⑤ Considerem les funcions

$$f(\alpha,\beta)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta},\quad g(x,y,z)=(z^2-xy-y^2,\ z^2-xy-x^2),\quad h(u,v)=(u,v,u+v)$$

(a) Quin és el domini de $F=f\circ g\circ h$?

(b) Calculeu l'expressió de F. Per a quins valors de (u,v) podem concloure que $F(u,v)=f(u,v)$?

(a) Tenim:

$$\underset{(u,v)}{\mathbb{R}^2}\xrightarrow{h}\underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}^3}\xrightarrow{g}\mathbb{R}^2\supset\underset{(\alpha,\beta)}{A}\xrightarrow{f}\mathbb{R},\quad \text{amb } A=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\alpha\neq\beta\}.$$

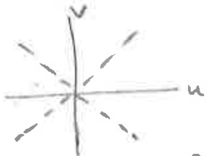
$F=f\circ g\circ h: B\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, definida per $F(u,v)=f(g(h(u,v)))$

Domini: $B=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ g(h(u,v))\in A\}$.

Per trobar el domini B, notem que $g(x,y,z)\in A\iff z^2-xy-y^2\neq z^2-xy-x^2\iff x^2\neq y^2$.

Llavors, $g(h(u,v))=g(u,v,u+v)\in A\iff u^2\neq v^2$

Per tant, $B=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ u^2\neq v^2\}$.



(b) $F(u,v)=f(g(h(u,v)))=f(g(u,v,u+v))=f((u+v)^2-uv-v^2,\ (u+v)^2-uv-u^2)=$

$$=f(u^2+uv,\ uv+v^2)=\frac{u^2+2uv+v^2}{u^2-v^2}=\frac{(u+v)^2}{(u+v)(u-v)}=\frac{u+v}{u-v}$$

Tenim $F(u,v)=f(u,v)\quad\forall(u,v)\in B$, però els dominis són diferents: $B\subsetneq A$

⑥ Siguin $g(z)$ i $h(z)$ dues funcions d'una variable tals que existeixen les seves funcions inverses definides de la forma:

$$g^{-1}:(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\longrightarrow\mathbb{R},\quad h^{-1}:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}.$$

(Per fixar idees podeu pensar que $g(z)=(\operatorname{arctg} z)/\pi$ i $h(z)=e^z$).

Considerem la funció $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y)=(g(x)+h(x-y),\ g(x)-h(x-y))$.

Calculeu explícitament $f^{-1}:B\longrightarrow\mathbb{R}^2$, determineu el conjunt imatge $B=f(\mathbb{R}^2)$ i feu un croquis de B. (Ind: $B=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2;\ u>v,\ -1<u+v<1\}$)

Escrivim $f(x,y)=(u,v)$. Per trobar $(x,y)=f^{-1}(u,v)$, hem de resoldre el sistema:

$$\begin{cases}g(x)+h(x-y)=u\\ g(x)-h(x-y)=v\end{cases}$$

i tindrem:

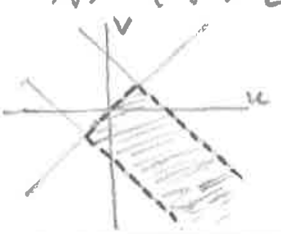
- * f injectiva si per a tot (u,v) existeix com a molt una solució (x,y). (Llavors, $\exists f^{-1}$)
- * $B=f(\mathbb{R}^2)=\mathrm{Dom}(f^{-1})$ són tots els (u,v) per als quals $\exists$ solució (x,y).

