35 Feu un estudi complet de la gràfica de les funcions següents.

(j) $y = x^x, \quad x>0$

Escrivim $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$

- domini $= (0,\infty)$, f contínua en aquest domini.
- $f(x)>0 \quad \forall x>0$.
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L \quad [0^0, \text{indet.}]$

$\ln L = \lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \underset{\frac{\infty}{\infty},\, L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0. \Rightarrow L=1$

No hi ha asímpt. vertical en $x=0$.

- $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x^{x-1} = \infty^\infty \Rightarrow$ no hi ha asímpt. horitzontals ni obliqües
- $f'(x) = x^x(\ln x + 1) \rightsquigarrow f$ derivable a $(0,\infty)$

Punts crítics: $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = e^{-1} = 1/e$.

Intervals: $I_1 = (0, 1/e)$, $f'(1/e^2) < 0 \Rightarrow f$ decreixent.

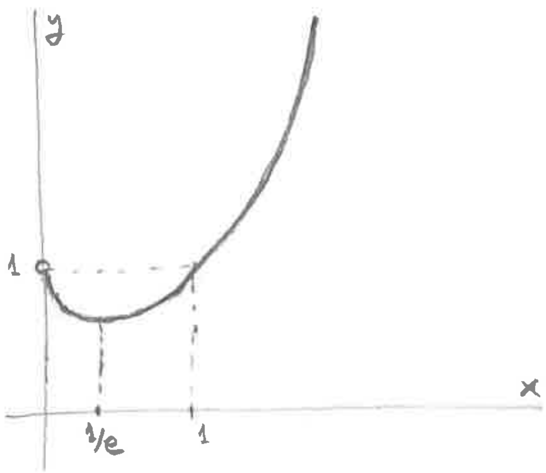
$I_2 = (1/e, \infty)$, $f'(1) > 0 \Rightarrow f$ creixent

f té mínim relatiu en $x = 1/e$.

Observem: $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$

- $f''(x) = x^x(\ln x+1)^2 + x^{x-1} > 0 \quad \forall x>0$

$\Rightarrow f$ convexa a $(0,\infty)$



Alguns aspectes a considerar en les gràfiques de funcions:

- domini, recorregut.
- simetria (funció parella, senar), periodicitat.
- interseccions amb els eixos x, y.
- discontinuïtats: límits laterals, asímptotes verticals.
- límits a l'infinit: asímptotes horitzontals i obliqües
- punts crítics, creixement/decreixement, extrems relatius (f')
- convexitat/concavitat, punts d'inflexió. (f'')

(l) $y=\sqrt[3]{2ax^2-x^3}=(2ax^2-x^3)^{1/3}=x^{2/3}(2a-x)^{1/3}$, suposarem $\underline{a>0}$.

- domini $=\mathbb{R}$, f contínua a tot $\mathbb{R}\to\nexists$ asímptotes verticals
- $y=0 \longrightarrow x^2(2a-x)=0 \longrightarrow x=0,2a$.

  Tenim $\begin{cases} f(x)>0 & \text{si } x\in(-\infty,2a) \\ f(x)<0 & \text{si } x\in(2a,\infty)\end{cases}$
- Asímptotes obliqües (i horitzontals):

  $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{2a}{x}-1}=-1$

  $n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\underbrace{\left(x-\sqrt[3]{x^2(x-2a)}\right)}_{[\infty-\infty]}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\sqrt[3]{1-\frac{2a}{x}}}{1/x}\overset{\frac{0}{0},\,L'H}{=}$

  $=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{3}\left(1-\frac{2a}{x}\right)^{-2/3}\frac{2a}{x^2}}{-1/x^2}=\frac{2a}{3}\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{2a}{x}\right)^{-2/3}=\frac{2a}{3}$

  $\Rightarrow$ $y=-x+\frac{2a}{3}$ és asímptota obliqua pels dos costats $(x\to\pm\infty)$

- $f'(x)=\frac{1}{3}(2ax^2-x^3)^{-2/3}\cdot(4ax-3x^2)=\frac{4a-3x}{3\sqrt[3]{x(2a-x)^2}}$, $x\neq 0,2a$

  Estudiem si f és derivable en aquests 2 punts:

  $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\sqrt[3]{\frac{2a}{h}-1}$ $\begin{cases}\lim_{h\to0^-}=-\infty\\ \lim_{h\to0^+}=\infty\end{cases}$ $\to$ no derivable en $x=0$

  $f'(2a)=\lim_{h\to0}\frac{f(2a+h)-f(2a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(2a+h)^{2/3}(-h)^{1/3}}{h}=-\lim_{h\to0}\left(\frac{2a+h}{h}\right)^{2/3}=-\infty$

  no derivable en $x=2a$.

  Punts crítics: $\begin{cases} x=0,\ x=2a & (f \text{ no derivable}) \\ f'(x)=0 \longrightarrow & x=\frac{4a}{3}\end{cases}$

  Intervals:
  - $I_1=(-\infty,0)$, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ decreixent
  - mínim rel. en $x=0$
  - $I_2=(0,\frac{4a}{3})$, $f'(x)>0 \Rightarrow f$ creixent
  - màxim rel. en $x=\frac{4a}{3}$
  - $I_3=(\frac{4a}{3},2a)$, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ decreixent
  - ni mínim ni màxim en $x=2a$
  - $I_4=(2a,\infty)$, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ decreixent

- $f''(x)=-\frac{2}{9}(2ax^2-x^3)^{-5/3}\cdot(4ax-3x^2)^2+\frac{1}{3}(2ax^2-x^3)^{-2/3}\cdot(4a-6x)=$

  $=\frac{-2(4ax-3x^2)^2+3(2ax^2-x^3)(4a-6x)}{9(2ax^2-x^3)^{5/3}}=\frac{-8a^2x^2}{9(2ax^2-x^3)^{5/3}}=-\frac{8a^2}{9\sqrt[3]{x^4(2a-x)^5}}$

  Si $x<2a \longrightarrow f''(x)<0 \longrightarrow f$ còncava

  Si $x>2a \longrightarrow f''(x)>0 \longrightarrow f$ convexa

  (f té punt d'inflexió en $x=2a$)