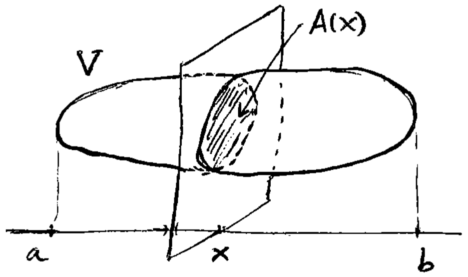
2. CÀLCUL D'INTEGRALS

Principi de Cavalieri. Integrals iterades

Per calcular el volum d'un cos $V \subset \mathbb{R}^3$, en alguns casos (paral·lelepípede, cilindre, esfera, ...) disposem de fórmules que ens donen directament el volum, però en general haurem de recórrer a integració.

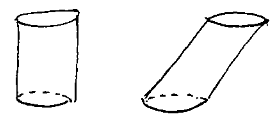
- El principi de Cavalieri ens diu que podem calcular el volum del cos V integrant les àrees de les seccions obtingudes en fer "llesques" de V per plans paral·lels.



Tallant per cada pla $x = \text{const.}$, denotem $A(x)$ l'àrea de la secció, i suposem que aquesta secció només és $\neq \emptyset$ si $a \le x \le b$.

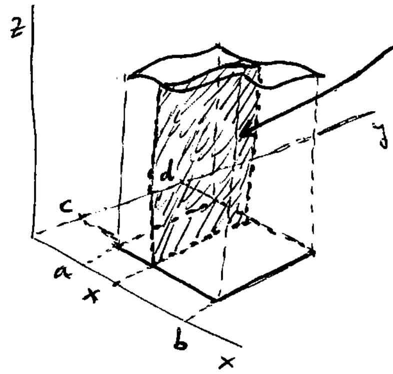
Llavors, $\text{vol}(V) = \int_a^b A(x)\,dx$.

Obs.
- * En general, per a calcular les àrees $A(x)$ també haurem d'integrar.
- * Com a conseqüència d'aquest principi, dos cossos tals que les seves seccions tenen la mateixa àrea, tindran el mateix volum. P.ex.,



- Donada $f: R \to \mathbb{R}$ sobre $R = [a,b] \times [c,d]$, i suposant $f(x,y) \ge 0 \quad \forall (x,y) \in R$, la integral $\int_R f$ ens dóna el volum comprès entre la gràfica de f i el pla xy, sobre el rectangle R. Vegem com es pot calcular aquest volum d'acord amb el principi de Cavalieri.

Tallem per plans $x = \text{const.}$:



$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$

(considerant x prefixada)

Llavors, tenim integrals iterades:

$$\boxed{\int_R f = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy}$$

[notació habitual]

Però també podem tallar per plans $y = \text{const.}$, i per tant també és vàlid considerar les integrals iterades en l'ordre invers:

$$\boxed{\int_R f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx}$$

Així doncs, podem reduir el càlcul d'una integral doble a 2 integrals simples.

Teorema de Fubini.

$f: R \longrightarrow \mathbb{R}$ fitada, essent $R=[a,b]\times[c,d]$.

a) Si f contínua, $\exists \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_R f$.

b) Suposant que les discontinuïtats de f formen un conjunt d'àrea zero,

si $\exists \int_c^d f(x,y)\,dy \ \forall x\in[a,b]$, llavors $\exists \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_R f$;

i si $\exists \int_a^b f(x,y)\,dx \ \forall y\in[c,d]$, llavors $\exists \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_R f$.

[També podem escriure: $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$, $\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$

Notes.

1. Cas particular. Si $f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$, obtenim: $\int_R f = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy$.

2. El cas amb f no contínua ens serà útil per a integrar sobre dominis no rectangulars

3. Si $\nexists \int_c^d f(x,y)\,dy$ per a un nº finit de valors de x, l'enunciat també és vàlid.

4. Si f no contínua, pot passar que $\exists \int_R f$ i $\nexists$ les integrals iterades, o bé que $\exists$ les integrals iterades i $\nexists \int_R f$ (de fet, si $\exists$ les int. iterades però no coincideixen, llavors $\nexists \int_R f$).
Si f és contínua, $\exists$ totes les integrals i són iguals.

- Exemples.

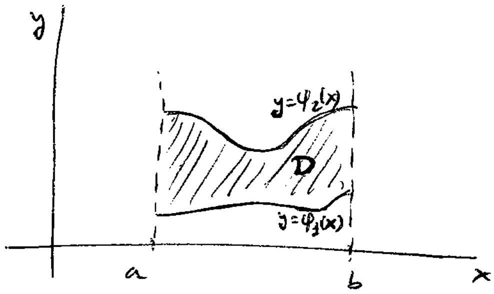
1) $$\int_{[1,2]\times[1,3]} xy^2\,dx\,dy = \int_1^2 x\,dx \cdot \int_1^3 y^2\,dy = \frac{3}{2}\cdot\frac{26}{3} = 13.$$

2) $$\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1]} x\cos xy\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^1 x\cos xy\,dy = \int_0^{\pi/2} dx\cdot \Big[\sin xy\Big]_{y=0}^{y=1} =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = -\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

(també es pot fer en l'altre ordre, però cal integrar per parts)

Integrals iterades en dominis no rectangulars

(A)



$D=\{(x,y) : a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$,

φ_1,φ_2 contínues i C^1 a trossos

(llavors D és domini elemental).

Sigui $f: D\to\mathbb{R}$ fitada, i contínua excepte en un conjunt d'àrea zero.

Considerant $c=\min\limits_{[a,b]}\varphi_1$, $d=\max\limits_{[a,b]}\varphi_2$, tenim $D\subset R=[a,b]\times[c,d]$.

Definint $\tilde f$ com l'extensió de f al rectangle R (definint-la com 0 fora de D),

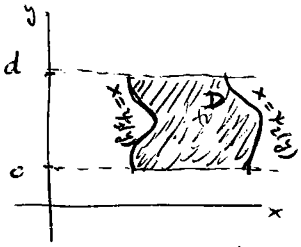
tenim: $\boxed{\int_D f} = \int_R \tilde f = \int_a^b dx\int_c^d \tilde f(x,y)\,dy = \int_a^b dx\left(\int_c^{\varphi_1(x)} \underbrace{\tilde f(x,y)}_{=0}dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \underbrace{\tilde f(x,y)}_{=f(x,y)}dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d}\underbrace{\tilde f(x,y)}_{=0}dy\right) =$

$$= \boxed{\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy}, \quad \text{si } \exists \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \quad \forall x\in[a,b].$$

Exemple: probl. 6a, 3c.

[També podem escriure: $\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$]

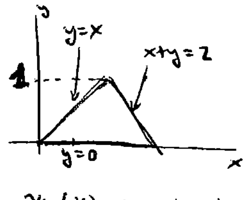
(B)



$D=\{(x,y): c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\}$.

Amb hipòtesis anàlogues a les del cas (A), tindrem: $\boxed{\int_D f = \int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx}$

Exemple:



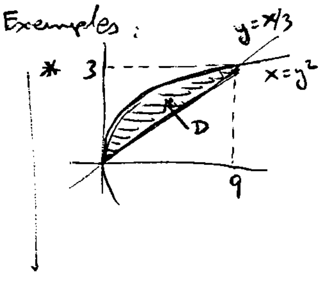
$\psi_1(y)=y,\ \psi_2(y)=2-y$

$$\int_D (1+xy)\,dx\,dy = \int_0^1 dy\int_y^{2-y}(1+xy)\,dx =$$

$$= \int_0^1 dy\,.\left[x+\frac{x^2y}{2}\right]_{x=y}^{x=2-y} = 2\int_0^1(1-y^2)\,dy = \frac{4}{3}$$

(C) Si el domini D es pot expressar de les dues maneres (A) i (B), podrem aplicar qualsevol dels 2 ordres d'integració (tindrem en compte el domini i/o la funció a integrar).

Exemples:

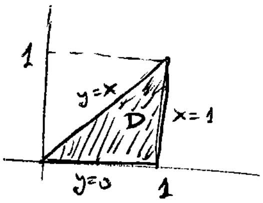


$$\int_D x^2y\,dx\,dy = \int_0^9 dx\int_{x/3}^{\sqrt{x}} x^2y\,dy = \int_0^9 x^2dx\,.\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x/3}^{y=\sqrt{x}} = \int_0^9 x^2\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{18}\right)dx = \frac{3^8}{40}$$

$$\int_D x^2y\,dx\,dy = \int_0^3 dy\int_{y^2}^{3y} x^2y\,dx = \int_0^3 y\,dy\,.\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=y^2}^{x=3y} = \int_0^3 y\,.\left(9y^3-\frac{y^6}{3}\right) = \frac{3^8}{40}$$

* probl. 6c

*



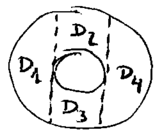
$$\int_D e^{y/x}dx\,dy = \int_0^1 dx\int_0^x e^{y/x}dy = \int_0^1 dx\left[x e^{y/x}\right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1 (e-1)\,x\,dx = \frac{e-1}{2}.$$

$$\int_D e^{y/x}dx\,dy = \int_0^1 dy\int_y^1 e^{y/x}dx = \ ? \quad \text{(no es pot fer)}$$

Nota: no és impròpia ja que $0 \le y/x \le 1 \quad \forall (x,y) \in D - \{(0,0)\}$.

(D) En casos més generals, haurem de descompondre el domini en diferents parts dels tipus (A) o (B) i integrar separadament a cada part (aplicant l'additivitat de la integral).

Exemple (corona circular):



$$D = \{(x,y):\ a^2 \le x^2+y^2 \le b^2\} = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4.$$

Integrals iterades en 3 (o més) variables

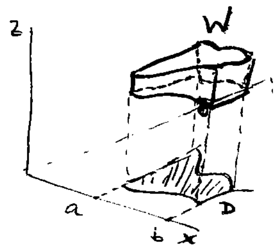
Les integrals iterades i el teorema de Fubini es formulen de manera anàloga per a integrals de 3 o més variables.