Resolem: $g(x)=\frac{u+v}{2},\quad h(x-y)=\frac{u-v}{2}\quad\rightarrow\quad x=g^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right),\ x-y=h^{-1}\left(\frac{u-v}{2}\right).$

$\rightsquigarrow$ funció inversa: $f^{-1}(u,v)=(x,y)=\left(g^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right),\ g^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right)-h^{-1}\left(\frac{u-v}{2}\right)\right).$

Domini: $\frac{u+v}{2}\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\ \frac{u-v}{2}\in(0,\infty)$

$\Rightarrow B=\{(u,v):\ u>v,\ -1<u+v<1\}$



En l'exemple, $g^{-1}(w)=\operatorname{tg}(\pi w)$

$h^{-1}(w)=\ln w$.

$$f^{-1}(u,v)=\left(\operatorname{tg}\frac{\pi(u+v)}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\pi(u+v)}{2}-\ln\frac{u-v}{2}\right)$$

(7) Per a les següents funcions, troben valors per a $\delta(\varepsilon)$ ("els millors que puguem") tals que si $\sqrt{x^2+y^2} \leq \delta(\varepsilon)$ llavors $|f(x,y)-f(0,0)| \leq \varepsilon$

[Ind.: recorden que $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ i $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

(a) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

Donat $\varepsilon > 0$,
$$\left|\sqrt[3]{xy} - 0\right| = \sqrt[3]{|xy|} \leq \sqrt[3]{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \leq \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{2/3} \leq \varepsilon$$
si $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \leq \boxed{\varepsilon^{3/2} = \delta(\varepsilon)}$ (així, hem vist que f és contínua en $(0,0)$)

Podem obtenir $\delta(\varepsilon)$ més gran si usem:
$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2), \text{ ja que } (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2 \geq 0, \ (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \geq 0.$$
Llavors, $\left|\sqrt[3]{xy}\right| \leq \sqrt[3]{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \leq \varepsilon$, si $x^2+y^2 \leq 2\varepsilon^3$, és a dir $\sqrt{x^2+y^2} \leq \underline{\sqrt{2}\cdot\varepsilon^{3/2} = \delta(\varepsilon)}$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, i $f(0,0)=0$
$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| \quad \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} \leq |x| \leq \varepsilon, \text{ si } \sqrt{x^2+y^2} \leq \boxed{\varepsilon = \delta(\varepsilon)}$$
$|xy| \leq x^2+y^2$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$.
$$\left|\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} - 1\right| = \left|\frac{-2(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}\right| = \frac{2(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} \leq 2(x^2+y^2) \leq \varepsilon, \text{ si } \sqrt{x^2+y^2} \leq \boxed{\sqrt{\varepsilon/2} = \delta(\varepsilon)}$$
Podem millorar-ho fent: $\dfrac{2(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} = 2\left(1 - \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\right) \leq \varepsilon$, si $\dfrac{1}{1+x^2+y^2} \geq 1 - \varepsilon/2$,

és a dir $\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{\dfrac{1}{1-\varepsilon/2} - 1} = \underline{\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} = \delta(\varepsilon)}$ (si $\varepsilon \geq 2$, podem prendre $\delta(\varepsilon) = \infty$)

(8) Procés productiu: reacció química $A+B \longrightarrow C+D$, C: producte final, D: gas que s'escapa.

Masses atòmiques en grams [m.a. = massa d'un mol], $a=100$, $b=25$, $c=123$, $d=2$ $(a+b=c+d)$

Degut als errors en la mesura, inicialment tenim $\tilde{a} = 100-x$, $\tilde{b} = 25+y$, suposem $x,y \geq 0$.
$\rightarrow$ la mostra de A reaccionarà completament, i quedarà un petit romanent de B.

(a) Calculen els grams de C i D que hi ha al producte final i troben la densitat de "contaminant" B que queda a la mostra final, $f(x,y)$.

(d) Per una normativa de control de qualitat, la densitat de B al producte final ha de ser $\leq 1\%$; vegem que llavors els errors de mesura x, y han de complir $0.2598x + 0.99y \leq 1.23$. Quina ha de ser la precisió δ de l'aparell de mesura (control de qualitat) per tal que si $x \leq \delta$, $y \leq \delta$ llavors es complexi aquesta desigualtat?

(a) Grams de A i B que reaccionen: $\tilde{a}$, $b\cdot\dfrac{\tilde{a}}{a}$ $\longrightarrow$ grams de C i D obtinguts: $c\cdot\dfrac{\tilde{a}}{a}$, $d\cdot\dfrac{\tilde{a}}{a}$

romanent de B: $\tilde{b} - b\cdot\dfrac{\tilde{a}}{a}$

Com que el gas D es perd, al producte final només hi ha C i B.

