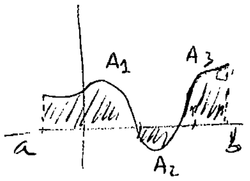
# 1. NOCIÓ D'INTEGRAL DE RIEMANN.

## Integral definida en 1 variable (repàs).

- Donada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, la integral definida $\int_a^b f=\int_a^b f(x)\,dx$ està relacionada amb el càlcul de l'àrea limitada per la gràfica de la funció i l'eix x.

De fet, la integral dóna directament l'àrea si $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$. En general, **en els intervals on $f(x)<0$, l'àrea compta** negativament.

P.ex.

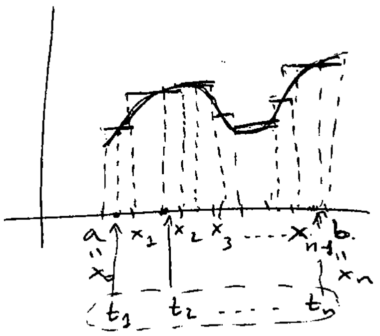



$\rightsquigarrow \int_a^b f = A_1 - A_2 + A_3$

Amb les integrals ~~[illegible]~~ podem calcular àrees i volums, però també la mitjana d'una funció, longituds de corbes, etc.

També hi ha interpretacions físiques, p.ex. si $v(t)$ és la velocitat d'un mòbil per a $a\le t\le b$, llavors $\int_a^b v(t)\,dt$ és la distància recorreguda entre els instants a i b.

- Per definir $\int_a^b f$, aproximem f(x) per funcions esglaonades i passem al límit.




Escollim:

- partició $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, escrivim $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1,\dots,n$.
- un punt $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ qualsevol.

$\Downarrow$

La integral de la funció esglaonada és

$\sum_{i=1}^n f(t_i)\,\Delta x_i$ (suma de Riemann associada a la partició)

Llavors definim:

$$\boxed{\int_a^b f = \lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(t_i)\,\Delta x_i} \quad (*)$$

És a dir, $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$: si els $x_i$ compleixen $|\Delta x_i|<\delta$ $\forall i$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f - \sum_{i=1}^n f(t_i)\,\Delta x_i\right| < \varepsilon.$$

Direm que f és *integrable* si $\exists$ el límit $(*)$. Es pot provar que totes les funcions fitades i contínues a trossos ($f\in CT[a,b]$) són integrables.

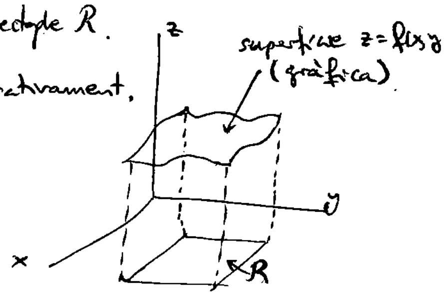
## Integral sobre un rectangle.

- Per generalitzar la noció d'integral a funcions de 2 variables, comencem considerant com a domini un rectangle o "interval de $\mathbb{R}^2$", $R=[a,b]\times[c,d]$
(o "cel·la") (costats paral·lels als eixos)

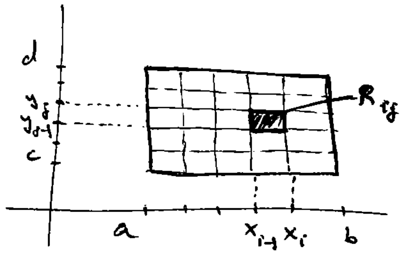
$f: R \longrightarrow \mathbb{R}$ funció fitada.

La integral $\int_R f = \int_R f(x,y)\,dx\,dy$ correspondrà, si $f(x,y)\geq 0$ $\forall (x,y)\in R$, al volum limitat per la gràfica de $f$ i el pla $xy$, sobre el rectangle $R$.

En general, en les zones on $f(x,y)<0$ el volum comptarà negativament.




- Donat $n\in\mathbb{N}$, considerem la partició regular d'ordre $n$ del rectangle $R$, en subrectangles de la forma $R_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, $i,j=1,\dots,n$




$x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n}$, $y_j = c + j\cdot\frac{d-c}{n}$ (equidistants)

Tenim doncs $n^2$ subrectangles, tots de la mateixa àrea:

$$A(R_{ij}) = (x_i - x_{i-1})\cdot(y_j - y_{j-1}) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}.$$

Per a cada subrectangle, considerem $M_{ij}=\sup_{R_{ij}} f$, $m_{ij}=\inf_{R_{ij}} f$.

