriurem $\Phi(x) = x/Q(x)$, on Q és la sèrie característica del gènere de Witten.

Proposició 2.5 *Es compleix*

$$\Phi(x) \;=\; 2\sinh(x/2)\prod_{n=1}^{\infty}\bigl(1 + 4\, a_n \sinh^2(x/2)\bigr)$$

on els termes a_n són sèries de potències en q amb $||a_n|| = n$ que venen donades per

$$a_n(q) = -q^n(1-q^n)^{-2} = -q^n - 2\,q^{2n} - 3\,q^{3n} - 4\,q^{4n} - \cdots.$$

Demostració: Tenim el desenvolupament

$$\begin{aligned}(1-q^n e^x)\bigl(1-q^n e^{-x}\bigr) &= 1 - 2\,q^n\cosh(x) + q^{2n}\\ = \;1 - 2\,q^n(1+2\sinh^2(x/2)) + q^{2n} &= (1-q^n)^2 - 4\,q^n\sinh^2(x/2).\end{aligned}$$

Llavors

$$\begin{aligned}\Phi &= 2\sinh(x/2)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n e^x)(1-q^n e^{-x})}{(1-q^n)^2}\\ &= 2\sinh(x/2)\prod_{n=1}^{\infty}\bigl(1 - 4q^n(1-q^n)^{-2}\sinh^2(x/2)\bigr)\end{aligned}$$

i posem $a_n(q) = -q^n(1-q^n)^{-2}$. *qed*

Si escrivim $a_{(0)} = 2$ i $a_{(n)} = 2^{2n+1}\sum_{i_1<\cdots<i_n} a_{i_1}\cdots a_{i_n}$, aleshores

$$\begin{aligned}\Phi &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{(n)}\,\sinh^{2n+1}(x/2)\\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,a_{(n)}\,\sinh^{2n}(x/2)\cosh(x/2)\\ \Phi(2x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n+1}\,a_{(n)}\,\sinh^{2n+1}(x/2)\cosh^{2n+1}(x/2).\end{aligned}$$

Recordem la fórmula de duplicació per als gèneres; es compleix

$$2\,f(x)\,f'(x)\,h(f(x)) = f(2x)$$

on $h(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\mathbf{H}\mathrm{P}^k)\,y^{2k}$. Així, prenent $z = \sinh^2(x/2)$, $1+z = \cosh^2(x/2)$, obtenim

Proposició 2.6 *Sigui $\varphi_k = \varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^k)$ el gènere de Witten avaluat al pla projectiu quaterniònic de dimensió real $4k$, on $k \geq 0$. Aleshores es compleix*

$$\sum_{k\geq 0} \varphi_k\, z^k\, F(z)^{2k+1}\, G(z) \quad = \quad D(z)$$

on

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} a_{(n)} z^n, \qquad G(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{2n+1}{2} a_{(n)} z^n, \qquad D(z) = \sum_{n\geq 0} 4^n a_{(n)} z^n (1+z)^n.$$

Teorema 2.7 *La sèrie $\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^k)$ té ordre $k-1$.*

Demostració: Els φ_k venen donats inductivament per

$$\varphi_k \quad = \quad \frac{1}{2^{2k+1}} \cdot \text{ coeficient de } z^k \text{ a } \left(D(z) - \sum_{j=0}^{k-1} \varphi_j\, z^j\, F(z)^{2j+1}\, G(z) \right).$$

Per a $P \in \mathbf{Q}[[z,q]]$, escriurem $||P||_n$ per designar l'ordre de la sèrie $p_n \in \mathbf{Q}[[q]]$ donada pel coeficient de z^n a P. Aleshores tenim

$$||\varphi_k|| \quad \geq \quad \min \left\{ ||D(z)||_k,\ ||\varphi_j|| + ||F(z)^{2j+1}\, G(z)||_{k-j} \ \ (0 \leq j < k) \right\}.$$

Fixem-nos que com que $||a_{(n)}|| = n(n+1)/2$, és clar que $||F(z)^{2j+1}\, G(z)||_r \geq r$. Així, inductivament,

$$||\varphi_k|| \quad \geq \quad \min\{\, ||D(z)||_k,\ k-1 \,\}$$

i només hem de demostrar que $||D(z)||_k \geq k-1$. El coeficient de z^k a $D(z)$ ve donat per

$$4^k a_{(k)} + 4^{k-1}(k-1)a_{(k-1)} + 4^{k-2}\binom{k-2}{2} a_{(k-2)} + \cdots + 4^{r_k}\binom{r_k}{k-r_k} a_{(r_k)}$$

on r_k és el nombre enter tal que $k \leq 2r_k \leq k+1$. Així tenim

$$||D(z)||_k \quad = \quad ||a_{(r_k)}|| \quad = \quad r_k(r_k+1)/2$$

i es compleix $r_k(r_k+1)/2 \geq k-1$ per a tot $k \geq 0$, amb igualtat només per als valors $k = 2, 4$. *qed*

Recordem ara que els valors dels gèneres a les varietats de Milnor $H_{i,j}$ venen especificats per la llei de grup formal $F(y_1, y_2) = \sum\sum a_{i,j} y_1^i y_2^j$ associada al gènere. Es compleix

$$\varphi_W(H_{i,j}) = \sum_{r=0}^{i}\sum_{s=0}^{j} a_{r,s}\, \varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^i)\, \varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^j).$$

Per al logaritme del gènere es compleix $g'(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^i)\, y^i$, i escrivint $H(y_1, y_2) = \sum\sum \varphi_W(H_{i,j})\, y_1^i y_2^j$ obtenim l'expressió ben coneguda

$$H(y_1, y_2) = F(y_1, y_2)\, g'(y_1)\, g'(y_2).$$

Prenent $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$, on g es la funció inversa de f, aquesta relació pot escriure's alternativament com

$$H(f(x_1), f(x_2))\, f'(x_1)\, f'(x_2) = f(x_1 + x_2).$$

Per al gènere de Witten, tenim

$$\sum_{i,j\geq 0} \varphi_W(H_{i,j})\, \Phi(x_1)^i\, \Phi(x_2)^j\, \Phi'(x_1)\, \Phi'(x_2) = \Phi(x_1 + x_2).$$

Fixem-nos que es pot escriure $\Phi(x_1 + x_2) = \Phi_1(x_1, x_2) + \Phi_2(x_1, x_2)$ on Φ_1 és senar i Φ_2 és parella com a funcions de x_1; però Φ_1 és parella i Φ_2 senar com a funcions de x_2. En particular, $\varphi_W(H_{i,j}) = 0$ si $i + j$ és parell, i com que $H_{i,j} \cong H_{j,i}$, només hem de considerar la igualtat

$$\sum_{i \text{ senar}}\sum_{j \text{ parell}} \varphi_W(H_{i,j}) \Phi(x_1)^i \Phi(x_2)^j \Phi'(x_1) \Phi'(x_2) = \Phi_1(x_1, x_2).$$

Ja tenim expressions per a Φ i Φ'; per a $\Phi_1(x_1, x_2)$ hi ha l'expressió

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{(n)} \sum_{t=0}^{n} \binom{2n+1}{2t+1} \left(\sinh\frac{x_1}{2}\, \cosh\frac{x_2}{2}\right)^{2t+1} \left(\cosh\frac{x_1}{2}\, \sinh\frac{x_2}{2}\right)^{2n-2t}$$

i podem escriure $\Phi_1 = \sinh(x_1/2) \cosh(x_2/2)\, E\left(\sinh^2(x_1/2), \sinh^2(x_2/2)\right)$, on

$$E(w, z) \;\; = \;\; \sum_{n=0}^{\infty} a_{(n)} \sum_{t=0}^{n} \binom{2n+1}{2t+1} w^t (1+w)^{n-t} (1+z)^t z^{n-t}.$$

Així doncs, tenim

Proposició 2.8 *Sigui $\psi_{i,j} = \varphi_W(H_{i,j})$ amb $i+j-1=2k$. Aleshores es compleix*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\psi_{2r+1,2k-2r}\; C(w)\, w^r F(w)^{2r+1} G(w)\; z^{k-r} F(z)^{2k-2r} G(z) = E(w,z)$$

on $C(w) = (1+w)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}w - \frac{1}{8}w^2 - \cdots$.

Considerant l'ordre de la sèrie a $\mathbf{Q}[[q]]$ donada pel coeficient de $w^r\, z^{k-r}$ a l'esquerra i a la dreta d'aquesta igualtat, i com que $||a_{(n)}|| = \frac{1}{2}n(n+1)$ i $||F(z)^{2j-2}G(z)||_r \geq r$, obtenim inductivament:

Teorema 2.9 *La sèrie $\varphi_W(H_{2r+1,2k-2r})$ té ordre $k-r$.*

2.7 Relacions entre $\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^k)$ i $\varphi_W(H_{3,2k-2})$

Els càlculs que hem fet ens indiquen una relació entre $\varphi_W(H_{3,2k-2})$ i $\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^k)$. Comparem les sumes de potències per a aquestes varietats. Anomenem

$$\begin{aligned} s'_t &= 4u^{2t} + (2k-1)v^{2t} - (u+v)^{2t} \\ s''_t &= 2k+2-4^t \end{aligned}$$

i fixem-nos que $(s'_1)^{k-j} = (2(k-1)v^2 - 2uv + 3u^2)^{k-j}$ es pot desenvolupar com

$$\begin{aligned} & 2^{k-j}\,(k-1)^{k-j}\, v^{2k-2j} \\ - \;& 2^{k-j}\,(k-1)^{k-j-1}\,(k-j)uv^{2k-2j-1} \\ + \;& \frac{1}{2}2^{k-j}\,(k-1)^{k-j-2}\,(k-j)(4k-j-4)u^2v^{2k-2j-2} \\ - \;& \frac{1}{6}2^{k-j}\,(k-1)^{k-j-3}\,(k-j)(k-j-1)(10k-j-11)u^3v^{2k-2j-3} \end{aligned}$$

amb $u^4 = 0$ a tot arreu. Escriurem $(s'_1)^{k-j} = 2^{k-j}\,(k-1)^{k-j-3}\, Z_j v^{2k-2j-3}$ on

$$\begin{aligned} Z_j \;=\;& (k-1)^3\, v^3 - (k-1)^2\,(k-j)uv^2 \\ &+ \frac{1}{2}\,(k-1)\,(k-j)(4k-j-4)u^2v - \frac{1}{6}(k-j)(k-j-1)(10k-j-11)u^3. \end{aligned}$$

Calcularem també $s'_j\,(u+v)$ per a $j=2,3$; tenim

$$\begin{aligned} s'_2\,(u+v) &= (4u^4 + (2k-1)v^4 - (u+v)^4)\,(u+v) \\ &= 2(k-1)v^5 + 2(k-3)uv^4 - 10u^2v^3 - 10u^3v^2 \\ s'_3\,(u+v) &= (4u^6 + (2k-1)v^6 - (u+v)^6)\,(u+v) \\ &= (k-1)\,v^7 + 2(k-4)uv^6 - 21u^2v^5 - 35u^3v^4. \end{aligned}$$

De fet, només ens interessen els coeficients de u^3 a ${s'_1}^{k-j} s'_j\,(u+v)$.

$$
\begin{aligned}
Z_0\,(u+v) &= \frac{1}{2}\,(k-1)\,k\,(4k-4)\,u^2vu - \frac{1}{6}k\,(k-1)\,(10k-11)\,u^3v \\
&= \frac{1}{6}\,(k-1)\,k(2k-1)u^3v \\
Z_2\,s'_2\,(u+v) &= (-10\,(k-1)^3 + 10\,(k-1)^2\,(k-2) \\
+\,(k-3)(k-1)(k-2)(4k-6) &- \frac{1}{3}(k-1)(k-2)(k-3)(10k-13))\,u^3v^5 \\
&= \frac{1}{3}k\,(k-1)\,(2k-1)\,(k-7)\,u^3v^5 \\
Z_3\,s'_3\,(u+v) &= (-35\,(k-1)^3 + 21\,(k-1)^2\,(k-3) \\
+\,(k-4)\,(k-1)\,(k-3)(4k-7) &- \frac{1}{3}(k-1)(k-3)(k-4)(10k-14))\,u^3v^7 \\
&= \frac{1}{3}k\,(k-1)\,(2k-1)\,(k-31)\;u^3v^7.
\end{aligned}
$$

D'altra banda, tenim

$$
(s''_1)^{k-j} = 2^{k-j}(k-1)^{k-j}; \qquad s''_2 = 2(k-7); \qquad s''_3 = 2(k-31).
$$

Així hem demostrat

Teorema 2.10 *Per a tot $k \geq 1$ es compleixen les relacions següents:*

$$
\frac{(s_1^k)[\mathbf{H}\mathrm{P}^k]}{(s_1^k)[H_{3,2k-2}]} = \frac{(s_1^{k-2}s_2)[\mathbf{H}\mathrm{P}^k]}{(s_1^{k-2}s_2)[H_{3,2k-2}]} = \frac{(s_1^{k-3}s_3)[\mathbf{H}\mathrm{P}^k]}{(s_1^{k-3}s_3)[H_{3,2k-2}]} = \frac{6(k-1)^2}{k(2k-1)}.
$$

Comparem les expressions següents:

$$
\begin{aligned}
\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^4) &= 54\,(G_2)^4 - 9\,G_4\,(G_2)^2 + \frac{1}{8}\,(G_4)^2 - \frac{9}{10}\,G_2\,G_6 - \frac{41}{3360}\,G_8 \\
\varphi_W(H_{3,6}) &= 28\,(G_2)^4 - \frac{14}{3}\,G_4\,(G_2)^2 - \frac{7}{36}\,(G_4)^2 - \frac{7}{15}\,G_2\,G_6 - \frac{1}{240}\,G_8.
\end{aligned}
$$

Aquí la raó dels coeficients de $(G_2)^4$, de $G_4(G_2)^2$ o de G_2G_6 és $27/14$; per a $(G_4)^2$ és $-9/14$ i per a G_8 és $41/14$. Però $(G_4)^2$ i G_8 són linealment dependents a N_8 i expressant els gèneres en una base obtenim

$$
\begin{aligned}
\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^4) &= 54\,(G_2)^4 - 9\,G_4\,(G_2)^2 - \frac{75}{56}\,(G_4)^2 - \frac{9}{10}\,G_2\,G_6 \\
\varphi_W(H_{3,6}) &= 28\,(G_2)^4 - \frac{14}{3}\,G_4\,(G_2)^2 - \frac{25}{36}\,(G_4)^2 - \frac{7}{15}\,G_2\,G_6
\end{aligned}
$$

on la raó és sempre $27/14$. Anem a demostrar que aquest fet és ben general.

Teorema 2.11 *Per a $n \geq 1$ es compleix la relació següent:*

$$\binom{2n}{3} \varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^n) = 4(n-1)^3 \varphi_W(H_{3,2n-2}).$$

Demostració: No podem pas intentar demostrar-ho a partir de la nostra fórmula

$$\varphi_W(M^{4k}) = \sum_{I \in \mathcal{P}_k} \frac{L_{2k_1}^{r_1} L_{2k_2}^{r_2} \cdots L_{2k_t}^{r_t}}{r_1! r_2! \cdots r_t!} \left(s_{k_1}^{r_1} s_{k_2}^{r_2} \cdots s_{k_t}^{r_t}\right) [M],$$

ja que les formes $L_{2n} = (2/(2n)!)\, G_{2n}$ no són pas algebraicament independents; tal com ja hem vist, la relació que volem demostrar no es compleix pas coeficient a coeficient en aquesta expressió.

L'única relació que necessitarem en aquesta demostració és la fórmula de duplicació del gènere de Witten (apartat 2.1):

$$\Phi(\tau, 2x) = -\Phi(\tau, x)^4\, \wp'(\tau, x).$$

Com que $\Phi(\tau, x) = x/Q(x)$, tenim

$$\frac{Q(x)^4}{Q(2x)} \;=\; -\frac{x^3}{2}\, \wp'(\tau, x). \tag{2.1}$$

Com que $Q(x) = \exp\left(\sum L_{2k} x^{2k}\right)$ i, per (1.1),

$$-\frac{1}{2}\, x^3\, \wp'(\tau, x) \;=\; 1 - 3 \sum_{k=2}^{\infty} \binom{2k}{3} L_{2k}(\tau)\, x^{2k}, \tag{2.2}$$

la igualtat (2.1) conté molta informació sobre les formes L_{2n}.