Densitat de B: $$f(x,y) = \frac{\tilde{b} - b\cdot\frac{\tilde{a}}{a}}{c\cdot\frac{\tilde{a}}{a} + \tilde{b} - b\cdot\frac{\tilde{a}}{a}} = \frac{0.25x + y}{123 - 0.98x + y}$$

(b) $f(x,y) \leq 0.01 \iff 0.25x + y \leq 1.23 - 0.0098x + 0.01y \iff 0.2598x + 0.99y \leq 1.23$

Si $x \leq \delta$, $y \leq \delta$, llavors $0.2598x + 0.99y \leq 1.2498\,\delta \leq 1.23$, si tenim $\underline{\delta \leq 0.984157}$,

Criteris per a l'estudi i càlcul de límits en 2 variables

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

(0) Substituir directament (x,y) per (a,b) (si no s'obté indeterminació)

(1) Relacionar-ho amb límits d'una variable

(2) Fitar: Si $|f(x,y)-L| \le h(x,y)$ $\forall (x,y)$, amb $\lim_{(a,b)} h = 0$, aleshores $\lim_{(a,b)} f = L$

(podem usar $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \le \sqrt{x^2+y^2}$)

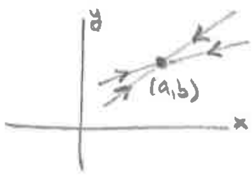
(3) Usar la propietat "**0·fitada=0**": si $\lim_{(a,b)} f = 0$ i $\underbrace{g \text{ fitada}}_{|g(x,y)|\le M \ \forall (x,y)} \Rightarrow \lim_{(a,b)} (f\cdot g) = 0$

(4) Estudiar els límits sobre rectes, o sobre altres corbes, que passin per (a,b).

Es basa en la propietat:

[si $\lim_{(a,b)} f = L \Rightarrow$ el límit sobre qualsevol recta o corba per (a,b) és L.]

Totes les rectes per (a,b) són: $\begin{cases} y = b + m(x-a) & \text{(pendent } m\in\mathbb{R}) \\ x = a & \text{(recta vertical)} \end{cases}$



Per tant, els límits sobre rectes són:

$$\lim_{x\to a} f(x, b+m(x-a)) \quad (m\in\mathbb{R}), \qquad \lim_{y\to b} f(a,y)$$

Si trobem dues rectes que donen lloc a límits diferents, o bé una recta per a la qual $\nexists$ límit, aleshores $\nexists \lim_{(a,b)} f$.

Ara bé, si tots els límits sobre rectes $\exists$ i són iguals, això no implica que $\exists \lim_{(a,b)} f$, ja que el límit sobre altres corbes podria ser diferent.

(5) En el cas que f sigui una funció definida a trossos i quan el punt (a,b) es trobi a la frontera entre 2 o més trossos,

$$\exists \lim_{(a,b)} f \Leftrightarrow \text{els límits en } (a,b) \text{ sobre cada tros } \exists \text{ i són iguals.}$$

• Obs. Els criteris (1),(2),(3) donen condicions suficients ("criteris positius"): els usarem quan sospitem que $\exists$ límit.

El criteri (4) dóna condició necessària ("criteri negatiu"): l'usarem quan sospitem que $\nexists$ límit.

Caracterització de conjunts oberts i tancats per funcions contínues

Propietat: Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt definit mitjançant igualtats/desigualtats entre funcions $f, g, \dots$ contínues a $\mathbb{R}^n$.

(a) Si la definició només involucra desigualtats $(<), (>), (\neq)$, llavors A és obert.

(b) Si la definició només involucra desigualtats $(\le), (\ge)$, o la igualtat $(=)$, llavors A és tancat.

Si a la definició intervenen desigualtats dels dos tipus (a), (b), llavors A pot no ser obert ni tancat.

