3. APLICACIONS DE LES INTEGRALS MÚLTIPLES

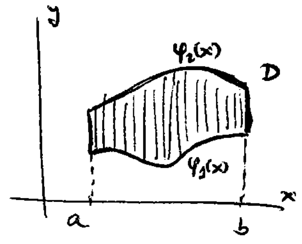
(A) Càlcul d'àrees i volums.

Recordem:

- Si $D \subset \mathbb{R}^2$ domini elemental, $A(D) = \int_D dx\,dy$.
- Si $W \subset \mathbb{R}^3$ " " , $vol(W) = \int_W dx\,dy\,dz$.

Alguns casos particulars:

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

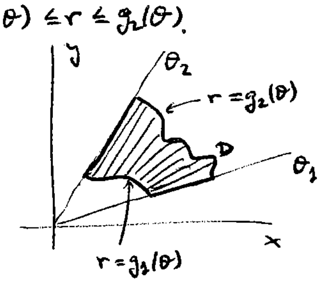


$$\boxed{A(D) = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,dx.}$$

2) Regió del pla, donada en coordenades polars per $\alpha \le \theta \le \beta$, $g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$.

$D = T(D^*)$, $D^* = \{(r,\theta) : \ \alpha \le \theta \le \beta, \ g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)\}$

$$\boxed{A(D) = \int_{D^*} r\,dr\,d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r\,dr = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(g_2(\theta)^2 - g_1(\theta)^2\right) d\theta.}$$

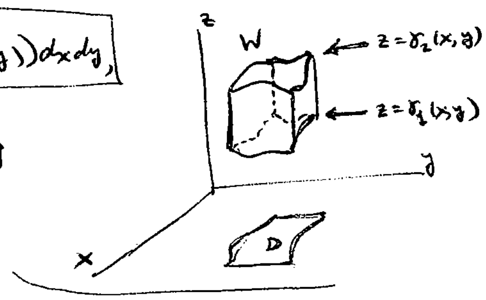


3) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ a \le x \le b, \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \ \gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y)\}$

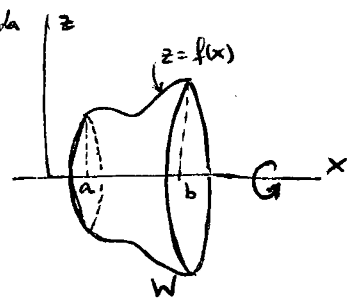
$$\boxed{vol(W) = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} dz = \int_D \left(\gamma_2(x,y) - \gamma_1(x,y)\right) dx\,dy,}$$

essent $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

(la projecció de W sobre el pla xy)



4) Cos de revolució, obtingut en girar la regió del pla xz limitada per la corba $z = f(x)$, $a \le x \le b$, al voltant de l'eix x.
(suposarem $f(x) \ge 0 \ \forall x$)



$W = \{(x,y,z) : \ a \le x \le b, \ \sqrt{y^2+z^2} \le f(x)\}$

Fem el canvi a cilíndriques (referides a l'eix x),

$x = x$, $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$.

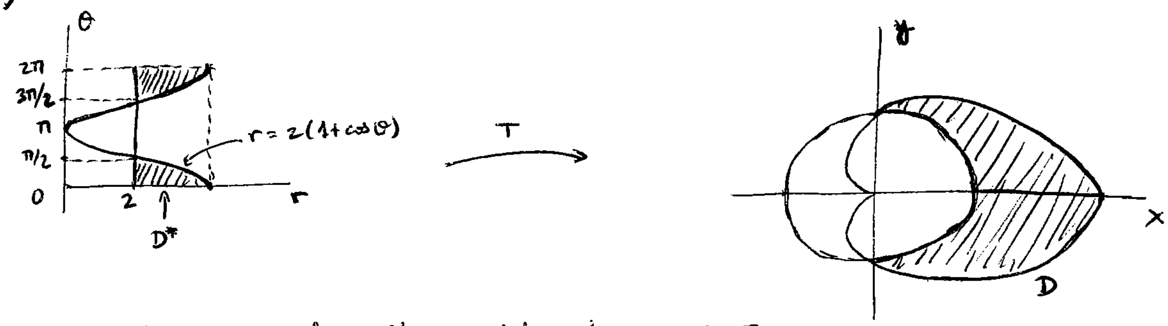
$\longrightarrow$ nou domini: $W^* = \{(x,r,\theta) : \ a \le x \le b, \ 0 < r \le f(x), \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

$$\boxed{vol(W) = \int_W dx\,dy\,dz = \int_{W^*} r\,dx\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b dx \int_0^{f(x)} r\,dr = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx}$$

També es pot deduir del principi de Cavalieri: tallant el cos W per plans $x = $ const., s'obtenen cercles d'àrea $\pi f(x)^2$, $a \le x \le b$.

Exemples.

1) Àrea exterior a la circumferència $r=2$ i interior a la cardioide $r=2(1+\cos\theta)$.

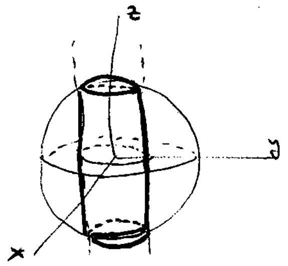


Per simetria, calculem l'àrea del sector $0\le\theta\le\pi/2$ i multipliquem per 2:

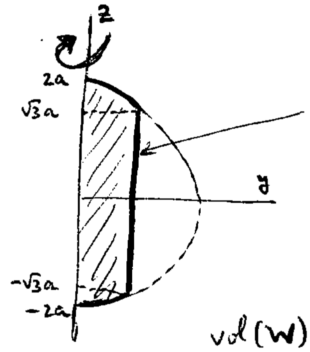
$$A(D)=\int_{D^*} r\,dr\,d\theta = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\Big(\underbrace{(2(1+\cos\theta))^2}_{g_2(\theta)^2}-\underbrace{2^2}_{g_1(\theta)^2}\Big)d\theta = 4\int_0^{\pi/2}(2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta =$$

$$= 4\cdot\Big[2\sin\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\Big]_0^{\pi/2} = \mathbf{8+\pi}.$$

2) Volum de $W=\{(x,y,z):\ \underbrace{x^2+y^2+z^2\le 4a^2}_{\text{esfera de radi }2a},\ \underbrace{x^2+y^2\le a^2}_{\text{cilindre de radi }a}\}$



És el cos de revolució obtingut en fer girar respecte l'eix z la corba:



$$y=f(z)=\begin{cases}\sqrt{4a^2-z^2} & \text{si } -2a\le z\le -\sqrt3 a\\ a & \text{si } -\sqrt3 a\le z\le \sqrt3 a\\ \sqrt{4a^2-z^2} & \text{si } \sqrt3 a< z\le 2a\end{cases}$$

$$\mathrm{vol}(W)=\pi\int_{-2a}^{2a} f(z)^2\,dz = \pi\cdot\Big[\int_{-2a}^{-\sqrt3 a}(4a^2-z^2)\,dz+\int_{-\sqrt3 a}^{\sqrt3 a}a^2\,dz+\int_{\sqrt3 a}^{2a}(4a^2-z^2)\,dz\Big]=$$

$$=\pi\cdot\Big[2\cdot\Big(\frac{16}{3}-3\sqrt3\Big)a^3+2\sqrt3\,a^3\Big]=\underline{\frac{4\pi}{3}\Big(\frac{8}{3}-\sqrt3\Big)a^3}$$

3) $W=\Big\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\Big\}$, cos tancat per un el·lipsoide de semieixos a,b,c.