Calcularem el gènere de Witten de $\mathbf{H}\mathrm{P}^k$ de la manera següent. Triem un generador $a \in H^4(\mathbf{H}\mathrm{P}^k)$, amb $a^{k+1} = 0$. La classe de Pontrjagin total és

$$p(\mathbf{H}\mathrm{P}^k) \;=\; \frac{(1+a)^{2k+2}}{1+4a}.$$

Si K is la successió multiplicativa del gènere de Witten i posem $Q(x) = P(x^2)$, llavors

$$K\left(p(\mathbf{H}\mathrm{P}^k)\right) \;=\; K\left(\frac{(1+a)^{2k+2}}{1+4a}\right) \;=\; \frac{K(1+a)^{2k+2}}{K(1+4a)} \;=\; \frac{P(a)^{2k+2}}{P(4a)}.$$

Així doncs, si x designa l'arrel formal de a, deduïm de (2.1) que

$$K\left(p(\mathbf{H}\mathrm{P}^k)\right) \;=\; \frac{Q(x)^4}{Q(2x)}\, Q(x)^{2k-2} \;=\; -\frac{x^3}{2}\, \wp'(x)\, Q(x)^{2k-2}.$$

Per calcular el gènere de Witten $\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^k) = K(p)[\mathbf{H}\mathrm{P}^k]$, necessitem conèixer el coeficient de x^{2k} en aquesta expressió. Per a cada partició $I \in \mathcal{P}_k$ donada com $k = r_1 + 2r_2 + \cdots + kr_k$, utilitzem la notació $C_I(E)$ per al coeficient de $L_I x^{2k} = L_2^{r_1} L_4^{r_2} \cdots L_{2k}^{r_k} x^{2k}$ en una expressió E donada. Tenim

$$C_I\left(Q(x)^{2k-2}\right) \;=\; C_I\left[\exp\left\{(2k-2)\sum_{j=1}^{\infty} L_{2j}\, x^{2j}\right\}\right] \;=\; \frac{(2k-2)^r}{r_1! r_2! \cdots r_k!} \tag{2.3}$$

on $r = \sum_{i=1}^{k} r_i$. Per tant, per (2.2),

$$C_I\left(-\frac{1}{2}\, x^3\, \wp'\, Q(x)^{2k-2}\right) \;=\; \left(1 - \sum_{i=2}^{k} \binom{2i}{3} \frac{3\, r_i}{2k-2}\right) \frac{(2k-2)^r}{r_1! r_2! \cdots r_k!}$$

i obtenim

Proposició 2.12 *El gènere de Witten dels espais projectius quaterniònics ve donat per la fórmula*

$$\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^k) \;=\; \sum_{I \in \mathcal{P}_k} \left(1 - \sum_{i=2}^{k} \binom{2i}{3} \frac{3\, r_i}{2k-2}\right) \frac{(2k-2)^r}{r_1! r_2! \cdots r_k!} L_2^{r_1} L_4^{r_2} \cdots L_{2k}^{r_k}.$$

Aquesta fórmula no dóna pas les mateixes expressions que havíem vist a l'apartat 2.5.2. Per exemple,

$$\begin{aligned}
\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^4) \;&=\; 54\, {L_2}^4 - 108\, {L_2}^2\, L_4 - 54\, {L_4}^2 - 324\, L_2\, L_6 - 162\, L_8 \\
&=\; 54\, (G_2)^4 - 9\, (G_2)^2\, G_4 - \frac{3}{8}\, (G_4)^2 - \frac{9}{10}\, G_2\, G_6 - \frac{9}{1120}\, G_8.
\end{aligned}$$

Resulta sorprenent que, tot i no estar referida a una base, si comparem aquesta expressió amb la nostra expressió *usual* per a $H_{3,6}$,

$$\varphi_W(H_{3,6}) \;=\; 28\, (G_2)^4 - \frac{14}{3}\, G_4\, (G_2)^2 - \frac{7}{36}\, (G_4)^2 - \frac{7}{15}\, G_2\, G_6 - \frac{1}{240}\, G_8,$$

els coeficients estan tots en una raó $27/14$. Per tant, el teorema que volíem demostrar es dedueix del següent lema tècnic, que ens dóna una fórmula per a $(s_{k_1} s_{k_2} \cdots s_{k_t})[H_{3,2k-2}]$.

Lema 2.13 *Sigui I una partició de k donada per $k = r_1 + 2\, r_2 + 3\, r_3 + \cdots$, $r_i \geq 0$, amb $r_i = 0$ per a $i > k$. Aleshores el coeficient de $L_I\, u^3\, v^{2k-2} = {L_2}^{r_1} {L_4}^{r_2} \cdots {L_{2k}}^{r_k} u^3 v^{2k-2}$ en l'expressió*

$$\frac{Q(u)^4 Q(v)^{2k-1}}{Q(u+v)}\, (u+v) \tag{2.4}$$

és igual a

$$2\binom{2k}{3}\left(1-\sum_{i=1}^{\infty}\binom{2i}{3}\frac{3\,r_i}{2k-2}\right)\frac{(2k-2)^{r-3}}{r_1!r_2!\cdots r_k!}.$$

DEMOSTRACIÓ: Tenim $(u+v)\,Q(u)^4=(u+v)(1+4\,L_2\,u^2)+O(u^4)$. Si considerem les sèries $L=L(v)=\sum_{i\geq 1}v^{2i}L_{2i}$, $L'=dL/dv$, $L''=d^2L/dv^2$, etc, llavors

$$\begin{aligned}\frac{Q(v)}{Q(u+v)} &= \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(v^{2i}-(u+v)^{2i}\right)L_{2i}\right)\\ &= \exp\left(-u\,L'\right)\exp\left(-\frac{u^2}{2}\,L''\right)\exp\left(-\frac{u^3}{6}\,L'''\right)+O(u^4)\\ &= \left(1-u\,L'+\frac{u^2}{2}\,(L')^2-\frac{u^3}{6}\,(L')^3\right)\left(1-\frac{u^2}{2}\,L''\right)\left(1-\frac{u^3}{6}\,L'''\right)+O(u^4).\end{aligned}$$

Llavors el coeficient de u^3 en $(u+v)\,\dfrac{Q(u)^4Q(v)}{Q(u+v)}$ és igual a

$$4\,L_2-4v\,L_2L'-\frac{1}{2}\,(L')^2-\frac{1}{2}\,L''-\frac{1}{6}\,v\,L'''+\frac{1}{4}\,v\,L'L''-\frac{1}{6}\,v\,(L')^3.$$

Tots aquests termes són de la forma $L_J\,v^{2j-2}$, amb $J\in\mathcal{P}_j^{<4}$. Posant $v=1$, obtenim l'expressió

$$\begin{aligned}&4L_2-8L_2\left(\sum_{i\geq 1}iL_{2i}\right)+2\left(\sum_{i\geq 1}iL_{2i}\right)^2-\left(\sum_{i\geq 1}(2i^2-i)L_{2i}\right)\\ &-\frac{2}{3}\left(\sum_{i\geq 1}(2i^3-3i^2+i)L_{2i}\right)+2\left(\sum_{i\geq 1}iL_{2i}\right)\left(\sum_{i\geq 1}(2i^2-i)L_{2i}\right)-\frac{4}{3}\left(\sum_{i\geq 1}iL_{2i}\right)^3.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Per (2.3), coneixem el coeficient de L_Iv^{2k} en $Q(v)^{2k-2}$. Per conèixer el coeficient de $L_Iu^3v^{2k-2}$ en (2.4), hem de realitzar a (2.5) les substitucions següents:

$$\begin{array}{lll} L_{2j}\rightsquigarrow \frac{r_j}{2k-2} & L_{2j_1}L_{2j_2}\rightsquigarrow \frac{r_{j_1}r_{j_2}}{(2k-2)^2} & L_{2j_1}L_{2j_2}L_{2j_3}\rightsquigarrow \frac{r_{j_1}r_{j_2}r_{j_3}}{(2k-2)^3}\\ {L_{2j}}^2\rightsquigarrow \frac{r_j(r_j-1)}{(2k-2)^2} & L_{2j_1}{L_{2j_2}}^2\rightsquigarrow \frac{r_{j_1}r_{j_2}(r_{j_2}-1)}{(2k-2)^3} & {L_{2j}}^3\rightsquigarrow \frac{r_j(r_j-1)(r_j-2)}{(2k-2)^3}\end{array}$$

i multiplicar el resultat per $\dfrac{(2k-2)^r}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$. Tenim, per exemple,

$$4\,L_2-8\,L_2\sum_{i\geq 1}i\,L_{2i}\quad\rightsquigarrow\quad\frac{4\,r_1}{2k-2}-\frac{8}{(2k-2)^2}\left(r_1(r_1-1)-r_1\sum_{i\geq 2}i\,r_i\right),$$

que és zero, ja que $k = \sum_{i\geq 1} i\, r_i$. De la mateixa manera s'obté per a tota expressió(2.5) el resultat

$$-\frac{4k(2k-1)}{3(2k-2)^3}\left(\sum_{i\geq 1}(2i^3-3i^2)r_i \;-\; 1\right),$$

que és igual a

$$2\binom{2k}{3}\left(1-\sum_{i\geq 1}\binom{2i}{3}\frac{3\,r_i}{2k-2}\right)(2k-2)^{-3}. \qquad \mathit{qed}$$

2.8 Nucli del gènere de Witten

El gènere de Witten φ_W és un homomorfisme d'anells graduats

$$\varphi_W\colon \Omega^{\mathrm{SO}}\otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}[G_2, G_4, G_6].$$

L'espai vectorial $\Omega^{\mathrm{SO}}_{4k}\otimes\mathbf{Q}$ té dimensió $\mathfrak{p}(k)$, el nombre de particions de k, amb base les varietats $\mathbf{C}\mathrm{P}^{2k_1}\times\cdots\times\mathbf{C}\mathrm{P}^{2k_t}$ on $k_1+k_2+\cdots+k_t=k$. Una base de l'espai vectorial N_{2k} està constituïda per les formes $(G_2)^p(G_4)^q(G_6)^r$ amb $2p+4q+6r=2k$.

Veurem més endavant que φ_W és exhaustiu sobre $\mathbf{Q}[G_2,G_4,G_6]$. La taula següent dóna la dimensió del nucli de φ_W per a $k\leq 12$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\dim(\Omega^{\mathrm{SO}}_{4k}\otimes\mathbf{Q})$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77
$\dim N_{2k}$	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19
$\dim\ker\varphi_W$	0	0	0	1	2	4	7	12	18	28	40	58

La condició $\varphi_W(M)=0$ pot traduir-se a condicions sobre els nombres $s^I[M]$. Per exemple,

$$\begin{aligned}\varphi_W(M^4)=0 &\iff s_1=0\\ \varphi_W(M^8)=0 &\iff s_1=s_2=0\\ \varphi_W(M^{12})=0 &\iff s_1=s_3=0.\end{aligned}$$

Hi ha moltes maneres d'escollir una base per al nucli de φ_W. Sigui $\mathcal{P}_{4,k}$ el conjunt de particions $I=[k_1,k_2,\ldots,k_t]$ de k amb algun $k_j\geq 4$. Aleshores la dimensió del nucli és igual al nombre d'elements de $\mathcal{P}_{4,k}$. Construirem una base $\{\beta_I\}_{I\in\mathcal{P}_{4,k}}$. Fixem-nos que φ_W restringit al subespai de $\Omega^{\mathrm{SO}}_{4k}\otimes\mathbf{Q}$ generat per les classes $(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^p(\mathbf{C}\mathrm{P}^4)^q(\mathbf{C}\mathrm{P}^6)^r$ amb $2p+4q+6r=2k$ és exhaustiu i de fet un isomorfisme; llavors hi ha elements

$$(\mathbf{C}\mathrm{P}^{2k})^\natural \;=\; \mathbf{C}\mathrm{P}^{2k}-\sum_{p+2q+3r=k} a_{p,q,r}\,(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^p(\mathbf{C}\mathrm{P}^4)^q(\mathbf{C}\mathrm{P}^6)^r \;\in\; \Omega^{SO}_{4k}\otimes\mathbf{Q}$$

amb $a_{p,q,r} \in \mathbf{Q}$ tals que $\varphi_W((\mathbf{C}\mathrm{P}^{2k})^\natural) = 0$. Ara per a cada $I = [k_1, k_2, \ldots, k_t] \in \mathcal{P}_{4,k}$ escollim j tal que $k_j \geq 4$ i posem

$$\beta_I \;=\; (\mathbf{C}\mathrm{P}^{2k_j})^\natural \times \prod_{i \neq j} \mathbf{C}\mathrm{P}^{2k_i}.$$

Aleshores $\{\beta_I\}_{I \in \mathcal{P}_{4,k}}$ és una base del nucli. Per a $k = 4, 5, 6$, per exemple:

$$\beta_4 \;=\; -\frac{145}{28}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^4 + \frac{69}{7}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^2\mathbf{C}\mathrm{P}^4 - \frac{27}{7}\mathbf{C}\mathrm{P}^2\mathbf{C}\mathrm{P}^6 - \frac{27}{14}(\mathbf{C}\mathrm{P}^4)^2 + \mathbf{C}\mathrm{P}^8$$

$$\begin{aligned}
\beta_{1,4} &= -\frac{145}{28}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^5 + \frac{69}{7}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^3\mathbf{C}\mathrm{P}^4 - \frac{27}{7}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^2\mathbf{C}\mathrm{P}^6 - \frac{27}{14}\mathbf{C}\mathrm{P}^2(\mathbf{C}\mathrm{P}^4)^2 + \mathbf{C}\mathrm{P}^2\mathbf{C}\mathrm{P}^8 \\
\beta_5 &= -\frac{1819}{140}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^5 + \frac{647}{35}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^3\mathbf{C}\mathrm{P}^4 - \frac{37}{7}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^2\mathbf{C}\mathrm{P}^6 + \frac{151}{70}\mathbf{C}\mathrm{P}^2(\mathbf{C}\mathrm{P}^4)^2 - \frac{19}{5}\mathbf{C}\mathrm{P}^4\mathbf{C}\mathrm{P}^6 + \mathbf{C}\mathrm{P}^{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{1,1,4} &= -\frac{145}{28}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^6 + \frac{69}{7}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^4\mathbf{C}\mathrm{P}^4 - \frac{27}{7}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^3\mathbf{C}\mathrm{P}^6 - \frac{27}{14}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^2(\mathbf{C}\mathrm{P}^4)^2 + (\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^2\mathbf{C}\mathrm{P}^8 \\
\beta_{2,4} &= -\frac{145}{28}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^4\mathbf{C}\mathrm{P}^4 + \frac{69}{7}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^2(\mathbf{C}\mathrm{P}^4)^2 - \frac{27}{7}\mathbf{C}\mathrm{P}^2\mathbf{C}\mathrm{P}^4\mathbf{C}\mathrm{P}^6 - \frac{27}{14}(\mathbf{C}\mathrm{P}^4)^3 + \mathbf{C}\mathrm{P}^4\mathbf{C}\mathrm{P}^8 \\
\beta_{1,5} &= -\frac{1819}{140}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^6 + \frac{647}{35}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^4\mathbf{C}\mathrm{P}^4 - \frac{37}{7}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^3\mathbf{C}\mathrm{P}^6 \\
&\quad + \frac{151}{70}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^2(\mathbf{C}\mathrm{P}^4)^2 - \frac{19}{5}\mathbf{C}\mathrm{P}^2\mathbf{C}\mathrm{P}^4\mathbf{C}\mathrm{P}^6 + \mathbf{C}\mathrm{P}^2\mathbf{C}\mathrm{P}^{10} \\
\beta_6 &= \mathbf{C}\mathrm{P}^{12} - \frac{11464}{1155}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^6 - \frac{13131}{1540}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^4\mathbf{C}\mathrm{P}^4 - \frac{625}{231}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^3\mathbf{C}\mathrm{P}^6 \\
&\quad + \frac{82249}{2310}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^2(\mathbf{C}\mathrm{P}^4)^2 - \frac{4044}{385}\mathbf{C}\mathrm{P}^2\mathbf{C}\mathrm{P}^4\mathbf{C}\mathrm{P}^6 - \frac{1921}{462}(\mathbf{C}\mathrm{P}^4)^3 - \frac{41}{22}(\mathbf{C}\mathrm{P}^6)^2
\end{aligned}$$