Si les funcions $f, g, \dots$ no són contínues a tot $\mathbb{R}^n$, llavors (a), (b) poden ser falses.

Exemples: $A = \{x^2+y^2 \le 4,\ x<1\}$ ni obert ni tancat, $B = \{x^2+y^2\le 4,\ x<3\}$ tancat.

$C = \left\{ \frac{1}{x^2+y^2-1} \le 1 \right\}$ ni obert ni tancat ($C = \{x^2+y^2 \ge 2\} \cup \{x^2+y^2 < 1\}$)

11 Calculeu (si existeixen) els següents límits

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\arccos(x/y)}{1+xy} = \dfrac{\arccos(0/1)}{1+0\cdot 1} = \dfrac{\pi}{2}$, per substitució directa.

(notem que $h(x) = \arccos x$ és definida per a $x \in [-1,1]$)

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$, indeterminació.

(Obs. numerador i denominador són del mateix grau)

Fem el límit sobre rectes $y = mx$:

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot mx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2}, \text{ depèn de } m \Rightarrow \nexists \lim_{(0,0)} f(x,y).$$

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ (Obs. numerador $\to$ grau 3, denominador $\to$ grau 2)

Fitem, usant $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \le \sqrt{x^2+y^2}$, intentant provar que el límit és 0:

$$|f(x,y) - 0| = \frac{|x|^2 \cdot |y|}{x^2+y^2} \le \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{x^2+y^2} = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}\ 0} \Rightarrow \lim_{(0,0)} f(x,y) = 0$$

També podem fer:

$$f(x,y) = \underbrace{y}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\substack{\text{fitada} \\ |\cdot| \le 1}} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Sobre rectes $y = mx$: $\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1-m^2}{1+m^2} = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}$, depèn de m

$\Rightarrow \nexists \lim_{(0,0)} f(x,y)$.

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y^2}{x^4+y^4}$ (Obs: numerador i denominador del mateix grau)

Sobre rectes $y = mx$: $\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 (mx)^2}{x^4+(mx)^4} = \lim_{x\to 0} \dfrac{m^2}{1+m^4} = \dfrac{m^2}{1+m^4}$, depèn de m

$\Rightarrow \nexists \lim_{(0,0)} f(x,y)$

(f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

Sobre rectes $y = mx$: $\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(mx^2)}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(mx^2)}{(1+m^2)\cdot x^2} = \dfrac{m}{1+m^2}$, depèn de m

$\Rightarrow \nexists \lim_{(0,0)} f(x,y)$

(g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (Obs: numerador $\to$ grau 2
denominador $\to$ es comporta com si fos de grau 1)

Fitem:

$$|f(x,y) - 0| = \frac{|x|\cdot|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}\ 0} \Rightarrow \lim_{(0,0)} f(x,y) = 0$$

(h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$. [Ind: Proveu primer que $\lim\limits_{z\to 0^+} z^a \ln z = 0$ si $a>0$ i feu una identificació adequada de z i una bona tria del valor de a]

$$\lim_{z\to 0^+} z^a \ln z = \lim_{z\to 0^+} \frac{\ln z}{z^{-a}} \underset{\uparrow}{=} \lim_{z\to 0^+} \frac{1/z}{-az^{-a-1}} = -\frac{1}{a}\lim_{z\to 0^+} z^a = 0, \text{ per a qualsevol } a>0.$$

$\frac{\infty}{\infty}$, L'Hôp.

D'entrada, $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0\cdot(-\infty)$, indeterminació.