* Passem a "coord. el·lipsoïdals": $\begin{cases}x=a\,r\cos\varphi\cos\theta\\ y=b\,r\cos\varphi\sin\theta\\ z=c\,r\sin\varphi\end{cases}$, jacobià $=abc\,r^2\cos\varphi$.

Nou domini: $W^*=\{(r,\theta,\varphi):\ 0<r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\}$

$$\longrightarrow \mathrm{vol}(W)=\int_{W^*}|abc\,r^2\cos\varphi|\,dr\,d\theta\,d\varphi = abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^2\,dr=$$

$$= abc\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{3}=\underline{\frac{4}{3}\pi abc}$$

* També podem fer el canvi: $x=au,\ y=bv,\ z=cw$ (jacobià $=abc$)

$\rightarrow$ Nou domini: $W^{**}=\{(u,v,w):\ u^2+v^2+w^2\le 1\}$ (esfera)

$$\Rightarrow \mathrm{vol}(W)=abc\int_{W^{**}}du\,dv\,dw = abc\cdot\frac{4}{3}\pi 1^3=\frac{4}{3}\pi abc.$$

(B) Massa d'un cos

- Considerem una massa a l'espai, distribuïda al llarg d'un cos $W \subset \mathbb{R}^3$

  Donada una part $B \subset W$, de massa $m(B)$, la densitat mitjana de B es defineix per:

$$\rho_m(B) = \frac{m(B)}{\mathrm{vol}(B)}.$$

  Si coneixem la massa $m(B)$ per a qualsevol $B \subset W$, passant al límit podem definir la densitat (puntual) en un punt $p \in W$:

$$\rho(p) = \lim_{\substack{B \ni p \\ \mathrm{vol}(B) \to 0}} \rho_m(B) = \lim_{\substack{B \ni p \\ \mathrm{vol}(B) \to 0}} \frac{m(B)}{\mathrm{vol}(B)} \qquad (\text{si } \exists) \qquad (*)$$

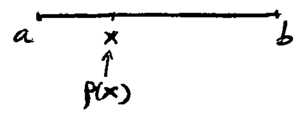
  Així, la densitat en cada punt ve definida per una funció $\rho : W \longrightarrow \mathbb{R}$.

  Sempre tindrem $\rho \geq 0$.

  Si $\rho \equiv$ const., direm que el cos és homogeni.

- Recíprocament, a partir de la funció densitat podrem calcular la massa total del cos, mitjançant una integral.

  - 1 variable. $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ (barra)



Considerant una partició

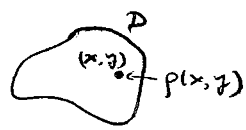
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{N}$,

i escollint $t_i \in I_i$, $i = 1, \ldots, N$, tindrem:

$$m(I) = \sum_{i=1}^{N} m(I_i) = \sum_{i=1}^{N} \rho_m(I_i)\, \Delta x \underset{\substack{\text{si els } \Delta x \text{ són} \\ \text{prou petits}}}{\simeq} \sum_{i=1}^{N} \rho(t_i)\, \Delta x.$$

Fent $\Delta x \to 0$ $(N \to \infty)$, es justifica que $\boxed{m(I) = \int_a^b \rho(x)\, dx}$

  - 2 variables. $D \subset \mathbb{R}^2$ domini elemental (placa).



De manera semblant, podem justificar: $\boxed{m(D) = \int_D \rho(x,y)\, dx\, dy.}$

  - 3 variables: $W \subset \mathbb{R}^3$ domini elemental (cos o sòlid).

$$\boxed{m(W) = \int_W \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.}$$

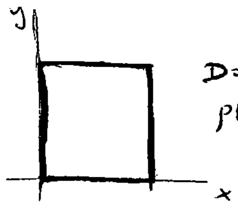
Observem que podem deduir (*) d'aquesta integral:

suposant ρ funció contínua, donat $p=(x_0,y_0,z_0)\in W$ tenim:

$$\lim_{\substack{B\ni p\\ vol(B)\to 0}} \frac{m(B)}{vol(B)} = \lim_{\substack{B\ni p\\ vol(B)\to 0}} \frac{\int_B \rho}{vol(B)} \underset{\text{teo. de la mitjana}}{=} \underbrace{\lim_{\substack{B\ni p\\ vol(B)\to 0}} \rho(p_B)}_{\text{(essent } p_B\in B \text{ algun punt)}} = \rho(p).$$

Exemples.

1) Massa d'una placa quadrada de costat a, suposant que la densitat en cada punt és proporcional al quadrat de la seva distància a un vèrtex.



$D=[0,a]\times[0,a]$

$\rho(x,y)=k(x^2+y^2)$ densitat

$$m(D)=\int_D \rho = \int_0^a dx \int_0^a k(x^2+y^2)\,dy = k\int_0^a \left(a x^2 + \frac{a^3}{3}\right)dx = \frac{2}{3}ka^4$$

2) Massa d'una bola de radi R formada per capes concèntriques homogènies.

$W=\{x^2+y^2+z^2\le R^2\}$

Densitat: $\rho=\rho(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$m(W)=\int_W \rho\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dx\,dy\,dz \underset{\text{canvi a esfèriques}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \rho(r)\cdot r^2\cos\varphi\,dr = 4\pi\int_0^R \rho(r)\underbrace{r^2}_{\text{(les capes externes compten més)}}dr.$$

(c) Mitjana d'una funció (i mitjana ponderada)

- 1 variable.

Donada $f: I=[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, considerant una partició

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{N}$,

per aproximar el valor mitjà $v_m(f)$, escollim $t_i \in I_i$, $i=1,\dots,N$, i fem la mitjana dels valors $f(t_1),\dots,f(t_N)$:

$$v_m(f) \simeq \frac{f(t_1)+\dots+f(t_N)}{N} = \frac{f(t_1)\Delta x + \dots + f(t_N)\Delta x}{b-a}$$

Fent $\Delta x \to 0$ ($N \to \infty$), resulta raonable definir $\boxed{v_m(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f}$

- 2 variables. $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

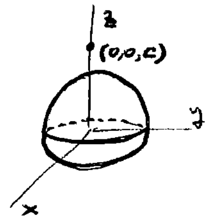
$$\boxed{v_m(f) = \frac{1}{A(D)} \int_D f.}$$

- 3 variables. $f: W \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\boxed{v_m(f) = \frac{1}{vol(W)} \cdot \int_W f.}$$

Exemple. Mitjana del quadrat de la distància dels punts d'una bola a un punt fixat de l'espai.