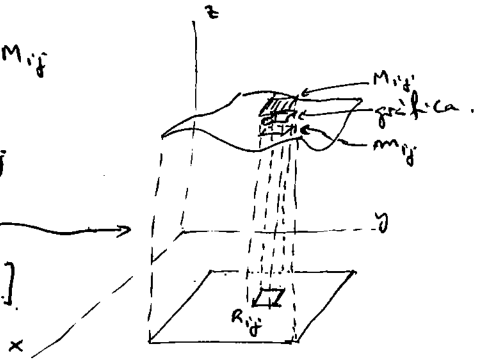
Definim les sumes superior i inferior n-èsimes de Riemann, de $f$ sobre $R$:

$$\boxed{S_n(f,R) = \sum_{1\leq i,j\leq n} M_{ij}\,A(R_{ij})} = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}\cdot\sum_{i,j} M_{ij}$$

$$\boxed{s_n(f,R) = \sum_{i,j} m_{ij}\,A(R_{ij})} = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}\cdot\sum_{i,j} m_{ij}$$

Són sumes de volums de paral·lelepípedes

[Es pot comprovar que $s_{n_1}(f,R)\leq S_{n_2}(f,R)$ $\forall n_1,n_2$]




**Def.** La funció $f$ és integrable sobre el rectangle $R$ si $\exists$ i són iguals els límits de les successions $S_n(f,R)$ i $s_n(f,R)$.

Llavors, el valor comú s'anomena la integral de $f$ sobre $R$:

$$\boxed{\int_R f = \int_R f(x,y)\,dx\,dy = \lim S_n(f,R) = \lim s_n(f,R)}$$

(rep el nom d'integral doble).

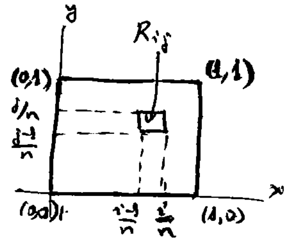
<u>Nota</u>. Com en el cas d'1 variable, es pot obtenir el valor de la integral com a límit de sumes de Riemann del tipus $\sum_{i,j} f(t_{ij})\, A(R_{ij})$, amb $t_{ij} \in R_{ij}$ (qualsevol), associades a particions no necessàriament regulars.

Llavors tenim:

$$\int_R f = \lim_{A(R_{ij}) \to 0} \sum_{i,j} f(t_{ij}) \cdot A(R_{ij})$$

• <u>Exemples</u> (d'aplicació directa de la definició)

1) $f(x,y) = 1 - x$, sobre $R = [0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$.




Donat $n$, tenim la partició regular $R_{ij} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$

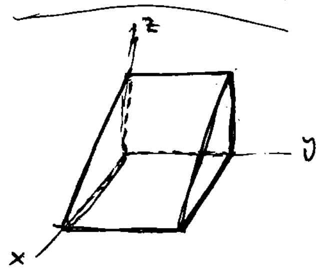
$A(R_{ij}) = 1/n^2$.

Tenim: $M_{ij} = 1 - \frac{i-1}{n}$, $m_{ij} = 1 - \frac{i}{n}$

Llavors,

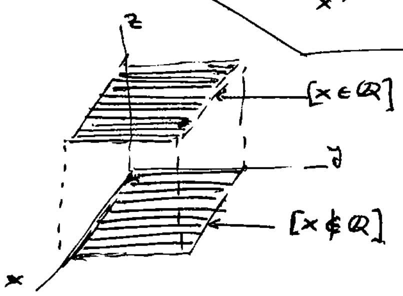
$$S_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i,j} \underbrace{\left(1 - \frac{i-1}{n}\right)}_{\text{no dep. de } j} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) = \frac{n + (n-1) + \dots + 1}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

$$s_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i,j} \left(1 - \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (n - i) = \frac{(n-1) + \dots + 1 + 0}{n^2} = \frac{n-1}{2n}.$$




Resulta $\lim S_n = \lim s_n = \frac{1}{2}$, i per tant $f$ és integrable sobre $R$, amb $\int_R f = \frac{1}{2}$ (la meitat d'un cub de costat 1).

2) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ sobre $R = [0,1]^2$.




Considerant la partició regular $n$-èsima, per a cada $R_{ij}$ tenim:

$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f = 1$, $m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f = 0$.

(tot rectangle $R_{ij}$ conté punts $(x,y)$ amb $x \in \mathbb{Q}$ i punts amb $x \notin \mathbb{Q}$)

Llavors, $S_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i,j} 1 = \frac{n^2}{n^2} = 1$, $s_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i,j} 0 = 0$.

$\lim S_n \neq \lim s_n$, i per tant $f$ <u>no</u> és integrable sobre $R$.

<u>Nota</u>. En general serà difícil calcular integrals d'aquesta manera, ja que no podrem obtenir una expressió tancada per a les sumes $S_n(f,R)$ i $s_n(f,R)$. Però veurem altres tècniques.

No obstant, molts mètodes numèrics, per a calcular integrals aproximades, es basen directament en la definició.

## Criteris d'integrabilitat.

• **Teorema:** Tota funció $f$ contínua sobre un rectangle $R$, és integrable.

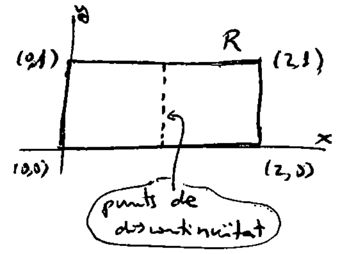
P. ex., podem assegurar que $\exists \displaystyle\int_{[1,2]\times[0,5]} \frac{xy}{x^2+1}\,dx\,dy$.

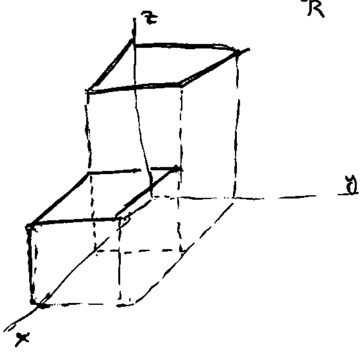
Però moltes funcions discontínues són també integrables, si les discontinuïtats formen un "conjunt d'àrea zero".

Exemple:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases} \quad \text{sobre } R=[0,2]\times[0,1].$$

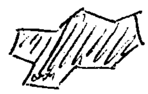
Fent les sumes superiors i inferiors, es comprova que $\int_R f = 2+1 = 3$.




• **Definicions**

(a) Una *figura polygonal* és qualsevol conjunt de $\mathbb{R}^2$ format per la unió d'un nombre finit de rectangles o trapezis.



(Per a les figures polygonals, tenim fórmules que permeten calcular-ne l'àrea.)

(b) Un conjunt $B \subset \mathbb{R}^2$ és un *conjunt d'àrea zero* si es pot incloure en una figura polygonal d'àrea arbitràriament petita, és a dir, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ una figura polygonal $P$, amb $B \subset P$ i $A(P) < \varepsilon$.

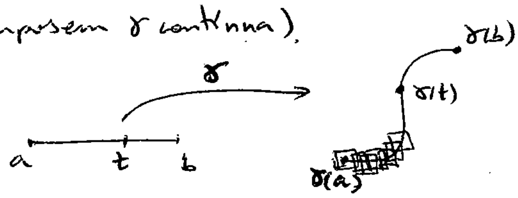
(Notem que un conjunt d'àrea zero tindrà interior buit: $\mathring{B} = \emptyset$; no pot contenir cap bola)

Casos particulars.

1) tot conjunt format per un nombre finit de punts, $B = \{P_1, \dots, P_r\}$, és un conjunt d'àrea zero.


2) Tota corba $C$ de $\mathbb{R}^2$, parametritzada per una funció $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $C^1$, és un conjunt d'àrea zero. (pot ser fals si només suposem $\gamma$ contínua)

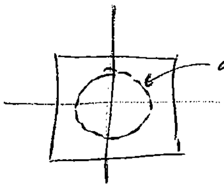
$C = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$.




3) tot conjunt $B$ format per una unió finita de corbes $C^1$, és un conjunt d'àrea zero.