Però podem fitar, usant $|x|\le\sqrt{x^2+y^2}$, $|y|\le\sqrt{x^2+y^2}$,

$$|f(x,y)-0| = |xy\ln(x^2+y^2)| \le |(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)| = |z\cdot\ln z|$$

prenem $z = x^2+y^2 \to 0^+$

Com que $\lim\limits_{z\to 0^+}|z\cdot\ln z| = 0$, deduïm que $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = 0$

(i) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ [obs. numerador: grau 3, denominador: grau 2]

Fitem $|x|, |y|, |z| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}$:

$$|f(x,y,z)-0| \le \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \lim_{(0,0,0)} f(x,y,z) = 0.$$

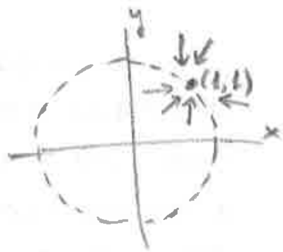
$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \xrightarrow{(x,y,z)\to(0,0,0)} 0$

(j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \sqrt{x}+\sqrt{y} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

(k) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \operatorname{tg}\frac{\pi}{x^2+y^2} \underset{\uparrow}{=} \lim\limits_{u\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} u$, $\boxed{\nexists}$ ja que $\lim\limits_{u\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} u = \infty$, $\lim\limits_{u\to\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} u = -\infty$

$u = \frac{\pi}{x^2+y^2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$



De fet, si fem $(x,y)\to(1,1)$ amb $x^2+y^2>2$ obtindrem $\lim f = \infty$

i amb $x^2+y^2<2$ obtindrem $\lim f = -\infty$

(*) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4}$

Sobre rectes $y=mx$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x,mx) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(mx)^4}{x^2+(mx)^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{m^4x^2}{1+m^4x^2} = \frac{0}{1+0} = 0 \quad \forall m\in\mathbb{R}$

Sobre la recta $x=0$: $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y^4}{0+y^4} = \lim\limits_{y\to 0} 1 = 1$

$0\ne 1 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(0,0)} f(x,y)$

(12) Sigui $f(x,y)=\dfrac{e^{xy}-1}{y}$ si $y\neq 0$, i $f(x,0)=a$.

(a) Per a quin valor de $a\in\mathbb{R}$ és f contínua en $(0,0)$?

(b) Per aquest valor de a, discutiu la continuïtat de f en $\mathbb{R}^2$.

(a) $f(0,0)=a \rightsquigarrow$ Hem de comprovar si $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y)=a$

Com que hem definit f a trossos, estudiarem el límit en $(0,0)$ sobre cada tros i veurem si coincideixen.

- $f(x,y) \underset{\text{si } y\neq 0}{=} \dfrac{e^{xy}-1}{y} \underset{\text{si } x\neq 0}{=} \dfrac{e^{xy}-1}{xy}\cdot x \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 1\cdot 0=0$,

  (on hem usat: $\dfrac{e^{xy}-1}{xy} \underset{u=xy\to 0}{=} \dfrac{e^{u}-1}{u} \xrightarrow{u\to 0} 1$)

- $\underline{x=0}$: $f(0,y)=\dfrac{e^0-1}{y}=0 \xrightarrow{y\to 0} 0$

- $\underline{y=0}$: $f(x,0)=a \xrightarrow{x\to 0} a$

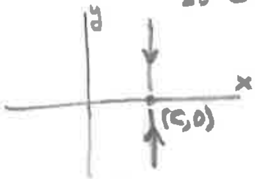
Per tant, f contínua en $(0,0)$ prenent $\underline{a=0}$.

(b) - Si $y\neq 0$, f és contínua en (x,y) per generació, ja que f és quocient de funcions contínues amb denominador $\neq 0$.

- En el $(0,0)$, sabem per (a) que f és contínua si $a=0$.
- En un punt $(c,0)$ amb $x_0\neq 0$, com que $f(c,0)=a=0$, perquè f fos contínua en $(c,0)$ caldria que $\lim\limits_{(c,0)} f(x,y)=0$.

  Però si fem el límit sobre la recta vertical $x=c$, obtenim:

  $$\lim_{y\to 0} f(c,y)=\lim_{y\to 0}\frac{e^{cy}-1}{y} \underset{\frac{0}{0},\ \text{L'Hôp.}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{c\,e^{cy}}{1}=c\neq 0 \Rightarrow f \text{ no cont. en } (c,0) \text{ si } c\neq 0.$$



Així, f contínua en (x,y) si $y\neq 0$, i en $(0,0)$.