Thom va demostrar que una successió de varietats $\{M^{4k}\}_{k\geq 1}$ és una base de l'anell de cobordisme orientat si i només si

$$s_k(M^{4k}) \;=\; \left(x_1^{2k} + x_2^{2k} + \cdots + x_{2k}^{2k}\right)[M^{4k}] \;\neq\; 0$$

per a tot $k \geq 1$, on M^{4k} té classe de Pontrjagin total $p(M) = \prod_{i=1}^{2k}(1 + x_i^2)$. La successió $H_{3,0}, H_{3,2}, H_{3,4}, H_{3,6}, \ldots$ és una base, ja que

$$s_k(H_{3,2k-2}) = -\binom{k+1}{3}.$$

En particular, el coeficient de G_{2k} a $\varphi_W(H_{3,2k-2})$ no és zero per a $k = 1, 2, 3$, i podem prendre $\varphi_W(H_{3,0})^p\varphi_W(H_{3,2})^q\varphi_W(H_{3,4})^r$ amb $p + 2q + 3r = k$ com a base de N_{2k}. Escrivint

$$\begin{aligned}
\varphi_W(H_{3,2k-2}) &= \sum_{p+2q+3r=k} a_{p,q,r}\,\varphi_W(H_{3,0})^p\varphi_W(H_{3,2})^q\varphi_W(H_{3,4})^r \\
(H_{3,2k-2})^\natural &= H_{3,2k-2} - \sum_{p+2q+3r=k} a_{p,q,r}\,(H_{3,0})^p(H_{3,2})^q(H_{3,4})^r \;\in\; \Omega^{\mathrm{SO}}_{4k} \otimes \mathbf{Q}
\end{aligned}$$

obtenim la base $\{\beta_I\}_{I\in\mathcal{P}_{4,k}}$ del nucli, on

$$\beta_I \;=\; (H_{3,2k_j-2})^\natural \times \prod_{i\neq j} H_{3,2k_i-2}.$$

Per a $k=4,5,6$, obtenim:

$$\begin{aligned}
\beta_4 &= -\frac{8}{5}H_{3,0}H_{3,4}+(H_{3,2})^2+H_{3,6}\\
\\
\beta_{1,4} &= -\frac{8}{5}(H_{3,0})^2H_{3,4}+H_{3,0}(H_{3,2})^2+H_{3,0}H_{3,6},\\
\beta_5 &= -\frac{96}{35}(H_{3,0})^2H_{3,4}+\frac{12}{7}H_{3,0}(H_{3,2})^2+\frac{6}{5}H_{3,2}H_{3,4}+H_{3,8}\\
\\
\beta_{1,1,4} &= -\frac{8}{5}(H_{3,0})^3H_{3,4}+(H_{3,0})^2(H_{3,2})^2+(H_{3,0})^2H_{3,6}\\
\beta_{2,4} &= -\frac{8}{5}H_{3,0}H_{3,2}H_{3,4}+(H_{3,2})^3+H_{3,2}H_{3,6},\\
\beta_{1,5} &= -\frac{96}{35}(H_{3,0})^3H_{3,4}+\frac{12}{7}(H_{3,0})^2(H_{3,2})^2+\frac{6}{5}H_{3,0}H_{3,2}H_{3,4}+H_{3,0}H_{3,8},\\
\beta_6 &= -\frac{512}{105}(H_{3,0})^3H_{3,4}+\frac{64}{21}(H_{3,0})^2(H_{3,2})^2+\frac{132}{35}H_{3,0}H_{3,2}H_{3,4}\\
&\quad -\frac{43}{42}(H_{3,2})^3+\frac{8}{25}(H_{3,4})^2+H_{3,10}
\end{aligned}$$

També podem considerar generadors M_{2i}, amb $i\geq 1$, de l'anell de cobordisme orientat tals que $\varphi_W(M_{2i})=G_{2i}$. Es pot escriure

$$\begin{aligned}
G_{2k} &= \sum_{p+2q+3r=k} a_{p,q,r}\,(G_2)^p(G_4)^q(G_6)^r\\
(M_{2k})^\natural &= M_{2k}-\sum_{p+2q+3r=k} a_{p,q,r}\,(M_2)^p(M_4)^q(M_6)^r \quad\in\quad \Omega_{4k}^{\mathrm{SO}}\otimes\mathbf{Q}
\end{aligned}$$

i tenim $\varphi_W((M_{2k})^\natural)=0$. Aleshores $\{\beta_I\}_{I\in\mathcal{P}_{4,k}}$ és una base del nucli, on

$$\beta_I \;=\; (M_{2k_j})^\natural \times \prod_{i\neq j} M_{2k_i}.$$

Per a $k=4,5,6$, per exemple:

$$\begin{aligned}
\beta_4 &= -120(M_4)^2+M_8\\
\\
\beta_{1,4} &= -120M_2(M_4)^2+M_2M_8\\
\beta_5 &= -\frac{5040}{11}M_4M_6+M_{10}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{1,1,4} &= -120(M_2)^2(M_4)^2 + (M_2)^2 M_8, \\
\beta_{2,4} &= -120(M_4)^3 + M_4 M_8 \\
\beta_{1,5} &= -\frac{5040}{11} M_2 M_4 M_6 + M_2 M_{10}, \\
\beta_6 &= -\frac{1209600}{13}(M_4)^3 - \frac{12600}{13}(M_6)^2 + M_{12}
\end{aligned}
$$

2.9 Una aplicació als anells de cobordisme

Hi ha un morfisme natural d'anells entre l'anell de cobordisme spin i l'anell de cobordisme orientat

$$\rho\colon \Omega_*^{\mathrm{Spin}} \longrightarrow \Omega_*^{\mathrm{SO}}.$$

Considerarem dimensions baixes ($n = 4k$) i utilitzarem el diagrama següent per tal d'identificar ρ_{4k} sobre $\mathbf{Z}$.

$$
\begin{array}{ccc}
\Omega_{4k}^{\mathrm{Spin}} & \xrightarrow{\rho_{4k}} & \Omega_{4k}^{\mathrm{SO}} \\
\varphi_W \downarrow & & \downarrow \varphi_W \\
N_{2k} & \xrightarrow{=} & N_{2k}.
\end{array}
$$

(És ben conegut que $\rho \otimes \mathbf{Q}$ i $\rho \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ són isomorfismes.)

Per a $k = 1$, sabem que

$$\Omega_4^{\mathrm{Spin}} \cong \mathbf{Z}, \qquad \Omega_4^{\mathrm{SO}} \cong \mathbf{Z}$$

amb generadors la superficie de Kummer V_2^4 i el pla projectiu $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ respectivament. El gènere de Witten ens dóna

$$\Omega_4^{\mathrm{Spin}} \cong \mathbf{Z}\langle 48\, G_2\rangle, \qquad \Omega_4^{\mathrm{SO}} \cong \mathbf{Z}\langle 3\, G_2\rangle$$

i així ρ_4 actua sobre el generador com multiplicació per 16. Sabem que ρ_4 és injectiu, i tenim una successió exacta curta

$$0 \longrightarrow \Omega_4^{\mathrm{Spin}} \xrightarrow{\rho_4} \Omega_4^{\mathrm{SO}} \longrightarrow \mathbf{Z}/16 \longrightarrow 0.$$

Per a $2k = 8$, $\Omega_4^{\mathrm{SO}} \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, amb generadors $\mathbf{C}\mathrm{P}^4$ i $\mathbf{C}\mathrm{P}^2 \times \mathbf{C}\mathrm{P}^2$. També $\Omega_4^{\mathrm{Spin}} \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, on els generadors venen donats per $\mathbf{H}\mathrm{P}^2$ i una varietat anomenada L_8. Per a l'estructura d'anell $\Omega_2^{\mathrm{Spin}} \otimes \Omega_2^{\mathrm{Spin}} \to \Omega_4^{\mathrm{Spin}}$ tenim $(V_2^4)^2 = 4L_8$. Amb aquestes dades podem identificar l'homomorfisme ρ_8:

Proposició 2.14 *Hi ha una successió exacta curta*

$$0 \longrightarrow \Omega_8^{\mathrm{Spin}} \xrightarrow{\rho_8} \Omega_8^{\mathrm{SO}} \longrightarrow \mathbf{Z}/2^7 \longrightarrow 0.$$

De fet, ρ_8 actua com la matriu

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$$

respecte de les bases especificades.

Demostració: Calculem el gènere de Witten de les varietats generadores, i obtenim

$$\begin{aligned}
\varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^4) &= \frac{25}{2}\,(G_2)^2 + \frac{5}{12}\,G_4 \\
\varphi_W(\mathbf{C}\mathrm{P}^2 \times \mathbf{C}\mathrm{P}^2) &= 9\,(G_2)^2 \\
\varphi_W(\mathbf{H}\mathrm{P}^2) &= 2\,(G_2)^2 - \frac{5}{6}\,G_4 \\
\varphi_W(L_8) &= \frac{1}{4}\,\varphi_W(V_2^4)^2 \;=\; 576\,(G_2)^2.
\end{aligned}$$

Per tant, φ_W és injectiu i podem identificar els anells de cobordisme amb les seves imatges

$$\begin{aligned}
\Omega_4^{\mathrm{SO}} &\cong \mathbf{Z}\left\langle \frac{25}{2}\,(G_2)^2 + \frac{5}{12}\,G_4 \right\rangle \oplus \mathbf{Z}\langle 9\,(G_2)^2 \rangle \\
\Omega_4^{\mathrm{SO}} &\cong \mathbf{Z}\left\langle 2\,(G_2)^2 - \frac{5}{6}\,G_4 \right\rangle \oplus \mathbf{Z}\langle 576\,(G_2)^2 \rangle.
\end{aligned}$$

Aleshores identifiquem l'aplicació ρ_8 per les equacions

$$\begin{aligned}
2\,(G_2)^2 - \frac{5}{6}\,G_4 &= -2 \cdot \left(\frac{25}{2}\,(G_2)^2 + \frac{5}{12}\,G_4 \right) + 3 \cdot \big(9\,(G_2)^2\big) \\
576\,(G_2)^2 &= 64 \cdot \big(9\,(G_2)^2\big)
\end{aligned}$$

i tenim que ρ_8 és injectiu amb $\operatorname{coker}(\rho_8) \cong \mathbf{Z}/2^7$. *qed*

Aquests resultats es poden trobar demostrats a [128, p. 92] per altres mètodes.

3 Algunes implicacions

3.1 Operadors de Dirac

El material d'aquesta secció es pot consultar a [128] i [35]. Les fonts originals són els articles de Atiyah–Singer, Atiyah–Segal, Atiyah–Hirzebruch i Atiyah–Bott [8], [10], [11], [15], [14], [13], [16], [17], [18].

Si U és un obert de $\mathbf{R}^n$, el Laplacià Δ d'una funció $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{R})$ es defineix com

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Les funcions tals que $\Delta f = 0$ s'anomenen *harmòniques*. Un operador de Dirac a U és un operador diferencial D tal que $D \circ D = -\Delta$. Per exemple, un operador de Dirac a $\mathbf{R}$ és $D = i(d/dx)$, i un operador de Dirac a $\mathbf{R}^2$ és

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}.$$

En general, si una família de matrius $\{E_i\}_{i=1}^n$ de $M_{2^r}(\mathbf{C})$ (on $r = \frac{1}{2}n$ si n és parell i $r = \frac{1}{2}(n-1)$ si n és senar) generen una representació de l'àlgebra de Clifford $C_n \otimes \mathbf{C}$ (és a dir, satisfan $E_i E_j + E_j E_i = -2\delta_{ij}$), llavors

$$D = E_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + E_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

és un operador de Dirac a $\mathbf{R}^n$, que actua sobre les funcions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^{2^r})$.

Sigui M una varietat compacta de dimensió n amb una mètrica de Riemann. Suposarem que M és spin i designarem per $PM \downarrow M$ el fibrat principal amb grup d'estructura $\mathrm{Spin}(n)$ que recobreix el fibrat $F^+M \downarrow M$ de les referències ortonormals positives. Sigui ∇ la connexió associada al fibrat $F^+M \downarrow M$ i sigui

$$\mathbf{C}^k \to S \to M$$

un fibrat spinorial (és a dir, un fibrat vectorial complex induït de $PM \downarrow M$ via una representació $\rho\colon C_n \otimes \mathbf{C} \to \mathrm{End}(\mathbf{C}^k)$ de l'àlgebra de Clifford). Llavors

$$D = e_1 \cdot \nabla_{e_1} + \cdots + e_n \cdot \nabla_{e_n}$$

és l'expressió en coordenades locals d'un operador de Dirac a l'espai de seccions $\Gamma(S)$, on $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és una secció de $F^+M \downarrow M$ i l'operació $e_i \cdot \nabla_{e_i}$ usa l'acció via ρ.

Considerem el cas particular on ρ és la representació spin de $C_n \otimes \mathbf{C}$, de dimensió $k = 2^r$ (on, com abans, $r = \frac{1}{2}n$ si n és parell i $r = \frac{1}{2}(n-1)$ si n és senar). Si n és parell, llavors S és la suma directa de dues representacions irreductibles S_+ i S_- de la mateixa dimensió, que són els subespais propis de l'element de volum $w = i^r e_1 \cdots e_n$ a $C_n \otimes \mathbf{C}$. L'operador de Dirac es restringeix a $D\colon \Gamma(S_+) \to \Gamma(S_-)$, i aquest s'anomena *l'operador d'Atiyah–Singer*. És un operador autoadjunt respecte a la mètrica i el seu nucli té dimensió finita (aquesta propietat s'enuncia dient que D és *el·líptic*). Llavors el conucli de D també té dimensió finita, i la diferència

$$\mathrm{ind}(D) = \dim\ker D - \dim \mathrm{coker} D$$

s'anomena *l'índex* de l'operador D. El teorema d'Atiyah–Singer estableix que, en aquesta situació, es compleix

$$\mathrm{ind}(D) = \hat{A}(M).$$

Per tant, l'índex de D només depèn dels nombres de Pontrjagin de la varietat M. D'altra banda, això demostra que si M és spin, llavors el $\hat{A}$-gènere de M és un enter.

3.2 Operadors de Dirac als espais de llaços

Sigui M una varietat de dimensió $4k$ i sigui $E \downarrow M$ un fibrat vectorial complex de dimensió m. El *$\hat{A}$-gènere torçat* de M amb coeficients a E (vegeu [11], [88], [189]) es defineix com

$$\hat{A}(M, E) = (\hat{A}(TM) \cdot \mathrm{ch}(E))\,[M]$$

on ch designa el caràcter de Chern; és a dir,

$$\mathrm{ch}(E) = e^{x_1} + \cdots + e^{x_m},$$

on $x_1, \ldots, x_m$ són les arrels formals de la classe de Chern total $c(E)$. També convé recordar la notació

$$S_t E = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (S^i E)\, t^i$$

per a fibrats vectorials E, on $S^i E$ designa el producte simètric de E amb ell mateix i vegades. Amb aquesta notació, tenim

$$\mathrm{ch}(S_t E) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - te^{x_i}}.$$

Suposem ara que M és spin i que té una mètrica de Riemann. Sigui $D\colon\Gamma(S_+)\to\Gamma(S_-)$ l'operador d'Atiyah–Singer. Per a cada fibrat vectorial complex $E\downarrow M$, l'operador D indueix un operador de Dirac $\Gamma(S_+\otimes E)\to\Gamma(S_-\otimes E)$, que es denota per $D\otimes E$. També es dedueix del teorema d'Atiyah–Singer que

$$\mathrm{ind}(D\otimes E)=\hat{A}(M,E).$$

Ara suposem que un grup de Lie compacte G actua sobre M de manera compatible amb la mètrica i amb l'estructura spin (això, en particular, implica que l'operador d'Atiyah–Singer és G-equivariant). Llavors per a cada fibrat vectorial complex $E\downarrow M$ amb una acció compatible de G podem definir *l'índex equivariant* de l'operador $D\otimes E$, que es denota per $\mathrm{ind}^G(D\otimes E)$, com el caràcter de la representació virtual de G

$$\ker(D\otimes E)-\mathrm{coker}(D\otimes E).$$

En el cas particular on $G=S^1$, aquest caràcter pren la forma

$$\mathrm{ind}^{S^1}(D\otimes E)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nq^n,$$

on $c_n=\dim[\ker(D\otimes E)]_n-\dim[\mathrm{coker}(D\otimes E)]_n$, si designem per $[V]_n$ el subespai de V on $q\in S^1$ actua com multiplicació per q^n.

Sigui $\mathcal{L}M$ la varietat (de dimensió infinita) dels llaços lliures diferenciables a M. Llavors el grup $G=S^1$ actua sobre $\mathcal{L}M$ per rotació dels llaços. Observem que l'espai de punts fixos de $\mathcal{L}M$ per aquesta acció és precisament el subespai dels llaços constants, que es pot identificar amb la varietat M. Suposant que la varietat M és string (és a dir, $q_1(M)=0$, que tal com ja hem dit es pot interpretar com $\mathcal{L}M$ spin), Witten va considerar un operador de Dirac $\mathcal{D}$ a $\mathcal{L}M$, encara que l'existència d'aquest operador no ha estat demostrada rigorosament. Aplicant heurísticament la fórmula de punts fixos (és explicada a la secció 4) a l'acció de S^1 sobre $\mathcal{L}M$, va arribar a la fórmula

$$\mathrm{ind}^{S^1}(\mathcal{D})=q^{-k/6}\,\mathrm{ind}(D\otimes E),$$

on D és l'operador d'Atiyah–Singer a M i el fibrat E és

$$E=\bigotimes_{n>0}S_{q^n}(TM\otimes\mathbf{C});$$

vegeu [169], [187].