$B = \{x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$, $vol(B) = \frac{4}{3}\pi R^3$



Suposant que el punt és $(0,0,c)$, hem de trobar la mitjana de $f(x,y,z) = x^2+y^2+(z-c)^2$

$$\int_B f = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^2 - 2cr\sin\varphi + c^2)\cdot r^2\cos\varphi \, d\varphi =$$

canvi a esfèriques

$$= 2\pi \int_0^R dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left((r^4+c^2r^2)\cos\varphi - cr\sin 2\varphi\right) d\varphi = 2\pi \int_0^R \left(2(r^4+c^2r^2) - 0\right) dr =$$

$$= 2\pi \cdot 2\left(\frac{R^5}{5} + \frac{c^2R^3}{3}\right) = 4\pi\left(\frac{R^5}{5}+\frac{c^2R^3}{3}\right) \Longrightarrow v_m(f) = \frac{4\pi\left(\frac{R^5}{5}+\frac{c^2R^3}{3}\right)}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3R^2}{5} + c^2.$$

- **Mitjana ponderada.**

$f, \rho: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\rho \ge 0$. Per calcular la mitjana de f sobre D, ponderada per la funció densitat ρ, integrarem la funció f comptant cada punt de manera proporcional a la densitat en el punt:

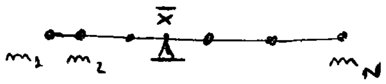
$$\boxed{v_m(f,\rho) = \frac{\int_D f\cdot\rho}{\int_D \rho} = \frac{1}{m(D)} \cdot \int_D f\cdot\rho.}$$

Notem que, si $f \equiv c$, llavors $v_m(c,\rho) = c$. (això justifica el denominador)

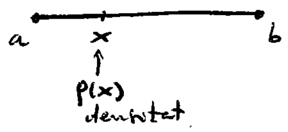
(D) Centre de masses (o de gravetat)

- Per a N masses puntuals $m_1, \dots, m_N$, en els punts $x_1, \dots, x_N$ d'una barra (que suposem sense massa), el centre de masses ve donat per:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}.$$ D'aquesta manera, $\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - \bar{x}) = 0$ (moment total del pes respecte el punt $\bar{x}$).



- 1 variable (barra). $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$



Considerant una partició $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{N}$,

i escollint $t_i \in I_i$, $i = 1, \dots, N$, podem suposar com a primera aproximació que la massa de cada tros I_i està concentrada en el punt t_i. Llavors,

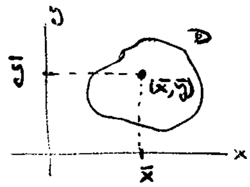
$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{i=1}^{N} m(I_i) \cdot t_i}{\sum_{i=1}^{N} m(I_i)} = \frac{1}{m(I)} \cdot \sum_{i=1}^{N} \rho_m(I_i) \cdot \Delta x \cdot t_i \simeq \frac{1}{m(I)} \sum_{i=1}^{N} \rho(t_i) \cdot \Delta x \cdot t_i$$

Fent $\Delta x \to 0$ $(N \to \infty)$, podem definir

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{m(I)} \cdot \int_a^b x\,\rho(x)\,dx = \frac{\int_a^b x\,\rho(x)\,dx}{\int_a^b \rho(x)\,dx}}.$$

Observem que $\bar{x}$ és la mitjana ponderada de la funció x, respecte la funció densitat $\rho(x)$.

- 2 variables (placa). $D \subset \mathbb{R}^2$, amb densitat $\rho(x,y)$.



$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{m(D)} \left(\int_D x\rho, \int_D y\rho \right)},$$

és a dir, $\bar{x} = \frac{\int_D x\rho}{\int_D \rho}$, $\bar{y} = \frac{\int_D y\rho}{\int_D \rho}$,

mitjanes ponderades de les funcions coordenades x, y, respecte la funció densitat $\rho(x,y)$

- 3 variables (cos). $W \subset \mathbb{R}^3$, amb densitat $\rho(x,y,z)$.

$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{m(W)} \left(\int_W x\rho, \int_W y\rho, \int_W z\rho \right).}$$

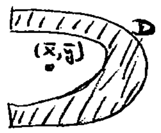
Observacions (vàlides en qualsevol dimensió)

1) En el cas d'un cos homogeni (densitat constant), podem escriure

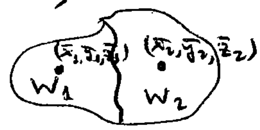
$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{vol(W)} \left(\int_W x, \int_W y, \int_W z \right)$$

2) El centre de masses pot no pertànyer al domini,

p.ex.



3) Si dividim un cos en 2 parts (o més), de les quals coneixem el centre de masses, llavors el centre de masses de tot el cos, és el mateix que si cada part estigués concentrada en el seu centre de masses.
És a dir,
$W = W_1 \cup W_2$, amb $vol(W_1 \cap W_2) = 0$, i suposem que els centres de masses de W_1 i W_2 són $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$, $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ respectivament; llavors el centre de masses de W és $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, amb

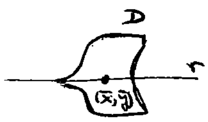


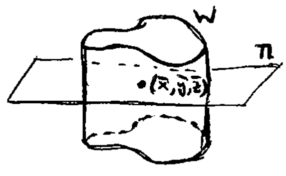
$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1\, m(W_1) + \bar{x}_2\, m(W_2)}{m(W_1) + m(W_2)}, \text{ i anàlogament amb } \bar{y}, \bar{z}.$$

Prova.

$$\left.\begin{array}{l} \int_W x\rho = m(W)\bar{x} = (m(W_1) + m(W_2)) \cdot \bar{x} \\ \quad \| \\ \int_{W_1} x\rho + \int_{W_2} x\rho = m(W_1)\,\bar{x}_1 + m(W_2)\,\bar{x}_2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{aïllem } \bar{x}.$$

4) Si una placa (cos) de $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) té una recta (un pla) de simetria en la seva distribució de massa, llavors el centre de masses pertany a aquesta recta (aquest pla).

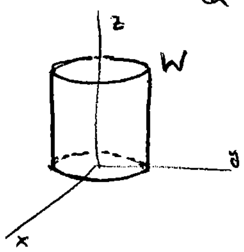




Prova (dim. 2)

Suposem que $D \subset \mathbb{R}^2$ té $y = 0$ com a recta de simetria, i que $\rho(x,y) = \rho(x,-y)$ $\forall (x,y) \in D$.
Escrivim $D = D_1 \cup D_2$ amb $D_1 = D \cap \{y \geq 0\}$, $D_2 = D \cap \{y \leq 0\}$.
Fent el canvi $(x,y) = T(u,v) = (u,-v)$ tenim $T(D_1) = D_2$;
llavors es comprova que $m(D_1) = m(D_2)$, $\int_{D_1} y\rho = -\int_{D_2} y\rho$,
i deduïm $\bar{y} = 0$ per l'observació (3).

Exemple. Centre de masses d'un cilindre de radi R i alçada h, suposant que la densitat és proporcional a la distància a la base.



$$W = \{ x^2+y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq h \},$$

$$\rho(x,y,z) = kz$$

Com que $x=0$ i $y=0$ són plans de simetria, tenim $\bar{x}=0$ i $\bar{y}=0$. $\Rightarrow$ Només hem de calcular $\bar{z} = \dfrac{\int_W z\rho}{\int_W \rho}$.