(14) Per a les següents funcions definides a trossos discutiu la seva continuïtat a $\mathbb{R}^2$.

(a) $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{xy}$ si $xy\neq 0$, i $f(x,y)=1$ si $xy=0$.

- Si $xy\neq 0$, f és contínua en (x,y) per generació.
- Si $xy=0$, tindrem un punt $(a,0)$ o bé $(0,b)$.

  En un punt $(a,0)$, com que $f(a,0)=1$ hem de veure que $\lim\limits_{(a,0)} f(x,y)=1$.

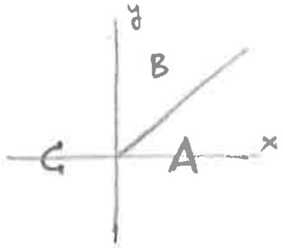
  Tenim f definida a trossos, $A=\{xy\neq 0\}$, $B=\{xy=0\}$

  - Sobre el tros B, tenim $f(x,y)=1 \longrightarrow 1$ si $(x,y)\to(a,0)$
  - Sobre el tros A, $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{xy} \underset{u=xy}{=} \dfrac{\sin u}{u} \longrightarrow 1$ si $(x,y)\to(a,0)$, ja que $u=xy\to 0$

  Anàlogament en un punt $(0,b)$,

(b) $f(x,y) = \max\{x,y\}$ si $x>0$, i $f(x,y)=0$ si $x\leq 0$.

Podem considerar f definida en 3 trossos:



$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x>0,\ x\geq y \quad (A) \\ y & \text{si } y>x>0 \quad (B) \\ 0 & \text{si } x\leq 0. \quad (C) \end{cases}$$

Hem d'estudiar les fronteres entre A, B i C
(a la resta de punts f és contínua per generació).

- Frontera entre A i B: punts (a,a), amb $a>0$:
  - Tenim $f(a,a)=a$
  - Sobre A, $f(x,y) = x \longrightarrow a$ si $(x,y)\to(a,a)$
  - Sobre B, $f(x,y) = y \longrightarrow a$ si $(x,y)\to(a,a)$

  $\Rightarrow$ f contínua en (a,a), $\forall a>0$.

- Frontera entre A i C: punts $(0,b)$, amb $b<0$:
  - Tenim $f(0,b)=0$.
  - Sobre A, $f(x,y)=x \longrightarrow 0$ si $(x,y)\to(0,b)$
  - Sobre B, $f(x,y)=0 \longrightarrow 0$ si $(x,y)\to(0,b)$

  $\Rightarrow$ f contínua en $(0,b)$, $\forall b<0$

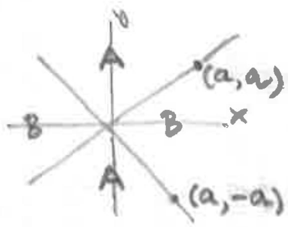
- Frontera entre B i C: punts $(0,b)$, amb $b>0$
  - Tenim $f(0,b)=0$
  - Sobre B, $f(x,y)=y \longrightarrow b$ si $(x,y)\to(0,b)$

  $\Rightarrow$ f <u>no</u> contínua en $(0,b)$, $\forall b>0$.

- Al punt $(0,0)$, tenim $f(0,0)=0$, i fent el límit sobre A, B o C veiem que $f(x,y)\to 0$ en els 3 casos $\Rightarrow$ f contínua en $(0,0)$.

<u>Nota</u>. Usant que $\max\{x,y\} = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}$ només cal considerar 2 trossos: $A\cup B$ i C

(c) $f(x,y)=x$ si $|x|\leq|y|$, i $f(x,y)=y$ si $|x|>|y|$.