Això porta a la següent interpretació del gènere de Witten. Per a una varietat M qualsevol, es compleix

$$\begin{aligned}
\varphi_W(M) &= \left(\prod_{i=1}^{2k} Q(x_i)\right)[M] \\
&= \left(\prod_{i=1}^{2k}\left(\frac{x_i/2}{\sinh(x_i/2)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n)^2}{(1-q^ne^{x_i})(1-q^ne^{-x_i})}\right)\right)[M] \\
&= \left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{4k}\ \hat{A}(TM)\cdot \mathrm{ch}\bigotimes_{n>0} S_{q^n}(TM\otimes \mathbf{C})\right)[M] \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{4k}\ \hat{A}\left(M,\ \bigotimes_{n>0} S_{q^n}(TM\otimes \mathbf{C})\right).
\end{aligned}$$

Ara cal tenir en compte que, si denotem un fibrat real trivial de dimensió d per la mateixa lletra d, llavors es compleix

$$\mathrm{ch}\bigotimes_{n>0} S_{q^n}(d\otimes \mathbf{C}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-d}.$$

Per tant, també podem escriure

$$\varphi_W(M) = \hat{A}\left(M,\ \bigotimes_{n>0} S_{q^n}(\widetilde{TM}\otimes \mathbf{C})\right),$$

on $\widetilde{TM} = TM - 4k$. Aquesta fórmula es justifica amb més detall a la secció 4.

Observem, d'altra banda, que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{4k} = \left(q^{-1}\,\Delta\right)^{k/6}$$

i recordem que $q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \Delta^{1/24}$ és la funció η de Dedekind. Tenint això en compte, i sota la hipòtesi que la varietat M és string, podem convertir l'expressió anterior en

$$\begin{aligned}
\varphi_W(M) &= (q^{-1}\,\Delta)^{k/6}\ \ \mathrm{ind}\left(D\otimes\left(\bigotimes_{n>0} S_{q^n}(TM\otimes \mathbf{C})\right)\right) \\
&= \Delta^{k/6}\ \ \mathrm{ind}^{S^1}(\mathcal{D}) \ = \ \eta^{4k}\ \ \mathrm{ind}^{S^1}(\mathcal{D}).
\end{aligned}$$

Així doncs, llevat del terme η^{4k}, el gènere de Witten d'una varietat string M es pot pensar com l'índex S^1-equivariant d'un operador de Dirac a $\mathcal{L}M$.

3.3 Moonshine

Hopkins i Mahowald han demostrat que existeixen varietats M de dimensió 24 tals que $q_1(M) = 0$, $\hat{A}(M) = 1$, $\hat{A}(M, TM \otimes \mathbf{C}) = 0$. Per a una varietat string M de dimensió 24, l'espai de formes modulars de pes 12 té dimensió 2, i per tant el gènere de Witten de M es pot escriure com una combinació lineal de Δ i un altre generador qualsevol. Si triem

$$\bar{\Delta} = 240\,(G_4)^3 - 744\Delta = \Delta\,(j - 744),$$

llavors s'obté precisament

$$\varphi_W(M) = \hat{A}(M, TM \otimes \mathbf{C})\,\Delta + \hat{A}(M)\,\bar{\Delta}.$$

Per tant, si M és una varietat de Hopkins–Mahowald, llavors

$$\varphi_W(M) \;=\; \bar{\Delta} \;=\; \Delta\,(j - 744),$$

que també ho podem escriure com

$$j - 744 = q^{-1}\hat{A}\left(M,\, \bigotimes_{n>0} S_{q^n}(TM \otimes \mathbf{C})\right).$$

Si fos possible trobar una varietat M que de Hopkins–Mahowald on el monstre de Fischer–Griess actués per difeomorfismes (i per tant es representés al fibrat tangent), s'obtindria una explicació geomètrica de la relació entre la funció j de Klein i les dimensions de les representacions irreductibles del monstre. Per a més detalls, vegeu [94], [136], [175].

3.4 Gèneres el·líptics de nivell n

Sigui $L = 2\pi i\tau\mathbf{Z} + 2\pi i\mathbf{Z}$ un reticle qualsevol amb $\tau \in \mathfrak{H}$. Sigui h una funció meromorfa al pla complex i el·líptica (és a dir, doblement periòdica) respecte al reticle L, amb un zero d'ordre n a l'origen i un pol del mateix ordre en un punt w. Una tal funció només pot existir si w és un punt de n-divisió de la corba el·líptica $\mathbf{C}/L$; és a dir,

$$w = 2\pi i(k\,\tau + l)/n, \qquad k, l \in \mathbf{Z}.$$

Amb aquestes hipòtesis, la funció h queda determinada si imposem la condició que el coeficient del primer terme $c_n x^n$ del seu desenvolupament en sèrie de potències sigui $c_n = 1$. Llavors podem considerar la funció

$$f(x) = \sqrt[n]{h(x)},$$

el desenvolupament de la qual comença amb x. Aquesta funció f és el·líptica respecte a un subreticle $\widetilde{L}$ d'índex n a L. Per tant, per a cada punt w de n-divisió tenim una sèrie de potències ben determinada

$$P(x) = \frac{x}{f(x)} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots,$$

on els coeficients b_j, pensats com a funcions de τ, són formes modulars respecte a un cert subgrup Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

Denotarem per f_n la funció que correspon al cas particular on $w = 2\pi i/n$. En aquest cas, la funció f_n és el·líptica respecte al reticle $\widetilde{L} = 2\pi i\,(n\tau\mathbf{Z} + \mathbf{Z})$ i els coeficients b_j són formes modulars respecte a

$$\Gamma_1(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \ \middle|\ a \equiv d \equiv 1,\ \ c \equiv 0 \mod n \right\}.$$

El gènere complex amb sèrie característica $P_n(x) = x/f_n(x)$ (que no és pas necessàriament parella) s'anomena *gènere el·líptic de nivell* n; vegeu [87]. Es relaciona amb el gènere de Witten per l'expressió

$$f_n(x) = \frac{\Phi(\tau, x)\ \Phi(\tau, -2\pi i/n)}{\Phi(\tau, x - 2\pi i/n)},$$

on $\Phi(\tau, x) = \sigma_L(x)\exp(-G_2 x^2)$ és la funció que defineix el gènere de Witten. La sèrie característica $P_n(x)$ del gènere el·líptic de nivell n es pot escriure com

$$P_n(x) = \frac{x}{1+y} \cdot \frac{1 + ye^{-x}}{1 - e^{-x}} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 + q^m e^x y^{-1})(1 + q^m e^{-x} y)}{(1 - q^m e^x)(1 - q^m e^{-x})} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - q^m)^2}{(1 + q^m y^{-1})(1 + q^n y)},$$

on $y = -e^{-2\pi i/n}$, si $n \neq 1$. Quan $n = 2$, la funció el·líptica h ve donada per

$$h(x) = \frac{1}{\wp(x, \tau) - e_1(\tau)}$$

i la funció $f_2(x) = \sqrt{h(x)}$ és igual a

$$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\wp(x, \tau) - e_1(\tau)}},$$

que és una funció senar. Tal com hem dit a la secció 1.11, el gènere real amb sèrie característica $x/f_2(x)$ (que ara sí que és parella) és precisament el gènere el·líptic universal. Observem que $\Gamma_1(2) = \Gamma_0(2)$.

Quan $n = 2$, hem de fer $y = 1$ en la expressió per a la sèrie característica i obtenim

$$\frac{x/2}{\tanh(x/2)} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1+q^m e^x)\,(1+q^m e^{-x})}{(1-q^m e^x)\,(1-q^m e^{-x})} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^m}{1+q^m}\right)^2.$$

Aquesta és la mateixa sèrie que hem donat a la secció 1.11 com a sèrie característica del gènere el·líptic universal, però desenvolupada en l'altra punta del domini fonamental de $\Gamma_0(2)$; vegeu [192].

En termes de la funció $\eta = \Delta^{1/24}$ de Dedekind, podem escriure

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^m}{1+q^m}\right)^2 = \frac{\eta(\tau)^4}{2\,\eta(2\tau)^2},$$

que coincideix amb $2\,\varepsilon^{1/4}$, on $\varepsilon = \varphi_{\mathrm{ell}}(\mathbf{H}\mathrm{P}^2)$. Per a una varietat M de dimensió $4k$ amb arrels formals $\pm x_1, \ldots, \pm x_{2k}$, la forma

$$\mathrm{sign}^{S^1}(\mathcal{L}M) = \prod_{i=1}^{2k} \left(\frac{x_i}{\tanh(x_i/2)} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1+q^m e_i^x)\,(1+q^m e^{-x_i})}{(1-q^m e_i^x)\,(1-q^m e^{-x_i})} \right) [M] \;=\; \varphi_{\mathrm{ell}}(M)\,\varepsilon^{-k/2}$$

és la signatura S^1-equivariant de la varietat de llaços $\mathcal{L}M$ en el sentit de Witten; vegeu la secció 4 i [90, 6.1].

3.5 Gèneres amb paràmetres

Sigui G un grup topològic amb una aplicació $j\colon G \to \mathrm{O}$. Un *gènere amb paràmetres* és una aplicació d'espectres-anell

$$\Phi\colon MG \to E,$$

on MG és l'espectre de Thom associat a G. El nom prové del següent. Una varietat M amb G-estructura representa un element de l'anell de cobordisme Ω^G i per tant es pot representar per una aplicació $f\colon S^0 \to MG$. Llavors $\Phi \circ f$ és un element de l'anell de coeficients E^*. Si canviem S^0 per un espai X qualsevol, llavors una classe de $MG^*(X)$ es pot pensar com un element de $[X, MG]$, és a dir, com una família de varietats parametritzada per X. Llavors Φ indueix una aplicació

$$MG^*(X) \to E^*(X)$$

que assigna a cada família de varietats parametritzada per X una classe de $E^*(X)$.

Un gènere amb paràmetres Φ indueix un gènere ordinari als coeficients

$$\varphi\colon \Omega^G \to \pi(E).$$

Un bon exemple és el que hem esmentat a l'apartat 1.12, d'aplicacions

$$M\mathrm{SO} \to K\mathrm{O}[\tfrac{1}{2}], \qquad\qquad M\mathrm{Spin} \to K\mathrm{O}$$

que indueixen el $\hat{A}$-gènere als coeficients.

Recentment, Hopkins i Mahowald han construït una aplicació d'espectres-anell

$$\sigma_C \colon M\mathrm{String} \to E_C$$

per a cada corba el·líptica C, on E_C designa un espectre orientable complex amb llei de grup formal isomorfa a la de la corba C. Quan C és la corba de Tate, el gènere induït als coeficients és el gènere de Witten per a varietats string, que pren valors (modulars) a $\mathbf{Z}[[q]]$. A més, hi ha una aplicació

$$\sigma \colon M\mathrm{String} \to eo_2$$

on eo_2 és un espectre amb la propietat que qualsevol aplicació σ_C de les anteriors factoritza a través de σ. Aquesta aplicació σ s'anomena *gènere de Witten amb paràmetres*. La teoria de cohomologia $(eo_2)^*$ ha resultat ser molt fina per a l'estudi dels grups d'homotopia estables de les esferes [5], [6], [41], [61], [95], [96], [100].

3.6 Varietats amb curvatura de Ricci positiva

Lichnerowicz va demostrar que si una varietat spin M admet una mètrica amb curvatura escalar positiva, llavors $\hat{A}(M) = 0$; vegeu [128]. Höhn i Stolz [166] han conjecturat que si M és una varietat string que admet una mètrica amb curvatura de Ricci positiva, llavors $\varphi_W(M) = 0$.

Cal tenir en compte que si una varietat admet una mètrica amb curvatura de Ricci positiva, llavors la curvatura escalar també és positiva. D'altra banda, $\hat{A}(M)$ és el primer coeficient de $\varphi_W(M)$. Per tant, aquesta conjectura és consistent amb el teorema de Lichnerowicz.

3.7 Varietats amb accions de S^3

El $\hat{A}$-gènere d'una varietat spin M s'anul·la si i només si algun múltiple enter no trivial de M és Spin-cobordant a una varietat spin que admet una acció no trivial de S^1. Aquest és un resultat clàssic de Atiyah i Hirzebruch.

Sigui M una varietat string. Dessai [59], [60] ha demostrat recentment que $\varphi_W(M) = 0$ si i només si hi ha un múltiple enter no trivial de M que és String-cobordant a una varietat string que admet una acció no trivial de S^3.

4 Fórmula de Witten

4.1 Orientació en una teoria de cohomologia

Sigui h un espectre-anell. Sigui $\pi : E \downarrow B$ un fibrat vectorial real de dimensió r amb B connex. Designarem per $E' = E \setminus \{(0,x),\ x \in B\}$ el complementari de la 0-secció. Llavors

$$(F, F') \cong (\mathbf{R}^r, \mathbf{R}^r - 0) \xrightarrow{i} (E, E') \xrightarrow{\pi} (B, *)$$

és una h^*-fibració relativa per a la qual es compleix $h^{*+r}(F, F') \cong h^{*+r}(S^r, *) \cong h^*(*)$. Sigui $u_r \in h^r(F, F')$ la classe corresponent a $1 \in h$.

Definició 4.1 El fibrat π és h^*-*orientable* si existeix una classe $u \in h^r(E, E')$ tal que $i^*(u) = u_r$. Aleshores, u es diu una h^*-*orientació* de π.

$$\begin{array}{ccccc} h^r(E, E') & \xrightarrow{i^*} & h^r(F, F') \cong h^r(S^r) & & \\ u & \longmapsto & u_r & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Si prenem l'espai de Thom $B_\pi = D(\pi)/S(\pi)$ associat a π tenim un isomorfisme en cohomologia $h^*(E, E') \cong h^*(B_\pi)$, i la classe $u \in h^r(B_\pi)$ es diu la *classe de Thom*. La classe $e = s^*(u) \in h^r(B)$ es diu la *classe de Euler*, on s és la 0-secció.

A més, sabem que l'aplicació $\phi = \phi_u$ definida per

$$\begin{array}{ccccc} h^*(B) & \xrightarrow{\phi} & h^{*+r}(E, E') & \cong & h^{*+r}(B_\pi) \\ z & \longmapsto & \pi^* z \cup u, & & \end{array} \tag{4.1}$$

on $\cup$ denota el cup-producte a h^*, és un isomorfisme, anomenat *isomorfisme de Thom*.

Sigui $f\colon M^m \to \mathbf{R}^{m+r}$ una immersió (imbedding) d'una varietat diferenciable de dimensió m en un espai euclidià; sigui $\nu = \nu(f)$ el fibrat normal associat a ella i $M_{\nu(f)}$ l'espai de Thom corresponent.

Definició 4.2 Una varietat diferenciable M és h^*-*orientable* si existeix una h^*-orientació $u \in h^r(M_{\nu(f)})$ del fibrat $\nu(f)$. Llavors (f, u) és una h^*-*orientació* de M.

Per raonaments sobre isotopia d'immersions, sabem que l'orientabilitat no depèn de l'elecció de f. Sigui $f\colon M^m \to N^n$ una aplicació contínua de varietats diferenciables. Aleshores hi ha una aplicació

$$\widetilde{f} = f \times i : M \longrightarrow N \times D$$

on $\widetilde{f}$ és homòtopa a una immersió diferenciable i $i : M \to D$ és una immersió diferenciable a l'interior d'un disc de dimensió $d < 2m + 3$.

Definició 4.3 Una aplicació $f\colon M \to N$ és h^*-*orientable* si existeix una h^*-orientació $u \in h^{n+d-r}(M_{\nu(\widetilde{f})})$ del fibrat normal de $\widetilde{f}$.

L'orientabilitat de f no depèn de l'elecció de $\widetilde{f}$. De fet, les h^*-orientacions (i,u) de f estan en correspondència bijectiva amb les h^*-orientacions del fibrat $\nu(M) \oplus f^*\tau(N)$. En particular, si M i N són h^*-orientades i f és una aplicació contínua qualsevol, aleshores f té una h^*-orientació ben definida.

De $\widetilde{f}$ obtenim una aplicació col·lapse $N \times D \to D(\nu(\widetilde{f}))$, i per tant una aplicació $\widehat{f}\colon \Sigma^d N \to M_{\nu(\widetilde{f})}$ definida com

$$\frac{N \times D^d}{N \times S^{d-1}} \xrightarrow{\hat{f}} \frac{D(\nu(\widetilde{f}))}{S(\nu(\widetilde{f}))}.$$

Sigui $\widehat{f}^*\colon h^*(M_{\nu(\widetilde{f})}) \to h^*(\Sigma^d N)$ l'aplicació induïda en cohomologia.