* $\displaystyle\int_W \rho = \int_W kz\,dx\,dy\,dz \underset{\text{cilíndriques}}{=} k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \int_0^h z\cdot r\,dz = k\cdot 2\pi\cdot\frac{R^2}{2}\cdot\frac{h^2}{2} = \frac{\pi k R^2 h^2}{2}$ $(= m(W))$

* $\displaystyle\int_W z\rho = \int_W kz^2\,dx\,dy\,dz = k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \int_0^h z^2 r\,dz = k\cdot 2\pi\cdot\frac{R^2}{2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{\pi k R^2 h^3}{3}$

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{\frac{\pi k R^2 h^3}{3}}{\frac{\pi k R^2 h^2}{2}} = \frac{2h}{3}\ ; \quad \text{centre de masses}: (\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(0,0,\frac{2h}{3}\right)$$

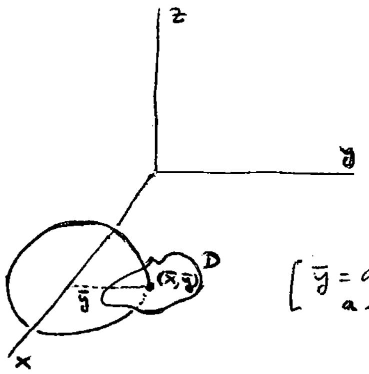
Segon teorema de Pappus-Guldin.

Sigui D una regió del pla xy, que no talla l'eix x, amb centre de masses $(\bar{x},\bar{y})$, i considerem el cos de revolució W obtingut en girar D al voltant de l'eix x.

Llavors,

$$\boxed{\mathrm{vol}(W) = 2\pi\int_D y\,dx\,dy = \underbrace{A(D)\cdot 2\pi\bar{y}}}$$

[producte de l'àrea de la regió D per la longitud de la circumferència descrita pel seu centre de masses.]



[$\bar{y}$ = distància del c.d.m. a l'eix de gir.]

Prova.

$$\mathrm{vol}(W) = \int_W dx\,dy\,dz = \int_{W^*} r\,dx\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_D r\,dx\,dr = 2\pi\int_D y\,dx\,dy.$$

canvi (cilíndriques) $x=x$, $y=r\cos\theta$, $z=r\sin\theta$ (jacobià $=r$) $\rightarrow$ [Nou domini: $W^* = \{(x,r,\theta): (x,r)\in D,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$]

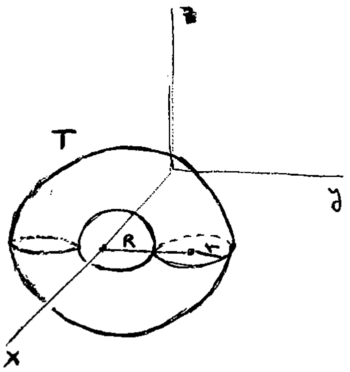
Per obtenir la segona fórmula, usem que $\bar{y} = \dfrac{1}{A(D)}\displaystyle\int_D y\,dx\,dy$.

Exemples

1) $W = \left[\begin{array}{l}\text{cos de revolució obtingut de} \\ D = \{(x,y):\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}\end{array}\right]$

$$\longrightarrow \text{vol}(W) = 2\pi \int_D y\,dx\,dy = 2\pi \int_a^b dx \int_0^{f(x)} y\,dy = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx \quad \text{(com ja sabíem)}$$

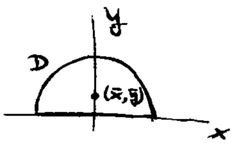
2) Volum d'un tor de secció circular.



r = radi de la secció circular,
R = distància del centre de la secció circular a l'eix de gir.

$$\text{vol}(T) = A(D)\cdot 2\pi\bar{y} = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R.$$

3) Centre de masses d'un semicercle de radi R.

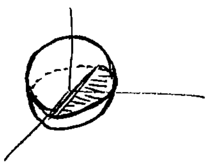


$D = \{(x,y):\ x^2+y^2 \le R^2,\ y \ge 0\}$

$\bar{x} = 0$ per simetria.

En principi, hauríem de calcular $\bar{y} = \dfrac{1}{\frac{\pi R^2}{2}} \displaystyle\int_D y\,dx\,dy$.

Però si fem girar D al voltant de l'eix x, obtenim una esfera, de volum ja conegut. Per tant, aplicant el 2on teorema de Guldin podem calcular el centre de masses:

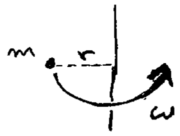


$$\underbrace{\text{vol}(W)}_{\frac{4}{3}\pi R^3} = \underbrace{A(D)}_{\frac{\pi R^2}{2}} \cdot 2\pi\bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{\pi R^2}{2}\cdot 2\pi} = \frac{4R}{3\pi}.$$

$$\Rightarrow \text{centre de masses de } D:\ (\bar{x},\bar{y}) = \left(0, \frac{4R}{3\pi}\right).$$

(E) Moment d'inèrcia i energia cinètica.

– Per a <u>1 massa puntual</u> que gira al voltant d'un eix,



m = massa de la partícula.
r = distància a l'eix de gir.
ω = velocitat angular.

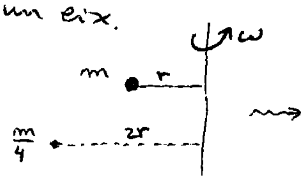
Velocitat de la partícula: $v = r\omega$

Energia cinètica: $\boxed{E = \frac{1}{2} m v^2} = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \boxed{\frac{1}{2} I \omega^2}$

Moment d'inèrcia: $\boxed{I = m r^2}$

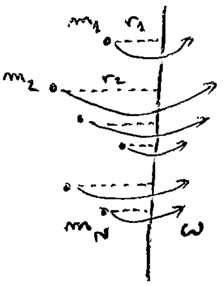
Així, el moment d'inèrcia permet expressar cinètica E en termes de la velocitat angular (substituïm m, v per I, ω respectivament)

El moment d'inèrcia I mesura la resistència de la partícula quan intentem girar-la al voltant d'un eix.



$\rightsquigarrow$ mateix moment d'inèrcia: $I = m r^2 = \frac{m}{4}(2r)^2$.

– Per a <u>N masses puntuals</u> que giren simultàniament al voltant d'un mateix eix,

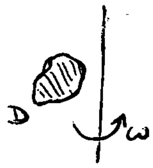


Moment d'inèrcia total: $I = \sum_{i=1}^{N} I_i = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$.

Energia cinètica total: $E = \sum_{i=1}^{N} E_i = \frac{1}{2} I \omega^2$.

Nota: si les partícules giren amb velocitats angulars Ω_i diferents, no té sentit parlar de moment d'inèrcia, i llavors $E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \Omega_i^2$

– Per a una <u>placa $D \subset \mathbb{R}^2$</u> que gira al voltant d'un eix (contingut en el mateix pla de la placa),



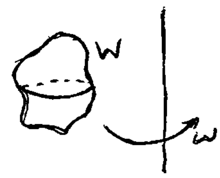
Moment d'inèrcia: $\boxed{I = \int_D r^2 \rho} = m(D) \cdot V_m(r^2 \rho)$,

Energia cinètica: $\boxed{E = \frac{1}{2} I \omega^2}$

essent
$\rho = \rho(x,y)$ densitat de cada punt
$r = r(x,y)$ distància de cada punt a l'eix de gir.