• **Teorema**. Sigui $f$ funció fitada, definida en un rectangle $R$. Si el conjunt $B$ de discontinuïtats de $f$ és d'àrea zero, llavors $f$ és integrable sobre $R$.

Exemple.
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2+y^2<1 \\ 2(x^2+y^2) & \text{si } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}, \quad R=[-2,2]^2.$$




$f$ és integrable sobre $R$.

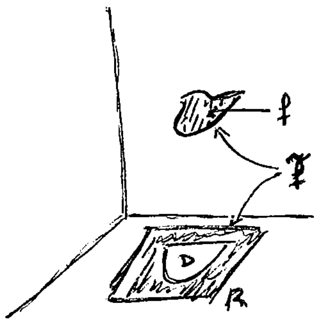
## Integral sobre dominis elementals.

Vegem com estendre la definició d'integral sobre un rectangle a dominis més generals.

• **Def**. Un <u>domini elemental</u> és un conjunt $D \subset \mathbb{R}^2$, compacte (tancat i fitat) i tal que la seva frontera $\partial D$ és un conjunt d'àrea zero.

Així, tot domini fitat limitat per un nombre finit de corbes $C^1$, serà un domini elemental.


• **Def**. Sigui $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, essent $D$ domini elemental. Considerem un rectangle $R$ tal que $D \subset R$, i l'extensió de $f$ a aquest rectangle:
$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin D. \end{cases}$$
Direm que $f$ és <u>integrable</u> sobre $D$ si $\tilde{f}$ és integrable sobre $R$, i llavors la <u>integral</u> de $f$ sobre $D$ és:
$$\boxed{\int_D f = \int_R \tilde{f}.}$$




• **Teorema**. Sigui $f$ funció fitada, definida en un domini elemental $D$. Si el conjunt $B$ de discontinuïtats de $f$ és un conjunt d'àrea zero, llavors $f$ és integrable sobre $D$.

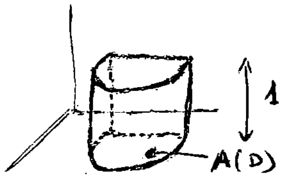
(En efecte, les possibles discontinuïtats de $\tilde{f}$ sobre $R$ formen un conjunt d'àrea zero $B \cup \partial D$, i per tant $f$ és integrable sobre $R$).

Exemples. $\exists \displaystyle\int_{x^2+y^2\leq 1} \frac{x^2-xy}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy$, $\displaystyle\int_{x^2 \leq y \leq 1} \frac{3\cos x}{y^2+1}\,dx\,dy$ (funcions contínues, dominis elementals).

## Àrea d'un domini elemental

- **Def.** Si $D \subset \mathbb{R}^2$ és un domini elemental, definim la seva àrea segons: $\boxed{A(D) = \int_D 1}$ $\left[ = \int_D dx\,dy \right]$.

Aquesta definició ve justificada perquè $\int_D 1$ correspon al volum d'un cilindre de base $D$ i alçada 1: $\int_D 1 = A(D)\cdot 1$




## Propietats de la integral

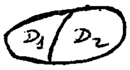
$D$ domini elemental, $f, g$ integrables sobre $D$.

1) Linealitat. $f+g$, $c\cdot f$ integrables, $\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g$, $\int c\cdot f = c \cdot \int f$

2) Monotonia. Si $f \leq g$ a tot $D \Rightarrow \int_D f \leq \int_D g$.

   * Conseqüència: $\left| \int_D f \right| \leq \int_D |f|$ (usant que $-|f| \leq f \leq |f|$).

3) Additivitat. Descomponem $D = D_1 \cup D_2$, essent $D_1$ i $D_2$ dominis elementals tals que $D_1 \cap D_2$ és d'àrea zero. Llavors, $\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$.



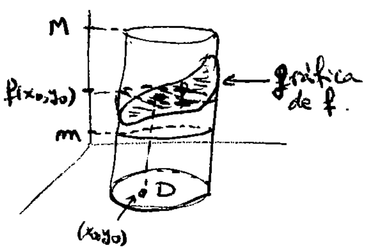

## Teorema de la mitjana

$D$ domini elemental, $f$ integrable sobre $D$.

(a) Si $m \leq f(x,y) \leq M$ $\forall (x,y) \in D$, $\Rightarrow$ $m \cdot A(D) \leq \int_D f \leq M \cdot A(D)$.