Definició 4.4 Sigui $f\colon M \to N$ una aplicació entre varietats diferenciables amb una h^*-orientació (i,u). Aleshores l'*homomorfisme de Gysin* $f_! : h^*(M) \to h^{*+n-m}(N)$ es defineix per l'aplicació $\Sigma^{-d} \circ \widehat{f}^* \circ \phi_u$

$$\begin{array}{ccc} h^*(M) & \xrightarrow{f_!} & h^{*+n-m}(N) \\ \phi_u \downarrow\cong & & \cong\downarrow \Sigma^d \\ h^{*+n+d-m}(M_{\nu(\widetilde{f})}) & \xrightarrow{\widehat{f}^*} & h^{*+n+d-m}(\Sigma^d N). \end{array}$$

Per a les classes $x \in h^*(M)$ i $y \in h^*(N)$ es compleix

$$f_!(f^*(y) \cup x) \;=\; y \cup f_!(x). \tag{4.2}$$

A més, si $f\colon L \to M$ i $g\colon M \to N$ són h^*-orientades, la composició $g \circ f$ té una h^*-orientació induïda i amb aquesta orientació es compleix

$$g_! \circ f_! \;=\; (g \circ f)_!\,.$$

4.2 Teorema de Riemann–Roch generalitzat

Sigui h^* una teoria de cohomologia multiplicativa. Si considerem un parell (X,A), aleshores $h^{**}(X,A)$ és el conjunt de les sèries de Laurent formals de la forma

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \lambda_r, \qquad \lambda_r \in h^r(X,A),\;\; \lambda_r = 0 \text{ per a tot } r < N, \text{ per a algun } N.$$

Definim l'addició i la multiplicació de λ, μ a $h^{**}(X, A)$ via

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)_r &= \lambda_r + \mu_r \\ (\lambda \cup \mu)_r &= \sum_{i+j=r} \lambda_i \cup \mu_j.\end{aligned}$$

Amb aquestes operacions, $h^{**}(X, A)$ té estructura d'anell no commutatiu, i tota aplicació $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ indueix un homomorfisme d'anells

$$f^{**} : h^{**}(Y, B) \;\to\; h^{**}(X, A)$$

determinat per f^* a cada coordenada. De la mateixa manera definim

$$\delta^{**} : h^{**}(A) \;\to\; h^{**}(X, A).$$

Definició 4.5 Suposem que h^* i k^* són teories multiplicatives. Aleshores $t\colon h^{**} \to k^{**}$ és una *transformació multiplicativa* si compleix

1. t és una transformació natural additiva entre els functors h^{**} i k^{**} respecte a les aplicacions f^{**};
2. $t(\lambda \cup \mu) = t(\lambda) \cup t(\mu)$.

t es diu *unitària* si es compleix a més

3. Si 1_h i 1_k són les unitats de h^{**} i k^{**} respectivament, i escrivim $\alpha = \Sigma 1_h \in h^{**}(S^1)$, $\beta = \Sigma 1_k \in k^{**}(S^1)$, llavors $t(\alpha) = \beta$.

Es compleix $t \circ \Sigma_h = \Sigma_k \circ t$ (és a dir, t és *estable*), i també $t \circ \delta^{**} = \delta^{**} \circ t$.

Suposem que tenim un fibrat α sobre X, amb orientacions $u \in h^r(X_\alpha)$ i $v \in k^r(X_\alpha)$. Aleshores u i v indueixen isomorfismes (no multiplicatius)

$$\begin{aligned}\phi_u : h^{**}(X) &\to h^{**}(X_\alpha) \\ \phi_v : k^{**}(X) &\to k^{**}(X_\alpha).\end{aligned}$$

Una transformació multiplicativa t no és natural respecte als isomorfismes ϕ. Donem la definició següent:

Definició 4.6 Per a t una transformació multiplicativa i un fibrat α sobre X, sigui $t_\alpha\colon h^{**}(X) \to k^{**}(X)$ la funció donada per $\phi_v^{-1} \circ t \circ \phi_u$

$$\begin{array}{ccc} h^{**}(X) & \xrightarrow{t_\alpha} & k^{**}(Y) \\ \phi_u \downarrow\cong & & \cong\downarrow \phi_v \\ h^{**}(X_\alpha) & \xrightarrow{t} & k^{**}(Y_\alpha). \end{array}$$

De fet, per a $x \in h^{**}(X)$ es compleix $t_\alpha(x) = t(x) \cup t_\alpha(1)$. A més, sempre podem prendre $v = (tu)_r \in k^r(X_\alpha)$. El teorema següent és una forma de naturalitat respecte als homomorfismes de Gysin. Es dedueix directament de les definicions de $f_!^h$, $f_!^k$ i $t_{\nu(\widetilde{f})}$, i de la naturalitat i l'estabilitat de t.

Teorema 4.7 (Riemann–Roch) *Sigui $f : X \to Y$ una aplicació h^*-orientada de varietats compactes sense vora, i sigui $t\colon h^{**} \to k^{**}$ una transformació multiplicativa. Aleshores $tf_!^h = f_!^k t_{\nu(\widetilde{f})}$; és a dir, el diagrama següent commuta:*

$$\begin{array}{ccc} h^{**}(X) & \xrightarrow{t_{\nu(\widetilde{f})}} & k^{**}(X) \\ f_!^h \downarrow & & \downarrow f_!^k \\ h^{**}(Y) & \xrightarrow{t} & k^{**}(Y). \end{array}$$

Més explicitament, per a $x \in h^{**}(X)$ es compleix

$$tf_!^h(x) \;=\; f_!^k(t(x) \cup t_{\nu(\widetilde{f})}(1)).$$

Si el fibrat normal ν a X ve donat amb h^*- i k^*-orientacions u_h i u_k respectivament, aleshores existeix una única $\rho(\nu)$ amb $\rho_0(\nu) = 1$ i $\rho(\nu) \cup t\,u_h = u_k$, que podem escriure

$$\rho(\nu) \;=\; \frac{u_k}{t\,u_h}.$$

Tenim $t\,u_h = u_k \cup \rho^{-1}(\nu)$, i es dedueix que $t_\nu(1) = \rho^{-1}(\nu)$. Si les classes de Thom són multiplicatives, es compleix $\rho^{-1}(\nu) = \rho(\tau)$ per a τ el fibrat tangent, i per a $x \in h^{**}(X)$ tenim

$$tf_!^h(x) \;=\; f_!^k(t(x) \cup \rho(\tau(\widetilde{f}))). \tag{4.3}$$

4.3 Casos particulars: $t =$ch

El caràcter de Chern ens dóna una transformació multiplicativa entre la teoria K i la cohomologia racional $H^*(-;\mathbf{Q})$:

$$K^{**} \xrightarrow{\mathrm{ch}} H^{**}.$$

Per a λ un fibrat de línea complex hi ha una $K_{\mathbf{C}}^*$-orientació canònica i es compleix

$$\mathrm{ch}_\lambda(1) \;=\; \frac{\mathrm{ch}\, e_K(\lambda)}{e_H(\lambda)} \;=\; \frac{\mathrm{ch}\,(1-\lambda)}{-c_1(\lambda)} \;=\; \frac{1-e^{-x}}{x}$$

on $x = -c_1(\lambda)$, $e^{-x} = \mathrm{ch}\,(\lambda)$. L'invers $\rho(\lambda)$ és la classe de Todd:

$$\mathrm{Td}(\lambda) \quad = \quad \frac{x}{1-e^{-x}}. \tag{4.4}$$

Així a un fibrat ξ sobre X de rang n (complex, amb grup d'estructura $\mathrm{U}(n)$) tenim

$$\mathrm{Td}(\xi) \quad = \quad \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1-e^{-x_i}}.$$

Sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua $K^*_{\mathbf{C}}$-orientada de varietats compactes sense vora. Aleshores per a cada $x \in K^{**}(X)$ es compleix que

$$\mathrm{ch}\, f_!^K(x) \quad = \quad f_!^H(\mathrm{ch}(x) \cup \mathrm{Td}(\tau(\widetilde{f}))).$$

A més de $G = \mathrm{U}$, també volem considerar els grups d'estructura SO i Spin. Per a un fibrat complex, una estructura spin al fibrat real sotajacent és una arrel quadrada del seu fibrat de línia determinant. Si λ és un fibrat de línia, tenim $\det(\lambda) = \lambda$ i orientacions canòniques amb

$$\mathrm{ch}_\lambda(1) \quad = \quad \frac{\mathrm{ch}\, e_K(\lambda)}{e_H(\lambda)} \quad = \quad \frac{\mathrm{ch}\,(1-\lambda)/\sqrt{\lambda}}{-c_1(\lambda)} \quad = \quad \frac{1-e^{-x}}{xe^{-x/2}}.$$

L'invers $\rho(\lambda)$ és la classe $\hat{A}$:

$$\hat{A}(\lambda) \quad = \quad \frac{xe^{-x/2}}{1-e^{-x}} \quad = \quad \frac{x/2}{\sinh(x/2)}. \tag{4.5}$$

Per a $G = \mathrm{SO}$ tenim classes de Euler canòniques tals que

$$\mathrm{ch}_\lambda(1) \quad = \quad \frac{\mathrm{ch}\, e_K(\lambda)}{e_H(\lambda)} \quad = \quad \frac{\mathrm{ch}\,(1-\lambda)/(1+\lambda)}{-c_1(\lambda)} \quad = \quad \frac{1-e^{-x}}{x(1+e^{-x})}.$$

L'invers $\rho(\lambda)$ en aquest cas és la classe L, corresponent a la signatura:

$$L(\lambda) \quad = \quad \frac{x(1+e^{-x})}{1-e^{-x}} \quad = \quad \frac{x}{\tanh(x/2)}. \tag{4.6}$$

Resumint, tenim la taula següent de les classes definides per K^*-orientacions prefixades diferents.

G	$e_K(\lambda)$	$e_K(\xi)$	$e_H(\lambda)$	$t : K^{**} \to H\mathbf{Q}^{**}$	$\rho(\lambda)$	$\rho(\xi)$
U	$1-\lambda$	$\Lambda_{-1}(\xi)$	$-c_1(\lambda)$	ch	$\dfrac{x}{1-e^{-x}}$	$td\,(\xi)$
Spin	$\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$	$\dfrac{\Lambda_{-1}(\xi)}{\sqrt{\det \xi}}$	$-c_1(\lambda)$	ch	$\dfrac{x/2}{\sinh(x/2)}$	$\hat{A}(\xi)$
SO	$\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$	$\Lambda_{-1}(\xi) \cdot S_{-1}(\xi)$	$-c_1(\lambda)$	ch	$\dfrac{x}{\tanh(x/2)}$	$L(\xi)$

4.4 Fórmula dels punts fixos

Sigui h^* un espectre complex orientat i considerem $\mathbf{T} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ el grup S^1 amb fibrat universal

$$\mathbf{T} \longrightarrow E\mathbf{T} \xrightarrow{\lambda} B\mathbf{T}. \tag{4.7}$$

Com que volem poder invertir uns certs elements a $h^*(B\mathbf{T}) = h[[x]]$, normalment considerarem l'espectre localitzat $h \otimes \mathbf{Q}[x^{-1}]$.

Sigui X una varietat compacta diferenciable amb una $\mathbf{T}$-acció diferenciable i sigui $X^{\mathbf{T}}$ la varietat de punts fixos per l'acció. Suposarem que $X^{\mathbf{T}}$ és connexa. Considerem les aplicacions

$$B\mathbf{T} \times X^{\mathbf{T}} \xrightarrow{i} E\mathbf{T} \times_{\mathbf{T}} X \xrightarrow{\pi} B\mathbf{T} \tag{4.8}$$

donades per la immersió $X^{\mathbf{T}} \subset X$ i la projecció $X \to *$. Ens interessa una *fórmula de punts fixos* per a $\pi_!(1) \in h^*(B\mathbf{T})$ en termes de $X^{\mathbf{T}}$.

Sigui ν el fibrat normal sobre $X^{\mathbf{T}}$ de la immersió $X^{\mathbf{T}} \subset X$. Aleshores hi ha una acció de $\mathbf{T}$ sobre les fibres de ν i una descomposició de fibrats

$$\nu \ = \ \bigoplus_{n>0} \nu_n \qquad \text{amb } \ \nu_n \ \cong \ \nu_n^+ \oplus \nu_n^-$$

on $\dim \nu_n^- = \dim \nu_n^+$, i $\theta \in \mathbf{T}$ actua sobre $\nu_n^+ \oplus \nu_n^-$ com

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ \mapsto \ \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Encara que X no tingui estructura complexa, és possible posar-ne una a ν_n identificant ν_n^- amb $i\nu_n^+$ i la multiplicació per i amb l'acció de $\pi/2n \in \mathbf{T}$.

Així tenim un fibrat complex $\mathbf{T}$-equivariant $\nu = \bigoplus_{n>0} \nu_n$ a $X^{\mathbf{T}}$, on l'acció de $\theta \in \mathbf{T}$ sobre ν_n és multiplicació per $e^{in\theta}$. Definem fibrats $\widetilde{\nu}$ i $\widetilde{\nu}_n$ a $B\mathbf{T} \times X^{\mathbf{T}}$ per

$$\widetilde{\nu} \ = \ E\mathbf{T} \times_{\mathbf{T}} \nu, \qquad \widetilde{\nu}_n \ = \ E\mathbf{T} \times_{\mathbf{T}} \nu_n \qquad (n > 0).$$

La fórmula dels punts fixos es dedueix de les dues observacions següents:

$$i^* i_!(x) \ = \ e(\widetilde{\nu}) \cup x, \qquad x \in h^*(B\mathbf{T} \times X^{\mathbf{T}}), \tag{4.9}$$

$$\widetilde{\nu}_n \ \cong \ \lambda^n \otimes \nu_n, \qquad n > 0. \tag{4.10}$$

De (4.9) obtenim $i_!\,(e(\widetilde{\nu})^{-1}) = 1 \in h^*(E\mathbf{T} \times_{\mathbf{T}} X)$ i per tant

$$\pi_!(1) \;\; = \;\; p_!\left(e(\widetilde{\nu})^{-1}\right), \tag{4.11}$$

on p és la projecció $\pi \circ i \colon B\mathbf{T} \times X^{\mathbf{T}} \to B\mathbf{T}$.

Prenem en particular $h^* = K^*$. Aplicant el caràcter de Chern tenim

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \pi_!^K(1) &= \operatorname{ch} p_!^K\left(e(\widetilde{\nu})^{-1}\right) \\ &= p_!^H\left(\rho(\tau) \cup \operatorname{ch} e(\widetilde{\nu})^{-1}\right) \end{aligned}$$

per Riemann–Roch. Com que $\widetilde{\nu} = \bigoplus_{n>0} (\lambda^n \otimes \nu_n)$, obtenim la fórmula

$$\operatorname{ch} \pi_!^K(1) \;\; = \;\; p_!^H\left(\rho(\tau) \cup \prod_{n>0} \operatorname{ch} e(\lambda^n \otimes \nu_n)^{-1}\right). \tag{4.12}$$

4.5 Espais de llaços lliures i fórmula de Witten

Sigui M una varietat compacta i diferenciable. Considerem l'espai de llaços lliures

$$\mathcal{L}M = \operatorname{map}(\mathbf{T}, M).$$

El grup $\mathbf{T}$ actua sobre $\mathcal{L}M$ a través de l'addició $\mathbf{T} \times \mathbf{T} \to \mathbf{T}$:

$$(\gamma \cdot \theta)(\vartheta) = \gamma(\theta + \vartheta), \qquad \gamma \in \mathcal{L}M,\ \theta, \vartheta \in \mathbf{T} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}.$$

Donem estructura de varietat a $\mathcal{L}M$ on l'espai tangent ve donat per seccions dels pullbacks de l'espai tangent de M,

$$T_\gamma \mathcal{L}M = \Gamma(\gamma^* TM), \qquad \gamma \in \mathcal{L}M.$$

Els punts fixos de $\mathcal{L}M$ son els llaços constants $c(x)$, i l'aplicació $x \mapsto c(x)$ ens dóna una identificació $M \cong (\mathcal{L}M)^{\mathbf{T}}$.