– Per a un cos $W \subset \mathbb{R}^3$ que gira al voltant d'un eix, anàlogament:

$$\left[\begin{array}{l} \boxed{I = \int_W r^2 \rho} = m(W) \cdot v_m(r^2, \rho) \\ \boxed{E = \frac{1}{2} I \omega^2}, \end{array}\right.$$

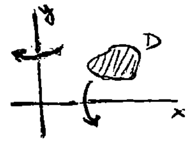


essent $\left|\begin{array}{l} \rho = \rho(x,y,z) \text{ densitat} \\ r = r(x,y,z) \text{ distància a l'eix de gir} \end{array}\right.$

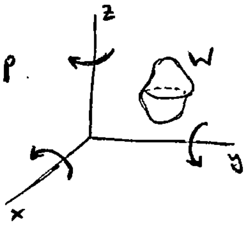
Nota: Hem suposat el cas d'un sòlid rígid, en què tots els punts giren amb la mateixa velocitat angular ω. Per al cas d'un fluid, en general tindríem una velocitat angular $\Omega(x,y,z)$; llavors no podríem parlar de moment d'inèrcia, i tindríem $E = \frac{1}{2} \int_W r^2 \Omega^2 \rho$.

• Casos particulars. Moments d'inèrcia respecte els eixos coordenats.

– Per a $D \subset \mathbb{R}^2$, $\quad I_x = \int_D y^2 \rho$, $I_y = \int_D x^2 \rho$.



– Per a $W \subset \mathbb{R}^3$, $\quad I_x = \int_W (y^2+z^2)\rho$, $I_y = \int_W (x^2+z^2)\rho$, $I_z = \int_W (x^2+y^2)\rho$.

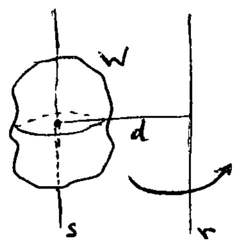


• Teorema de Steiner. (vàlid en dim. 2 i 3).

Donat un cos $W \subset \mathbb{R}^3$, siguin I_r el moment d'inèrcia respecte un eix r, I_s el moment d'inèrcia respecte un eix s paral·lel a r i que passa pel centre de masses de W, i d la distància entre els dos eixos. Llavors tenim:

$$\boxed{I_r = I_s + m(W) d^2}$$

[moment d'inèrcia resp. r, suposant tota la massa de W concentrada en el seu centre de masses.]



Conseqüència: De tots els eixos paral·lels a un eix donat r, el moment d'inèrcia mínim ve donat per l'eix s que passa pel centre de masses del cos.

Prova: Prenem coordenades de manera que el centre de masses de W és l'origen, l'eix s és $x=y=0$ (l'eix z), i l'eix r és $x=d, y=0$. Tenim:

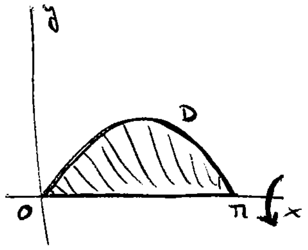
$$I_r = \int_W ((x-d)^2 + y^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_W (x^2+y^2)\rho - 2d\int_W x\rho + d^2 \int_W \rho =$$

$$= I_r - 2d\, m(W) \cdot \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\bar{x}} + m(W) \cdot d^2$$

[el centre de masses és l'origen].

• Exemples.

1)



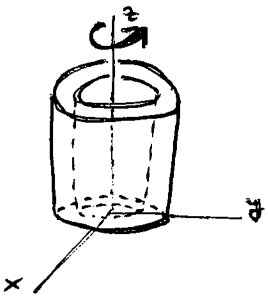
$$\begin{cases} D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \sin x\} \\ \rho(x,y) = ky \quad \text{(densitat proporcional a la distància a l'eix } x) \end{cases}$$

Moment d'inèrcia respecte l'eix x:

$$I_x = \int_D y^2 \rho = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} k y^3\, dy = \frac{k}{4}\int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx = \frac{k}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\, dx =$$

$$= \frac{k}{2}\cdot\frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{4}\,\frac{\Gamma(5/2)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)} = \frac{k}{4}\cdot\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}}{2!} = \underline{\underline{\frac{3\pi k}{32}}}.$$

2) Moment d'inèrcia d'un cilindre anular respecte a l'eix de simetria.



$W = \{(x,y,z) : a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2,\ 0 \leq z \leq h\}$

(a = radi interior, b = radi exterior, h = alçada).

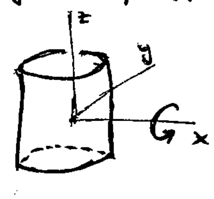
$\rho(x,y,z) \equiv 1$ (cos homogeni).

$$I_z = \int_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{[canvi a cilíndriques]}}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b dr \int_0^h r^2\cdot r\, dz = 2\pi\cdot\frac{b^4-a^4}{4}\cdot h = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}(b^4-a^4)h}}$$

Recordant que $I = \text{vol}(W)\cdot V_m(r^2)$ (cas homogeni),

com que $\text{vol}(W) = \pi(b^2-a^2)h$ deduïm que $V_m(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(b^2+a^2)$

3) $W = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq R^2,\ -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\}$ (cilindre), suposem homogeni: $\rho \equiv 1$.



* Moment d'inèrcia respecte l'eix x:

$$I_x = \int_W (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{[cilíndriques]}}}{=} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-h/2}^{h/2} (r^2\sin^2\theta + z^2)\cdot r\, dz =$$

$$= h\int_0^R r^3\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta + 2\pi\int_0^R r\,dr\cdot\int_{-h/2}^{h/2} z^2\,dz = h\cdot\frac{R^4}{4}\cdot\pi + 2\pi\cdot\frac{R^2}{2}\cdot\frac{h^3}{12} = \underline{\underline{\frac{\pi R^2 h}{12}(3R^2+h^2)}}$$

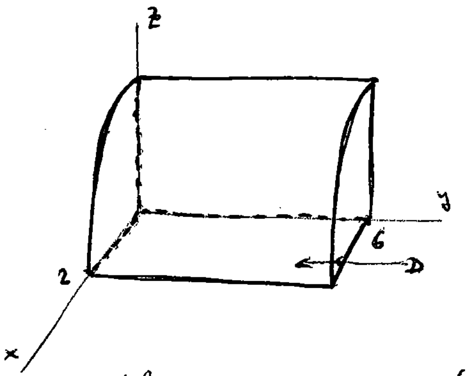
Com que $\underset{(\rho\equiv 1)}{m(W)} = \text{vol}(W) = \pi R^2 h$, deduïm que $V_m(y^2+z^2) = \frac{3R^2+h^2}{12}$

* Moment d'inèrcia respecte l'eix $y=0$, $z=\frac{h}{2}$.

Aplicant el teo. de Steiner, $I' = I_x + m(W)\left(\frac{h}{2}\right)^2 = m(W)\cdot\left[\frac{3R^2+h^2}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right] = \underline{\underline{m(W)\cdot\frac{3R^2+4h^2}{12}}}.$

(1.4) Altres integrals.