(b) Si $f$ és contínua sobre $D$, i $D$ és connex,

$\Rightarrow$ $\exists (x_0, y_0) \in D$: $\int_D f = f(x_0,y_0) \cdot A(D)$




[(a) ens diu que $\int_D f$ està compresa entre els dos cilindres d'alçades $m$ i $M$.
(b) ens diu que $\int_D f$ correspon al volum d'un cilindre d'alçada $f(x_0,y_0)$, per algun punt $(x_0,y_0)$.]

(Nota. Per a integrals d'1 variable, $\int_a^b f(x)\,dx$, tot és anàleg canviant $A(D)$ per $b-a$ (long. de l'interval))

Exemple. Amb el teorema de la mitjana podem fitar superiorment i inferiorment integrals. Així,

$$4\pi \leq \int_{x^2+y^2 \leq 4} e^{x^2+y^2} \leq 4e^4\pi. \quad (m=1,\ M=e^4,\ A(D)=4\pi).$$

- **Def.** $\mu = \frac{1}{A(D)} \cdot \int_D f$ és la mitjana de $f$ sobre $D$.

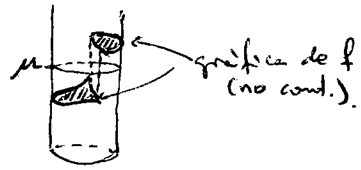
Llavors pel teo. anterior tenim:

(a) $m \leq \mu \leq M$

(b) si $f$ cont. i $D$ connex, $\mu = f(x_0, y_0)$ per algun $(x_0, y_0) \in D$

Això és fals si $f$ no cont. o $D$ no connex,

p. ex.




- Observacions (conseqüències del teo. de la mitjana i de l'additivitat)

1) $f, g$ integrables sobre $D$, $|f-g| \leq \varepsilon$ a tot $D$.

Llavors, $\left| \int_D f - \int_D g \right| \leq \int_D |f-g| \leq \varepsilon \cdot A(D)$

(funcions properes $\Rightarrow$ integrals també properes)

2) $D, D'$ dominis elementals, amb $D \cap D'$ d'àrea zero, i $A(D') \leq \varepsilon$.


Si $|f| \leq M$ sobre $D'$, llavors $\left| \int_{D \cup D'} f - \int_D f \right| = \left| \int_{D'} f \right| \leq \int_{D'} |f| \leq M \cdot A(D') \leq M \cdot \varepsilon$.

(dominis propers $\Rightarrow$ integrals també propers)

3) Si $f(x,y) = g(x,y)$ $\forall (x,y) \in D - E$, on $E$ és d'àrea zero, llavors $\int_D f = \int_D g$.

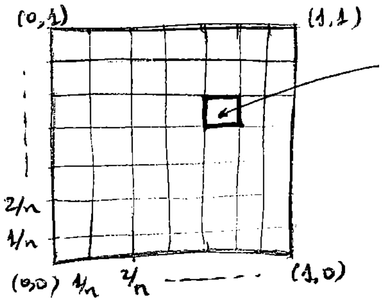
**Integrals sobre dominis de 3 (o més) variables.**

Totes les definicions i teoremes s'estenen de manera natural a 3 o més variables.
En el cas de 3 variables, caldrà canviar:

- considerar intervals 3-dimensionals $R = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ (= paral·lelepípedes amb les cares paral·leles als plans coordenats), i particions regulars en subintervals $R_{ijk}$, $i,j,k = 1, \dots, n$.
- sumes superiors i inferiors: $S_n(f,R) = \sum_{i,j,k} M_{ijk} \cdot \underbrace{vol(R_{ijk})}_{\text{volum dels subintervals}}$, $s_n(f,R) = \dots$,
- integral triple: $\int_R f = \int_R f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$.
- def. $B \subset \mathbb{R}^3$ és un conjunt de volum zero si es pot incloure en una unió d'intervals 3-dim. de volum total arbitràriament petit.
- una corba o superfície $C^1$ de $\mathbb{R}^3$ (o una unió finita) és un conjunt de volum zero.
- def. $W \subset \mathbb{R}^3$ és un domini elemental si és compacte i la frontera $\partial W$ és un conjunt de volum zero; així tot domini fitat limitat per un nº finit de superfícies $C^1$ és elemental.
- def. $\int_W f$ considerant l'extensió $\tilde{f}$ a un interval 3-dim. que contingui $W$.
- def. volum d'un domini elemental: $vol(W) = \int_W 1$.