En 3 variables, el teorema de Fubini permet integrar sobre intervals 3-dim.: $R=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$, fent 3 integrals iterades. En total, hi ha $3! = 6$ permutacions possibles en l'ordre en què fem les integrals:

$$\int_R f = \int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^f f(x,y,z)\,dz = \int_a^b dx\int_e^f dz\int_c^d f(x,y,z)\,dy = \cdots\cdots \quad (zyx,\ yzx,\ zxy,\ xzy,\ yxz,\ xyz).$$

Quan el domini no és un interval 3-dim., el cas més simple ve donat per un domini del tipus:

$$W = \{(x,y,z):\ \underbrace{a \le x \le b,\ \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)}_{\substack{(x,y)\in D,\ \text{domini de } \mathbb{R}^2 \\ \text{limitat per 2 gràfiques} \\ \text{(correspon a la projecció de W} \\ \text{sobre el pla } xy)}},\ \ \underbrace{\gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y)}_{\substack{\text{W limitat per} \\ \text{2 superfícies sobre D} \\ \text{(que són gràfiques} \\ \text{de funcions)}}}\}$$



En aquest cas, tindrem:

$$\int_W f = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

També podem considerar dominis anàlegs, intercanviant els papers de les variables.

Per a dominis més generals, haurem de descompondre en diferents parts dels tipus esmentats i integrar separadament a cada part.

Canvis de variables per a integrals dobles.

Fins ara hem descrit els dominis de $\mathbb{R}^2$ utilitzant les coordenades cartesianes (x,y).
Però hi ha dominis (i funcions) que s'expressen més fàcilment en altres sistemes de coordenades.

· P. ex, una corona circular

$a^2 \le x^2+y^2 \le b^2$ $\longrightarrow$ [en coord. polars: $a \le r \le b$, θ qualsevol.]

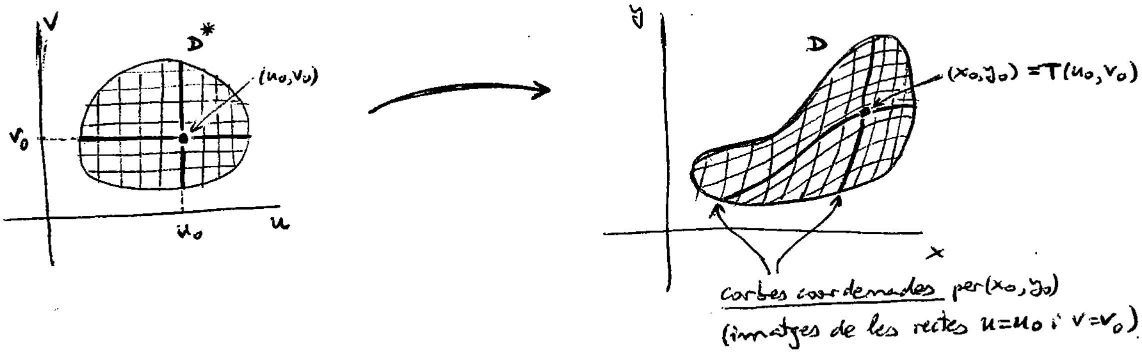
- **Def.** Un canvi de variables entre dos oberts $D, D^* \subset \mathbb{R}^2$ és una aplicació
$$T: D^* \longrightarrow D \qquad \text{bijectiva,}$$
$$(u,v) \longmapsto T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$
i tal que T i T^{-1} són de classe C^1.

Recordem:
- matriu jacobiana (o matriu de derivades): $DT(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$
- determinant jacobià: $JT(u,v) = \det DT(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$.

($\neq 0$ $\forall (u,v)$ si T és canvi de variables).

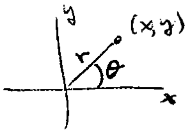
- Pel teorema de la funció inversa (versió global) tenim:
  Si $T: D^* \longrightarrow D$ és C^1, bijectiva, i $JT(u,v) \neq 0$ $\forall (u,v) \in D^*$, aleshores T és un canvi de variables.
  (ens permetrà comprovar que T és canvi de variables sense calcular T^{-1}).

- Un canvi de variables $T: D^* \longrightarrow D$ defineix unes coordenades curvilínies sobre el domini D: un punt $(x_0,y_0) \in D$ vindrà descrit per $(u_0,v_0) = T^{-1}(x_0,y_0) \in D^*$.



- <u>Coordenades polars</u> a $\mathbb{R}^2$ (l'exemple més important).

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



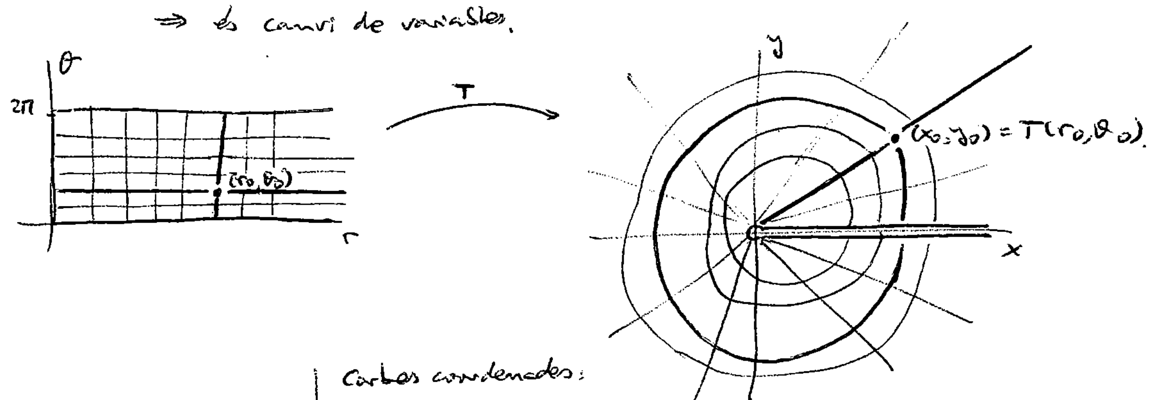
Per tenir un canvi de variables, considerem $T: D^* \longrightarrow D$
$(r,\theta) \longmapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

amb $D^* =]0,\infty[\times]0,2\pi[$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \geq 0\}$.

(o també : $D =]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \leq 0\}$)

L'aplicació T és C^1, bijectiva, $JT(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = \underline{r} \neq 0 \ \forall (r,\theta)$.

$\Rightarrow$ és canvi de variables.



Corbes coordenades:
$r = r_0 \longrightarrow$ circumferències (centrades a l'origen)
$\theta = \theta_0 \longrightarrow$ radis (semirectes amb l'origen com a extrem)

- <u>Teorema del canvi de variables.</u>

D, D^* oberts tals que $\bar{D}, \bar{D}^*$ són dominis elementals (és a dir, $\bar{D}$ compacte i ∂D té àrea zero)
$T: D^* \longrightarrow D$ canvi de variables.
$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable.
Aleshores,
$$\boxed{\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |JT(u,v)|\,du\,dv.}$$

és a dir, $\int_D f = \int_{D^*} (f \circ T) \cdot |JT|$.

<u>Nota</u>. En el cas d'1 variable, si $T:]c,d[\longrightarrow]a,b[$ canvi de variable,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(T(u)) \cdot |T'(u)|\,du \qquad (JT(u) = T'(u))$$

- si $T' > 0$, $a = T(c)$, $b = T(d)$, $|T'| = T'$.
- si $T' < 0$, $a = T(d)$, $b = T(c)$, $|T'| = -T \rightsquigarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_d^c f(T(u)) \cdot T'(u)\,du$.

(<u>Nota</u>. Caldria demanar $|JT(u,v)|$ fitat perquè la nova integral no sigui impròpia.

- Com a aplicació, l'àrea del domini D vindrà donada per:

$$A(D) = \int_D dx\,dy = \int_{D^*} \underbrace{|JT(u,v)|}\,du\,dv.$$

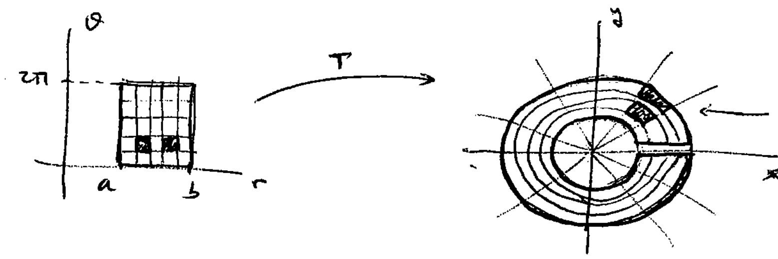
el jacobià mesura la distorsió produïda pel canvi de variables.

- Exemples.

1) Corona circular:
$D = \{a^2 \le x^2+y^2 \le b^2\}$, per calcular-ne l'àrea fem el canvi a polars.

$D_1 = \{a^2 < x^2+y^2 < b^2\} - \{(x,0) : x \ge 0\}$

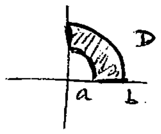
$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \longrightarrow \quad D_1^* = \,]a,b[\, \times \,]0, 2\pi[.$$



les imatges en (x,y) de 2 rectangles iguals en (r,θ) no tenen la mateixa àrea.

$$A(D) = \int_D 1 = \int_{D_1} 1 = \int_{D_1^*} |JT(r,\theta)|\,dr\,d\theta = \int_{D_1^*} \underset{\substack{\vee \\ 0}}{r}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r\,dr = \pi(b^2-a^2)$$

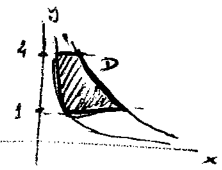
2) $\displaystyle\int_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, $\quad D = \{a^2 \le x^2+y^2 \le b^2,\ x,y \ge 0\}$.



Fent el canvi a polars, $D^* = [a,b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\Rightarrow I = \int_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{D^*} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_a^b e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_a^b = \frac{\pi}{4}\left(e^{-a^2} - e^{-b^2}\right).$$

3) $\displaystyle\int_D y\cos xy\,dx\,dy$, $\quad D = \{1 \le y \le 4,\ 1 \le xy \le 2\}$.



Canvi, $xy = u$, $y = v$.

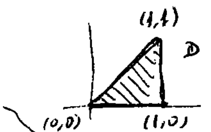
$\rightarrow (x,y) = T(u,v) = \left(\frac{u}{v}, v\right)$

$T : D^* \longrightarrow D$ canvi de variables, $D^* = \{1 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 4\} = [1,2] \times [1,4]$

$$JT(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v} \ne 0.$$

$$I = \int_{D^*} v\cos u \left|\frac{1}{v}\right| du\,dv = \int_1^2 \cos u\,du \cdot \int_1^4 dv = 3(\sin 2 - \sin 1)$$

4) [test oct/07]

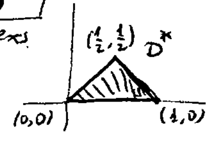


$I = \int_D f(x,y)\,dx\,dy$, essent D = triangle de vèrtexs $(0,0), (1,0), (1,1)$.