L'espai tangent a un llaç constant $c(x)$ es pot pensar com l'espai de les aplicacions $\dot{\gamma} \colon \mathbf{T} \to T_x M$,

$$T_{c(x)}\mathcal{L}M = \mathcal{L}T_x M = \operatorname{map}(\mathbf{T}, T_x M)$$

i escriurem $\dot{\gamma} \in T_{c(x)}$ com a sèrie de Fourier

$$\dot{\gamma}(\theta) = \sum_{k \geq 0} \left(a_k \cos(k\theta) - b_k \sin(k\theta)\right), \qquad a_k, b_k \in T_x M.$$

El fibrat normal ve donat per les $\dot\gamma$ amb sèrie de Fourier sense terme constant:

$$\nu_{c(x)} = \{\ \dot\gamma\colon \mathbf{T} \to T_xM \ \mid\ \dot\gamma(\theta) = \sum_{k\geq 1} (a_k \cos(k\theta) - b_k \sin(k\theta))\ \}.$$

Hem observat en general que el fibrat normal pot expressar-se com a suma directa de subfibrats $\bigoplus_{n>0} \nu_n$ amb estructura complexa on $\theta \in \mathbf{T}$ actua com multiplicació per $e^{in\theta}$ a $\dot\gamma_n \in \nu_n$. En el cas de $X = \mathcal{L}M$, és clar que ν_n ve donat per les sèries de Fourier amb només termes de $n\theta$:

$$(\nu_n)_{c(x)} = \{\ \dot\gamma(\theta) = a \cos(n\theta) - b \sin(n\theta)\ \mid\ a, b \in T_xM\ \}.$$

Així tenim isomorfismes $T_xM \oplus T_xM \cong (\nu_n)_{c(x)}$ i de fet un isomorfisme de fibrats complexos $\mathbf{T}$-equivariants,

$$\begin{array}{rcl} TM \otimes \mathbf{C} & \cong & \nu_n \ \subset\ \operatorname{map}(\mathbf{T}, TM) \\ c = a + ib & \mapsto & \big(\theta \mapsto \operatorname{Re}(ce^{in\theta})\big). \end{array} \tag{4.13}$$

Witten aplica ara la fórmula de punts fixos (4.12) a $\pi\colon E\mathbf{T} \times_{\mathbf{T}} \mathcal{L}M \to B\mathbf{T}$, utilitzant la K^*-orientació corresponent a $G = \mathrm{Spin}$. Així defineix un $\hat{A}$-gènere torçat. S'obté

$$e_{\hat{A}}(\lambda^n \otimes \nu_n)^{-1} = \lambda^{m/2} \sqrt{\det \nu_M} \bigotimes_{n>0} S_{\lambda^n}(TM \otimes \mathbf{C})$$

on $m = \sum_{n>0} n \cdot \dim(\nu_n)$ i escrivim, com abans, $S_t(\xi) = \bigoplus_{r\geq 0} t^r \otimes S^r(\xi)$. Hi ha uns problemes de normalització per resoldre. Per raonaments de la física, Witten va prendre $\sqrt{\det \nu_M} = 1$, $\sum_{n>0} n = \zeta(-1) = -1/12$. Així s'obté

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \pi_!^K(1) &= p_!^H \left(\hat{A}(TM) \cup q^{-d/24} \operatorname{ch} \bigotimes_{n>0} S_{\lambda^n}(TM \otimes \mathbf{C}) \right) \\ &= q^{-d/24} \left(\hat{A}(TM) \cup \operatorname{ch} \bigotimes_{n>0} S_{q^n}(TM \otimes \mathbf{C}) \right) [M] \end{aligned}$$

on $q = \operatorname{ch} \lambda$, $d = \dim(\nu_n) = \dim(TM)$ i p és la projecció $B\mathbf{T} \times M \to B\mathbf{T}$. En general, tenim una classe característica multiplicativa

$$q^{-d/24}\, \hat{A}(\xi) \cup \operatorname{ch} \bigotimes_{n>0} S_{q^n}(\xi \otimes \mathbf{C})$$

per a ξ un fibrat real de rang d sobre M. No és estable; hem de cancel·lar el seu valor al fibrat de dimensió d trivial, $\mathbf{R}^d \times M$:

$$q^{-d/24} \prod_{n>0} (1 - q^n)^{-d}$$

que és igual a $\eta(q)^{-d}$. El quocient és

$$\hat{A}(\xi) \cup \mathrm{ch} \bigotimes_{n>0} S_{q^n}(\widetilde{\xi} \otimes \mathbf{C})$$

on $\widetilde{\xi} = \xi - (\mathbf{R}^d \times M)$, i prenent $\xi = TM$ obtenim el gènere de Witten

$$\varphi_W(M) = \phi_{\hat{A}}(M) = \left(\hat{A}(TM) \cup \mathrm{ch} \bigotimes_{n>0} S_{q^n}(\widetilde{TM} \otimes \mathbf{C}) \right) [M].$$

Hi ha gèneres relacionats amb aquest que s'obtenen per les altres K^*-orientacions que hem esmentat. Per a $G = \mathrm{SO}$, per exemple, podem escriure de la mateixa manera la signatura equivariant $\phi_L(M)$. El gènere resultant és el gènere el·líptic universal.

5 Taules de resultats

Les quatre primeres llistes d'aquesta secci mostren els desenvolupaments de Fourier del gnere de Witten avaluat en els espais projectius complexos, els quaterninics i algunes varietats de Milnor $H_{i,j}$. La taula que ve a continuaci mostra gneres de Witten d'interseccions completes $V_{2k}^{d_1,\ldots,d_r}$ en termes dels generadors G_2, G_4 i G_6.

$$\mathbf{C}\mathrm{P}^2 \ : \ -\frac{1}{8} + 3\,q + 9\,q^2 + 12\,q^3 + 21\,q^4 + O(q^5)$$

$$\mathbf{C}\mathrm{P}^4 \ : \ \frac{3}{128} - \frac{5}{8}\,q + \frac{105}{8}\,q^2 + \frac{165}{2}\,q^3 + \frac{1885}{8}\,q^4 + O(q^5)$$

$$\mathbf{C}\mathrm{P}^6 \ : \ -\frac{5}{1024} + \frac{21}{128}\,q - \frac{385}{128}\,q^2 + \frac{2065}{32}\,q^3 + \frac{82467}{128}\,q^4 + O(q^5)$$

$$\mathbf{C}\mathrm{P}^8 \ : \ \frac{35}{32768} - \frac{45}{1024}\,q + \frac{945}{1024}\,q^2 - \frac{3759}{256}\,q^3 + \frac{345717}{1024}\,q^4 + O(q^5)$$

$$\mathbf{C}\mathrm{P}^{10} \ : \ -\frac{63}{262144} + \frac{385}{32768}\,q - \frac{9405}{32768}\,q^2 + \frac{39897}{8192}\,q^3 - \frac{2396185}{32768}\,q^4 + O(q^5)$$

$$\mathbf{C}\mathrm{P}^{12} \ : \ \frac{231}{4194304} - \frac{819}{262144}\,q + \frac{23023}{262144}\,q^2 - \frac{109109}{65536}\,q^3 + \frac{6589947}{262144}\,q^4 + O(q^5)$$

$$\mathbf{C}\mathrm{P}^{14} \ : \ -\frac{429}{33554432} + \frac{3465}{4194304}\,q - \frac{110565}{4194304}\,q^2 + \frac{587405}{1048576}\,q^3 - \frac{38313105}{4194304}\,q^4 + O(q^5)$$

$$\mathbf{C}\mathrm{P}^{16} \ : \ \frac{6435}{2147483648} - \frac{7293}{33554432}\,q + \frac{260865}{33554432}\,q^2 - \frac{1544535}{8388608}\,q^3 + \frac{110447589}{33554432}\,q^4 + O(q^5)$$

$$\mathbf{C}\mathrm{P}^{18} \ : \ -\frac{12155}{17179869184} + \frac{122265}{2147483648}\,q - \frac{4849845}{2147483648}\,q^2 + \frac{31753161}{536870912}\,q^3 - \frac{2490731793}{2147483648}\,q^4 + O(q^5)$$

$$\mathbf{H}\mathrm{P}^2 \ : \ -q - 6\,q^2 - 12\,q^3 - 28\,q^4 - 30\,q^5 + O(q^6)$$

$$\mathbf{H}\mathrm{P}^3 \ : \ -8\,q^2 - 64\,q^3 - 240\,q^4 - 640\,q^5 - 1440\,q^6 + O(q^7)$$

$$\mathbf{H}\mathrm{P}^4 \ : \ -54\,q^3 - 567\,q^4 - 2916\,q^5 - 10368\,q^6 - 29484\,q^7 + O(q^8)$$

$$\mathbf{H}\mathrm{P}^5 \ : \ -352\,q^4 - 4608\,q^5 - 29952\,q^6 - 133120\,q^7 - 463680\,q^8 + O(q^9)$$

$$\mathbf{H}\mathrm{P}^6 \ : \ -2275\,q^5 - 35750\,q^6 - 280500\,q^7 - 1496000\,q^8 - 6183500\,q^9 + O(q^{10})$$

$$\mathbf{H}\mathrm{P}^7 \ : \ -14688\,q^6 - 269568\,q^7 - 2476656\,q^8 - 15410304\,q^9 - 73794240\,q^{10} + O(q^{11})$$

$$\mathbf{H}\mathrm{P}^8 \ : \ -94962\,q^7 - 1994202\,q^8 - 20991600\,q^9 - 149273600\,q^{10} - 813074640\,q^{11} + O(q^{12})$$

$$\mathbf{H}\mathrm{P}^9 \ : \ -615296\,q^8 - 14553088\,q^9 - 172652544\,q^{10} - 1381220352\,q^{11} - 8435168256\,q^{12} + O(q^{13})$$

$$\mathbf{H}\mathrm{P}^{10} \ : \ -3996135\,q^9 - 105129090\,q^{10} - 1387703988\,q^{11} - 12335146560\,q^{12} - 83490780780\,q^{13} + O(q^{14})$$

$$H_{2,1} \ : \ 0$$

$$H_{2,3} \ : \ -q - 6\,q^2 - 12\,q^3 - 28\,q^4 - 30\,q^5 + O(q^6)$$

$$H_{2,5} \ : \ \frac{1}{8}\,q - \frac{21}{4}\,q^2 - \frac{99}{2}\,q^3 - \frac{377}{2}\,q^4 - \frac{2085}{4}\,q^5 + O(q^6)$$

$$H_{2,7} \ : \ -\frac{3}{128}\,q + \frac{55}{64}\,q^2 - \frac{885}{32}\,q^3 - \frac{11781}{32}\,q^4 - \frac{128725}{64}\,q^5 + O(q^6)$$

$$H_{2,9} \ : \ \frac{5}{1024}\,q - \frac{105}{512}\,q^2 + \frac{1253}{256}\,q^3 - \frac{38413}{256}\,q^4 - \frac{1349985}{512}\,q^5 + O(q^6)$$

$$H_{2,11} \ : \ -\frac{35}{32768}\,q + \frac{855}{16384}\,q^2 - \frac{10881}{8192}\,q^3 + \frac{217835}{8192}\,q^4 - \frac{13702365}{16384}\,q^5 + O(q^6)$$

$$H_{2,13} \ : \ \frac{63}{262144}\,q - \frac{1771}{131072}\,q^2 + \frac{25179}{65536}\,q^3 - \frac{506919}{65536}\,q^4 + \frac{18722165}{131072}\,q^5 + O(q^6)$$

$$H_{2,15} \ : \ -\frac{231}{4194304}\,q + \frac{7371}{2097152}\,q^2 - \frac{117481}{1048576}\,q^3 + \frac{2554207}{1048576}\,q^4 - \frac{90125217}{2097152}\,q^5 + O(q^6)$$

$$H_{2,17} \ : \ \frac{429}{33554432}\,q - \frac{15345}{16777216}\,q^2 + \frac{272565}{8388608}\,q^3 - \frac{6496917}{8388608}\,q^4 + \frac{240287175}{16777216}\,q^5 + O(q^6)$$

$$H_{2,19} \ : \ -\frac{6435}{2147483648}\,q + \frac{255255}{1073741824}\,q^2 - \frac{5013657}{536870912}\,q^3 + \frac{131091147}{536870912}\,q^4 - \frac{5212019885}{1073741824}\,q^5 + O(q^6)$$

$$H_{3,0} \ : \ -\frac{1}{8} + 3\,q + 9\,q^2 + 12\,q^3 + 21\,q^4 + O(q^5)$$

$$H_{3,2} \ : \ -q - 6\,q^2 - 12\,q^3 - 28\,q^4 - 30\,q^5 + O(q^6)$$

$$H_{3,4} \ : \ -5\,q^2 - 40\,q^3 - 150\,q^4 - 400\,q^5 - 900\,q^6 + O(q^7)$$

$$H_{3,6} \ : \ -28\,q^3 - 294\,q^4 - 1512\,q^5 - 5376\,q^6 - 15288\,q^7 + O(q^8)$$

$$H_{3,8} \ : \ -165\,q^4 - 2160\,q^5 - 14040\,q^6 - 62400\,q^7 - 217350\,q^8 + O(q^9)$$

$$H_{3,10} \ : \ -1001\,q^5 - 15730\,q^6 - 123420\,q^7 - 658240\,q^8 - 2720740\,q^9 + O(q^{10})$$

$$H_{3,12} \ : \ -6188\,q^6 - 113568\,q^7 - 1043406\,q^8 - 6492304\,q^9 - 31089240\,q^{10} + O(q^{11})$$

$$H_{3,14} \ : \ -38760\,q^7 - 813960\,q^8 - 8568000\,q^9 - 60928000\,q^{10} - 331867200\,q^{11} + O(q^{12})$$

$$H_{3,16} \ : \ -245157\,q^8 - 5798496\,q^9 - 68791248\,q^{10} - 550329984\,q^{11} - 3360887352\,q^{12} + O(q^{13})$$

$$H_{3,18} \ : \ -1562275\,q^9 - 41099850\,q^{10} - 542518020\,q^{11} - 4822382400\,q^{12} - 32640428700\,q^{13} + O(q^{14})$$