(36) Troben el volum i el centre de gravetat de $\{(x,y,z),\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 6,\ 0\le z\le 4-x^2\}$



Projecció sobre el pla xy : $D=[0,2]\times[0,6]$

Cos : $W=\{(x,y,z):\ (x,y)\in D,\ 0\le z\le 4-x^2\}$

Volum : $$\text{vol}(W)=\int_D (4-x^2-0)\,dx\,dy=\int_0^2(4-x^2)dx\cdot\int_0^6 dy = 6\cdot\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\underline{\underline{32}}.$$

Centre de gravetat : $$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\frac{1}{\text{vol}(W)}\cdot\left(\int_W x\,dx\,dy\,dz,\ \int_W y\,dx\,dy\,dz,\ \int_W z\,dx\,dy\,dz\right)$$

Tenim $\bar{y}=3$ per simetria.

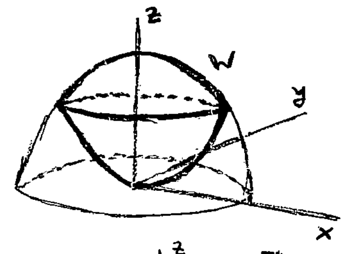
Calculem : $$\int_W x\,dx\,dy\,dz=\int_0^2 x\,dx\int_0^6 dy\int_0^{4-x^2}dz = 6\int_0^2 x(4-x^2)\,dx = 6\cdot\left[2x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=24$$

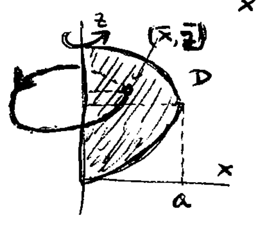
$$\int_W z\,dx\,dy\,dz=\int_0^2 dx\int_0^6 dy\int_0^{4-x^2} z\,dz = 6\int_0^2 dx\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=4-x^2}=3\int_0^2(4-x^2)^2dx=$$

$$=3\cdot\left[16x-\frac{8}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right]_0^2=32\cdot\frac{8}{5}.$$

$$\Rightarrow\ (\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\underline{\left(\frac{3}{4},\ 3,\ \frac{8}{5}\right)}$$

(37) Calculem el volum delimitat per les superfícies $x^2+y^2+z^2=2a^2$, $z=\dfrac{x^2+y^2}{a}$ en la regió $z>0$.





$$W=\left\{(x,y,z):\ \frac{x^2+y^2}{a}\le z\le\sqrt{2a^2-x^2-y^2}\right\}$$

És el cos de revolució obtingut en girar
$$D=\left\{(x,z):\ \frac{x^2}{a}\le z\le\sqrt{2a^2-x^2}\right\}$$ resp. l'eix z.

Pel 2on teorema de Guldin,
$$\text{vol}(W)=A(D)\cdot 2\pi\bar{x}=2\pi\int_D x\,dx\,dz=2\pi\int_0^a x\cdot dx\int_{x^2/a}^{\sqrt{2a^2-x^2}}dz=$$

$$=2\pi\int_0^a x\left(\sqrt{2a-x^2}-\frac{x^2}{a}\right)dx=2\pi\left[-\frac{1}{3}(2a^2-x^2)^{3/2}-\frac{x^4}{4a}\right]_0^a=$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{3}a^3-\frac{a^3}{4}+\frac{1}{3}(2a^2)^{3/2}\right]=2\pi a^3\cdot\left(\frac{2^{3/2}}{3}-\frac{7}{12}\right)=\underline{\underline{\frac{(8\sqrt{2}-7)\pi a^3}{6}}}.$$

(38) Troben $\int_V x^4 y^2 z^3 \, dx\,dy\,dz$, on V és l'interior de l'esfera de radi a i centre l'origen.

Obs. $f(x,y,z) = x^4y^2z^3$ és senar respecte z: $f(x,y,-z) = -f(x,y,z)$, i el domini V és simètric respecte el pla $z=0$.

Fem $V = V_1 \cup V_2$, $\quad V_1 = V \cap \{z \geq 0\}$, $\quad V_2 = V \cap \{z \leq 0\}$.

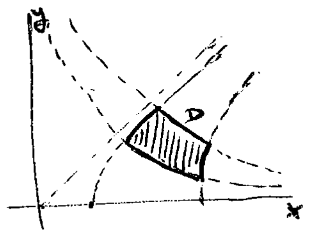
$$\int_V f = \int_{V_1} f + \int_{V_2} f = 0, \text{ ja que } \int_{V_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \underset{\substack{\text{canvi} \\ x=x,\, y=y,\, z=-w \\ (\text{jacobià} = -1)}}{=} \int_{V_1} f(x,y,-w)\,dx\,dy\,dw = -\int_{V_1} f.$$

(43) Sigui D el subconjunt compacte del pla limitat per les corbes $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=9$, $xy=2$, $xy=4$, amb $x \geq 0$, $y \geq 0$.

(a) Comproveu que existeix un canvi de variable que transforma D en el rectangle de vèrtexs $(1,4), (9,4), (1,8), (9,8)$

(b) Utilitzant (a), calculeu $\int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$.

(a)



Canvi $(x,y) = T(u,v)$, definit per $T^{-1}: \begin{cases} u = x^2-y^2, \\ v = 2xy. \end{cases}$

$D = \{(x,y) : 1 \leq x^2-y^2 \leq 9, \; 4 \leq 2xy \leq 8, \; x \geq 0, \; y \geq 0\}$

$D^* = \{(u,v) : 1 \leq u \leq 9, \; 4 \leq v \leq 8\} = [1,9] \times [4,8]$

$T^{-1}: D \longrightarrow D^*$ és bijectiva, C^1,

$$JT^{-1}(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2+y^2) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in D.$$

$\Rightarrow$ és canvi de variables.

(b) Pel teo. f. inversa,

$$JT(u,v) = \frac{1}{JT^{-1}(x,y)} = \frac{1}{4(x^2+y^2)}$$

Llavors,

$$\int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{D^*} \cancel{(x(u,v)^2 + y(u,v)^2)} \left| \frac{1}{4\,\cancel{(x(u,v)^2+y(u,v)^2)}} \right| du\,dv =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{D^*} du\,dv = \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot 4 = \underline{\underline{8}}.$$

Notes. Per veure que $(u,v) = T^{-1}(x,y)$ és bijectiva entre D i D^*, observem que podem aïllar $(x,y) = T(u,v)$, de manera única si demanem $x \geq 0$, $y \geq 0$:

$$x = \sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}}, \quad y = \frac{v}{\sqrt{2(u+\sqrt{u^2+v^2})}}.$$

Aquestes expressions de x, y en funció de u, v ens diuen que, en general, aquest no serà un bon canvi de variables per a calcular una integral $\int_D f(x,y)\,dx\,dy$, ja que l'expressió de la nova funció serà massa complicada. El cas $f(x,y) = x^2+y^2$ surt fàcil ja que hem pogut simplificar.