Tenim 2 trossos: $A=\{|x|\leq|y|\}$, $B=\{|x|>|y|\}$

Hem d'estudiar la frontera entre A i B:
punts (a,a) i $(a,-a)$ $a\in\mathbb{R}$ (a la resta de punts, f és contínua per generació)

- Punts (a,a):
  - $f(a,a)=a$
  - Sobre A, $f(x,y)=x\longrightarrow a$
  - Sobre B, $f(x,y)=y\longrightarrow a$

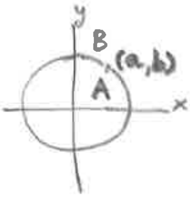
  $\Rightarrow$ f contínua en (a,a), $\forall a\in\mathbb{R}$

- Punts $(a,-a)$:
  - $f(a,-a)=a$
  - Sobre A, $f(x,y)=x\longrightarrow a$
  - Sobre B, $f(x,y)=y\longrightarrow -a$

  $\Rightarrow$ f <u>no</u> contínua en $(a,-a)$, si $a\neq 0$.

(d) $f(x,y) = x$ si $x^2+y^2 \le 1$, i $f(x,y) = y$ si $x^2+y^2>1$.

Tenim 2 trossos: $A = \{x^2+y^2 \le 1\}$, $B = \{x^2+y^2>1\}$



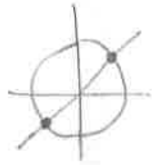
La frontera entre A i B està formada pels punts (a,b), amb $a^2+b^2=1$.

Donat un punt de la frontera, (a la resta de punts, f és contínua per generació)

- $f(a,b) = a$
- Sobre A, $f(x,y) = x \longrightarrow a$
- Sobre B, $f(x,y) = y \longrightarrow b$

$\Rightarrow$ f contínua en (a,b) si $a=b$, i no contínua si $a \neq b$

Els únics punts de la frontera amb $a=b$ són $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ i $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



(16) Digueu quins dels següents conjunts són oberts, tancats o compactes.

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le x,\ e^{xy} - \sin x \le y^4 + e^x\}$

tancat, ja que ve definit per desigualtats ($\le$) entre funcions contínues a $\mathbb{R}^2$.

Serà compacte si és fitat (contingut en algun disc)

Tenim $x^2+y^2 \le x \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^2$, disc de radi $1/2$ i centre $(1/2, 0)$.

Per tant, $A \subset \overline{D}_{1/2}(1/2, 0)$, fitat, i per tant és compacte.

(b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ e^{xy} + e^{yz} + e^{zx} \ge x+y+z\}$

desigualtats ($\le$), ($\ge$) $\longrightarrow$ tancat

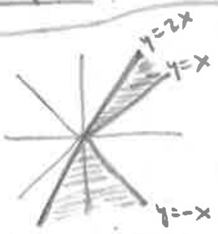
B contingut en l'esfera $x^2+y^2+z^2 \le 1 \to$ fitat

$\to$ compacte

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-y^2 \le 0,\ y \le 2x\}$, tancat

No fitat, ja que conté tota la recta $y = 2x$

$\Rightarrow$ no compacte



(d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2-y^2+z^2 < 1,\ xyz > 0\}$

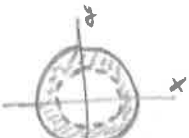
desigualtats ($<$), ($>$) $\longrightarrow$ obert, no compacte.

(e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \sin y > 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0\}$

desigualtats ($>$), ($\neq$) $\longrightarrow$ obert, no compacte.

(f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 \le 2\}$

desigualtats dels 2 tipus: ($<$), ($\le$).



El conjunt F és una corona circular de centre $(0,0)$, que té com a frontera les circumferències de radis 1 i $\sqrt{2}$, i inclou la circumferència de radi $\sqrt{2}$ però no la de radi 1.

Com que F conté una part de la frontera però no tota, deduïm que F no és obert ni tancat, i tampoc no és compacte.

(g) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1,\ \frac{x^2+y^2}{x} < 2\}$

Obs. La funció $\frac{x^2+y^2}{x}$ no és contínua a tot $\mathbb{R}^2$.

Però tenim: si $x>1$, llavors $\frac{x^2+y^2}{x} < 2 \iff x^2+y^2 < 2x$

Per tant podem escriure $G = \{(x,y) : x>1,\ x^2+y^2 < 2x\}$, obert, no compacte.