Fent el canvi $(x,y) = T(u,v) = (u+v, u-v)$, obtenim $I = \int_{D^*} f(u+v, u-v)\underbrace{|-2|}_{\text{(jacobià)}}du\,dv$

Nou domini: un canvi lineal transforma rectes en rectes $\Rightarrow$ només cal mirar els vèrtexs.

D^* = triangle de vèrtexs $(0,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1,0)$.

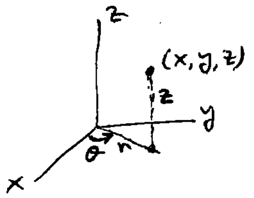


Canvis de variable per a integrals de 3 o més variables.

El teorema del canvi de variables també és vàlid per a integrals de n variables, considerant un canvi $T: W^* \longrightarrow W$ entre dos oberts $W, W^* \subset \mathbb{R}^n$. En aquest cas, el jacobià és un determinant $n \times n$.

- **Coordenades cilíndriques a $\mathbb{R}^3$.**

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$



Defineix un canvi de variables $T: W^* \longrightarrow W$, $(r,\theta,z) \longmapsto (x,y,z)$,

$$W^* =]0,\infty[\times]0,2\pi[\times \mathbb{R}, \quad W = \mathbb{R}^3 - \{(x,0,z) : x \geq 0\}$$

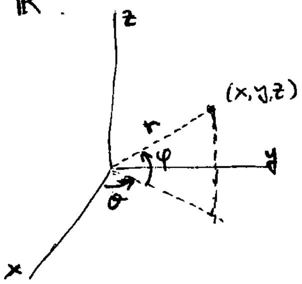
(tot $\mathbb{R}^3$ menys un semiplà).

$$JT(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{r} \quad (>0 \text{ a tot } W^*).$$

Superfícies coordenades:
$$\begin{cases} r = r_0 & \text{cilindres (el seu eix és l'eix } z) \\ \theta = \theta_0 & \text{semiplans (limitats per l'eix } z). \\ z = z_0 & \text{plans (horitzontals)} \end{cases}$$

- **Coordenades esfèriques a $\mathbb{R}^3$.**

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \cdot \cos\theta \\ y = r\cos\varphi \cdot \sin\theta \\ z = r\sin\varphi. \end{cases}$$



$T: W^* \longrightarrow W$, $(r,\theta,\varphi) \longmapsto (x,y,z)$,

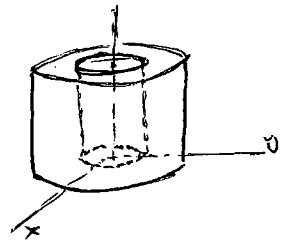
$$W^* =]0,\infty[\times]0,2\pi[\times]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[,$$
$$W = \mathbb{R}^3 - \{(x,0,z) : x \geq 0\} \text{ (tot } \mathbb{R}^3 \text{ menys un semiplà)}$$

$$JT(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi \cdot \cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi \cdot \cos\theta \\ \cos\varphi \cdot \sin\theta & r\cos\varphi \cdot \cos\theta & -r\sin\varphi \cdot \sin\theta \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} = \underline{r^2\cos\varphi} \quad (>0 \text{ a tot } W^*)$$

Superfícies coordenades:
$$\begin{cases} r = r_0 & \text{esferes (centrades a l'origen, } \theta = \text{longitud, } \varphi = \text{latitud}) \\ \theta = \theta_0 & \text{semiplans (limitats per l'eix } z). \\ \varphi = \varphi_0 & \text{cons (el seu eix és l'eix } z\text{; part superior o inferior)} \end{cases}$$

• Exemples.

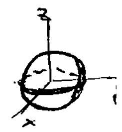
1) $\int_W (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$, $\quad W = \{ 1 \le x^2+y^2 \le 4, \quad 0 \le z \le 2 \}$.
(entre dos cilindres).



Fent el canvi a cilíndriques, $W^* = [1,2] \times [0, 2\pi] \times [0,2]$.

$$I = \int_{W^*} r^2 \cdot r \, dr\, d\theta\, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dz \int_1^2 r^3 dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{15}{4} = \underline{\underline{15\pi}}$$

2) Volum d'una esfera de radi R:



$W = \{ x^2+y^2+z^2 \le R^2 \}$, fent el canvi a esfèriques: $W^* = \{ (r,\theta,\varphi) : 0 < r \le R,$
$0 \le \theta \le 2\pi, \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \}$.

$$\text{vol}\,(W) = \int_W dx\, dy\, dz = \int_{W^*} r^2 \cos\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^R r^2 dr =$$

$$= 2\pi \cdot \left[\sin\varphi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \underline{\underline{\frac{4\pi R^3}{3}}}$$

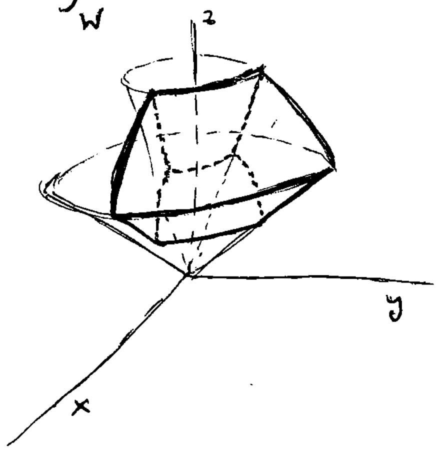
(també es pot usar el canvi a cilíndriques)

$$W^{**} = \{ (r,\theta,z) : 0 < r \le R, \ 0 \le \theta \le 2\pi, \ r^2+z^2 \le R^2 \}$$

$$\text{vol}\,(W) = \int_{W^*} r\, dr\, d\theta\, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R r\, dr \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} dz = 2\pi \int_0^R 2r\sqrt{R^2-r^2}\, dr =$$

$$= -\frac{4\pi}{3} \left[(R^2-r^2)^{3/2} \right]_0^R = \underline{\frac{4\pi R^3}{3}}$$

3) $\int_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$, $\quad W = \{ \underbrace{z^2 \le x^2+y^2 \le 3z^2}_{\text{entre 2 cons}}, \ \underbrace{1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4}_{\text{entre 2 esferes}}, \ \underbrace{x,y,z \ge 0}_{1^{\text{er}}\text{ octant}} \}$



Canvi a esfèriques:

$$z^2 \le x^2+y^2 \le 3z^2 \iff \sin^2\varphi \le \cos^2\varphi \le 3\sin^2\varphi \iff$$

$z \ge 0 \Rightarrow 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
$\Rightarrow \sin\varphi, \cos\varphi \ge 0$

$$\iff \sin\varphi \le \cos\varphi \le \sqrt{3}\sin\varphi \iff$$

$$\iff \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}.$$

$$W^* = \{ 1 \le r \le 2, \ \underbrace{0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}}_{(x,y \ge 0)}, \ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \} \text{ (interval 3-dim.)}$$

$$I = \int_{W^*} r \cdot r^2 \cos\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos\varphi\, d\varphi \int_1^2 r^3 dr = \frac{\pi}{2} \left[\sin\varphi \right]_{\pi/6}^{\pi/4} \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{16-1}{4} = \underline{\underline{\frac{15(\sqrt{2}-1)\pi}{16}}}.$$

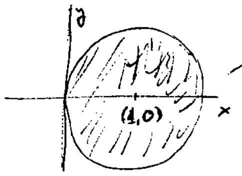
(0) Regions del pla i de l'espai.

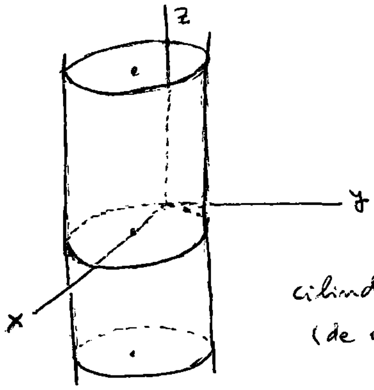
Identifiquem les següents regions de $\mathbb{R}^3$.

① $x^2+y^2-2x \leq 0$

↳ equival a $(x-1)^2+y^2 \leq 1^2$

$(x,y) \in \overline{B}_1(1,0)$, z qualsevol





cilindre sòlid o "ple".
(de revolució)

② $-\sqrt{2x-x^2} \leq y \leq 0$

Corba del pla $y=-\sqrt{2x-x^2}$?

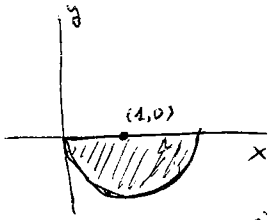
↳ $y^2 = 2x-x^2$, $y \leq 0$

$x^2-2x+y^2=0$, $y \leq 0$,

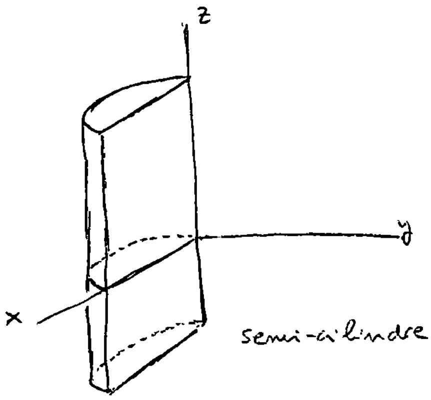
semicircumferència

(probl. 1)

Per a (x,y),



i z qualsevol



semi-cilindre sòlid.

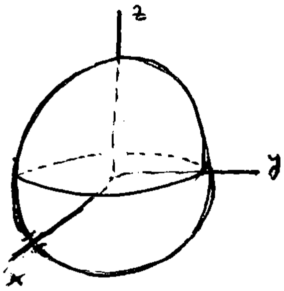
③ a) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

esfera de centre (x_0,y_0,z_0) i radi R → $\partial B_R(x_0,y_0,z_0)$

b) $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$

esfera "plena" o bola tancada : $\overline{B}_R(0,0,0)$

(centrada al $(0,0,0)$)



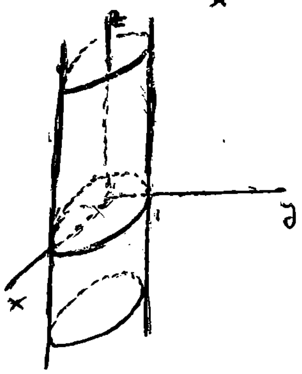
④ a) $x^2+y^2 \leq 4 = 2^2$

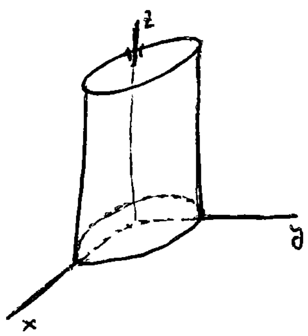
$(x,y) \in \overline{B}_2(0,0)$, z qualsevol.