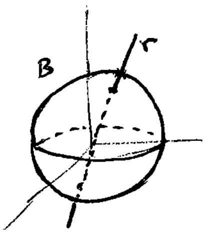
(47) Troben la massa total del cilindre $V = \{ x^2+y^2 \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 3 \}$, si la densitat ve donada per $\delta(x,y,z) = (x^2+y^2) \cdot z e^{-z^2}$.

$$m(V) = \int_V \delta(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r^2 \cdot z e^{-z^2} \cdot \underbrace{r}_{\text{(jacobià)}}\, dz =$$

canvi a cilíndriques,
$V^* = \{ 0 < r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 3 \}$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr \cdot \int_0^3 z e^{-z^2} dz = 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-z^2} \right]_0^3 = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1-e^{-9}}{2} = \pi (1-e^{-9}).$$

(49) Sigui $B = \{ x^2+y^2+z^2 \leq 1 \}$ la bola unitat. Sigui r una recta que passa pel seu centre, troben quin és el moment d'inèrcia de B respecte a r,
$I = \int_B \rho(x,y,z) \cdot d_r^2(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$, on $d_r(x,y,z)$ denota la distància del punt (x,y,z) a la recta r, i $\rho(x,y,z)$ és la densitat de massa en el punt (x,y,z) que se suposa proporcional a la distància de (x,y,z) al centre de la bola.



Com que el domini B i la densitat $\rho(x,y,z)$ tenen simetria esfèrica, podem suposar que r és l'eix z.

$$d_r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\rho(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

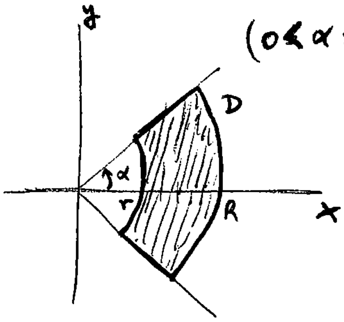
$$I = k \int_B \sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz = k \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \cdot r^2 \cos^2\varphi \cdot \underbrace{r^2 \cos\varphi}_{\text{jacobià}}\, d\varphi =$$

canvi a esfèriques,
$B^* = \{ 0 < r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \}$

$$= k \cdot 2\pi \cdot \int_0^1 r^5 dr \cdot \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi\, d\varphi}_{\parallel} = k \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4\pi k}{9}.$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{3}$$

53 Calculeu el centre de gravetat d'un sector de corona de radi interior r, exterior R i semiangle α.



$(0 \leq \alpha \leq \pi)$

Centre de gravetat:
$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{A(D)}\left(\int_D x\,dxdy, \int_D y\,dxdy\right)$$
$\bar{y} = 0$ per simetria resp. l'eix x.

Passant a coord. polars $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$,

el domini és: $D^* = \{(\rho,\theta) : -\alpha \leq \theta \leq \alpha,\ r \leq \rho \leq R\}$.

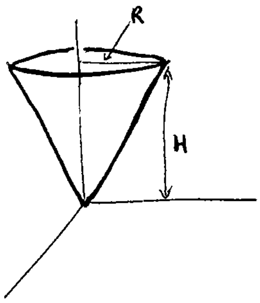
$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}(R^2 - r^2)\,d\theta = (R^2 - r^2)\cdot\alpha$$

$$\int_D x\,dxdy = \int_{D^*}\rho\cos\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\,d\theta\cdot\int_r^R \rho^2\,d\rho = 2\sin\alpha\cdot\frac{R^3 - r^3}{3}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{2(R^3 - r^3)\sin\alpha}{3(R^2 - r^2)\alpha} = \frac{2(R^2 + Rr + r^2)\sin\alpha}{3(R + r)\alpha}$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2(R^2 + Rr + r^2)\sin\alpha}{3(R+r)\alpha}, 0\right).$$

54 Calculeu el moment d'inèrcia d'un con de revolució respecte al seu eix. (suposem el con d'eix z, alçada H i radi R de la base)



Eq. del con: $z^2 = a(x^2 + y^2)$,

per a $z = H$, $x^2 + y^2 = \frac{H^2}{a} = R^2 \Rightarrow a = \frac{H^2}{R^2}$.

$$W = \left\{\frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq H\right\}$$

Moment d'inèrcia:
$$I = \int_W r(x,y,z)^2\,dxdydz,$$
essent $r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (dist. a l'eix z).

($\rho(x,y,z) \equiv 1$: cos homogeni)

Passant a cilíndriques, $W^* = \{(r,\theta,z) : 0 < r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \frac{H}{R}r \leq z \leq H\}$.

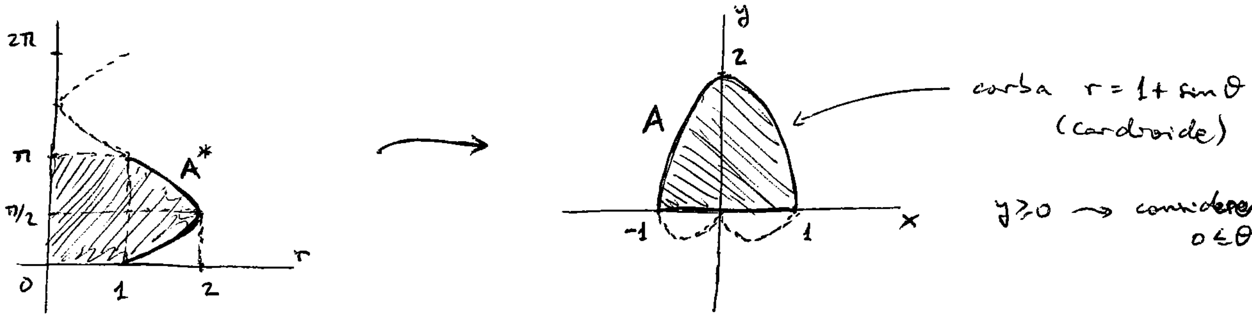
Calculem: $$I = \int_W (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^R dr\int_0^{2\pi} d\theta\int_{\frac{H}{R}r}^{H} r^2\cdot r\,dz = 2\pi\int_0^R r^3\left(H - \frac{H}{R}r\right)dr =$$

$$= 2\pi H\left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5R}\right]_0^R = 2\pi H\cdot\left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^5}{5R}\right) = \frac{\pi H R^4}{10}.$$

(✱) [test abr/08]

Sigui A l'àrea tancada per la corba $r = 1+\sin\theta$ en la regió $y \geq 0$. Sigui Ω el sòlid obtingut al girar A al voltant de l'eix x. Calculeu el volum de Ω.

(a) $8\pi + \frac{5}{4}\pi^2$, (b) $2\pi + \frac{5}{4}\pi^2$, (c) $4\pi + \frac{5}{2}\pi^2$, (d) $4\pi + \frac{5}{4}\pi^2$.

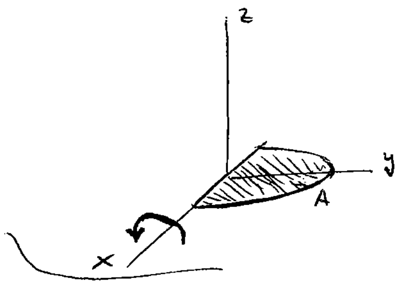


$y \geq 0 \rightarrow$ considerem només $0 \leq \theta \leq \pi$.

Obtenim Ω en fer girar A al voltant de l'eix x.