# (1.1) Sumes de Riemann

**①** Sigui $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = x+y$, on $A = [0,1]\times[0,1]$. Dividim l'interval $[0,1]$ en $n$ trossos iguals. Calculeu la suma superior de Riemann.




subrectangles $R_{ij} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\times\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$

Per a cada subrectangle,

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f = \frac{i}{n} + \frac{j}{n} = \frac{i+j}{n}.$$

La suma superior de Riemann:

$$S_n(f,A) = \sum_{1\le i,j\le n} M_{ij}\cdot \underbrace{A(R_{ij})}_{1/n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{i,j}(i+j) = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{i,j} i + \sum_{i,j} j\right) = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{n+1}{n}}}$$

$$\sum_{i,j} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(no depèn de } j)}}{i} = n\cdot\sum_{i=1}^{n} i = n\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

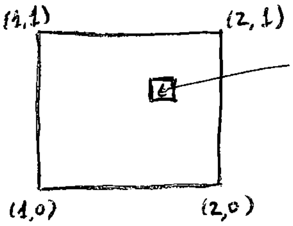
$$\sum_{i,j} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(no depèn de } i)}}{j} = n\cdot\sum_{j=1}^{n} j = n\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

Anàlogament podem calcular la suma inferior: $s_n(f,A) = \frac{n-1}{n}$,

i per tant, $\lim S_n(f,A) = \lim s_n(f,A) = 1 = \int_A f$.

(o bé, com que $f$ és contínua, $\int_A f = \lim S_n(f,A) = 1$.

**②** (a) Donat el rectangle $R = [1,2]\times[0,1]$ i la funció $R \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y)\longmapsto y-x$, calculeu la suma inferior de Riemann.




$$R_{ij} = \left[1+\frac{i-1}{n}, 1+\frac{i}{n}\right]\times\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \qquad (i,j = 1,\dots,n)$$

$$m_{ij} = \inf_{R_{ij}}(y-x) = \frac{j-1}{n} - \left(1+\frac{i}{n}\right) = \frac{j-i-n-1}{n}$$

Suma inferior:

$$s_n(f,R) = \sum_{1\le i,j\le n} m_{ij}\,\underbrace{A(R_{ij})}_{1/n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{i,j}(j-i-n-1) = \frac{1}{n^3}\Big(\underbrace{\cancel{\sum_{i,j} j} - \cancel{\sum_{i,j} i}}_{\text{probl. 1}} - \sum_{i,j}\underbrace{(n+1)}_{\text{constant}}\Big) =$$

$$= -\frac{1}{n^3}\,n^2(n+1) = \underline{\underline{-\frac{n+1}{n}}}.$$

[suma superior: $S_n(f,R) = -\frac{n-1}{n}$, $\lim = -1$]

(b) [test oct/06]

Calculeu la suma superior de Riemann de $f(x,y) = y e^x$ en el quadrat $[0,1]^2$.

$$R_{ij} = \left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\times\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right]; \qquad M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f = \frac{j}{n}\,e^{i/n}$$

$$S_n(f,R) = \sum_{1\le i,j\le n} M_{ij}\,\underbrace{A(R_{ij})}_{1/n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{i,j} j\,e^{i/n} = \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n}\Big[j\underbrace{\sum_{i=1}^{n} e^{i/n}}_{\text{(no depèn de } j)}\Big] = \frac{1}{n^3}\Big[\sum_i e^{i/n}\Big]\cdot\Big[\sum_j j\Big] =$$

$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1-e}{e^{-1/n}-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{n+1}{2n^2}\cdot\frac{1-e}{e^{-1/n}-1}}$$

Hem sumat una progr. geomètrica de raó $e^{1/n}$:

$$\sum_{i=1}^{n} e^{i/n} = e^{1/n} + (e^{1/n})^2 + \dots + (e^{1/n})^n = \frac{e^{1/n} - (e^{1/n})^{n+1}}{1-e^{1/n}} = \frac{1-e}{e^{-1/n}-1}$$

[obs: $f$ contínua, $\lim S_n(f,R) = \frac{e-1}{2} = \int_R f$]