⇝ cilindre infinit "ple".

b) $x^2+y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 5$.

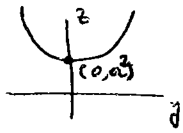
⇝ cilindre finit "ple".



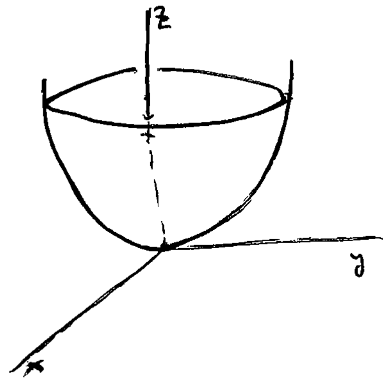


(5) $x^2+y^2=z$.

- tall amb $x=a$: $z=y^2+a^2$, paràbola.

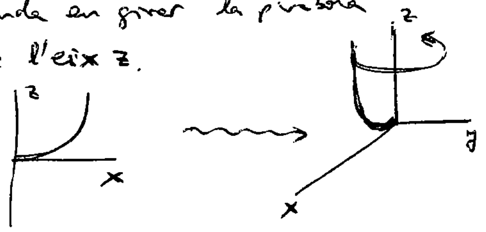


- tall amb $y=b$: semblant.
- tall amb $z=c$: $x^2+y^2=c$ $\begin{cases} \phi & \text{si } c<0 \\ \{(0,0)\} & \text{si } c=0 \\ \text{circumferència de radi } \sqrt{c} & \text{si } c>0. \end{cases}$



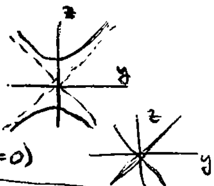
paraboloide el·líptic (de revolució)

També podem dir que és la superfície de revolució obtinguda en girar la paràbola $z=x^2$ entorn de l'eix z.

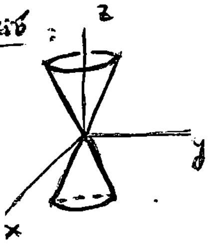


(6) (a) $x^2+y^2=z^2$.

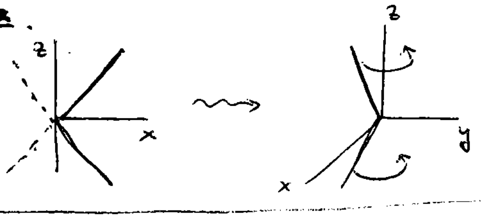
- tall amb $x=a$: $z^2-y^2=a^2$, hipèrbola (si $a\neq 0$) / 2 rectes (si $a=0$)
- tall amb $y=b$: semblant.
- tall amb $z=c$: $x^2+y^2=c^2$ $\begin{cases} \{(0,0)\} & \text{si } c=0 \\ \text{circumf. de radi } |c| & \text{si } c\neq 0 \end{cases}$



→ con de revolució :



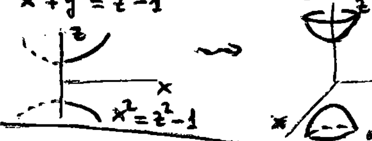
També podem dir que és la superfície de revolució obtinguda en girar $x^2=z^2$ (2 rectes) entorn de l'eix z.



(b) $x^2+y^2-z^2=1$

hiperboloide d'una fulla

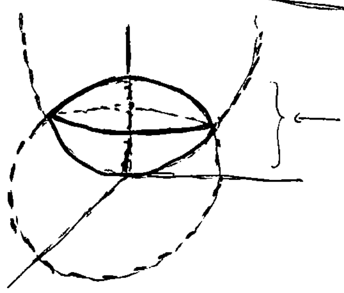
(c) $x^2+y^2=z^2-1$



hiperboloide de dues fulles

(7) $x^2+y^2\leq z$, $x^2+y^2+z^2\leq 2$

Intersecció de: paraboloide "ple" $z\geq x^2+y^2$; esfera "plena" de centre $(0,0,0)$ i radi $\sqrt{2}$.



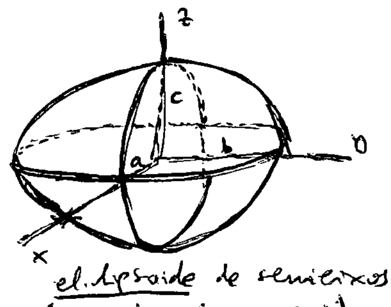
Tenint en compte que $z\geq 0$, la regió ve donada per:

$$x^2+y^2\leq z\leq\sqrt{2-x^2-y^2}$$

(12) (a) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}+\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$

(suposem $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$)

- tall amb $x=0$: $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, el·lipse de semieixos b i c.
- " " $y=0$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, " " a i c,
- " " $z=0$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, " " a i b.



el·lipsoide de semieixos a, b, c. (centrat a (x_0,y_0,z_0))

(b) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1$ → el·lipsoide "ple".

(1.2) Integració reiterada.

3 Troben les següents integrals reiterades.

a) $$\int_0^1 dx \int_0^2 (x^2+y)\,dy = \int_0^1 dx \cdot \left[x^2y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2} = \int_0^1 (2x^2+2)\,dx = \frac{2x^3}{3}+2x\Big]_0^1 = \frac{8}{3}$$

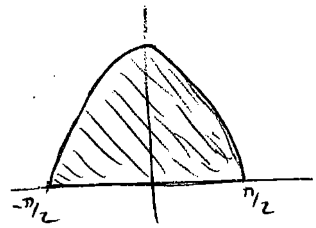
b) $$\int_1^3 dy \int_2^5 \frac{dx}{(x+2y)^2} = \int_1^3 dy \cdot \left[-\frac{1}{x+2y}\right]_{x=2}^{x=5} = \int_1^3 \left(\frac{1}{2+2y} - \frac{1}{5+2y}\right) dy = \frac{1}{2}\ln\frac{2+2y}{5+2y}\Big]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{8}{11} - \ln\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{14}{11}$$

c) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} dx \int_0^{2\cos x} y^3\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \cdot \left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{y=2\cos x} = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 x\,dx \underset{\text{parella}}{=} 8\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx =$$

$$= 4\,B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right) = 4 \cdot \frac{\Gamma(1/2)\cdot\Gamma(5/2)}{\Gamma(3)} = 4 \cdot \frac{\sqrt{\pi}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{2!} = \frac{3\pi}{2}$$

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta \cdot \cos^{2y-1}\theta\,d\theta,\quad x,y>0$$



d) $$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \cdot \frac{z^2}{2}\Big]_{z=0}^{z=\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{x^2+y^2}{2}\,dy = \int_0^1 dx \left[\frac{x^2y}{2} + \frac{y^3}{6}\right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1 \frac{2x^3}{3}\,dx = \frac{x^4}{6}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

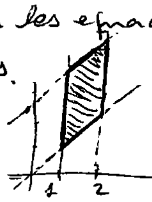
e) $$\int_0^3 dx \int_0^{2x} dy \int_0^{\sqrt{xy}} z\,dz = \int_0^3 dx \int_0^{2x} dy \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=\sqrt{xy}} = \int_0^3 dx \int_0^{2x} \frac{xy}{2}\,dy = \int_0^3 dx \cdot \left[\frac{xy^2}{4}\right]_{y=0}^{y=2x} =$$

(obs. $xy \geq 0$).

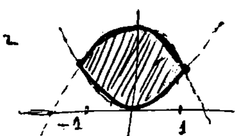
$$= \int_0^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_0^3 = \frac{81}{4}$$

4 Per a les integrals reiterades següents escriviu les equacions de les corbes que limiten les regions d'integració i dibuixeu aquestes regions.

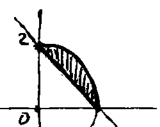
a) $\int_1^2 dx \int_x^{x+3} dy \;\rightsquigarrow\; x=1,\ x=2,\ y=x,\ y=x+3$



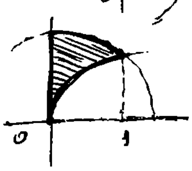
b) $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} dy \;\rightsquigarrow\; y=x^2,\ y=2-x^2$



c) $\int_0^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} dx \longrightarrow x=2-y,\ x=\sqrt{4-y^2}$

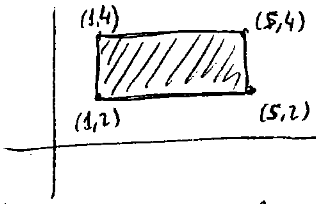


d) $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} dy \;\rightsquigarrow\; x=0,\ y=\sqrt{x},\ y=\sqrt{2-x^2}$



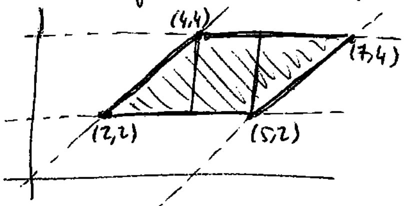
(5) Per a les regions indicades descriviu la forma de les integrals iterades preses en diferents ordres.

a) Rectangle de vèrtexs $(1,2), (5,2), (5,4), (1,4)$.