	$2k=2$	$2k=4$	$2k=6$
${V_{2k}}^2$	0	$4\,{G_2}^2-\frac{5}{3}\,G_4$	$\frac{64}{3}\,{G_2}^3-\frac{16}{3}\,G_2\,G_4-\frac{14}{45}\,G_6$
${V_{2k}}^3$	$-15\,G_2$	$\frac{27}{2}\,{G_2}^2-\frac{75}{4}\,G_4$	$-\frac{1}{2}\,{G_2}^3+\frac{73}{4}\,G_2\,G_4-\frac{721}{120}\,G_6$
${V_{2k}}^4$	$-48\,G_2$	$200\,{G_2}^2-\frac{250}{3}\,G_4$	$-\frac{1024}{3}\,{G_2}^3+\frac{1984}{3}\,G_2\,G_4-\frac{2044}{45}\,G_6$
${V_{2k}}^5$	$-105\,G_2$	$\frac{1805}{2}\,{G_2}^2-\frac{3095}{12}\,G_4$	$-\frac{24565}{6}\,{G_2}^3+\frac{52445}{12}\,G_2\,G_4-\frac{15617}{72}\,G_6$
$V_{2k}^{2,\,2}$	$-12\,G_2$	$2\,{G_2}^2-\frac{25}{3}\,G_4$	$\frac{2}{3}\,{G_2}^3-\frac{23}{3}\,G_2\,G_4-\frac{119}{90}\,G_6$
$V_{2k}^{2,\,3}$	$-48\,G_2$	$108\,{G_2}^2-45\,G_4$	$-64\,{G_2}^3+176\,G_2\,G_4-\frac{196}{15}\,G_6$
$V_{2k}^{2,\,4}$	$-120\,G_2$	$676\,{G_2}^2-\frac{530}{3}\,G_4$	$-\frac{5324}{3}\,{G_2}^3+\frac{5786}{3}\,G_2\,G_4-\frac{4151}{45}\,G_6$
$V_{2k}^{2,\,5}$	$-240\,G_2$	$2420\,{G_2}^2-\frac{1585}{3}\,G_4$	$-\frac{40000}{3}\,{G_2}^3+\frac{31600}{3}\,G_2\,G_4-\frac{3920}{9}\,G_6$
$V_{2k}^{3,\,3}$	$-117\,G_2$	$\frac{1089}{2}\,{G_2}^2-\frac{465}{4}\,G_4$	$-\frac{2187}{2}\,{G_2}^3+\frac{4131}{4}\,G_2\,G_4-\frac{1449}{40}\,G_6$
$V_{2k}^{3,\,4}$	$-240\,G_2$	$1944\,{G_2}^2-330\,G_4$	$-8192\,{G_2}^3+5248\,G_2\,G_4-\frac{2408}{15}\,G_6$
$V_{2k}^{3,\,5}$	$-435\,G_2$	$\frac{10935}{2}\,{G_2}^2-\frac{3495}{4}\,G_4$	$-\frac{78125}{2}\,{G_2}^3+\frac{87125}{4}\,G_2\,G_4-\frac{16345}{24}\,G_6$
$V_{2k}^{4,\,4}$	$-432\,G_2$	$5000\,{G_2}^2-\frac{2020}{3}\,G_4$	$-\frac{97336}{3}\,{G_2}^3+\frac{46276}{3}\,G_2\,G_4-\frac{16366}{45}\,G_6$
$V_{2k}^{4,\,5}$	$-720\,G_2$	$11560\,{G_2}^2-\frac{4370}{3}\,G_4$	$-\frac{327680}{3}\,{G_2}^3+\frac{139520}{3}\,G_2\,G_4-\frac{9856}{9}\,G_6$
$V_{2k}^{5,\,5}$	$-1125\,G_2$	$\frac{46225}{2}\,{G_2}^2-\frac{31075}{12}\,G_4$	$-\frac{1723025}{6}\,{G_2}^3+\frac{1272025}{12}\,G_2\,G_4-\frac{156205}{72}\,G_6$
$V_{2k}^{2,\,2,\,2}$	$-48\,G_2$	$64\,{G_2}^2-\frac{80}{3}\,G_4$	$-\frac{32}{3}\,{G_2}^3+\frac{152}{3}\,G_2\,G_4-\frac{182}{45}\,G_6$
$V_{2k}^{2,\,2,\,3}$	$-132\,G_2$	$486\,{G_2}^2-105\,G_4$	$-686\,{G_2}^3+721\,G_2\,G_4-\frac{847}{30}\,G_6$
$V_{2k}^{2,\,2,\,4}$	$-288\,G_2$	$2048\,{G_2}^2-\frac{1120}{3}\,G_4$	$-\frac{21952}{3}\,{G_2}^3+\frac{15568}{3}\,G_2\,G_4-\frac{8428}{45}\,G_6$
$V_{2k}^{2,\,2,\,5}$	$-540\,G_2$	$6250\,{G_2}^2-\frac{3245}{3}\,G_4$	$-\frac{121670}{3}\,{G_2}^3+\frac{74405}{3}\,G_2\,G_4-\frac{15743}{18}\,G_6$
$V_{2k}^{2,\,3,\,3}$	$-288\,G_2$	$1764\,{G_2}^2-255\,G_4$	$-5184\,{G_2}^3+3024\,G_2\,G_4-\frac{378}{5}\,G_6$
$V_{2k}^{2,\,3,\,4}$	$-552\,G_2$	$5292\,{G_2}^2-690\,G_4$	$-27436\,{G_2}^3+13034\,G_2\,G_4-\frac{4879}{15}\,G_6$
$V_{2k}^{2,\,3,\,5}$	$-960\,G_2$	$13500\,{G_2}^2-1785\,G_4$	$-109760\,{G_2}^3+49840\,G_2\,G_4-\frac{4102}{3}\,G_6$
$V_{2k}^{2,\,4,\,4}$	$-960\,G_2$	$12544\,{G_2}^2-\frac{4160}{3}\,G_4$	$-\frac{281216}{3}\,{G_2}^3+\frac{107744}{3}\,G_2\,G_4-\frac{32984}{45}\,G_6$
$V_{2k}^{2,\,4,\,5}$	$-1560\,G_2$	$27380\,{G_2}^2-\frac{8890}{3}\,G_4$	$-\frac{857500}{3}\,{G_2}^3+\frac{310450}{3}\,G_2\,G_4-\frac{19775}{9}\,G_6$
$V_{2k}^{2,\,5,\,5}$	$-2400\,G_2$	$52900\,{G_2}^2-\frac{15725}{3}\,G_4$	$-\frac{2129600}{3}\,{G_2}^3+\frac{690800}{3}\,G_2\,G_4-\frac{39130}{9}\,G_6$
$V_{2k}^{3,\,3,\,3}$	$-567\,G_2$	$\frac{9747}{2}\,{G_2}^2-\frac{2115}{4}\,G_4$	$-\frac{44217}{2}\,{G_2}^3+\frac{35649}{4}\,G_2\,G_4-\frac{6531}{40}\,G_6$
$V_{2k}^{3,\,3,\,4}$	$-1008\,G_2$	$12168\,{G_2}^2-1230\,G_4$	$-82944\,{G_2}^3+29376\,G_2\,G_4-\frac{2772}{5}\,G_6$
$V_{2k}^{3,\,3,\,5}$	$-1665\,G_2$	$\frac{55125}{2}\,{G_2}^2-\frac{11685}{4}\,G_4$	$-\frac{539055}{2}\,{G_2}^3+\frac{384615}{4}\,G_2\,G_4-\frac{17073}{8}\,G_6$
$V_{2k}^{3,\,4,\,4}$	$-1680\,G_2$	$26136\,{G_2}^2-2340\,G_4$	$-238328\,{G_2}^3+72292\,G_2\,G_4-\frac{17822}{15}\,G_6$
$V_{2k}^{3,\,4,\,5}$	$-2640\,G_2$	$52920\,{G_2}^2-4770\,G_4$	$-640000\,{G_2}^3+190400\,G_2\,G_4-\frac{10220}{3}\,G_6$
$V_{2k}^{3,\,5,\,5}$	$-3975\,G_2$	$\frac{195075}{2}\,{G_2}^2-\frac{33075}{4}\,G_4$	$-\frac{2941225}{2}\,{G_2}^3+\frac{1618225}{4}\,G_2\,G_4-\frac{159845}{24}\,G_6$

Bibliografia

[1] **Adem, A.** *On the K-theory of the classifying space of a discrete group.* Math. Ann. 292, (1992), 319–327.

[2] **Adem, A.; Milgram, R.J.** *The cohomology of the Mathieu group M_{22}.* Topology 34, (1995), no. 2, 389–410.

[3] **Aloff, S.; Wallach, N.R.** Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 93–97.

[4] **Alvarez, O; Killingback, T.-P.; Mangano, M.; Windey, P.** *String theory and loop space index theorems.* Communications in Mathematical Physics 111, (1987), 1–10.

[5] **Ando, M.** *The theorem of the cube and the Witten Genus.* Preprint, (1995), 10pp.

[6] **Ando, M.** *Power Operations in Elliptic Cohomology and Representations of Loop Groups.* Preprint, (1995), 35pp.

[7] **Atiyah, M.F.** *Circular symmetry and stationary-phase approximation.* Asterisque, Proc. Conf. in honour of L. Schwartz, (1985), 43–59.

[8] **Atiyah, M.F.; Bott, R.** *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes: I.* Ann. Math. 86, (1967), 374–407.

[9] **Atiyah, M.F.; Bott, R.** *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes II: Applications.* Ann. Math. 86, (1967), 451–491.

[10] **Atiyah, M.F.; Hirzebruch, F.** *Riemann–Roch theorems for differentiable manifolds,* Bulletin of the American Mathematical Society 65, (1959), 276–281.

[11] **Atiyah, M.F.; Hirzebruch, F.** *Spin-Manifolds and Group Actions,* a [81], 18–28.

[12] **Atiyah, M.F.; Hirzebruch, F.** *Cohomologie-Operationen und charakteristische Klassen.* Mathematische Zeitschrift 77, (1961), 149–187.

[13] **Atiyah, M.F.; Segal, G.B.** *The index of elliptic operators: II.* Ann. Math. 87, (1968), 431–545.

[14] **Atiyah, M.F.; Segal, G.B.** *Equivariant K-theory and completion.* Journal of Differential Geometry 77, (1969), 1–18.

[15] **Atiyah, M.F.; Singer, I.M.** *The index of elliptic operators: I.* Ann. Math. 87, (1968), 484–530.

[16] **Atiyah, M.F.; Singer, I.M.** *The index of elliptic operators: III.* Ann. Math. 87, (1968), 546–604.

[17] **Atiyah, M.F.; Singer, I.M.** *The index of elliptic operators: IV.* Ann. Math. 92, (1970), 119–138.

[18] **Atiyah, M.F.; Singer, I.M.** *The index of elliptic operators: V.* Ann. Math. 92, (1970), 139–149.

[19] **Bahri, A.; Bendersky, M.; Gilkey, P.** *The relationship between complex bordism and K-theory for groups with periodic cohomology.* Contemporary Mathematics 96, (1989), 19–31.

[20] **Baker, A.** *Elliptic cohomology, p-adic modular forms and Atkin's operator U_p.* Contemporary Mathematics 96, (1989), 33–38.

[21] **Baker, A.** *Hecke operators as operations in elliptic cohomology.* Journal of Pure and Applied Algebra 63, (1990), 1–11.

[22] **Baker, A.** *Some Calculations with Milnor Hypersurfaces and an Application to Ginzburg's Symplectic Bordism Ring.* Preprint, 1995.

[23] **Baker, A.** *Differential Equations in Divided Power Algebras, Recurrence Relations and Formal Groups.* Preprint, 1995.

[24] **Baker, A.** *On the homotopy type of the spectrum representing elliptic cohomology.* Proceedings of the American Mathematical Society 107, (1989), no. 2, 537–548.

[25] **Baker, A.** *Vertex Operators in Algebraic Topology.* Preprint, 1995.

[26] **Baker, A.** *Operations and Cooperations in Elliptic Cohomology, Part I: Generalized modular forms and the cooperation algebra.* New York Journal of Mathematics 1, (1995), 39–74.

[27] **Baker, A.; Hunton, J.** *Continuous Morava K-theory and the geometry of the I_n-adic tower.* Math. Scand. 75, (1994), 67–81.

[28] **Bär, C.** *Elliptic operators and representation theory of compact groups.* a [113], 151–160.

[29] **Bendersky, M.** *Cobordism span of a manifold and elliptic genera.* Mathematische Zeitschrift 202 (1989), no. 4, 483–492.

[30] **Bendersky, M.** *Applications of the Ochanine Genus.* Mathematische Zeitschrift 206 (1991), 443–455.

[31] **Benson, D.J.; Wood, J.A.** *Integral Invariants and Cohomology of $B\mathrm{Spin}(n)$.* Topology 34, no. 1, (1995), 13–28.

[32] **Berend, G:; Katz, G.** *Separating topology and number theory in the Atiyah-Singer G-signature formula.* Duke Math Journal 61, (1990), 939–971.

[33] **Berglund, Per; Henningson, Mans** *Landau-Ginzburg orbifolds, mirror symmetry and the elliptic genus.* Nuclear Physics B 433 (1995), no. 2, 311–332.

[34] **Bismut, J.-M.** *Localization formulas, superconnections, and the index theorem for families.* Communications in Mathematical Physics 103, (1986), 127–166.

[35] **Booss, B.; Bleecker, D.D.** *Topology and Analysis: the Atiyah-Singer Index Formula and Gauge-Theoretic Physics.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1985.

[36] **Borcherds, R.E.** *Automorphic forms on $O_{n,2}(\mathbf{R})$ and the generalized Kac-Moody algebras.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich, Agost 1994.

[37] **Bott, R.; Tu, L.W.** *Differential Forms in Algebraic Topology.* Graduate Texts in Mathematics 82, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

[38] **Bott, R.; Taubes, C.** *On the Rigidity Theorems of Witten.* Journal of the American Mathematical Society ,Vol 2, no. 1, (1989), 137–186.

[39] **Botvinnik, B.; Gilkey, P.B.** *The eta-invariant and metrics of positive scalar curvature.* Math. Ann. 302, (1995), 507–517.

[40] **Botvinnik, B.; Gilkey, P.B.; Stolz, S.** *The Gromov-Lawson-Rosenberg conjecture for groups with periodic cohomology.* Preprint, (1994), 21pp.

[41] **Breen, L.** *Fonction théta et théorème du cube.* Lecture Notes in Mathematics 980, (1983).

[42] **Brylinski, J.-L.** *Remark on Witten's modular forms.* Proceedings of the American Mathematical Society 105, (1988), no. 3, 773–775.

[43] **Brylinski, J.-L.** *Representations of Loop Groups, Dirac Operators on Loop Space, and Modular Forms,* Topology 29, no. 4, (1990), 461–480.

[44] **Brylinski, J.-L.** *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization.* Progress in Mathematics 107, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1993.

[45] **Bukhshtaber, V.M.; Shokurov, A.V.** Funktsional. Anal. i Prilozhen. 12 (1978), no. 3, 1–11, 96

[46] **Carey, A.L.; Murray, M.K.** *String structures and the path fibration of a group.* Communications in Mathematical Physics 141, (1991), 441–452.

[47] **Cha, J.-S.** *Margolis homology and Morava K-theory for cohomology of the dihedral group.* Kodai Math. J. 16, (1993), 220–226.

[48] **Chern, S.S.; Hirzebruch, F.; Serre, J.-P.** *On the index of a fibred manifold.* Proceedings of the American MAthematical Society 8, (1957), 587–596.

[49] **Chudnovsky, D.V.; Chudnovsky, G.V.** *Elliptic Formal Groups over* $\mathbf{Z}$ *and* $\mathbf{F}_p$ *in applications to Number Theory, Computer Science and Topology,* a [121], 11-54.

[50] **Chudnovsky, D.V.; Chudnovsky, G.V.** *Elliptic modular functions and elliptic genera.* Topology 27 (1988), no. 2, 163–170.

[51] **Clarke, F.; Johnson, K.** *Cooperations in elliptic homology.* London Math. Soc. Lecture Note Series, 176, Cambridge University Press, 1992, pp. 131–143.

[52] **Cohen, P.B.; Manin, Y.; Zagier, D.** *Automorphic pseudodifferential operators.* preprint, 1996.

[53] **Conner, P.E.** *Differentiable Periodic Maps.* Lecture Notes in Mathematics 738, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, second edition, 1979.

[54] **Conner, P.E.; Floyd, E.E.** *The Relation of Cobordism to K-Theories.* Lecture Notes in Mathematics 28, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

[55] **Conner, P.E.; Smith, L.** *On the Complex Bordism of Finite Complexes.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 37 (1969), 117–221.

[56] **Conner, P.E.; Smith, L.** *On the Complex Bordism of Finite Complexes II.* Journal of Differential Geometry 6, (1971), 135–174.

[57] **Dai, Xianzhe; Zhang, Wei Ping** *Circle bundles and the Kreck-Stolz invariant.* Transactions of the American Mathematical Society

[58] **Della Pietra, S.; Della Pietra V.** *Parallel transport in the determinant line bundle: the non-zero index case.* Communications in Mathematical Physics 111, (1987), 11–31.

[59] **Dessai, A.N.** *The Witten Genus and S^3-actions on manifolds.* Preprint-Reihe des Fachbereichs Mathematik 6, Johannes Gutenberg-Universität in Mainz, 1994, 7pp.

[60] **Dessai, A.N.** *Rigidity Theorems for Spin^c-Manifolds and Applications.* Docktorarbeit, Johannes Gutenberg-Universität in Mainz, 1996.

[61] **Devinatz, E.S.; Hopkins, M.J.** *The action of the Morava stabilizer group on the Lubin-Tate moduli space of lifts.* American Journal of Mathematics 117, (1995), 669–710.

[62] **Devoto, J.A.** *Equivariant elliptic cohomology and finite groups.* Michigan Math. J. 43, (1996), 3–32.

[63] **Devoto, J.A.** *Elliptic Genera for $\mathbf{Z}/k$-Manifolds I.* Preprint, (1996), 31pp.

[64] **tom Dieck, T.** *Transformation groups and representation theory.* Lecture Notes in Mathemtics 766, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[65] **tom Dieck, T.** *Transformation Groups.* de Gruyter Studies in Mathematics 8, de Gruyter, Berlin, New York, 1987.

[66] **Di Francesco, P.; Yankielowicz, S.** *Ramond sector characters and $N = 2$ Landau-Ginzburg models.* Nuclear Physics B 409 (1993), no. 1, 186–210.

[67] **Dobrowolski, Edward; Januszkiewicz, Tadeusz** *Arithmetic of an elliptic curve and circle actions on four-manifolds.* Colloquium Mathematicum 64 (1993), no. 1, 13–18.

[68] **Dong, C.; Mason, G.** *An orbifold theory of genus zero associated to the sporadic group M_{24}.* Communications in Mathematical Physics 164, (1994), 87–104.

[69] **Dwyer, W.G.; Stolz, S.; Taylor, L.R.** *On the dimension of infinite covers.* Proceedings of the American Mathematical Society

[70] **Dyer, E.** *Cohomology Theories.* Mathematics Lecture Note Series, W.A. Benjamin, New York, Amsterdam, 1969.

[71] **Eichler, M.; Zagier, D.B.** *The Theory of Jacobi Forms.* Progress in Mathematics 55, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1985.

[72] **Eliashberg, Y.** Internat. J. Math. 1 (1990), no. 1, 29–46

[73] **Franke, Jens** *On the construction of elliptic cohomology.* Mathematische-Nachrichten 158 (1992), 43–65.

[74] **Futaki, Akito** *Scalar-flat closed manifolds not admitting positive scalar curvature metrics.* Inventiones Mathematicae 112 (1993), no. 1, 23–29.

[75] **Geiges, Hansjorg** Mathematika 38 (1991), no. 2, 303–311 (1992).

[76] **Geiges, Hansjorg** *Contact structures on $(n-1)$-connected $(2n+1)$-manifolds.* Pacific Journal of Mathematics 161 (1993), no. 1, 129–137.

[77] **Ginzburg, V.; Guillermin, V.; Karshon, Y.** *Cobordism Theory and Localization Formulas for Hamiltonian Group Actions.* `dg-ga/9601003`, (1995), 14pp.

[78] **Ginzburg, V.; Kapranov, M.; Vasserot, E.** *Elliptic Algebras and Equivariant Elliptic Cohomology.* Preprint, (1995).

[79] **Goodwillie, T.G.** *Cyclic homology, derivations and the free loopspace.* Topology 24, (1985), no. 2, 187–215.

[80] **Guest, M.A.; Micha, E.** *Detecting exotic structures via the Pontrjagin-Thom construction.* Mathematika 41 (1994), no. 1, 145–148.

[81] **Haefliger, A.; Narasimhan, R. editors.** *Essays on Topology and Related Topics.* Memoires dédiés à Georges de Rham. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

[82] **Hazewinkel, M.** *Formal Groups and Applications.* Academic Press, New York, San Francisco, London, 1978.