Pel 2on teo. de Pappus-Guldin,

$$\text{vol}(\Omega) = 2\pi \int_A y\,dx\,dy.$$



Calculem:

$$\int_A y\,dx\,dy \underset{\text{(polars)}}{=} \int_0^\pi d\theta \int_0^{1+\sin\theta} r\sin\theta \cdot \underbrace{r}_{\text{jacobià}}\,dr = \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin\theta\cdot(1+\sin\theta)^3\,d\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} (\sin\theta + 3\sin^2\theta + 3\sin^3\theta + \sin^4\theta)\,d\theta = \frac{2}{3}\left[1 + \frac{3}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}B\left(2,\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3\pi}{8}\right] = 2 + \frac{5\pi}{8} \Longrightarrow \text{vol}(\Omega) = 4\pi + \frac{5\pi^2}{4}.$$

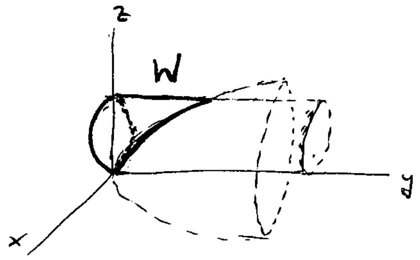
(✱) [test març/07]

Calculeu el volum tancat per $x^2+z^2-z=0$, $y = x^2+z^2$, $y=0$.

(a) $\frac{3\pi}{16}$, (b) $\frac{\pi}{8}$, (c) $\frac{\pi}{32}$, (d) $\frac{3\pi}{32}$.

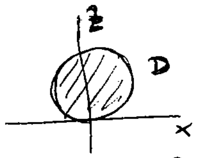
$x^2+z^2-z=0 \rightsquigarrow x^2+(z-1/2)^2 = \frac{1}{4}$, cilindre

$y = x^2+z^2$, paraboloide el·líptic



$$W = \{(x,y,z) : \underbrace{x^2+(z-1/2)^2 \leq \frac{1}{4}}_{\downarrow}, \; 0 \leq y \leq x^2+z^2\}$$

$(x,z) \in D$, projecció sobre el pla xz



$$\text{vol}(W) = \int_D (x^2+z^2-0)\,dx\,dz = \int_0^\pi d\theta \int_0^{\sin\theta} r^2\cdot r\,dr = \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin^4\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,d\theta =$$

polars: $x = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$

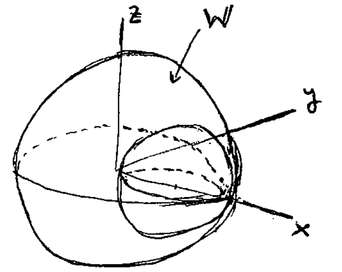
$D^* = \{(r,\theta) : 0 \leq \theta \leq \pi, \; 0 \leq r \leq \sin\theta\}$

$$= \frac{1}{4}B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{32}$$

(*) **[test oct/06]**

Calculeu el centre de masses del sòlid homogeni
$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4, \ (x-1)^2+y^2+z^2 \geq 1\}$

(a) $(3/7,0,0)$, (b) $(-\frac{1}{8},0,0)$, (c) $(-1/7,0,0)$, (d) $(-2/7,0,0)$, (e) $(1/7,0,0)$.



Obs. $W = W_1 - W_2$,

essent W_1: esfera de centre $(0,0,0)$ i radi 2

W_2: " " $(1,0,0)$ " 1.

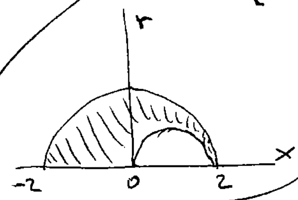
c.d.m. $= (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, tenim $\bar{y} = \bar{z} = 0$ per simetria.

$\bar{x} = \frac{1}{vol(W)} \int_W x \, dx\, dy\, dz$, $\quad vol(W) = vol(W_1) - vol(W_2) = \frac{4}{3}\pi 2^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{28\pi}{3}$

Com que W és un sòlid de revolució, podem fer el canvi a cilíndriques $\begin{cases} x = x \\ y = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}$

i llavors $\int_W x\, dx\, dy\, dz = \int_{W^*} x r \, dx\, dr\, d\theta = 2\pi \left[\int_{-2}^{0} x\,dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} r\,dr + \int_0^2 x\,dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} r\,dr \right] =$

$W^* = \{(x,r,\theta) : x^2+r^2 \leq 4, \ (x-1)^2+r^2 \geq 1, \ r>0, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$



$= \pi \left[\int_{-2}^{0} x(4-x^2)\,dx + \int_0^2 x\left((4-x^2)-(2x-x^2)\right)dx \right] = -\frac{4\pi}{3} \Rightarrow \bar{x} = \frac{-\frac{4\pi}{3}}{\frac{28\pi}{3}} = -1/7$.

Però és molt més directe usar que $W_1 = W \cup W_2$ (amb $vol(W \cap W_2) = 0$),

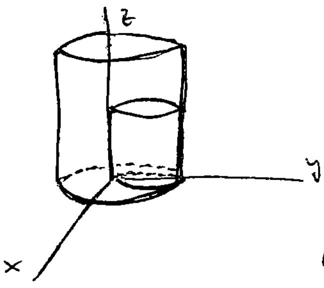
i que coneixem els centres de masses de W_1 i W_2: $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 1$.

Llavors, $\bar{x}_1 = \frac{\bar{x} \cdot vol(W) + \bar{x}_2 \cdot vol(W_2)}{vol(W) + vol(W_2)} \Rightarrow 0 = \frac{\bar{x} \cdot \frac{28\pi}{3} + 1 \cdot \frac{4\pi}{3}}{\frac{28\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}} \Rightarrow \bar{x} = -1/7$.

c.d.m. $= (-1/7, 0, 0)$.

(*) **[test abr/02]** Quin és el centre de gravetat de $\{x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\} \setminus \{x^2+y^2-y \leq 0, 0 \leq z \leq 1\}$

(a) $(0,-1/14,15/14)$, (b) $(0,-1/6,7/6)$, (c) $(0,-1/3,4/3)$, (d) $(0,-1/2,3/2)$



$W = W_1 - W_2$, $\quad W_1 = \{x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$, $\begin{bmatrix} vol(W_1) = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi. \\ c.d.m.: (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) = (0,0,1) \end{bmatrix}$

$W_2 = \{x^2+(y-1/2)^2 \leq 1/4, 0 \leq z \leq 1\}$, $\begin{bmatrix} vol(W_2) = \pi(\frac{1}{2})^2 1 = \pi/4 \\ c.d.m.: (\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{bmatrix}$

$W \to$ c.d.m.:

$\left[vol(W) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \right]$

$\bar{x} = 0$ per simetria.

$\bar{y}_1 = \frac{\bar{y} \cdot vol(W) + \bar{y}_2 \cdot vol(W_2)}{vol(W) + vol(W_2)} \Rightarrow \bar{y} = -1/14$

$\bar{z}_1 = \frac{\bar{z} \cdot vol(W) + \bar{z}_2 \cdot vol(W_2)}{vol(W) + vol(W_2)} \Rightarrow \bar{z} = 15/14$

c.d.m. $= (0, -\frac{1}{14}, \frac{15}{14})$