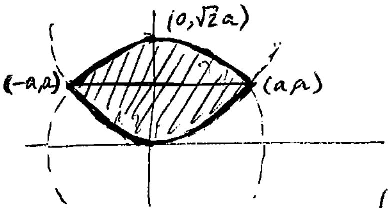
$$\int_1^5 dx \int_2^4 f(x,y)\,dy = \int_2^4 dy \int_1^5 f(x,y)\,dx$$

b) Paral·lelogram limitat per les rectes $y=x$, $y=x-3$, $y=2$, $y=4$.



$$\int_2^4 dy \int_y^{y+3} f(x,y)\,dx = \int_2^4 dx \int_2^x f(x,y)\,dy + \int_4^5 dx \int_2^4 f(x,y)\,dy + \int_5^7 dx \int_{x-3}^4 f(x,y)\,dy.$$

c) Regió limitada per les corbes $x^2+y^2=2a^2$, $x^2=ay$ $(y>0,\ a>0)$

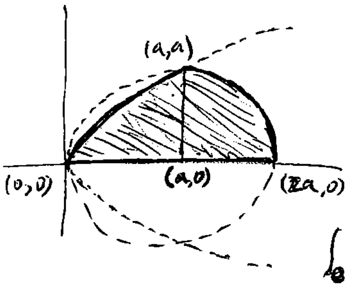


Circumferència: $x^2+y^2=2a^2$, $y=\sqrt{2a^2-x^2}$, $x=\pm\sqrt{2a^2-y^2}$

Paràbola: $x^2=ay$, $y=x^2/a$, $x=\pm\sqrt{ay}$.

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{x^2/a}^{\sqrt{2a-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^a dy \int_{-\sqrt{ay}}^{\sqrt{ay}} f(x,y)\,dx + \int_a^{\sqrt{2}a} dy \int_{-\sqrt{2a^2-y^2}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} f(x,y)\,dx$$

d) Regió limitada per les corbes $y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax$, $y=0$ $(a>0,\ y>0)$



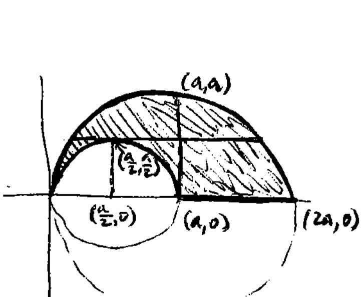
Paràbola: $y^2=ax$, $y=\sqrt{ax}$, $x=y^2/a$.

Circumferència: $x^2+y^2=2ax$, $y=\sqrt{2ax-x^2}$, $x=a+\sqrt{a^2-y^2}$

(obs. $y^2/a > \underbrace{a-\sqrt{a^2-y^2}}_{=\frac{y^2}{a+\sqrt{a^2-y^2}}}$)

$$\int_0^a dy \int_{y^2/a}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{ax}} f(x,y)\,dy + \int_a^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy$$

e) Regió limitada per les corbes $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax$, $y=0$ $(a>0, y>0)$



circumferència: $x^2+y^2=ax$, $y=\sqrt{ax-x^2}$, $x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4y^2}}{2}$

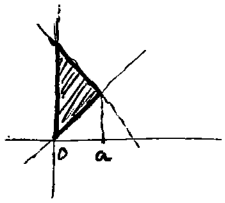
circumferència: $x^2+y^2=2ax$, $y=\sqrt{2ax-x^2}$, $x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$

$$\int_0^a dx \int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_a^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_0^{a/2} dy \left[\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{a-\sqrt{a^2-4y^2}}{2}} f(x,y)\,dx + \int_{\frac{a+\sqrt{a^2-4y^2}}{2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx \right] + \int_{a/2}^{a} dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

6 Trobeu ~~les~~ següents integrals dobles.

a) $\int_A (x^2+y^2)\,dx\,dy$, A limitat per les rectes $y=x$, $x+y=2a$, $x=0$.

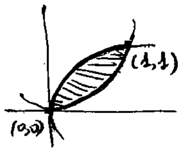


$$I=\int_0^a dx\int_x^{2a-x}(x^2+y^2)\,dy=\int_0^a dx\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y=x}^{y=2a-x}=$$

$$=\int_0^a\left(x^2(2a-x)+\frac{(2a-x)^3}{3}-x^3-\frac{x^3}{3}\right)dx=\int_0^a\left(-\frac{8}{3}x^3+4ax^2-4a^2x+\frac{8a^3}{3}\right)dx=$$

$$=-\frac{2}{3}x^4+\frac{4a}{3}x^3-2a^2x^2+\frac{8a^3}{3}x\Big]_0^a=\frac{4a^4}{3}$$

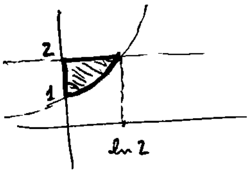
b) $\int_A (x+2y)\,dx\,dy$, A limitat per les corbes $y=x^2$, $y^2=x$.



$$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x+2y)\,dy=\int_0^1 dx\left[xy+y^2\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}=\int_0^1(x^{3/2}+x-x^3-x^4)\,dx=$$

$$=\frac{x^{5/2}}{5/2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\Big]_0^1=\frac{9}{20}$$

c) $\int_A e^{x+y}\,dx\,dy$, A limitat per les corbes $y=e^x$, $x=0$, $y=2$.



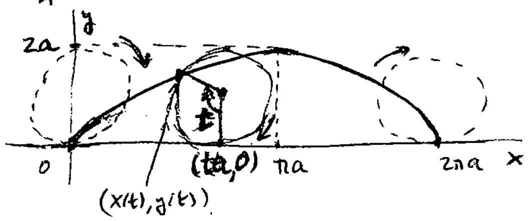
$$I=\int_0^{\ln 2}dx\int_{e^x}^{2}e^{x+y}\,dy=\int_0^{\ln 2}dx\left[e^{x+y}\right]_{y=e^x}^{y=2}=\int_0^{\ln 2}\left(e^{x+2}-e^x\cdot e^{e^x}\right)dx=$$

$$=\left[e^{x+2}-e^{e^x}\right]_0^{\ln 2}=(2e^2-e^2)-(e^2-e)=e$$

~~També~~ al revés:

$$I=\int_1^2 dy\int_0^{\ln y}e^{x+y}\,dx=\int_1^2 dy\left[e^{x+y}\right]_{x=0}^{x=\ln y}=\int_1^2(ye^y-e^y)\,dy=(y-2)e^y\Big]_1^2=e$$

d) $\int_A x\,dx\,dy$, A limitat per l'eix Ox i l'ona de cicloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.



Notem: $(a>0)$

$x(t)$ creix, ja que $x'(t)=y(t)>0$, $0<t<2\pi$.

$y(t)$ creix si $0<t<\pi$, decreix si $\pi<t<2\pi$.

$\Downarrow$

Es pot aïllar $y=y(x)$, ja que $x'(t)\neq 0\ \forall t$.

$$\int_A x\,dx\,dy=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}x\,dy=$$

$$=\int_0^{2\pi a}x\,y(x)\,dx=\int_0^{2\pi}x(t)\,y(t)\,x'(t)\,dt=a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\cdot(1-\cos t)^2\,dt=\boxed{3\pi^2a^3}$$

canvi $x=x(t)$
$dx=x'(t)\,dt$
$x=0\to t=0$
$x=2\pi a\to t=2\pi$.

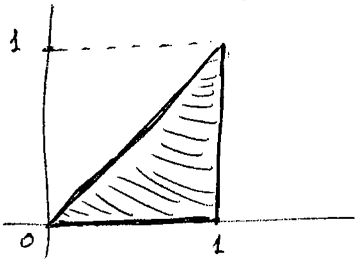
usant:

$\int_0^{2\pi}\sin t\cdot(1-\cos t)^2\,dt=\frac{(1-\cos t)^3}{3}\Big]_0^{2\pi}=0$.

$\int_0^{2\pi}t(1-\cos t)^2\,dt=\cdots=3\pi^2$.

parts: $f=t\longrightarrow f'=1$
$g'=(1-\cos t)^2\longrightarrow g=\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t$

(7) Troben $\int_0^1 dy \int_y^1 x^2 \sin xy \, dx$



$D = \{(x,y) : 0 \le y \le x \le 1\}$.

Integrem en ordre invers per tenir càlculs més senzills (no integrar per parts):

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 \sin xy \, dy = \int_0^1 dx \left[-x \cos xy\right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1 (-x\cos x^2 + x)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\sin x^2 + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{2}(1-\sin 1)}$$

(10) Calculen $\iint_R x^y \, dx dy$, essent $R = [0,1] \times [a,b]$, $0<a<b$. Deduïu el valor de la integral $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx$.

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b dy \cdot \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln(y+1)\Big]_a^b = \underline{\underline{\ln\frac{b+1}{a+1}}}$$

obs. $y \neq -1$ en l'interval $[a,b]$

$y+1>0$. $\Rightarrow 0^{y+1} = 0$.

$y+1>0$.

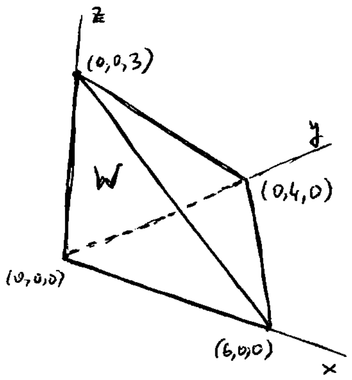
D'altra banda,

$$I = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_0^1 dx \underbrace{\left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_{y=a}^{y=b}}_{[\text{en } x=0, \text{ seria } 0)} = \boxed{\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx} =$$

[No és impròpia en $x=0$ ja que $\lim_{x\to 0^+} = 0$]

(14) Per a les regions indicades descriviu la forma de les integrals reiterades preses en diferents ordres:

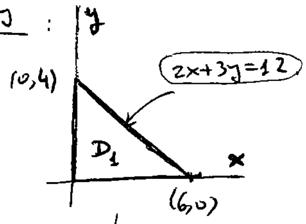
a) Tetràedre limitat pels plans $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+3y+4z=12$.



Vèrtexs del tetràedre (interseccions entre 3 dels plans):

$(0,0,0)$, $(0,0,3)$, $(0,4,0)$, $(6,0,0)$.