[83] **Henningson, Mans** $N = 2$ *gauged WZW models and the elliptic genus.* Nuclear Physics B 413 (1994), no. 1-2, 73–83.

[84] **Hirzebruch, F.** *Automorphe Formen und der Satz von Riemann–Roch* a: Symposium Internacional de Topología Algebraica (México 1956), 129–144, Universidad Nacional Autónoma de México, 1958.

[85] **Hirzebruch, F.** *Komplexe Mannigfaltigkeiten* Proceedings of the International Congress of Mathematicians (1958), 119–136, Cambridge University Press, 1960.

[86] **Hirzebruch, F.** *A Riemann–Roch theorem for differentiable Manifolds* Séminaire Bourbaki 177, (Février 1959), 21pp.

[87] **Hirzebruch, F.** *Elliptic genera of level N for complex manifolds.* A: Differential geometrical methods in theoretical physics (Como, 1987), 37–63, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988; tambè Appendix III a [90], 169–186.

[88] **Hirzebruch, F.** *Gesammelte Abhandlungen; Band I 1951–1962, Band II 1963–1987.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.

[89] **Hirzebruch, F.** *Topological Methods in Algebraic Geometry.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, third edition, 1995.

[90] **Hirzebruch, F.; Berger, Th.; Jung, R.** *Manifolds and modular forms,* Aspects of Mathematics E20, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn. Vieweg, Braunschweig, 1992

[91] **Hirzebruch, F.; Slodowy, P.** *Elliptic genera, involutions, and homogeneous spin manifolds.* Geometriae Dedicata 35 (1990), no. 1-3, 309–343.

[92] **Hirzebruch, F.; Zagier, D.B.** *The Atiyah-Singer Theorem and Elementary Number Theory.* Mathematics Lecture Series, 3. Publish or Perish Inc., Boston, Mass., 1974.

[93] **Höhn, G.** *Komplexe elliptische Geschlechter und* S^1*-äquivariante Kobordismustheorie.* Diplomarbeit, Universität Bonn, (1991), 76pp.

[94] **Höhn, G.** *Selbstduale Vertexoperatorsuperalgebren und das Babymonster.* Doktorarbeit, Universität Bonn, (1995), 85pp.

[95] **Hopkins, M.J.** *Characters and elliptic cohomology.* London Mathematical Society Lecture Notes Series 139, Cambridge University Press, (1989), 87–104.

[96] **Hopkins, M.J.** *Topological modular forms, the Witten genus, and the theorem of the cube.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich, Agost 1994, Birkhäuser, (1995), 11pp.

[97] **Hopkins, M.J.; Hovey, M.A.** *Spin cobordism determines real K-theory.* Mathematische Zeitschrift 210, (1992), 181–196.

[98] **Hopkins, M.J.; Hunton, J.R.** *On the structure of spaces representing a Landweber exact cohomology theory.* Topology 34, no. 1, (1995), 29–36.

[99] **Hopkins, M.J.; Kuhn, N.J.; Ravenel, D.C.** *Generalized group characters and complex oriented cohomology theories.* Preprint 1989.

[100] **Hopkins, M.J.; Mahowald, M.** *The spectrum* $\mathbf{eo}_2$. To appear.

[101] **Hovey, M.A.** *A proof of the existence of level* 1 *elliptic cohomology.* Proceedings of the American Mathematical Society 118 (1993), no. 4, 1331–1334.

[102] **Hovey, M.A.** *Spin bordism and elliptic cohomology.* Mathematische Zeitschrift 219, (1995), 163–170.

[103] **Husemoller, D.** *Fibre Bundles.* Graduate Texts in Mathematics 20. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, third edition, 1994.

[104] **Husseini, S.Y.** *The Topology of Classical Groups and Related Topics.* Notes on mathematics and its applicactions. Gordon and Breach, New York, 1969.

[105] **Isham, C.J.** *Modern Differential Geometry for Physicists.* World Scientific Lecture Notes in Physics 32, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1989.

[106] **Katsura, Toshiyuki; Shimizu, Yuji; Ueno, Kenji** *Complex cobordism ring and conformal field theory over* $\mathbf{Z}$. Mathematische Annalen 291 (1991), no. 3, 551–571.

[107] **Kawai, T.; Yamada, Y; Yang, S.-K.** *Elliptic genera and* $N = 2$ *superconformal field theory.* Nuclear Physics B 414, (1994), 191–212

[108] **Katz, G.** *p-adic properties of modular schemes and modular forms.* A: Modular functions of one variable III, Lecture Notes in Mathematics 349, 69–190, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[109] **Katz, G.** *Local formulae in equivariant bordism.* Topology 31, (1992), 713–733.

[110] **Katz, G.** *Analytic deformation of equivariant genera and Witten rigidity à la Bott-Taubes.* Manuscript, 1993.

[111] **Killingback, T.P.** *World-sheet anomalies and loop geometry.* Nuclear Physics B 288, (1987), 578–588.

[112] **Koblitz, N.** *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, second edition.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

[113] **Kotake, T; Nishikawa, S.; Schoen, R.; editors.** *Geometry and Global Analysis.* MSJ International Research Institute, Tohoku University, Sendai, Japan, 1993.

[114] **Kreck, M.; Stolz, S.** J. Differential Geom. 33 (1991), no. 2, 465–486

[115] **Kreck, M.; Stolz, S.** $\mathbf{H}\mathrm{P}^2$*-bundles and elliptic homology.* Acta Mathematica 171 (1993), no. 2, 231–261.

[116] **Kreck, M.; Stolz, S.** *Nonconnected moduli spaces of positive sectional curvature metrics.* Journal of the American Mathematical Society 6 (1993), no. 4, 825–850.

[117] **Krichever, I.M.** *Formal groups and the Atiyah-Hirzebruch formula.* Math. USSR Izvestiya 8:6, (1974), 1271–1285.

[118] **Krichever, I.M.** *Obstructions to the existence of S^1-actions.* Math. USSR Izvestiya 10:4, (1976), 783–797.

[119] **Krichever, I.M.** *Generalized elliptic genera and Baker-Akhiezer functions.* Original: Akademiya Nauk SSSR. Matematicheskie Zametki 47 (1990), no. 2, 34–45, 158 Translation: Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR 47 (1990), no. 1-2, 132–142

[120] **Landweber, P.S.** *Homological properties of comodules over $MU_*(MU)$ and $BP_*(BP)$.* American Journal of Mathematics 98, (1976), no. 3, 591–610.

[121] **Landweber, P.S. (Ed.)** *Elliptic Curves and Modular Forms in Algebraic Topology (Princeton, 1986).* Lecture Notes in Mathematics 1326, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1988.

[122] **Landweber, P.S.** *Elliptic Genera: an Introductory Overview,* a [121], 1–10.

[123] **Landweber, P.S.** *Elliptic Cohomology and Modular Forms,* a [121], 55–68.

[124] **Landweber, P.S.; Ravenel, D.C.; Stong, R.E.** *Periodic Cohomology Theories Defined by Elliptic Curves.* Contemporary Mathematics 181, (1995), 317–339.

[125] **Landweber, P.S.; Stong, R.E.** *Circle actions on Spin manifolds and characteristic numbers.* Topology 27 (1988), no. 2, 145–161.

[126] **Lang, S.** *Introduction to Modular Forms.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 222, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

[127] **Lang, S.** *Elliptic Functions, second edition.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.

[128] **Lawson, H.B.; Michelson, M.-L.** *Spin Geometry.* Princeton Mathematical Series, 38, Princeton University Press, New Jersey, 1989.

[129] **Lerche, W.** *Elliptic index and superstring effective actions.* Nuclear Physics B 308 (1988), no. 1, 102–126.

[130] **Lerche, W.; Nilsson, B.E.W.; Schellekens, A.N.** Nuclear Physics B 289 (1987), no. 3, 609–627.

[131] **Lerche, W.; Nilsson, B.E.W.; Schellekens, A.N.; Warner, N.P.** *Anomaly cancelling terms from the elliptic genus.* Nuclear Physics B 299 (1988), no. 1, 91–116.

[132] **Lesniewski, A.; Osterwalder, K.** *Superspace formulation of the Chern character of a theta-summable Fredholm module.* Communications in Mathematical Physics 168, (1995), 643–650.

[133] **Liu, K.** *Holomorphic equivariant cohomology.* Mathematische Annalen 303, (1995), 125–148.

[134] **Liu, K.** *On Elliptic Genera and Theta-Functions.* Topology 35, no. 3, (1996), 617–640.

[135] **Mackey, G.W.** *Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics.* Pubblicazione della classe di scienze della scuola normale superiore, Pisa. W.A. Benjamin, New York, Amsterdam, i Editore Boringhieri, Torino, 1968.

[136] **Mason, G.** *G-Elliptic systems and the genus zero problem for M_{24}.* Bulletin of the American Mathematical Society 25, (1991), no. 1, 45–55.

[137] **McLaughlin, D.A.** *Orientation and string structures on loop space.* Pacific Journal of Mathematics 155, (1992), no. 1, 143–156.

[138] **Miller, J.W.** *The elliptic character and the Witten Genus.* Contemporary Math. vol. 96 (1989), 281–289.

[139] **Milnor, J.W.** *On the cobordism ring Ω_* and a complex analog.* American Journal of Mathematics 82, (1960), 505–521.

[140] **Milnor, J.W.** *A survey of cobordism theory.* L'enseignement mathém., t. VIII, 1-2, (1962), 16–23.

[141] **Milnor, J.W.** *Morse Theory* Annals of Mathematics Studies 51, Princeton University Press, 1973.

[142] **Milnor, J.W.; Stasheff, J.D.** *Characteristic Classes.* Princeton University Press, New Jersey, 1974.

[143] **Morava, J.** in Homotopy theory and related topics (Kinosaki, 1988), 184–204, Lecture Notes in Mathematics, 1418, Springer, Berlin, 1990

[144] **Morava, J.; Shimizu, Y.** *A topological generalization of the elliptic genus* Preprint, 1990

[145] **Moscovici, H.; Stanton, R.J.** *Eta invariants of Dirac operators on locally symmetric manifolds.* Inventiones Mathematicae, (1989), 629–666.

[146] **Nadiradze, R.G.** *Elliptic genera of various cobordism theories.* Soobshcheniya Akademii Nauk Gruzinskoi SSR 133 (1989), no. 3, 485–487.

[147] **Nakahara, M.** *Geometry, Topology and Physics.* Institute of Physics Publishing, London, 1990.

[148] **Nart, E.** *Formes Modulars.* Dep. Mathemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 1994.

[149] **Nash, Ch.; Sen, S.** *Topology and Geometry for Physicists.* Acadamic Press, London, 1983.

[150] **Nemeschansky, D.; Warner, N.P.** *Refining the elliptic genus.* Physics Letters B 329 (1994), no. 1, 53–60.

[151] **Nishida, G.H.** *Modular Forms and the double transfer map for BT^2.* Preprint, 1989.

[152] **Novikov, S.P.** *The methods of algebraic topology from the point of view of cobordism theory.* Izvestija Akad. Nauk SSSR 31/1 (1967), no. 4, 827–913.

[153] **Ochanine, S.** *Genres Elliptiques Equivariants,* a [121], 107–122.

[154] **Ochanine, S.** *Sur les genres multiplicatifs definis par des integrales elliptiques.* Topology 26 (1987), no. 2, 143–151.

[155] **Ochanine, S.** *Elliptic genera, modular forms over KO_* and the Brown-Kervaire invariant.* Mathematische Zeitschrift 206 (1991), no. 2, 277–291.

[156] **von Oehsen, J.B.** *Elliptic genera of level N and Jacobi polynomials.* Proceedings of the American Mathematical Society 122 (1994), no. 1, 303–312.

[157] **Pilch, K.; Schellekens, A.N.; Warner, N.P.** Nuclear Physics B 287 (1987), no. 2, 362–380.

[158] **Pressley, A.; Segal, G.** *Loop Groups.* Clarendon Press, Oxford, 1986.

[159] **Quillen, D.G.** *The mod 2 cohomology rings of extra-special 2-groups and the spinor groups.* Mathematische Annalen 194, (1971), –.

[160] **Rosenberg, J.; Stolz, S.** *A "stable" version of the Gromov-Lawson conjecture.* Preprint (1994), 14pp.

[161] **Schellekens, A.N.; Warner, N.P.** *Anomalies, characters and strings.* Nuclear Physics B 287 (1987), no. 2, 317–361.

[162] **Segal, G.** *Unitary representations of some infinite dimensional groups.* Communications in Mathematical Physics 80, (1981), 301–342.

[163] **Segal, G.** *Elliptic cohomology (after Landweber-Stong, Ochanine, Witten, and others).* Asterisque (1988), No. 161-162 Exp. No. 695, 4, 187–201 (1989).

[164] **Shafarevich, I.R.** *Basic Algebraic Geometry, volume 1: Varieties in Projective Space, volume 2: Schemes and Complex Manifolds.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977, 1994.

[165] **Stolz, S.** *Hochzusammenhängende Mannigfaltigkeiten und ihre Ränder.* Lecture Notes in Mathematics 1116, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1985.

[166] **Stolz, S.** *Simply connected manifolds of positive scalar curvature.* Annals of Mathematics Second Series 136 (1992), no. 3, 511–540.

[167] **Stolz, S.** *Splitting certain $MSpin$-module spectra.* Topology 33 (1994), no. 1, 159–180.

[168] **Stolz, S.** *Positive scalar curvature metrics — existence and classification questions.* Preprint, 1994, 11pp.

[169] **Stolz, S.** *A conjecture concerning positive Ricci curvature and the Witten Genus.* Mathematische Annalen 304, (1996), 785–800.

[170] **Stong, R.** *Notes on Cobordism Theory.* Princeton University Press, 1968.

[171] **Szczarba, R.H.** *On tangent bundles of fibre spaces and quotient spaces.* American Journal of Mathematics 86, (1964), 685–697.

[172] **Tanabe, M.** *Remarks on the elliptic cohomology of finite groups.* J. Math. Kyoto Univ. 34-4, (1994), 709–717.

[173] **Thomas, Ch. B.** *Characteristic classes and 2-modular representations of some sporadic simple groups — II.* Contemporary Math. 96 (1989), 303–318.

[174] **Thomas, Ch. B.** *Elliptic cohomology of the classifying space of the Mathieu group M_{24}.* Comtemporary Mathematics 158, (1994), 307–318.

[175] **Tuite, M.P.** *On the relationship between monstrous moonshine and the uniqueness of the moonshine module.* Communications in Mathematical Physics 166, (1995), 495–532.

[176] **Vafa, C.** *Modular invariance and discrete torsion on orbifolds.* Nuclear Physics B 273, (1986), 592–606.

[177] **Vaisman, I.** *Cohomology and Differential Forms.* Pure and Applied Mathematics Series, 21, Marcel Dekker, New York, 1973.

[178] **Waldschmidt, W.; Moussa, P.; Luck, J.-M.; Itzykson, C.; editors.** *From Number Theory to Physics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.

[179] **Wall, C.T.C.; Wilkens, D.L.; Stolz, S.** Hochzusammenhangende Mannigfaltigkeiten und ihre Rander, Lecture Notes in Mathematics 1116, Springer, Berlin, 1985.

[180] **Wang, M.Y.K.; Ziller W.** in Curvature and topology of Riemannian manifolds (Katata, 1985), 319–336, Lecture Notes in Mathematics 1201, Springer, Berlin, 1986.

[181] **Ward, R.S.; Wells, R.O.** *Twistor Geometry and Field Theory.* Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1990.

[182] **Warner, F.W.** *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Graduate Texts in Mathematics 94, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.

[183] **Wells, R.O.** *Differential Analysis on Complex Manifolds.* Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1973.

[184] **Wen, W.-G.; Witten, E.** *Electric and magnetic charges in superstring models.* Nuclear physics B 261, (1985), 651–677.

[185] **Whitehead, G.W.** *Elements of Homotopy Theory.* Graduate Texts in Mathematics 61, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

[186] **Witten, E.** *Elliptic genera and quantum field theory.* Communications in Mathematical Physics 109, (1987), 525–536.

[187] **Witten, E.** *The Index of the Dirac Operator in Loop Space,* a [121], 161–181.

[188] **Yang, K.** *Almost Complex Homogeneous Spaces and their Submanifolds.* World Scientific, Singapore, New Jersey, Hong Kong, 1987.

[189] **Zagier, D.B.** *Equivariant Pontrjagin Classes and Applications to Orbit Spaces.* Lecture Notes in Mathematics 290, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[190] **Zagier, D.B.** *Zetafunktionen und quadratische Körper.* Hochschultext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

[191] **Zagier, D.B.** *Introduction to Modular Forms,* a [178], 238–292.

[192] **Zagier, D.B.** *Note on the Landweber-Stong Elliptic Genus,* a [121], 216–224.