* Projecció sobre el pla xy:



→ llavors,

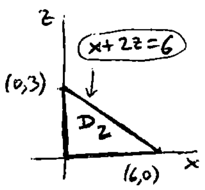
$W = \left\{(x,y,z):\ (x,y)\in D_1,\ 0\le z\le \frac{12-2x-3y}{4}\right\}$

(regió compresa entre dues gràfiques)

[sobre D_1, podem integrar en els 2 ordres (yx, xy)]

$$\longrightarrow \int_W f = \int_0^6 dx \int_0^{\frac{12-2x}{3}} dy \int_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} f(x,y,z)\,dz = \int_0^4 dy \int_0^{\frac{12-3y}{2}} dx \int_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} f(x,y,z)\,dz.$$

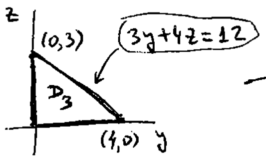
* Projecció sobre el pla xz:



$\longrightarrow W = \left\{(x,y,z):\ (x,z)\in D_2,\ 0\le y\le \frac{12-2x-4z}{3}\right\}$

$$\int_W f = \int_0^6 dx \int_0^{\frac{6-x}{2}} dz \int_0^{\frac{12-2x-4z}{3}} f(x,y,z)\,dy = \int_0^3 dz \int_0^{6-2z} dx \int_0^{\frac{12-2x-4z}{3}} f(x,y,z)\,dy.$$

* Projecció sobre el pla yz:



$\longrightarrow W = \left\{(x,y,z):\ (y,z)\in D_3,\ 0\le x\le \frac{12-3y-4z}{2}\right\}$

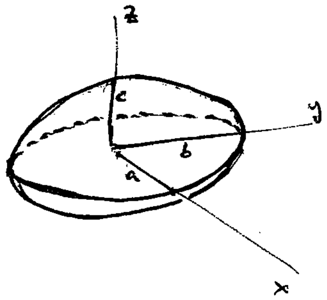
$$\int_W f = \int_0^4 dy \int_0^{\frac{12-3y}{4}} dz \int_0^{\frac{12-3y-4z}{2}} f(x,y,z)\,dx = \int_0^3 dz \int_0^{\frac{12-4z}{3}} dy \int_0^{\frac{12-3y-4z}{2}} f(x,y,z)\,dx.$$

En total, tenim $3! = 6$ possibilitats.

b) Interior de l'el·lipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

(semieixos a, b, c)

$$W = \left\{ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1 \right\}$$

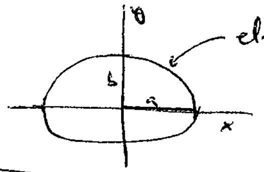


El·lipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

$$\rightarrow \left[\begin{aligned} z &= \pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, \\ y &= \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}, \\ x &= \pm a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}. \end{aligned}\right\}$$

(gràfiques que el limiten, en les direccions z, y, x).

• Projecció sobre el pla xy: $D=\left\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$



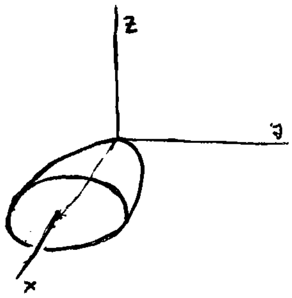
el·lipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$$\rightarrow \left[\begin{aligned} y &= \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \\ x &= \pm a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \end{aligned}\right.$$

$$\rightarrow \int_W f = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{\cdots}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_{-c\sqrt{\cdots}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} f(x,y,z)\,dz = \int_{-b}^{b} dy \int_{-a\sqrt{\cdots}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dx \int_{-c\sqrt{\cdots}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} f(x,y,z)\,dz.$$

• Anàlogament amb les projeccions sobre els plans xz i yz.

c) Cos limitat per les superfícies $y^2+2z^2=4x$, $x=2$.

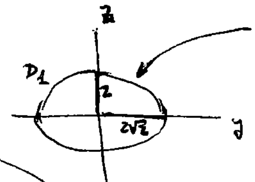


Superfície $y^2+2z^2=4x$.

$$\rightarrow \left[\begin{aligned} x &= \frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{(\sqrt{2})^2}, \\ z &= \pm\sqrt{2x-\frac{y^2}{2}}, \\ y &= \pm\sqrt{4x-2z^2} \end{aligned}\right.$$

paraboloide el·líptic. (comparar amb probl. 0.5)

• Projecció sobre el pla yz: $D_1=\left\{ y^2+2z^2\le 8 \right\}$ (prenent $x\le 2$)

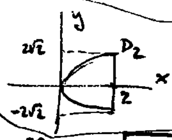


el·lipse $\dfrac{y^2}{(2\sqrt{2})^2}+\dfrac{z^2}{2^2}=1.$

$$\rightarrow \left[\begin{aligned} z &= \pm\sqrt{4-\frac{y^2}{2}}, \\ y &= \pm\sqrt{8-2z^2} \end{aligned}\right.$$

$$\rightarrow \int_W f = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{\cdots}}^{\sqrt{4-\frac{y^2}{2}}} dz \int_{\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}}^{2} f(x,y,z)\,dx = \int_{-2}^{2} dz \int_{-\sqrt{\cdots}}^{\sqrt{8-2z^2}} dy \int_{\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}}^{2} f(x,y,z)\,dx.$$

• Projecció sobre el pla xy: $D_2=\left\{ y^2\le 4x,\ x\le 2\right\}$



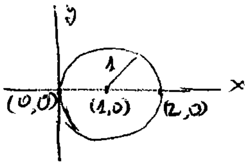
$$\rightarrow \int_W f = \int_0^2 dx \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int_{-\sqrt{\cdots}}^{\sqrt{2x-\frac{y^2}{2}}} f(x,y,z)\,dz = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} dy \int_{y^2/4}^{2} dx \int_{-\sqrt{\cdots}}^{\sqrt{2x-\frac{y^2}{2}}} f(x,y,z)\,dz.$$

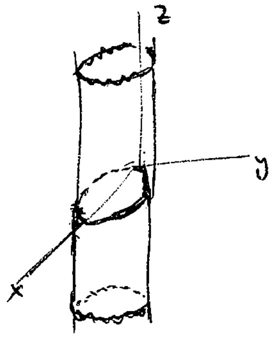
• Projecció sobre el pla xz: semblant.

15 Calculeu les integrals triples següents:

a) $\displaystyle\int_A xz\,dx\,dy\,dz$, on A és el recinte limitat per $x^2+y^2-2x=0$, $z^2=2y$, $z\geq 0$.

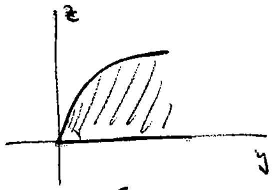
• Regió limitada per $x^2+y^2-2x=0$



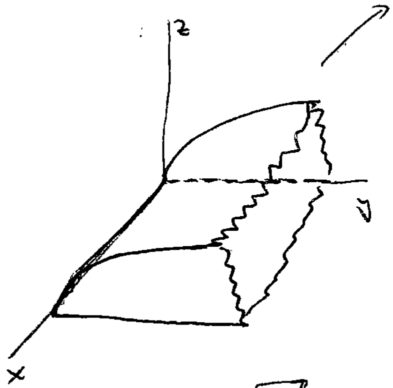


intersecció

• Regió limitada per $z^2=2y$, $z\geq 0$



$[0\leq z\leq \sqrt{2y}]$



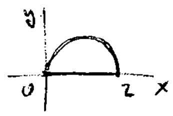
Projecció de A sobre el pla xy: $D=\{(x,y): x^2+y^2-2x\leq 0,\ y\geq 0\}$

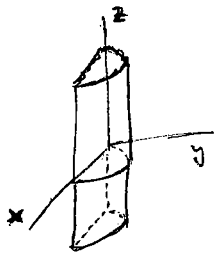
$$I=\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy\int_0^{\sqrt{2y}} xz\,dz=\int_0^2 x\,dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=\sqrt{2y}}=\int_0^2 x\,dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y\,dy=$$

$$=\int_0^2 x\,dx\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1}{2}\int_0^2(2x^2-x^3)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\frac{2}{3}$$

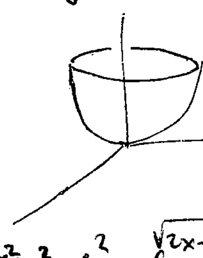
b) $\displaystyle\int_A zy\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, on $A=\{0\leq z\leq x^2+y^2,\ 0\leq y\leq\sqrt{2x-x^2}\}$

• $0\leq y\leq \sqrt{2x-x^2}$:





• $0\leq z\leq x^2+y^2$.



regió entre el paraboloide i el pla xy.

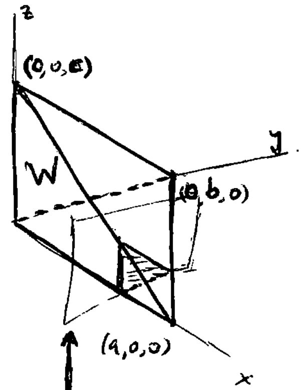
$$I=\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy\int_0^{x^2+y^2} zy\sqrt{x^2+y^2}\,dz=\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\,dy\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=x^2+y^2}=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y(x^2+y^2)^{5/2}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+y^2)^{7/2}}{7/2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1}{14}\int_0^2\left((2x)^{7/2}-(x^2)^{7/2}\right)dx=\frac{1}{14}\left[\frac{1}{2}\frac{(2x)^{9/2}}{9/2}-\frac{x^8}{8}\right]_0^2=\frac{1}{14}\left(\frac{2^9}{9}-\frac{2^8}{8}\right)=\frac{16}{9}$$

c) $\int_A dx\,dy\,dz$, on $A = \{1 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 3,\ 0 \le z \le xy\}$.

$$I = \text{vol}(A) = \int_1^3 dx \int_1^3 dy \int_0^{xy} dz = \int_1^3 dx \int_1^3 xy\,dy = \int_1^3 x\,dx \cdot \int_1^3 y\,dy = 4^2 = \underline{\underline{16}}.$$

(17) Calculeu el volum del tetràedre format pels quatre plans $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.



Vèrtexs del tetràedre:

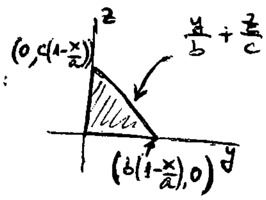
$y=z=0 \longrightarrow x=a$, $(a,0,0)$

$x=z=0 \longrightarrow y=b$, $(0,b,0)$

$x=y=0 \longrightarrow z=c$, $(0,0,c)$

i el $(0,0,0)$.

Tallant per $\underline{x = \text{const}}$, tenim el $\underline{\text{triangle}}$:
$(0 \le x \le a)$



La seva àrea és $A(x) = \frac{bc}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2$

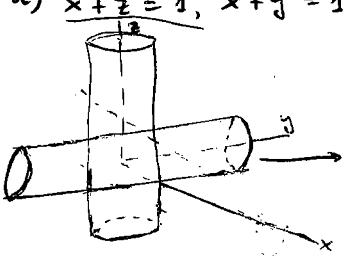
Podem aplicar el principi de Cavalieri:

$$\text{vol}(W) = \int_0^a A(x)\,dx = \frac{bc}{2}\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{bc}{2}(-a)\cdot\frac{\left(1-\frac{x}{a}\right)^3}{3}\Bigg]_0^a = \underline{\underline{\frac{abc}{6}}}.$$

(També podem calcular $\text{vol}(W) = \int_W dx\,dy\,dz$ com en el $\underline{\text{probl. 14a}}$.)

(20) Troben el volum dels cossos limitats per les superfícies indicades.

a) $\underline{x^2+z^2=1}$, $x^2+y^2=1$.



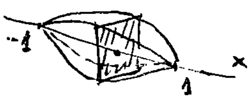
$\longrightarrow$ intersecció

Fixat x, $-1 \le x \le 1$, tindrem:

$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$, $-\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2}$.

$\Rightarrow (y,z) \in \underline{\text{quadrat}}$, d'àrea

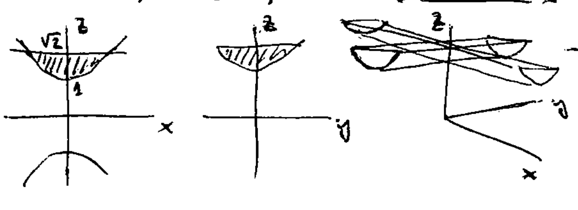
$A(x) = \left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2 = 4(1-x^2)$



Pel principi de Cavalieri,

$$\text{vol} = \int_{-1}^1 A(x)\,dx = 4\int_{-1}^1 (1-x^2)\,dx = \frac{16}{3}.$$

b) $z^2-x^2=1$, $z^2-y^2=1$, $z=\sqrt{2}$. [test oct/04]



$\longrightarrow$ intersecció.

Fixat z, $1 \le z \le \sqrt{2}$, tindrem

$-\sqrt{z^2-1} \le x, y \le \sqrt{z^2-1}$

$\Rightarrow (x,y) \in$ quadrat, $A(z) = \left(2\sqrt{z^2-1}\right)^2 = 4(z^2-1)$.

$$\text{vol} = \int_1^{\sqrt{2}} A(z)\,dz = 4\int_1^{\sqrt{2}} (z^2-1)\,dz = \frac{4(2-\sqrt{2})}{3}$$

(1.3) Canvis de variables.

(21) Trobeu $\int_A (x^2+y^2)\,dx\,dy$, essent $A = \{x^2+y^2 \leq 4\}$.

Canvi a polars: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$\rightarrow$ Nou domini: $A^* = \{(r,\theta):\ 0<r\leq 2,\ 0\leq\theta<2\pi\}$ (rectangle).

$$\Rightarrow\quad I = \int_{A^*} r^2\cdot \underbrace{r}_{\substack{\uparrow \\ \text{jacobià} \\ (>0)}}\,dr\,d\theta = \int_0^2 r^3\,dr\cdot\int_0^{2\pi} d\theta = 4\cdot 2\pi = \underline{8\pi}.$$

(22) Siguin $x = 4u$ i $y = 2u+3v$ un canvi de variables en una regió $D\subset\mathbb{R}^2$ tal que $0\leq u\leq 1$ i $1\leq v\leq 2$. Calculeu $\int_D xy\,dx\,dy$.

$T: D^* \longrightarrow D$ lineal

$T(u,v) = (4u,\ 2u+3v) = (x,y)$, $\qquad JT(u,v) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3\end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow$ bijectiva.

Sabem que $D^* = [0,1]\times[1,2]$.

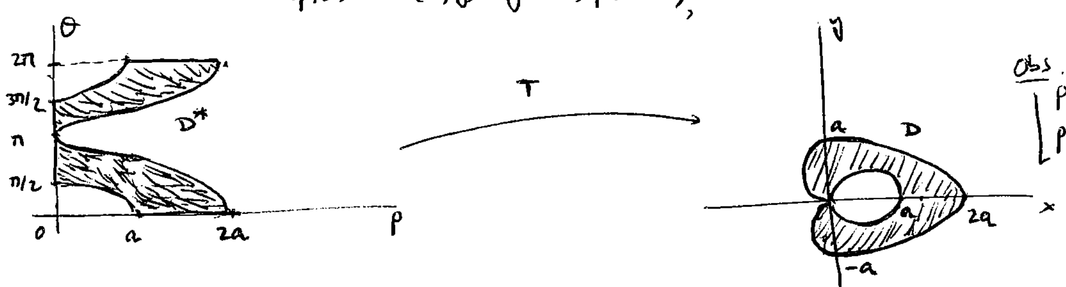
$$\Rightarrow\quad I = \int_{D^*} 4u\cdot(2u+3v)\cdot|12|\,du\,dv = 48\int_0^1 du\int_1^2 (2u^2+3uv)\,dv =$$

$$= 48\int_0^1 du\cdot\left[2u^2v + \frac{3uv^2}{2}\right]_{v=1}^{v=2} = 48\int_0^1\left(2u^2+\frac{9u}{2}\right)du = 48\left[\frac{2u^3}{3}+\frac{9u^2}{4}\right]_0^1 = \underline{140}.$$

(24) Trobeu l'àrea de la figura definida en coordenades polars per $\{a\cos\theta\leq\rho\leq a(1+\cos\theta)\}$.

Canvi a polars: $\quad T: D^*\longrightarrow D$

$(\rho,\theta)\longmapsto(x,y) = (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)$, $\qquad D^* = \{(\rho,\theta):\ a\cos\theta\leq\rho\leq a(1+\cos\theta)\}$



Obs.: $\rho = a\cos\theta$ circumferència; $\rho = a(1+\cos\theta)$ cardioide

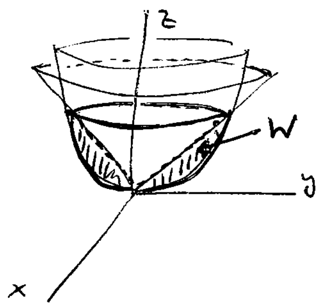
$$A(D) = \int_D dx\,dy = \int_{D^*}\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/2}d\theta\int_{a\cos\theta}^{a(1+\cos\theta)}\rho\,d\rho + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}\rho\,d\rho + \int_{3\pi/2}^{2\pi}d\theta\int_{a\cos\theta}^{a(1+\cos\theta)}\rho\,d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/2}d\theta\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=a\cos\theta}^{\rho=a(1+\cos\theta)} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}d\theta\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{\rho=a(1+\cos\theta)} + \int_{3\pi/2}^{2\pi}d\theta\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=a\cos\theta}^{\rho=a(1+\cos\theta)} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\int_0^{\pi/2}(1+2\cos\theta)\,d\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta + \int_{3\pi/2}^{2\pi}(1+2\cos\theta)\,d\theta\right] = \frac{a^2}{2}\left[\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta)\,d\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\underbrace{\cos^2\theta}_{=\frac{1+\cos 2\theta}{2}}\,d\theta\right] =$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\left[\left[\theta+2\sin\theta\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\pi/2}^{3\pi/2}\right] = \frac{a^2}{2}\cdot\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\frac{5\pi a^2}{4}}.$$

(25) Calculeu el volum de la regió limitada pel con $z^2=x^2+y^2$ i el paraboloide $z=x^2+y^2$ en el semiespai $z\ge 0$.



Domini : $W=\{(x,y,z) : x^2+y^2\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\}$

Coordenades cilíndriques :

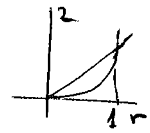
$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z.$

$\downarrow$

Nou domini :

$W^*=\{(r,\theta,z) : \underbrace{r^2\le z\le r}, \ 0\le\theta<2\pi\}$

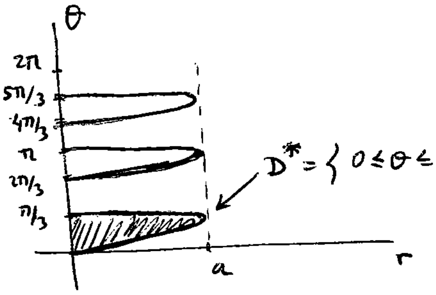
Només pot passar si ~~[illegible]~~ 1



$$\mathrm{vol}(W)=\int_W dx\,dy\,dz=\int_{W^*}\underbrace{r}_{\text{jacobià}}\,dr\,d\theta\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_{r^2}^{r}dz=$$

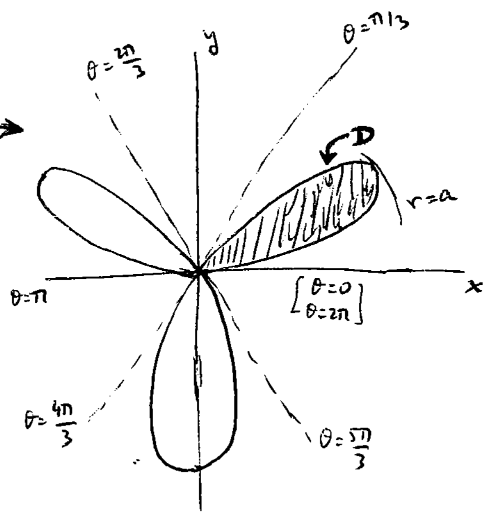
$$=2\pi\int_0^1 r(r-r^2)\,dr=2\pi\cdot\frac{1}{12}=\frac{\pi}{6}.$$

(26) Trobeu l'àrea d'un pètal de la rosa $r=a\sin 3\theta$.



$D^*=\{0\le\theta\le\frac{\pi}{3},\ 0<r\le a\sin 3\theta\}$

T (polars)

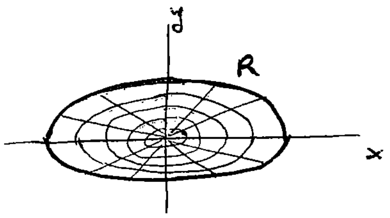


$$A(D)=\int_D dx\,dy=\int_{D^*}\underbrace{r}_{\text{jacobià}}\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/3}d\theta\int_0^{a\sin 3\theta}r\,dr=\int_0^{\pi/3}d\theta\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=a\sin 3\theta}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/3}\underbrace{\sin^2 3\theta}_{=\frac{1-\cos 3\theta}{2}}\,d\theta=\frac{a^2}{2}\cdot\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 3\theta}{6}\right]_0^{\pi/3}=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi a^2}{12}.$$

$$\left(=\frac{a^2}{6}\cdot B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$$

(28) Troben $I = \int_R \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2} dx\,dy$ on R és la regió delimitada per l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Fem el canvi T definit per $\begin{cases} x = a r \cos\theta \\ y = b r \sin\theta \end{cases}$

("coord. polars adaptades a l'el·lipse")

Nou domini: $R^* = \{(r,\theta) : 0 < r \leq 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$;

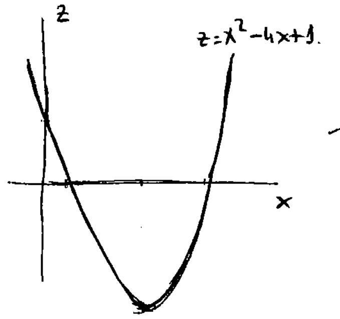
tenim $T: R^* \longrightarrow R - \{(0,0)\}$ bijectiva,

i el jacobià és $JT(r,\theta) = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr \neq 0 \quad \forall (r,\theta) \in R^*$

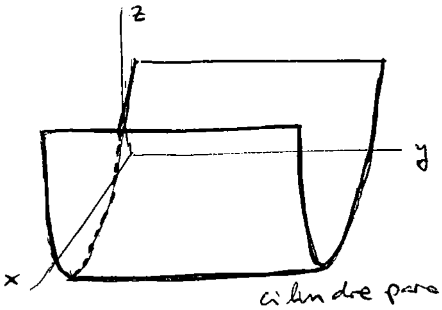
$\Rightarrow$ és canvi de variables.

$$I = \int_{R^*} (1-r^2)^{3/2} |abr|\, dr\, d\theta = ab \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2)^{3/2} r\, dr = 2\pi ab \left[-\tfrac{1}{5}(1-r^2)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{2\pi ab}{5}.$$

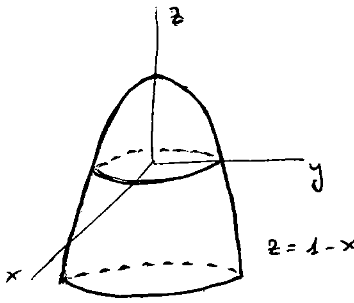
(31) Calculen el volum tancat per $z = x^2 - 4x + 1$ i $1 - z = x^2 + y^2$.



$\rightsquigarrow$



cilindre parabòlic.



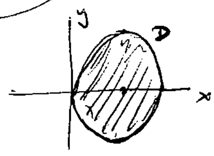
$z = 1 - x^2 - y^2$, paraboloide de revolució.

Domini: $W = \{x^2 - 4x + 1 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

Busquem la projecció D sobre el pla xy:

$(x,y) \in D \iff x^2 - 4x + 1 \leq 1 - x^2 - y^2 \iff 2x^2 - 4x + y^2 \leq 0 \iff (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} \leq 1$

D és una el·lipse de centre $(1,0)$ i semieixos $1, \sqrt{2}$



Sobre D, farem el canvi a "coord. polars adaptades" $\begin{cases} x = 1 + r\cos\theta \\ y = \sqrt{2}\cdot r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow$ jacobià $= \sqrt{2}\, r$

Calculem:

$$\mathrm{vol}(W) = \int_W dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{x^2-4x+1}^{1-x^2-y^2} dz = \iint_D \underbrace{(-2x^2 + 4x - y^2)}_{2-2r^2} dx\,dy = \text{(canvi)}$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r(2 - 2r^2)\, dr = \sqrt{2}\cdot 2\pi \cdot \left[r^2 - \frac{r^4}{2}\right]_0^1 = \sqrt{2}\,\pi.$$

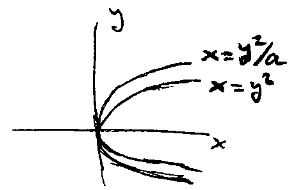
Nota: també es podia haver fet directament un canvi a "cilíndriques adaptades"

32 Calculeu el volum limitat per les següents superfícies:

(a) $x^2 = z,\ y^2 = x,\ z^2 = y,\ x^2 = az,\ y^2 = ax,\ z^2 = ay\ (a > 1)$.

$W = \{(x,y,z) : x \le y^2 \le ax,\ y \le z^2 \le ay,\ z \le x^2 \le az\}$

(cos limitat per 6 cilindres parabòlics)



Obs. Comprovem que W és compacte, i contingut en el 1er octant.

De les desigualtats es dedueix que $x, y, z \ge 0$.

També es dedueix: $x \le y^2 \le z^4 \le x^8$, $x \ge \frac{y^2}{a} \ge \frac{z^4}{a^3} \ge \frac{x^8}{a^7} \Rightarrow \frac{x^8}{a^7} \le x \le x^8$.

Si $x = 0 \longrightarrow y = z = 0$.

Si $x > 0$, obtenim $1 \le x \le a$.

punt aïllat (l'excloem)

I anàlogament amb $y, z \longrightarrow$ Per tant, $W \subset [1,a]^3 \cup \{(0,0,0)\}$

i com que W és tancat deduïm que és compacte.

Fem el canvi de variables $(x,y,z) = T(u,v,w)$ definit per T^{-1}: $\begin{cases} u = y^2/x \\ v = z^2/y \\ w = x^2/z \end{cases}$

(ben definit ja que $x, y, z \ge 1$, i es comprova que és bijectiu ja que es pot aïllar x, y, z en funció de u, v, w)

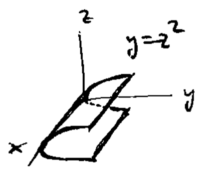
Nou domini: $W^* = \{(u,v,w) : 1 \le u \le a,\ 1 \le v \le a,\ 1 \le w \le a\} = [1,a]^3$

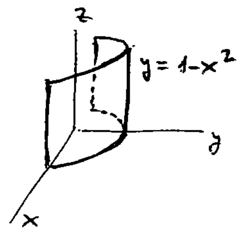
Calculem:
$$JT^{-1}(x,y,z) = \begin{vmatrix} -y^2/x^2 & 2y/x & 0 \\ 0 & -z^2/y^2 & 2z/y \\ 2x/z & 0 & -x^2/z^2 \end{vmatrix} = -1 + 8 = 7 \ne 0 \Rightarrow JT(u,v,w) = \frac{1}{7}.$$

$$\mathrm{vol}(W) = \int_W dx\,dy\,dz = \int_{W^*} |JT(u,v,w)|\,du\,dv\,dw = \frac{1}{7}\,\mathrm{vol}(W^*) = \boxed{\frac{(a-1)^3}{7}}$$

(b) $z^2 = y,\ x^2 = 1 - y$.

Tenim 2 cilindres parabòlics:





$W = \{(x,y,z) : z^2 \le y \le 1 - x^2\}$ (entre les gràfiques de 2 funcions $y = y(x,z)$).

Projecció sobre el pla xz: $z^2 \le 1 - x^2 \longrightarrow x^2 + z^2 \le 1$

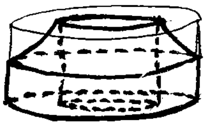
$D = \{(x,z) : x^2 + z^2 \le 1\}$ (cercle)

$$\mathrm{vol}(W) = \int_W dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dz \int_{z^2}^{1-x^2} dy = \iint_D (1 - x^2 - z^2)\,dx\,dz = 2\pi \int_0^1 (1 - r^2)\, r\,dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

polars $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}$

Nota: també podríem haver calculat
$$\mathrm{vol}(W) = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{1-x^2} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dz = \frac{4}{3}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4 u\,du = \frac{4}{3} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(c) $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=2,\ z(x^2+y^2)=1,\ z=0.$



$$W=\left\{(x,y,z):\ 1\le x^2+y^2\le 2,\ 0\le z\le \frac{1}{x^2+y^2}\right\}$$

Fent el canvi a coord. cilíndriques, el nou domini és:

$$W^*=\left\{(r,\theta,z):\ 1\le r\le\sqrt{2},\ 0\le z\le\frac{1}{r^2},\ 0\le\theta\le 2\pi\right\}$$

$$\mathrm{vol}(W)=\int_W dx\,dy\,dz=\int_{W^*} r\,dr\,d\theta\,dz=2\pi\int_1^{\sqrt{2}} r\,dr\int_0^{1/r^2} dz=2\pi\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dr}{r}=2\pi\ln\sqrt{2}=\underline{\underline{\pi\ln 2}}.$$

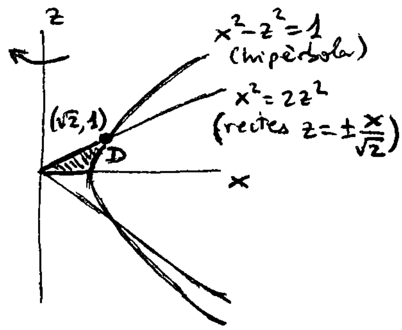
(d) $x^2+y^2=2z^2,\ x^2+y^2=z^2+1$ en $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$.

Tenim 2 superfícies de revolució:

$x^2+y^2=2z^2$ con

$x^2+y^2=z^2+1$ hiperboloide d'una fulla

generades en girar, al voltant de l'eix z, les corbes següents:



$$W=\{(x,y,z):\ 2z^2\le x^2+y^2\le z^2+1,\ \underbrace{x,y,z\geq 0}_{1^{\text{er}}\text{ octant}}\}$$

És el cos de revolució obtingut en girar $\underline{1/4 \text{ de volta}}$ la regió:

$$D=\{(x,z):\ 2z^2\le x^2\le z^2+1, x,z\geq 0\}=$$
$$=\{(x,z):\ 0\le\sqrt{2}z\le x\le\sqrt{z^2+1}\}$$

Fent el canvi a $\underline{\text{cilíndriques}}$, obtenim com a nou domini:

$$W^*=\{(r,\theta,z):\ \underbrace{2z^2\le r^2\le z^2+1,\ z\geq 0,\ r\geq 0}_{(r,z)\in D},\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$$

Llavors, $\mathrm{vol}(W)=\int_W dx\,dy\,dz=\int_{W^*} r\,dr\,d\theta\,dz=\int_0^1 dz\int_{\sqrt{2}z}^{\sqrt{z^2+1}} r\,dr\cdot\int_0^{\pi/2} d\theta=$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 dz\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=\sqrt{2}z}^{r=\sqrt{z^2+1}}=\frac{\pi}{4}\int_0^1(1-z^2)\,dz=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}=\underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}.$$